UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

José Terencio Neto

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DO CONTEÚDO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Campo Grande - MS
2021

José Terencio Neto

ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DO CONTEÚDO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Dra. Marilena Bittar

Campo Grande - MS
2021

A minha mãe, que sempre torceu por mim, mesmo de longe.

A minha irmã que sempre me apoiou o quanto pôde.

A família que a vida me deu; os meus grandes amigos, que sempre estiveram lá por mim quando ninguém mais estava.

A minha orientadora, a qual eu admiro muito, pela sua sapiência e pela sua compreensão nos momentos mais difíceis.

A vida, por ser tão bela e por não ter se esvaído de mim.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos os professores que tive na vida; desde a professora Ivone do primeiro aninho do Ensino Fundamental em uma escola rural do interior do Mato Grosso do Sul até os professores que conheci no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEduMAt) da UFMS, em especial minha orientadora, Marilena Bittar, a qual admiro grandemente.

A professora Cíntia Melo dos Santos que foi minha orientadora na especialização em Educação Matemática e Ensino de Ciências na UFGD, hoje em dia minha colega de grupo de pesquisa, por ter me apresentado e me posto a dar os primeiros passinhos no campo da Didática da Matemática.

A todos os professores da minha graduação na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, alguns por me ensinarem como ser um bom professor, e também por aqueles que me mostraram como não ser um bom professor.

Agradeço a minha mãe. Mesmo de longe eu sinto o amor e a preocupação dela para comigo. Incluindo neste parágrafo minha irmã, que dadas as condições sempre se preocupou em me ajudar, me dar forças e sempre se orgulhou de mim.

Agradeço também a família que a vida me deu. Parte de eu não desistir foi porque vocês sempre acreditaram em mim e em meu potencial apesar dos pesares, apesar dos problemas e de quase não ser capaz de continuar; não fossem vocês eu não estaria escrevendo agradecimento algum. Em especial ao Silvio e à Adrielly, não sei se sou capaz de retribuir tudo que fizeram por mim.

Aos meus colegas de Mestrado, pelas risadas e por sempre deixarem as coisas mais leves, principalmente quando mais pesava; guardo vocês no coração.

Aos meus colegas do grupo de Pesquisa de Didática da Matemática (DDMAT) que me ajudaram a evoluir e contribuíram grandemente para minha evolução enquanto pesquisador, em especial à Danielly Kaspary, e a Janielly Verbisck e Susilene Garcia Oliveira por sua ajuda.

A Capes, pelo apoio financeiro, que possibilitou a minha dedicação exclusiva com as diversas atividades do mestrado.

"O número imaginário é um ótimo e maravilhoso recurso do espírito divino,
quase um anfíbio entre ser e não ser."

Gottfried W. Leibniz

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo estudar e analisar o conteúdo de Números Complexos na educação básica a partir da análise de livros didáticos aprovados no PNLD/2018. Para isto, buscamos estudar as oito obras aprovadas neste PNLD do Ensino Médio, para identificarmos como é proposto o ensino deste conteúdo nesta etapa de ensino. Nossa investigação tem como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático – TAD. Fizemos um estudo histórico e epistemológico, introdutório, para então analisar a perspectiva dos livros didáticos ao apresentar este conteúdo. Nossos resultados demonstraram que a razão de ser dos números complexos na educação básica não é a mesma que lhe deu origem. Além disso, foi possível observar, nos livros didáticos analisados, que há uma valorização da manipulação geométrica e trigonométrica do conjunto. Observamos também que as obras se aproximam em sua organização do conteúdo, porém as técnicas para o tratamento do bloco geométrico e de equações prevalecem.

Palavras-chave: Organização Matemática. Organização Didática. Epistemologia dos Números Complexos. Modelo Dominante. Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This research aims to study and analyze the content of complex numbers in elementary education from the analysis of textbooks approved in PNLD/2018. For this, we seek to study the eight books approved in this PNLD for high school, to identify how the teaching of this content is proposed at this stage of education. Our investigation has as theoretical and methodological reference the Anthropological Theory of Didactics - TAD. We did an introductory historical and epistemological study, to then analyze the perspective of the textbooks when presenting this content. Our preliminary results showed that the rationale for complex numbers in basic education is not the same as the one that gave origin to it. Moreover, it was possible to observe in the analyzed textbooks that there is an appreciation of the geometric and trigonometric manipulation of the set. We also observed that the works are similar in their organization of the content, but the techniques for the treatment of the geometric block and equations prevail.

