
CONTROLE ÓTIMO \mathcal{H}_∞ DE SISTEMAS NÃO-LINEARES COM MODELOS FUZZY TAKAGI-SUGENO

Cristiano Quevedo Andrea*
cristiano@batlab.ufms.br

Edvaldo Assunção†
edvaldo@dee.feis.unesp.br

Luigi Galotto Junior*
lgalotto@nin.ufms.br

João Onofre Pereira Pinto*
jpinto@nin.ufms.br

Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira†
marcelo@dee.feis.unesp.br

*UFMS - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul,
Departamento de Engenharia Elétrica,
79074-460, Campo Grande, Mato Grosso do Sul, Brasil.

†UNESP - Universidade Estadual Paulista,
Departamento de Engenharia Elétrica,
Campus de Ilha Solteira,
15385-000, Ilha Solteira, São Paulo, Brasil.

ABSTRACT

A design method for tracking system with disturbance rejection applied to nonlinear systems using fuzzy control is proposed in this paper. Fuzzy feedforward controllers $M(\alpha)$ and $N(\alpha)$ are designed in order to obtain the tracking system. These controllers minimize the \mathcal{H}_∞ -norm from the reference input signal $r(t)$ to the tracking error signal $e(t)$, where the tracking error signal is the difference between the reference input signal $r(t)$ and the output signal $z(t)$. A dynamic feedback fuzzy controller $K_c(\alpha)$ is designed in order to minimize the \mathcal{H}_∞ -norm from the disturbance input $w(t)$ to the output $z(t)$. The designs are formulated in Linear Matrix Inequality (LMI) framework, such that the optimal solutions of the stated control problems are obtained. Simulation of a practical problem illustrates the effectiveness of the proposed method.

KEYWORDS: Takagi-Sugeno Fuzzy Models, Tracking, Non-linear System, LMIs, \mathcal{H}_∞ -norm.

RESUMO

Neste trabalho é proposta uma metodologia de rastreamento de sinais e rejeição de distúrbios aplicada a sistemas não-lineares. Para o projeto do sistema de rastreamento, projetam-se os controladores fuzzy $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ que minimizam o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência $r(t)$ e o sinal de erro de rastreamento $e(t)$, sendo $e(t)$ a diferença entre a entrada de referência e a saída do sistema $z(t)$. No método de rejeição de distúrbio utiliza-se a realimentação dinâmica da saída através de um controlador fuzzy $K_c(\alpha)$ que minimiza o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de entrada exógena $w(t)$ e o sinal de saída $z(t)$. O procedimento de projeto proposto considera as não-linearidades da planta através dos modelos fuzzy Takagi-Sugeno. Os métodos são equacionados utilizando-se inequações matriciais lineares (LMIs), que quando factíveis, podem ser facilmente solucionados por algoritmos de convergência polinomial. Por fim, um exemplo ilustra a viabilidade da metodo-

Artigo submetido em 14/05/2007

1a. Revisão em 26/06/2007

2a. Revisão em 03/09/2007

Aceito sob recomendação do Editor Associado
Prof. José Roberto Castilho Piqueira

logia proposta.

PALAVRAS-CHAVE: Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno, Rastreamento, Sistemas Não-lineares, LMIs, Norma \mathcal{H}_∞ .

1 INTRODUÇÃO

Os sistemas de rastreamento são amplamente utilizados em projetos de engenharia de controle, tais como controle de temperatura, controle de velocidade, controle de processos químicos, entre outras aplicações. Em grande parte dos processos físicos, industriais, mecânicos, etc, observa-se a presença de fatores de natureza não-linear em sua estrutura. Entretanto, em projetos de sistemas de rastreamento aplicados a sistemas não-lineares utilizam-se na maioria das vezes metodologias desenvolvidas para sistemas lineares. Neste contexto, considera-se um ponto de operação do sistema não-linear. Este procedimento pode comprometer o desempenho do sistema de controle projetado caso o comportamento da planta não-linear não opere próximo ao ponto de operação especificado no projeto. Deste modo, o desenvolvimento de metodologias de sistemas de controle considerando-se as não-linearidades da planta pode resultar em um melhor desempenho do processo dinâmico a ser controlado.

Recentemente, estudos sobre sistema de controle fuzzy tem sido objeto de pesquisa na comunidade científica mundial, vide por exemplo, (Teixeira et al., 2003), (Teixeira and Zak, 1999), (Han et al., 2000), (Teixeira et al., 2000). Nestes trabalhos, a planta não-linear é representada pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (T-S) (Takagi and Sugeno, 1985), que é baseado nas regras fuzzy SE-ENTÃO.

Um dos estudos mais recentes na área de sistemas de rastreamento aplicados a sistemas não-lineares é descrito em (Lin et al., 2006), o qual propõe um método de rastreamento utilizando controladores \mathcal{H}_∞ e ainda utiliza o sistema de modelagem das não-linearidades da planta via T-S. Lin et al. (2006) equacionou o projeto em termos de LMIs, e a metodologia é aplicada a sistemas com atraso. O sistema de rastreamento abordado em (Lin et al., 2006) adota a realimentação de estados estimados e não permite a escolha de frequência para o sinal a ser rastreado.

Neste trabalho é proposta uma metodologia de rastreamento de sinais para sistemas não-lineares. O método baseia-se na minimização do limitante da norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro de rastreamento, sendo o erro de rastreamento a diferença entre o sinal de referência e o sinal de saída do sistema. A metodologia proposta possibilita a escolha da faixa de frequência do sinal a ser rastreado como especificações de projeto e utiliza-se a realimentação dinâmica da saída. No processo de rejeição de distúrbio minimiza-se o limitante da norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal exógeno e o sinal da

saída do sistema. Utiliza-se neste projeto a metodologia de modelagem do sistema não-linear pelo modelo T-S (Takagi and Sugeno, 1985), o qual permite ao projetista considerar as não-linearidades da planta ao projeto do sistema de controle. O projeto do rastreamento e rejeição de distúrbio aplicado a sistemas não-lineares é descrito em termos de LMIs, que quando factíveis, podem ser facilmente solucionadas através de algoritmos de convergência polinomial disponíveis na literatura (Gahinet et al., 1995). Neste caso, determina-se a solução ótima para o problema. Por fim, um exemplo ilustra a viabilidade da metodologia proposta.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Um sistema não-linear descrito através da metodologia fuzzy T-S pode ser representado pelas regras fuzzy Se-Então. Este conjunto de regras representa localmente as relações lineares entre a entrada e a saída do sistema não-linear.

A representação local da planta dinâmica não-linear está disponível em termos dos modelos lineares locais:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_{2i} u(t) + B_{1i} w(t), \\ z(t) &= C_{1i} x(t), \\ y(t) &= C_{2i} x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, v$, $x(t)$ é o vetor de estados ($x(t) \in \mathbb{R}^n$), $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_{1i} \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $B_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C_{1i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $C_{2i} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y(t)$ é a saída medida ($y(t) \in \mathbb{R}^m$), $z(t)$ é a saída de referência ($z(t) \in \mathbb{R}^m$), $u(t)$ a entrada de controle ($u(t) \in \mathbb{R}^p$) e $w(t)$ é uma entrada exógena (do tipo distúrbio ou perturbação).

O sistema descrito em (1) é então fundido com as regras Se-Então disponíveis, sendo que a i -ésima regra pode ser descrita da seguinte forma:

Modelo Regra i :

Se $h_1(t) \in \mathcal{M}_1^i$ e \dots $h_p(t) \in \mathcal{M}_p^i$, (2)

$$\text{Então} \begin{cases} \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_{2i} u(t) + B_{1i} w(t), \\ z(t) = C_{1i} x(t), \\ y(t) = C_{2i} x(t), \end{cases}$$

\mathcal{M}_j^i , $j = 1, 2, \dots, p$ é o conjunto fuzzy e v é o número de modelos locais relacionados às regras fuzzy. As funções $h_1(t), \dots, h_p(t)$ são denominadas de variáveis premissas e $h(t)$ será utilizado para denotar o vetor que contém todos os elementos individuais $h_1(t), \dots, h_p(t)$. Neste trabalho utilizou-se a forma generalizada dos sistemas fuzzy Takagi-Sugeno (Taniguchi et al., 2001), e o número de modelos locais (v) é 2^{ns} , sendo ns o número de não-linearidades no sistema.

Seja $\mu_j^i(h_j(t))$ a função de pertinência do conjunto fuzzy \mathcal{M}_j^i . Como $\mu_j^i(h_j(t)) \geq 0$, pode-se descrever o nível de

ativação da i -ésima implicação, $\varphi^i(h(t))$, da seguinte maneira

$$\varphi^i(h(t)) \geq 0 \text{ e } \sum_{i=1}^v \varphi^i(h(t)) > 0. \quad (3)$$

Na obtenção do modelo fuzzy T-S para sistemas não-lineares adota-se $h(t) = x(t)$, sendo $x(t)$ o vetor de estado do sistema não-linear. Esta escolha é realizada em todos os desenvolvimentos teóricos deste trabalho.

Considerando-se um sistema com $(x(t), u(t), w(t))$, pode-se descrever uma planta não-linear através de um sistema fuzzy inferido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t)) \{A_i x(t) + B_{2i} u(t) + B_{1i} w(t)\}}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(t))}, \\ z(t) &= \frac{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t)) C_{1i} x(t)}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(t))}, \\ y(t) &= \frac{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t)) C_{2i} x(t)}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(h(t))}, \end{aligned} \quad (4)$$

sendo

$$\begin{aligned} h(t) &= [h_1(t) \quad h_2(t) \quad \cdots \quad h_p(t)], \\ \varphi_i(h(t)) &= \prod_{j=1}^p \mu_j^i(h_j^i). \end{aligned}$$

Pode-se reescrever (4) como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) \{A_i x(t) + B_{2i} u(t) + B_{1i} w(t)\}, \\ z(t) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) C_{1i} x(t), \\ y(t) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) C_{2i} x(t). \end{aligned} \quad (5)$$

O sistema (5) pode ser descrito de forma compacta por

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_2(\alpha)u(t) + B_1(\alpha)w(t), \\ z(t) &= C_1(\alpha)x(t), \\ y(t) &= C_2(\alpha)x(t), \end{aligned} \quad (6)$$

sendo

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) A_i, & B_2(\alpha) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) B_{2i}, \\ B_1(\alpha) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) B_{1i}, & C_2(\alpha) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) C_{2i}, \\ & & \text{e } C_1(\alpha) &= \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) C_{1i}. \end{aligned}$$

Os escalares,

$$\alpha_i(h(t)) = \frac{\varphi_i(h(t))}{\sum_{i=1}^v \varphi_i(h(t))},$$

sendo,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^v \alpha_i(h(t)) = 1, \\ \alpha_i(h(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, v, \end{cases}$$

são os pesos normalizados de cada regra dos modelos fuzzy T-S, e neste trabalho são determinadas a partir dos estados da planta não-linear, utilizando-se o(s) valor(es) máximo(s) e mínimo(s) da(s) função(ões) não-lineares que descrevem o sistema dinâmico em espaço de estado, vide (Taniguchi et al., 2001) para maiores detalhes. As equações (4)-(6) representam o sistema não-linear descrito pelo modelo fuzzy T-S (Takagi and Sugeno, 1985). De uma forma geral, o modelo fuzzy T-S consiste da descrição de um sistema não-linear como a combinação fuzzy de um certo número (v) de modelos locais lineares e invariantes no tempo, sendo que estes modelos descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do espaço de estados (Teixeira and Zak, 1999). A modelagem fuzzy T-S também pode descrever exatamente certas classes de sistemas não-lineares (Taniguchi et al., 2001).

2.1 Problema 1

O problema de rejeição de distúrbio utilizando a realimentação dinâmica da saída é minimizar o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada exógena $w(t)$ e a saída $z(t)$. Neste processo deve-se projetar um controlador fuzzy $K_c(\alpha)$, que atenua o efeito do sinal de distúrbio na saída do sistema não-linear. Para o rastreamento deve-se projetar controladores fuzzy $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ que minimize o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ entre a entrada de referência $r(t)$ e o erro de rastreamento $r(t) - z(t)$.

Observação 1: O diagrama de blocos do sistema de controle proposto para resolver o Problema 1 é ilustrado na Figura 1, onde $K_c(\alpha) = (A_c(\alpha), B_c(\alpha), C_c(\alpha))$ é um compensador dinâmico \mathcal{H}_∞ aplicado a sistemas não-lineares. As matrizes

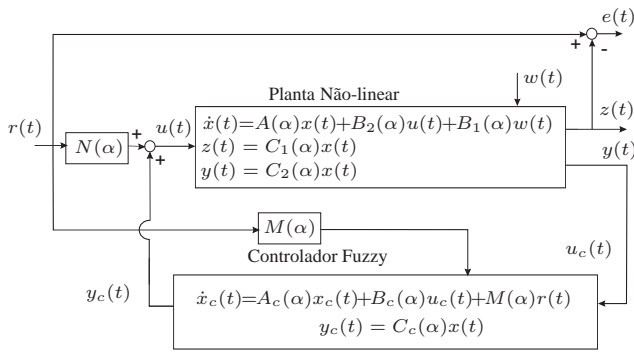


Figura 1: Sistema de controle de rastreamento de sinais e rejeição de distúrbios.

$M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ proporcionam o rastreamento e $r(t)$ é o sinal de referência do sistema de controle.

Neste trabalho realiza-se a atenuação do efeito do sinal de distúrbio na saída do sistema e rastreamento de sinais de referência através de controladores que utilizam a norma \mathcal{H}_∞ como critério de desempenho. O Teorema 1 descreve o limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ aplicada a sistemas não-lineares.

Teorema 1 Considere o sistema não-linear com entrada $w(t)$, saída $z(t)$ e realização em espaço de estado $T(\alpha) = (A_t(\alpha), B_t(\alpha), C_t(\alpha), D_t(\alpha))$. Se existe uma matriz $P = P'$ que satisfaz as seguintes LMIs,

$$\begin{bmatrix} A_t(\alpha)P + PA_t(\alpha)' & B_t(\alpha) & PC_t(\alpha)' \\ B_t(\alpha)' & -I & D_t(\alpha)' \\ C_t(\alpha)P & D_t(\alpha) & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \quad (7)$$

$$P > 0. \quad (8)$$

então, a solução ótima para o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ da realização $T_t(\alpha)$ é a solução para o seguinte problema de otimização,

$$\|T\|_\infty^2 = \min \delta$$

s.a (7) e (8).

Prova: Considere a realização em espaço de estado do sistema não-linear $T_t(\alpha)$,

$$T_t(\alpha) = (A_t(\alpha), B_t(\alpha), C_t(\alpha), D_t(\alpha)). \quad (9)$$

A norma \mathcal{H}_∞ da realização $T_t(\alpha)$ pode ser interpretada pela norma induzida $\mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ (Boyd et al., 1994), isto é,

$$\|T_t\|_\infty = \gamma \Leftrightarrow \|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2, \quad \forall w(t) \in \mathcal{L}_2,$$

ou $\gamma^{-1}\|z\|_2 \leq \|w\|_2$. Neste contexto, $z(t)$ é o sinal de saída do sistema não-linear e $w(t)$ é a entrada do sinal de distúrbio. Em (9), pode-se verificar que a norma \mathcal{H}_∞ não excede

ao valor γ se e somente se existir uma função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Qx$ tal que,

$$\dot{V}(x) + \gamma^{-2}z'z - w'w < 0, \quad \text{sendo } Q = Q' > 0, \quad (10)$$

(para maiores detalhes, vide (Boyd et al., 1994)).

Integrando (10) e considerando as condições iniciais nulas, obtém-se

$$V(x) + \int_0^T \gamma^{-2}z'z dt - \int_0^T w'w dt < 0, \quad (11)$$

$$V(x) + \gamma^{-2}\|z\|_2^2 - \|w\|_2^2 < 0.$$

No processo de solução de (11), considerando um T (tempo) suficientemente grande, sempre teremos $T, \|z\|_2^2 > 0, \|w\|_2^2 > 0$ e $V(x) > 0$. Neste caso, $\|w\|_2^2 > \gamma^{-2}\|z\|_2^2$. De (10), $V(x) = x'Qx$ e $\dot{V}(x) = \dot{x}'Qx + x'Q\dot{x}$, então obtém-se,

$$\dot{x}'Qx + x'Q\dot{x} + \gamma^{-2}z'z - w'w < 0.$$

Entretanto, de (9), $\dot{x}(t) = A_t(\alpha)x(t) + B_t(\alpha)w(t)$ e $z(t) = C_t(\alpha)x(t) + D_t(\alpha)w(t)$, o que resulta em

$$(A_t(\alpha)x + B_t(\alpha)w)'Qx + x'Q(A_t(\alpha)x + B_t(\alpha)w) + \gamma^{-2}(C_t(\alpha)x + D_t(\alpha)w)'(C_t(\alpha)x + D_t(\alpha)w) - w'w < 0,$$

e,

$$x'A_t(\alpha)'Qx + w'B_t(\alpha)'Qx + x'QA_t(\alpha)x + x'QB_t(\alpha)w + \gamma^{-2}x'C_t(\alpha)'C_t(\alpha)x + \gamma^{-2}x'C_t(\alpha)'D_t(\alpha)w + \gamma^{-2}w'D_t(\alpha)'C_t(\alpha)x + \gamma^{-2}w'D_t(\alpha)'D_t(\alpha)w - w'w < 0. \quad (12)$$