Keywords: Mathematical Organization. Didactic Organization. Epistemology of Complex Numbers. Dominant Model. Anthropological Theory of Didactics.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos números complexos na educação básica nas últimas décadas tem sido bastante questionado. Chagas (2013) afirma que tanto professores quanto alunos questionam a utilidade deste objeto matemático no Ensino Médio, por vezes deixado em segundo plano. Durante o período da educação caracterizado pela valorização dos estudos técnicos e pela valorização das escolas para preparação militar – início do século 20 e décadas de 1960 à 1980 – este conteúdo era presente nos currículos das escolas brasileiras até porque, como aponta Saviani, a maior parte dos manuais didáticos brasileiros eram traduzidos de manuais da Europa, principalmente da França, e estava acontecendo no período uma valorização do campo da álgebra. Porém este conteúdo cai em desuso e parece não ser mais exigido, como critério curricular, isso já no final dos anos 1990 e anos 2000 o que o torna, em nossa visão, um conteúdo flutuante[1] neste nível de Ensino.

Quando se fala em números complexos no contexto atual, a primeira ideia que pode ser moldada é o pensamento de um conteúdo difícil de ser trabalhado em sala de aula e de certa resistência por parte dos alunos, às vezes até mesmo do professor, mas por que isso ocorre? De acordo com Oliveira (2010), talvez essa resistência venha da visão de que os números complexos são conteúdos demasiadamente difíceis e trabalhosos, que seriam alvo de estudos no Ensino Superior e, portanto, não teriam muito espaço no ensino médio. Além disso, “Não fosse ainda conteúdo constante nos programas de vestibulares provavelmente tal assunto já teria sido eliminado do currículo.” (OLIVEIRA, 2010, p. 7)

Refletindo sobre o uso deste conteúdo na educação básica, podemos nos lembrar de quando estudamos (ou não) este conjunto numérico. Como estudante, no período de Ensino Médio tive que mudar de instituição de ensino, pois me mudei de uma cidade para outra. Desta forma, pude ver algumas diferenças curriculares dos conteúdos que estavam sendo aplicados naquele ano (2010), e no ano seguinte. Uma dessas notáveis diferenças se fez no conteúdo de números complexos, pois na minha escola de origem os números complexos constituíam conteúdo de um capítulo do livro adotado, com um tratamento bem amplo; já na escola para a qual me transferi, acabei percebendo que este aparecia como complemento de outro conteúdo, que tratava de soluções de equações do segundo grau no conjunto dos complexos, e não tinha um tratamento aprofundado. Essa questão me seguiria por um bom

[1] Esta adjetivação faz referência ao fato de o conteúdo ir e vir nessa instituição – Ensino Médio – ora estando muito presente, ora pouco observados nos parâmetros curriculares do país.

tempo na graduação, pela complexidade do conteúdo e por sua aplicabilidade no ensino médio: eu procurava entender o porquê de este tipo de conteúdo estar presente neste nível de ensino. Posteriormente essa dúvida entrou em estado de "dormência" devido a todas as vivências da graduação, despertando muito recentemente em conversas com colegas e com minha orientadora.

Olhando para além da minha experiência pessoal, é possível constatar que o ensino dos números complexos é bastante questionado, tanto por estudantes quanto por professores, como afirma Chagas (2013, p. 11):

> A relevância do estudo dos números complexos no Ensino Médio é questionada por alunos e professores. O cálculo da raiz quadrada de um número negativo, a resolução de equações polinomiais e o vestibular são respostas que não convencem muitos alunos do estudo, por vezes sem significância, desse tópico da Matemática. Afinal, para extrair a raiz quadrada de um número negativo bastaria saber que $i^2 = -1$. Além disso, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que hoje é a porta de acesso a muitas das universidades públicas no país, não contempla em sua matriz os números complexos.

Oliveira (2010) e Chagas (2013) questionam justamente a relevância deste conteúdo, isto é, o motivo de este ainda permanecer neste nível de ensino: o que pode ainda justificar sua permanência nos livros didáticos? Talvez para responder esta pergunta devêssemos olhar sua razão de ser na matemática em si, para então entendermos um pouco melhor o motivo de este conteúdo ser ensinado.

Para conseguirmos investigar as questões que levantamos iremos realizar um breve estudo do desenvolvimento histórico dos números complexos, bem como de sua inserção na educação básica, além de analisar a presença do conteúdo dos números complexos em Livros Didáticos (LD) do nível médio. Decidimos olhar para este conteúdo nos livros didáticos, pois acreditamos que este se configura como uma das principais fontes mobilizadas pelo professor para preparar suas aulas, também porque o livro didático é de amplo acesso na educação básica brasileira e possui diretrizes curriculares que regulamentam sua estruturação em todo território nacional.

Como afirma Santos (2014), o livro didático é um instrumento importante da prática educacional e pode apresentar tendências pedagógicas características de sua época, que podem ser identificadas se analisadas em diferentes momentos da história. Também é no LD que o professor terá aporte teórico para elaborar suas aulas.