Escolhendo-se um novo vetor $[x' \ w']$, pode-se reescrever a inequação (12) na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' & w' \end{bmatrix} A_h \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

ou,

$$A_h < 0, \quad (14)$$

sendo,

$$A_h = \begin{bmatrix} A_{h1} & A_{h2} \\ A_{h3} & A_{h4} \end{bmatrix}.$$

e,

$$\begin{aligned} A_{h1} &= A_t(\alpha)'Q + QA_t(\alpha) + \gamma^{-2}C_t(\alpha)'C_t(\alpha), \\ A_{h2} &= QB_t(\alpha) + \gamma^{-2}C_t(\alpha)'D_t(\alpha), \\ A_{h3} &= B_t(\alpha)'Q + \gamma^{-2}D_t(\alpha)'C_t(\alpha), \\ A_{h4} &= \gamma^{-2}D_t(\alpha)'D_t(\alpha) - I. \end{aligned}$$

O limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ é obtido pela minimização de γ em (10). Utilizando-se a modificação de variável

$\delta = \gamma^2$, e usando o complemento de Schur em (14), o problema de otimização tem a forma equivalente descrita a seguir:

$$\begin{aligned} \|T_t\|_\infty^2 &= \min \delta \\ \text{s.a. } &\begin{bmatrix} QA_t(\alpha) + A_t(\alpha)'Q & QB_t(\alpha) & C_t(\alpha)' \\ B_t(\alpha)'Q & -I & D_t(\alpha)' \\ C_t(\alpha) & D_t(\alpha) & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \quad (15) \\ &Q > 0, \\ &\delta > 0. \end{aligned}$$

Pré e pós multiplicando-se a inequação (15) por \mathcal{K} , sendo \mathcal{K} dado por,

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

é obtida a inequação (7), sendo $Q^{-1} = P > 0$. \square

O Teorema 2 é proposto para o projeto do controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ utilizado na realimentação dinâmica da saída do sistema (5). No projeto de $K_c(\alpha)$ utiliza-se uma restrição na região de estabilização da planta não-linear em malha-fechada. A Figura 2 ilustra a região de restrição, que consiste de uma circunferência de raio ρ com centro em $(0, q)$. A função deste compensador no sistema de controle é a rejeição do efeito do sinal de distúrbio presente na planta. Pode-se obter uma metodologia para projeto de controladores \mathcal{H}_∞ com restrição para região de estabilidade em (Nguang and Shi, 2006), no qual são considerados sistemas não-lineares incertos.

Teorema 2 Considere um sistema não-linear descrito pelo modelo fuzzy Takagi-Sugeno (6) com o controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ utilizado na realimentação dinâmica da saída, e ainda os parâmetros ρ e q fixos (Figura 2). Se existe solução para as LMIs descritas em (16)-(20), então pode-se obter um limitante para a norma \mathcal{H}_∞ de $w(t)$ para $z(t)$, com restrição de região de estabilidade para o sistema não-linear em malha-fechada conforme ilustrada na Figura 2, resolvendo-se

$$\|T_{wz}\|_\infty^2 = \min \delta$$

$$\text{s.a. } \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0, \quad (16)$$

$$\Gamma_{ii} < 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, v, \quad (17)$$

$$\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji} < 0, \quad \text{para } i < j < v, \quad (18)$$

$$\Omega_{ii} < 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, v, \quad (19)$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, \quad \text{para } i < j < v. \quad (20)$$

As matrizes Γ_{ij} e Ω_{ij} são descritas em (21) e (22) respectivamente. Neste contexto pode-se obter as matrizes Γ_{ii} , e Γ_{ji} ,

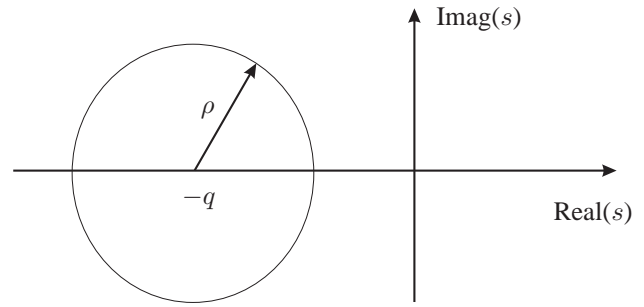


Figura 2: Parâmetros ρ e q no plano s .

descritas em (17) e (18) respectivamente, pela substituição dos índices i e j em (21). Ainda, pode-se obter as matrizes Ω_{ii} , e Ω_{ji} , descritas em (19) e (20) respectivamente, pela substituição dos índices i e j em (22).

As variáveis R , S , \hat{A}_{ij} , \hat{B}_i , \hat{C}_i são soluções de (16)-(20). Tem-se que $R = R' > 0$ e $S = S' > 0$. As matrizes dinâmicas do compensador fuzzy \mathcal{H}_∞ podem ser obtidas através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} B_{c_i} &= E^{-1} \hat{B}_i \\ C_{c_i} &= \hat{C}_i (\Psi^{-1})', \end{aligned} \quad (23)$$

$$A_{c_{ij}} = E^{-1} [\hat{A}_{ij} - SA_i R - \hat{B}_i C_{2j} R - SB_{2i} \hat{C}_j] (\Psi')^{-1},$$

sendo $i, j = 1, 2, \dots, v$. Em (23), tem-se $E\Psi' = I - RS$ e as matrizes E e Ψ podem ser obtidas pela decomposição LU (Lima, 2000) utilizando-se, por exemplo, o software MATLAB.

O compensador fuzzy \mathcal{H}_∞ pode ser descrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A_c(\alpha) &= \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \alpha_i \alpha_j A_{c_{ij}}, \quad B_c(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i B_{c_i}(\alpha) \quad e \\ C_c &= \sum_{i=1}^v \alpha_i C_{c_i}. \end{aligned}$$

Prova: Considera-se a seguinte realização em espaço de estado para o sistema não-linear descrito em (6) realimentado pelo compensador fuzzy \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$:

$$T_{wz}(\alpha) = (A_{nl}(\alpha), B_{nl}(\alpha), C_{nl}(\alpha)), \quad (24)$$

sendo

$$\begin{aligned} A_{nl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} A(\alpha) & B_2(\alpha)C_c(\alpha) \\ B_c(\alpha)C_2(\alpha) & A_c(\alpha) \end{bmatrix} \\ B_{nl}(\alpha) &= \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_{nl}(\alpha) &= [C_1(\alpha) \quad 0]. \end{aligned} \quad (25)$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} A_i R + R A'_i + B_{2i} \hat{C}_j + \hat{C}'_i B'_{2j} & A_i + \hat{A}'_{ij} & B_{1i} & R C'_{1i} \\ & A'_i + \hat{A}_{ij} & B'_{1i} S & 0 \\ & B'_{1i} & -I & C'_{1i} \\ C_{1i} R & & 0 & -\delta I \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} -\rho R & -\rho I & A_i R + B_{2i} \hat{C}_j + qR & A_i + qI \\ -\rho I & -\rho S & \hat{A}_{ij} + qI & S A_i + \hat{B}_i C_{2j} + qS \\ R A'_i + \hat{C}'_i B'_{2j} + qR & \hat{A}'_{ij} + qI & -\rho R & -\rho I \\ A'_i + qI & A'_i S + C'_{2i} \hat{B}'_j + qS & -\rho I & -\rho S \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Utilizando-se o Teorema 1, um limitante da norma \mathcal{H}_∞ do sistema $T_{wz}(\alpha)$ pode ser obtido pelo seguinte problema de otimização:

$$\|T_{wz}(\alpha)\|_\infty^2 = \min \delta$$

$$\begin{array}{l} \text{s.a} \\ \begin{bmatrix} A_{nl}(\alpha)P + P A_{nl}(\alpha)' & B_{nl}(\alpha) & P C_{nl}(\alpha)' \\ B_{nl}(\alpha)' & -I & 0 \\ C_{nl}(\alpha)P & 0 & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \quad (26) \\ P > 0. \end{array} \quad (27)$$

Pode-se especificar em projeto uma região, como ilustrada na Figura 2, para que o sistema em malha fechada representado pela realização em espaço de estado $T_{wz}(\alpha)$ seja estável, e esta região pode ser descrita pela seguinte LMI,

$$\begin{bmatrix} -\rho P & A_{nl}P + qP \\ P A'_{nl} + qP & -\rho P \end{bmatrix} < 0, \quad (28)$$

vide (Chilali and Gahinet, 1996) e (Nguang and Shi, 2006) para maiores detalhes sobre restrições para região de estabilidade em termos de LMIs.

Para obter o controlador fuzzy $K_c(\alpha)$ deve-se solucionar simultaneamente as LMIs descritas em (26), (27) e (28). Entretanto, da maneira na qual estão dispostas as LMIs (26) e (28), surgirão bilinearidades no equacionamento do controlador fuzzy de realimentação dinâmica da saída no momento em que se realiza a substituição dos valores de $A_{nl}(\alpha)$, $B_{nl}(\alpha)$ e $C_{nl}(\alpha)$, descritos em (25), nas LMIs (26) e (28). Então utiliza-se uma manipulação para solucionar este problema com as bilinearidades. Inicialmente adota-se a matriz P e sua inversa como,

$$P = \begin{bmatrix} R & \Psi \\ \Psi' & J \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} S & E \\ E' & \Phi \end{bmatrix},$$

sendo $R = R' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $S = S' \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. Define-se ainda

$$P \Gamma_2 = \Gamma_1, \quad \text{com} \quad \Gamma_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ \Psi' & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & E' \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Considerando-se a relação algébrica descrita em (29), pode-se obter a inequação (16) pré e pós multiplicando-se a inequação (27) por Γ'_2 e Γ_2 respectivamente. De modo similar, pré e pós multiplicando-se a inequação (26) pela matriz diagonal (Γ'_2, I, I) e pela matriz diagonal (Γ_2, I, I) respectivamente, obtém-se:

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i \alpha_i \Gamma_{ii} + \sum_{i=1}^v \sum_{i < j}^v \alpha_i \alpha_j (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0, \quad (30)$$

sendo Γ_{ij} mostrada em (21), e

$$\sum_{i=1}^v \alpha_i = \sum_{i=1}^v \alpha_i \sum_{j=1}^v \alpha_j = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \alpha_i \alpha_j = 1. \quad (31)$$

Logo, uma condição suficiente para que a inequação (30) seja verdadeira, é que,

$$\Gamma_{ii} < 0 \quad \text{e} \quad (\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}) < 0. \quad (32)$$

Por fim, pré e pós multiplicando-se a inequação (28) pelas matrizes Z' e Z respectivamente, obtém-se:

$$\Omega(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i \alpha_i \Omega_{ii} + \sum_{i=1}^v \sum_{i < j}^v \alpha_i \alpha_j (\Omega_{ij} + \Omega_{ji}) < 0.$$

sendo Ω_{ij} mostrada em (22), e Z descrita por

$$Z = \begin{bmatrix} \Gamma_2 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Utilizando-se a análise descrita em (30)-(32), pode-se verificar que $\Omega(\alpha) < 0$, implica nas LMIs descritas em (19) e (20).

No processo de manipulação algébrica utilizada neste teorema, no qual realiza-se a multiplicação de matrizes por Γ_2 e Γ'_2 , adota-se as variáveis $(\hat{A}_{ij}, \hat{B}_i, \hat{C}_i)$ dadas a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{B}_i &= E B_{c_i}, \\ \hat{C}_i &= C_{c_i} \Psi', \\ \hat{A}_{ij} &= E A_{c_{ij}} \Psi' + S A_i R + \hat{B}_i C_{2j} R - S B_{2i} \hat{C}_j, \end{aligned} \quad (33)$$

sendo $i, j = 1, 2, \dots, v$ e a matriz \hat{A}_{ii} e \hat{A}_{ji} determinada pela substituição dos índices i e j em (33). \square

A equação das variáveis de estado que representa o diagrama de blocos ilustrado na Figura 1 pode ser descrita como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) \\ A_{13}(\alpha) & A_{14}(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} B_2(\alpha)N(\alpha) \\ M(\alpha) \end{bmatrix} r(t),$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} C_1(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},$$

$$e(t) = r(t) - z(t) = r(t) - \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix},$$

sendo,

$$\begin{aligned} A_{11}(\alpha) &= A(\alpha), \\ A_{12}(\alpha) &= B_2(\alpha)C_c(\alpha), \\ A_{13}(\alpha) &= B_c(\alpha)C_2(\alpha), \\ A_{14}(\alpha) &= A_c(\alpha). \end{aligned}$$

Reescrevendo o sistema (34) de forma compacta, tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_\eta &= A_\eta x_\eta(t) + B_\eta r(t) + B_{wn} w(t), \\ e(t) &= D_\eta r(t) - C_\eta x_\eta(t), \\ y(t) &= C_{\eta l} x_\eta(t), \\ z(t) &= C_\eta x_\eta(t), \end{aligned}$$

sendo,

$$\begin{aligned} x_\eta(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix}, A_\eta = \begin{bmatrix} A_{11}(\alpha) & A_{12}(\alpha) \\ A_{13}(\alpha) & A_{14}(\alpha) \end{bmatrix}, \\ B_\eta &= \begin{bmatrix} B_2(\alpha)N(\alpha) \\ M(\alpha) \end{bmatrix}, B_{wn} = \begin{bmatrix} B_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_\eta &= \begin{bmatrix} C_1(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, C_{\eta l} = \begin{bmatrix} C_2(\alpha) & 0 \end{bmatrix}, \text{ e } D_\eta = 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Considera-se a realização em espaço de estado entre o sinal de distúrbio $w(t)$ e o sinal de saída $z(t)$ descrita na forma:

$$T_{wz_n} = (A_\eta, B_{wn}, C_\eta). \quad (36)$$

Neste caso a influência do sinal de distúrbio no desempenho do sistema pode ser atenuada devido ao projeto inicial do compensador fuzzy \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$. Neste processo utilizou-se o Teorema 2 para o projeto de $K_c(\alpha)$, no qual minimiza-se a norma \mathcal{H}_∞ de $w(t)$ para $z(t)$.

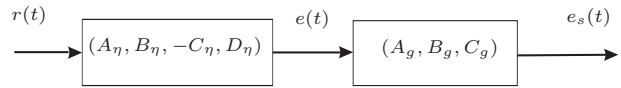


Figura 3: Sistema de rastreamento utilizando-se peso na frequência.

Considera-se a realização em espaço de estado entre sinal de referência do sistema $r(t)$ e o sinal de erro de rastreamento $e(t)$ descrita da seguinte maneira:

$$T_\eta = (A_\eta, B_\eta, -C_\eta, D_\eta). \quad (37)$$

Neste caso, através dos controladores $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$, pode-se minimizar a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência e o sinal de erro de rastreamento. O processo de rastreamento não interfere no projeto de rejeição de distúrbio. Isto ocorre pois apenas B_η depende das matrizes $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$, enquanto A_η e B_{wn} não dependem destes controladores. $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ são projetados para o rastreamento.

2.2 Rastreador de Sinais para Sistemas Não-Lineares

A solução para o problema de rastreamento consiste no projeto dos controladores $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ que minimizam o limitante da norma \mathcal{H}_∞ de T_η descrito em (37). Utilizando-se o Teorema 1, pode-se descrever o problema da otimização do limitante da norma \mathcal{H}_∞ do sistema T_η como

$$\begin{aligned} \|T_\eta\|_\infty^2 &= \min \quad \delta \\ \text{s.a.} \quad &\begin{bmatrix} A_\eta P + P A'_\eta & -P C'_\eta & B_\eta \\ -C_\eta P & -I & D'_\eta \\ B'_\eta & D_\eta & -\delta I \end{bmatrix} < 0, \\ &P > 0, \\ &\delta > 0, \end{aligned}$$

sendo $P = P'$.

Inclui-se ao projeto peso na frequência, pois é interessante que o rastreador execute suas funções segundo uma faixa de frequência especificada em projeto. Para o projeto do rastreador com peso na frequência, deseja-se encontrar a solução global que otimize o problema descrito a seguir,

$$\min \quad \|T_\eta G\|_\infty,$$

sendo $G = (A_g, B_g, C_g)$ o sistema linear que proporciona o peso na frequência de saída, e $T_\eta = (A_\eta, B_\eta, -C_\eta, D_\eta)$ é uma realização do sistema não-linear e estável. Na Figura 3 é ilustrado o diagrama de blocos do sistema de controle com a inclusão de peso na frequência.

Uma realização em espaço de estado de $e_s(t)$ para $r(t)$ ilustrada na Figura 3 pode ser descrita como $H_\phi = T_\eta G$:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_\phi & B_\phi \\ \hline C_\phi & D_\phi \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_\eta & 0 & B_\eta \\ -B_g C_\eta & A_g & B_g \\ \hline 0 & C_g & 0 \end{array} \right]. \quad (38)$$

Propõe-se o Teorema 3 para o projeto de sistemas de rastreamento de sinais de referência utilizando-se peso na frequência aplicado a sistemas não-lineares.

Teorema 3 Considere o Problema 1 com a Observação 1. Se existe solução para as LMIs descritas em (39)-(40), então pode-se obter os controladores $M(\alpha)$ ($M(\alpha) \in \mathbb{R}^{n \times p}$) e $N(\alpha)$ ($N(\alpha) \in \mathbb{R}^{p \times p}$) que minimizam a norma \mathcal{H}_∞ do sistema $T_\eta = (A_\eta, B_\eta, -C_\eta, D_\eta)$ com peso na frequência, resolvendo-se

$$\begin{aligned} \|T_\eta\|_\infty^2 &= \min \delta \\ \text{s.a} & \\ \Psi_{ii} &< 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, v, \quad (39) \\ \Psi_{ij} + \Psi_{ji} &< 0 \quad \text{para } i < j < v, \quad (40) \\ \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix} &> 0, \end{aligned}$$

sendo a matriz Ψ_{ij} descrita em (41).

As matrizes Ψ_{ii} e Ψ_{ji} são obtidas substituindo-se os índices i e j em (41). As matrizes $P_{ij} = P'_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3$, têm a mesma dimensão da matriz A , e para $j = 3$ e $i = 1, 2, 3$, as matrizes P_{ij} têm dimensões convenientes, e A_g, B_g e C_g representam a dinâmica do filtro. Os parâmetros do rastreador podem ser descritos da seguinte maneira:

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i M_i \quad \text{e} \quad N(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i N_i, \quad (42)$$

sendo $\alpha_i, i = 1, \dots, v$, a mesma função de pertinência adotada no projeto do compensador \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$ de atenuação do efeito de distúrbio no desempenho do sistema.

Prova: Considera-se as matrizes $(A_t(\alpha), B_t(\alpha), C_t(\alpha), D_t(\alpha)) = (A_\phi, B_\phi, C_\phi, D_\phi)$ na inequação (7), sendo a matriz P na forma,

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P'_{12} & P_{22} & P_{23} \\ P'_{13} & P'_{23} & P_{33} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

e $(A_\phi, B_\phi, C_\phi, D_\phi)$ dado por (38) e $(A_\eta, B_\eta, C_\eta, D_\eta)$ definida em (35). Após realizar a substituição das matrizes, obtém-se:

$$\Psi(\alpha) = \sum_{i=1}^v \alpha_i \alpha_i \Psi_{ii} + \sum_{i=1}^v \sum_{i < j}^v \alpha_i \alpha_j (\Psi_{ij} + \Psi_{ji}) < 0. \quad (44)$$

sendo a matriz Ψ_{ij} descrita em (41). As matrizes Ψ_{ii} e Ψ_{ji} são obtidas substituindo-se os índices i e j em (41).

Uma condição suficiente para que a inequação (44) seja verdadeira, é que,

$$\Psi_{ii} < 0 \quad \text{e} \quad (\Psi_{ij} + \Psi_{ji}) < 0.$$

Deste modo, são obtidas as LMIs (39) e (40) do teorema. \square

Os controladores fuzzy $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$ são soluções ótimas de (39) e (40), e minimizam a norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de entrada de referência $r(t)$ para o sinal de erro de rastreamento $r(t) - z(t)$.

Os filtros utilizados no Teorema 3 são utilizados somente em projeto, e posteriormente descartados para simulação ou implementação do controlador. No projeto de rastreamento, segundo o Teorema 3, utilizou-se a mesma estrutura de controle com modificação de zeros para o caso de sistemas lineares apresentada em (Assunção et al., 2004) e (Assunção et al., 2007).

3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Considere o levitador magnético ilustrado na Figura 4 descrito na forma de equações diferenciais como (Marquez, 2003),

$$m\ddot{y}(t) = -K\dot{y}(t) + mg - \frac{\lambda\mu i(t)^2}{2(1 + \mu y(t))^2} + w(t), \quad (45)$$

sendo a indutância do eletroímã variável em função da posição $y(t)$ da bola e descrita por

$$L(y(t)) = \frac{\lambda}{1 + \mu y(t)},$$

sendo,

- m : massa da bola (Kg),
- g : aceleração da gravidade (ms^{-2}),
- K : coeficiente de viscosidade do meio (Nsm^{-1}),
- λ : coeficiente de variação da indutância do eletroímã (H),
- μ : coeficiente de variação da indutância do eletroímã (m^{-1}).

Deseja-se projetar um sistema de rastreamento e rejeição de distúrbio para o levitador magnético, e utiliza-se a modelagem exata para este exemplo (Taniguchi et al., 2001).

$$\Psi_{ij} = \begin{bmatrix} A_{11i}P_{11} + P_{11}A'_{11i} + A_{12ij}P'_{12} + P_{12}A'_{12ij} & A_{11i}P_{12} + A_{12ij}P_{22} + P_{11}A'_{13ij} + P_{12}A'_{14ij} \\ A_{13ij}P_{11} + A_{14ij}P'_{12} + P'_{12}A'_{11i} + P_{22}A'_{12ij} & A_{13ij}P_{12} + P'_{12}A'_{13ij} + A_{14ij}P_{22} + P_{22}A'_{14ij} \\ -B_gC_{1i}P_{11} + A_gP'_{13} + P'_{13}A'_{11i} + P'_{23}A'_{12ij} & -B_gC_{1i}P_{12} + A_gP'_{23} + P'_{13}A'_{13ij} + P'_{23}A'_{14ij} \\ & C_gP'_{23} \\ & M'_i \\ & N_iB'_{2i} \\ A_{11i}P_{13} + A_{12ij}P_{23} - P_{11}C'_{1i}B'_g + P_{13}A'_g & P_{13}C'_g & B_{2i}N_j \\ A_{13ij}P_{13} + A_{14ij}P_{23} - P'_{12}C'_{1i}B'_g + P_{23}A'_g & P_{23}C'_g & M_i \\ -B_gC_{1i}P_{13} - P'_{13}C'_{1i}B'_g + P_{33}A'_g + A_gP_{33} & P_{33}C'_g & B_g \\ & C_gP_{33} & -I & 0 \\ & B'_g & 0 & -\delta I \end{bmatrix}, \quad (41)$$

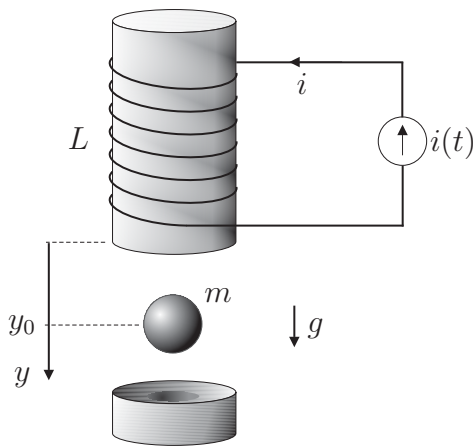


Figura 4: Levitador magnético.

Definindo-se $\bar{x}_1(t) = y(t)$ e $\bar{x}_2(t) = \dot{y}(t)$ em (45) tem-se,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1(t) &= \bar{x}_2(t), \\ \dot{\bar{x}}_2(t) &= -\frac{K}{m}\bar{x}_2(t) + g - \frac{\lambda\mu i(t)^2}{2(1 + \mu y(t))^2 m} + \frac{w(t)}{m}. \end{aligned} \quad (46)$$

No processo de rastreamento, o objetivo é manter a bola numa posição arbitrária $y(t) = y_0$ segundo um sinal de referência. Para isso, de (46) devemos ter:

$$m\ddot{y}_0 = -K\dot{y}_0 + mg - \frac{\lambda\mu i_0^2}{2(1 + \mu y_0)^2} + w(t), \quad (47)$$

mas $\ddot{y}_0 = \dot{y}_0 = 0$ em (47), então pode-se obter i_0 , considerando-se $w(t) = 0$, por,

$$i_0^2 = \frac{2(1 + \mu y_0)^2 mg}{\lambda\mu}. \quad (48)$$

Neste exemplo necessita-se deslocar o ponto de operação para a origem, ou seja,

$$\begin{aligned} x_1(t) = \bar{x}_1(t) - y_0 &\Rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{\bar{x}}_1(t), \\ x_2(t) = \bar{x}_2(t) &\Rightarrow \dot{x}_2(t) = \dot{\bar{x}}_2(t). \end{aligned} \quad (49)$$

Deste modo, o sinal de entrada de controle pode ser descrito como,

$$u(t) = i(t)^2 - i_0^2. \quad (50)$$

Substituindo-se (48) em (50) tem-se,

$$i(t)^2 = u(t) + \frac{2mg}{\lambda\mu}(1 + \mu y_0)^2. \quad (51)$$

Por fim, utilizando-se a mudança de variáveis descrita em (49) em conjunto com $i(t)$ descrita em (51), pode-se obter a descrição em variáveis de estado para o levitador magnético com o deslocamento do ponto de operação para a origem como,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g\mu(\mu x_1(t) + 2\mu y_0 + 2)x_1(t)}{(1 + \mu(x_1(t) + y_0))^2} & -\frac{K}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1(t) + y_0))^2} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} w(t). \end{aligned} \quad (52)$$

Adotando-se,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x(t)) &= \frac{g\mu(\mu x_1(t) + 2\mu y_0 + 2)x_1(t)}{(1 + \mu(x_1(t) + y_0))^2} e \\ \tilde{g}_{11}(x(t)) &= \frac{\lambda\mu}{2m(1 + \mu(x_1(t) + y_0))^2}. \end{aligned} \quad (53)$$

Pode-se reescrever (52) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{f}_{21}(x(t)) & -\frac{K}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{g}_{11}(x(t)) \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} w(t). \end{aligned}$$

No projeto do sistema de rastreamento de sinais e rejeição de distúrbio consideraram-se os seguintes valores para

os parâmetros do levitador magnético: $m = 0,068 \text{ Kg}$, $y_0 = 0,02 \text{ m}$, $\lambda = 0,46 \text{ H}$, $\mu = 2 \text{ m}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ ms}^{-2}$, $K = 0,001 \text{ Nsm}^{-1}$.

Adotou-se a faixa de valores para a variável de estado $\bar{x}_1(t)$ do levitador magnético como, $0 < \bar{x}_1(t) < 0,1$. Deste modo, de (49), a faixa de valores para $x_1(t)$ é:

$$-0,02 \leq x_1(t) \leq 0,08. \quad (54)$$

Na representação exata do sistema não-linear (52) e (53), de acordo com (Taniguchi et al., 2001), utilizam-se os valores de máximos e mínimos das funções $\tilde{f}_{21}(x(t))$ e $\tilde{g}_{11}(x(t))$, conforme descrito a seguir:

$$\begin{aligned} a_{211} &= \max \{ \tilde{f}_{21}(x(t)) \} = 2,439; \\ a_{212} &= \min \{ \tilde{f}_{21}(x(t)) \} = -0,799; \\ b_{111} &= \max \{ \tilde{g}_{11}(x(t)) \} = 6,764; \\ b_{112} &= \min \{ \tilde{g}_{11}(x(t)) \} = 4,697. \end{aligned} \quad (55)$$

A determinação da forma generalizada surge da transformação de $\tilde{f}_{21}(x(t))$ e $\tilde{g}_{11}(x(t))$ para a representação na forma de modelo fuzzy. Utilizando-se as definições descritas em (55) pode-se representar $\tilde{f}_{21}(x(t))$ e $\tilde{g}_{11}(x(t))$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x(t)) &= \sum_{l=1}^2 \sigma_{21l}(x(t))a_{21l}, \\ \tilde{g}_{11}(x(t)) &= \sum_{l=1}^2 \Gamma_{11l}(x(t))b_{11l}, \end{aligned}$$

sendo,

$$\sum_{l=1}^2 \sigma_{21l}(x(t)) = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{l=1}^2 \Gamma_{11l}(x(t)) = 1. \quad (56)$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x(t)) &= \sigma_{211}(x(t))a_{211} + \sigma_{212}(x(t))a_{212}, \\ 0 &\leq \sigma_{211}(x(t)), \sigma_{212}(x(t)) \leq 1. \end{aligned} \quad (57)$$

De (56) e (57), obtém-se:

$$\sigma_{211}(x(t)) = \frac{\tilde{f}_{21}(x(t)) - a_{212}}{a_{211} - a_{212}} \quad \text{e} \quad \sigma_{212}(x(t)) = \frac{a_{211} - \tilde{f}_{21}(x(t))}{a_{211} - a_{212}}.$$

Da mesma maneira a função não-linear $\tilde{g}_{11}(x(t))$ pode ser representada na forma exata por

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11} &= \Gamma_{111}(x(t))b_{111} + \Gamma_{112}(x(t))b_{112}, \\ 0 &\leq \Gamma_{111}(x(t)), \Gamma_{112}(x(t)) \leq 1, \end{aligned} \quad (58)$$

De (56) e (58), obtém-se

$$\Gamma_{111}(x(t)) = \frac{\tilde{g}_{11}(x(t)) - b_{112}}{b_{111} - b_{112}} \quad \text{e} \quad \Gamma_{112}(x(t)) = \frac{b_{111} - \tilde{g}_{11}(x(t))}{b_{111} - b_{112}}.$$

Após a determinação destes parâmetros pode-se reescrever (57) conforme a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x(t)) &= (\Gamma_{111}(x(t)) + \Gamma_{112}(x(t))) (\sigma_{211}(x(t))a_{211} + \\ &\quad \sigma_{212}(x(t))a_{212}), \\ &= \Gamma_{111}(x(t))\sigma_{211}(x(t))a_{211} + \Gamma_{111}(x(t))\sigma_{212}(x(t))a_{212} + \\ &\quad \Gamma_{112}(x(t))\sigma_{211}(x(t))a_{211} + \Gamma_{112}(x(t))\sigma_{212}(x(t))a_{212}. \end{aligned} \quad (59)$$

Definindo-se as funções de pertinência $\alpha_1(x(t))$, $\alpha_2(x(t))$, $\alpha_3(x(t))$ e $\alpha_4(x(t))$ em (59),

$$\begin{aligned} \alpha_1(x(t)) &= \Gamma_{111}(x(t))\sigma_{211}(x(t)), \\ \alpha_2(x(t)) &= \Gamma_{111}(x(t))\sigma_{212}(x(t)), \\ \alpha_3(x(t)) &= \Gamma_{112}(x(t))\sigma_{211}(x(t)), \\ \alpha_4(x(t)) &= \Gamma_{112}(x(t))\sigma_{212}(x(t)), \end{aligned} \quad (60)$$

e

$$\alpha_1(x(t)) + \alpha_2(x(t)) + \alpha_3(x(t)) + \alpha_4(x(t)) = 1,$$

então, obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{21}(x(t)) &= \alpha_1(x(t))a_{211} + \alpha_2(x(t))a_{212} + \\ &\quad \alpha_3(x(t))a_{211} + \alpha_4(x(t))a_{212}. \end{aligned} \quad (61)$$

De maneira similar, pode-se reescrever $\tilde{g}_{11}(x(t))$ conforme a seguir,

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11}(x(t)) &= \alpha_1(x(t))b_{111} + \alpha_2(x(t))b_{111} + \\ &\quad \alpha_3(x(t))b_{112} + \alpha_4(x(t))b_{112}. \end{aligned} \quad (62)$$

Analisando-se (61) e (62) pode-se determinar os modelos locais para este sistema não-linear do levitador magnético:

$$\begin{aligned} A_1=A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2,439 & -0,014 \end{bmatrix}, A_2=A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,799 & -0,014 \end{bmatrix}, \\ B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{14} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 14,705 \end{bmatrix}, B_{21}=B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6,764 \end{bmatrix}, \\ B_{23}=B_{24} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 4,697 \end{bmatrix}, C_{11}=C_{12}=C_{13}=C_{14} = [1 \ 0], \\ C_{21} = C_{22} = C_{23} = C_{24} &= [1 \ 0]. \end{aligned}$$

No processo de atenuação do efeito do sinal de distúrbio no sistema utilizou-se o Teorema 2 para o projeto do compensador \mathcal{H}_∞ . No projeto, utilizou-se como restrição para alocação dos pólos, dos modelos locais do sistema controlado,

uma região limitada por uma circunferência de raio $\rho = 200$, com centro na origem. O controlador \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$, obtido é descrito em (63).

O controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ também pode ser descrito da seguinte maneira:

$$A_c(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \alpha_i \alpha_j A_{c_{ij}}, B_c(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i B_{c_i} \text{ e}$$

$$C_c(\alpha) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j C_{c_j},$$

sendo α_i descrita em (60).

O valor de γ_{opt} , que é o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ de $w(t)$ para $y(t)$ obtido no procedimento de otimização foi 0,0104, o que implica em uma atenuação do efeito do sinal de perturbação na saída do sistema levitador magnético. A Figura 5 ilustra o diagrama de magnitude em função da frequência de $w(t)$ para $y(t)$, descrita em (36). Os modelos locais utilizados na obtenção dos resultados ilustrados na Figura 5 são,

- modelo local 11 : $A_1, B_{21}, C_{11}, C_{21}, A_{fu_{11}}, B_{fu_1}$ e C_{fu_1} .
- modelo local 22 : $A_2, B_{22}, C_{12}, C_{22}, A_{fu_{22}}, B_{fu_2}$ e C_{fu_2} .
- modelo local 33 : $A_3, B_{23}, C_{13}, C_{23}, A_{fu_{33}}, B_{fu_3}$ e C_{fu_3} .
- modelo local 44 : $A_4, B_{24}, C_{14}, C_{21}, A_{fu_{44}}, B_{fu_4}$ e C_{fu_4} .

Como especificação de projeto, o rastreador deve operar para baixas frequências, até $0,1 \text{ rad/seg}$, então foi proposto o seguinte filtro $G(s)$:

$$G(s) = \frac{0,001}{s^2 + 0,02s + 0,0001}$$

No projeto do sistema de rastreamento, utilizou-se a metodologia proposta no Teorema 3. Neste processo minimizou-se a norma \mathcal{H}_∞ de $r(t)$ para $e(t)$ considerando-se sinais de baixa frequência, até $0,1 \text{ rad/seg}$, sendo $e(t)$ o sinal de erro entre a saída de referência e a entrada. Neste exemplo analisou-se o comportamento com relação ao limitante da norma \mathcal{H}_∞ nos modelos locais que descrevem o sistema levitador magnético. No modelo local 11 o limitante da norma \mathcal{H}_∞ para todo o espectro de frequência é 1,607; enquanto para a banda de frequência especificada no problema, a maior magnitude de $|T_\eta(j\omega)|$ é 0,0081, sendo T_η descrito em (37). No modelo local 22 a norma \mathcal{H}_∞ para todo o espectro de frequência é 1,607; enquanto para a banda de frequência especificada no problema, a maior magnitude de $|T_\eta(j\omega)|$ é 0,0081. No modelo local 33 a norma \mathcal{H}_∞ para todo o espectro de frequência é 1,694; enquanto para a banda de frequência especificada no problema, a maior magnitude de $|T_\eta(j\omega)|$ é 0,0039. Por fim, no modelo local 44 o limitante da norma

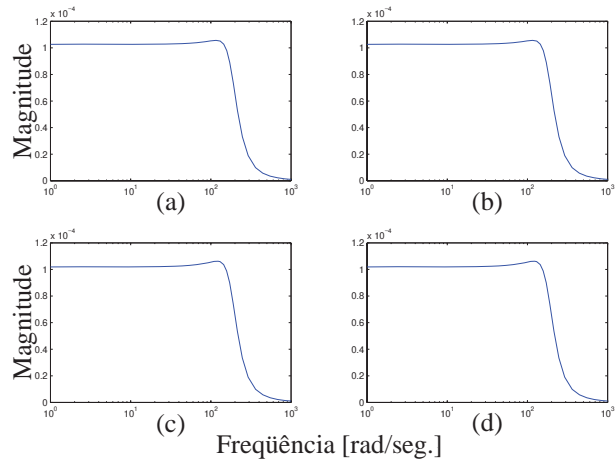


Figura 5: Resposta em frequência de $w(t)$ para $y(t)$. (a) modelo local 11, (b) modelo local 22, (c) modelo local 33, (d) modelo local 44.

\mathcal{H}_∞ para todo o espectro de frequência é 1,694; enquanto para a banda de frequência especificada no problema, a maior magnitude de $|T_\eta(j\omega)|$ é 0,0041.

A Figura 6 ilustra a resposta em frequência T_η , que representa a realização em espaço de estado de $e(t)$ para $r(t)$. Observa-se que a magnitude de T_η para a faixa de frequência em projeto é pequena, então, ocorre o processo de rastreamento nestas condições. Os parâmetros obtidos do projeto de rastreamento aplicados ao sistema não-linear são:

$$M_1 = \begin{bmatrix} -0,845 \\ 1008,594 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} -0,845 \\ 1008,722 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} -1,003 \\ 820,619 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} -1,003 \\ 820,693 \end{bmatrix}, N_1 = 2053,818; N_2 = 2054,227;$$

$$N_3 = 2171,565 \text{ e } N_4 = 2171,705.$$

Ainda, pode-se descrever os parâmetros de rastreamento como:

$$M(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i M_i \text{ e } N(\alpha) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i N_i,$$

sendo α_i descrita em (60).

Na análise da Figura 6 foi considerada a adição dos seguintes parâmetros nos modelos locais:

- modelo local 11 : M_1 e N_1 .
- modelo local 22 : M_2 e N_2 .
- modelo local 33 : M_3 e N_3 .
- modelo local 44 : M_4 e N_4 .

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A_c : \\
A_{c_{11}} &= \begin{bmatrix} -276,891 & -0,479 \\ 120556,695 & -155,857 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{12}} = \begin{bmatrix} -276,884 & -2,466 \\ -27849,761 & 59906450,612 \end{bmatrix}, \\
A_{c_{13}} &= \begin{bmatrix} -306,009 & -204,513 \\ 134163,023 & 5619433,839 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{14}} = \begin{bmatrix} -306,858 & -0,326 \\ 101205,786 & 195497,106 \end{bmatrix}, \\
A_{c_{21}} &= \begin{bmatrix} -276,904 & 1,506 \\ 268957,186 & -59906762,315 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{22}} = \begin{bmatrix} -276,896 & -0,479 \\ 120550,729 & -155,846 \end{bmatrix}, \\
A_{c_{23}} &= \begin{bmatrix} -306,845 & 0,714 \\ 94597,245 & 844274,792 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{24}} = \begin{bmatrix} -306,855 & -0,763 \\ 99394,311 & 134057,344 \end{bmatrix}, \\
A_{c_{31}} &= \begin{bmatrix} -255,631 & 203,508 \\ 103778,509 & -5619774,616 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{32}} = \begin{bmatrix} -254,797 & -1,719 \\ 143339,315 & -844615,567 \end{bmatrix}, \\
A_{c_{33}} &= \begin{bmatrix} -275,176 & -0,477 \\ 121388,641 & -157,026 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{34}} = \begin{bmatrix} -275,176 & -0,460 \\ 333072,721 & 14360749,321 \end{bmatrix}, \\
A_{c_{41}} &= \begin{bmatrix} -254,783 & -0,678 \\ 136731,701 & -195837,880 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{42}} = \begin{bmatrix} -254,788 & -0,241 \\ 138538,204 & -134398,116 \end{bmatrix}, \\
A_{c_{43}} &= \begin{bmatrix} -275,177 & -0,493 \\ -90299,692 & -14361063,381 \end{bmatrix}, \quad A_{c_{44}} = \begin{bmatrix} -275,177 & -0,477 \\ 121384,387 & -157,033 \end{bmatrix}. \\
&\Rightarrow B_c : \\
B_{c_1} &= \begin{bmatrix} -1,829 \\ 2234,284 \end{bmatrix}, \quad B_{c_2} = \begin{bmatrix} -1,829 \\ 2234,121 \end{bmatrix}, \\
B_{c_3} &= \begin{bmatrix} -1,819 \\ 2252,248 \end{bmatrix}, \quad B_{c_4} = \begin{bmatrix} -1,819 \\ 2252,174 \end{bmatrix}. \\
&\Rightarrow C_c : \\
C_{c_1} &= \begin{bmatrix} -212345,646 & -1085,799 \end{bmatrix}, \\
C_{c_2} &= \begin{bmatrix} -212369,817 & -1085,763 \end{bmatrix}, \\
C_{c_3} &= \begin{bmatrix} -317461,169 & -1644,052 \end{bmatrix}, \\
C_{c_4} &= \begin{bmatrix} -317479,846 & -1643,957 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{63}$$

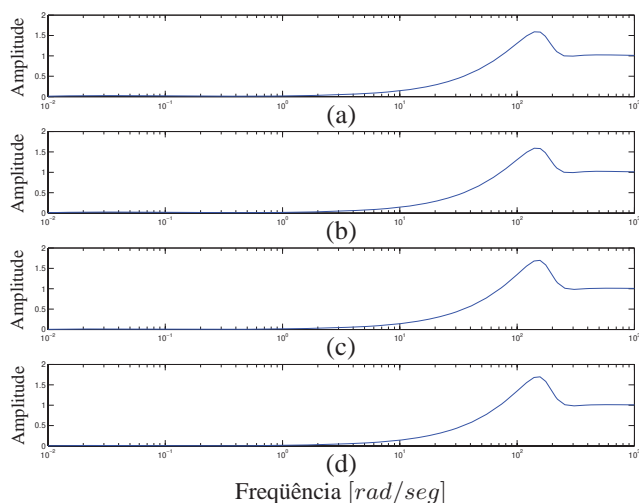


Figura 6: Resposta em frequência $T_\eta : |T_\eta(j\omega)| \times \omega$, sendo T_η descrito em (37). (a) modelo local 11, (b) modelo local 22, (c) modelo local 33, (d) modelo local 44.

Na Figura 7 ilustra-se a resposta a uma entrada degrau, com amplitude 0,05 e um sinal de perturbação do tipo distúrbio com amplitudes aleatórias não superiores a 1 presente no sistema levitador magnético.

Ainda no processo de simulação do projeto do rastreador de sinais de referência com rejeição de distúrbio considerou-se um sinal de referência $r(t) = 0,05sen(0,1t)$ e um sinal de perturbação do tipo distúrbio com amplitudes aleatórias não superiores a 1. A Figura 8 ilustra o resultado da simulação.

Apenas por ilustração, os zeros para os modelos locais são: (a) modelo local 11: $6,543 \pm 266,132j$, (b) modelo local 22: $6,527 \pm 266,102j$, (c) modelo local 33: $21,189 \pm 319,672j$ e (d) modelo local 44: $21,179 \pm 319,657j$. Os pólos de malha fechada dos modelos locais do sistema não-linear alocados na região são: (a) modelo local 11: $-62,607 \pm 169,584j$ e $-153,774 \pm 78,517j$; (b) modelo local 22: $-62,609 \pm 169,581j$; $-153,769 \pm 78,521j$; (c) modelo local 33: $-62,278 \pm 168,793j$; $-153,830 \pm 82,255j$; (d) modelo local 44: $-62,282 \pm 168,785j$ e $-153,830 \pm 82,276j$.

No projeto do sistema de rastreamento e rejeição de distúrbio utilizou-se a mesma função de pertinência. Deste modo, utilizou-se as funções de pertinência de (60) para descrever o compensador \mathcal{H}_∞ , $K_c(\alpha)$ e os parâmetros de rastreamento $M(\alpha)$ e $N(\alpha)$. A determinação dos modelos locais depende da faixa de variação considerado para os estados do sistema não-linear, e que neste exemplo é descrita em (54). Os resultados do sistema de rastreamento e rejeição de distúrbios aplicados a sistemas não-lineares foram satisfatórios, como podem ser observados nos resultados de simulação ilustra-

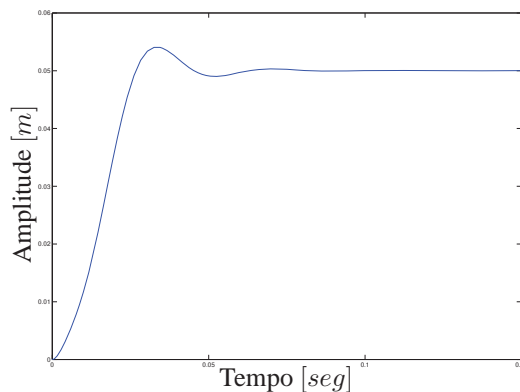


Figura 7: Resposta ao degrau de amplitude 0,05.

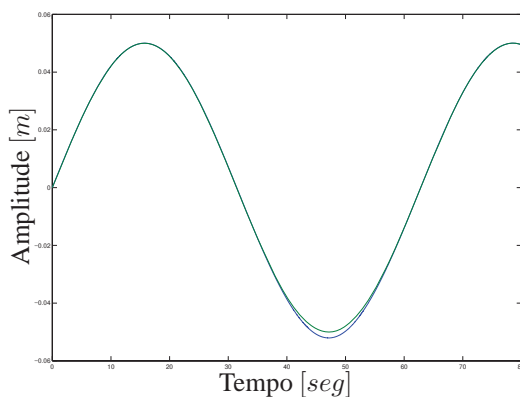


Figura 8: Sinal de saída $z(t)$ e o sinal de entrada $r(t)$ estão quase sobrepostos.

dos neste exemplo.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho é proposta uma metodologia de rastreamento e rejeição de distúrbios aplicada a sistemas não-lineares. No projeto utilizaram-se os modelos fuzzy Takagi-Sugeno para descrever exatamente a planta não-linear. Para o processo de atenuação do efeito do sinal de distúrbio na saída do sistema, projetou-se um controlador fuzzy \mathcal{H}_∞ de realimentação dinâmica da saída, conforme ilustrado na Figura 1, de modo a minimizar o limitante da norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de distúrbio $w(t)$ e o sinal de saída de medida $y(t)$. Para o rastreamento de sinais minimiza-se o limitante da norma \mathcal{H}_∞ entre o sinal de referência $r(t)$ e o sinal de erro de rastreamento, sendo o erro de rastreamento a diferença entre o sinal de referência e o sinal de saída do sistema $z(t)$.

A inclusão de peso na frequência utilizado no projeto do ras-

treador possibilita ao projetista desenvolver sistemas de rastreamento para sinais de referência em uma faixa de frequência desejada.

A metodologia de rastreamento e rejeição de distúrbios aplicada a sistemas não-lineares é descrita em termos de LMIs, que quando factíveis, podem ser facilmente solucionados através de algoritmos de convergência polinomial disponíveis na literatura (Gahinet et al., 1995).

REFERÊNCIAS

- Assunção, E., Andrea, C. Q. and Teixeira, M. C. M. (2004). Controle Ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com Modificação de Zeros para o Problema de Rastreamento Usando LMIs, *Sba Controle & Automação* **15**(4): 413–422.
- Assunção, E., Andrea, C. Q. and Teixeira, M. C. M. (2007). \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ -Optimal Control for the Tracking Problem with Zero Variation, *IET Control Theory & Applications* **1**(3): 682–688.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, USA.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). \mathcal{H}_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A. J. and Chilali, M. (1995). *LMI Control Toolbox User's Guide*, The Mathworks Inc., USA.
- Han, Z. X., Feng, G., Walcott, B. L. and Ma, J. (2000). Dynamic Output Feedback Controller Design for Fuzzy Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **30**(1): 204–210.
- Lima, E. L. (2000). *Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária*, 4th IMPA, Rio de Janeiro, Brasil.
- Lin, C., Wang, Q. and Lee, T. H. (2006). \mathcal{H}_∞ Output Tracking Control for Nonlinear Systems via T-S Fuzzy Model Approach, *IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetic - Part B: Cybernetics* **36**(2): 450–457.
- Marquez, H. J. (2003). *Nonlinear Control Systems*, John Wiley & Sons., USA.
- Nguang, S. K. and Shi, P. (2006). Robust \mathcal{H}_∞ Output Feedback Control Design for Fuzzy Dynamic Systems with quadratic \mathcal{D} stability constraints: An LMI approach, *Information Sciences* **176**(15): 2161–2191.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions, Man, and Cybernetics* **15**: 116–132.
- Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H. and Wang, H. O. (2001). Model Construction, Rule Reduction, and Robust Compensation for Generalized Form of Takagi Sugeno Fuzzy Systems, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **9**(4): 525–538.
- Teixeira, M. C. M., Assunção, E. and Avellar, R. G. (2003). On Relaxed LMI-Based Designs for Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(5): 613–623.
- Teixeira, M. C. M., Pirotbom, H. C. and Assunção, E. (2000). Novos Resultados Sobre a Estabilidade de Sistemas Não-Lineares Utilizando Modelos Fuzzy e LMI, *Sba Controle & Automação* **11**(1): 37–48.
- Teixeira, M. C. M. and Zak, S. H. (1999). Stabilizing Controller Design for Uncertain Nonlinear Systems Using Fuzzy Models, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2): 133–142.