> Por meio dos livros didáticos, é possível identificar a maneira em que são apresentados os conceitos em determinadas épocas, visto serem fontes para os

> professores buscarem suporte ao planejamento de suas aulas. Pais (2006) afirma que por mais que os métodos de ensino e os enfoques curriculares tenham variado com as demandas sociais e mudanças curriculares, o livro está presente entre os instrumentos didáticos mais utilizados pelos professores. (SANTOS; SOUZA, 2014, p. 2)

Analisar essas fontes pode propiciar a descoberta de como a apresentação do conteúdo muda conforme o tempo, e até possibilita ao pesquisador levantar hipóteses sobre os porquês dessas possíveis mudanças.

Além de Santos (2014), Bittar (2017) (re) afirma a importância do estudo sobre os Livros Didáticos (LD), dizendo que com essa análise é possível também identificar problemas de ensino e aprendizagem, e entender certas dificuldades que podem aparecer durante esse processo, além de se constituir como instrumento que nos permite ter acesso ao currículo real, que nos aproxima da sala de aula:

> [...] se queremos compreender algumas das razões de dificuldades de aprendizagem enfrentadas por alunos, o livro didático utilizado por eles é uma das fontes a serem consultadas. Não é a única, porém, como o LD é o principal material utilizado pelo professor no preparo de suas aulas, seu estudo permite, entre outros, certa aproximação com o que é ensinado pelo professor. Consequentemente, é importante conhecer as propostas dos LD, especialmente para ajudar na elaboração de intervenções didáticas com alunos, pois, independente da escolha teórica, é preciso levar em consideração seu contexto de ensino. (BITTAR, 2017, p. 365-366)

Como apontado pela autora, o LD não é a única ferramenta que pode ser consultada, mas, como instrumento didático, ele seria a principal ferramenta, ao menos no caso do Brasil. No Brasil, os livros didáticos são regulados e avaliados pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático, o PNLD.

> O Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) é destinado a avaliar e a disponibilizar obras didáticas, pedagógicas e literárias, entre outros materiais de apoio à prática educativa, de forma sistemática, regular e gratuita, às escolas públicas de educação básica das redes federal, estaduais, municipais e distrital e também às instituições de educação infantil comunitárias, confessionais ou filantrópicas sem fins lucrativos e conveniadas com o Poder Público. (BRASIL, 2017)

Este programa tem por objetivo fornecer livros e materiais didáticos de qualidade, sem erros, e qualquer tipo de discriminação/preconceito. O fornecimento dos livros didáticos e do material didático é dado por meio de editais, lançados em períodos específicos de acordo com o nível e modalidade do ensino. Como atende todos os níveis da educação, sua grande capilaridade juntamente com sua regulamentação faz com que o conteúdo que esteja presente nas obras aprovadas (tendo o currículo em vista) se aproxime mais do que é ensinado nas escolas.

Dentre os documentos que podemos analisar para observar a estruturação destes conteúdos no LD está o que traz as Matrizes Curriculares Estaduais. Em Mato Grosso do Sul, desde 2019 essas matrizes curriculares estão estruturadas tendo como principal fonte a Base Nacional Comum Curricular – BNNC. A partir do ano de 2020 a BNCC orienta o currículo de fundamentação do Ensino Médio.

Devemos nos atentar também para as matrizes do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), uma vez que os conteúdos cobrados no Enem parecem ganhar prioridade, para o ensino, em detrimento de outros. No que se refere ao conjunto dos números complexos, uma primeira análise nos mostra que não há orientação ou indicação do mesmo na matriz.

Como nosso tema de interesse é a presença dos números complexos no Ensino Médio, é importante analisar como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) orientavam para o ensino deste conteúdo. Olhamos para este documento devido ao fato de o material didático submetido ao PNLD 2018 ter sido elaborado a partir deste documento, uma vez que no ano desta edição de Livros Didáticos a Base Nacional para o Ensino Médio ainda estava sendo homologada. Nos PCNEM os conteúdos básicos de matemática são divididos em quatro blocos principais: Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.

A Base Nacional Comum Curricular, vigente no Ensino Fundamental a partir de 2020 no território brasileiro, teve sua parte orientada para o Ensino Médio homologada no final de 2018, também orienta para a divisão dos conteúdos de matemática: “Uma organização possível – e mais próxima da prática de elaboração curricular dessa área – é por unidades [...] Essas unidades podem ser, entre outras, Números e Álgebra, Geometria e Medidas, e Probabilidade e Estatística”. (BRASIL, 2018, p. 542)

Pensando de acordo com as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) e da BNCC, levando em conta a divisão dos blocos, como podemos pensar no conteúdo de números complexos nestes blocos? De fato, temos as operações referentes ao conjunto dos complexos no bloco denominado número e operações, pois é comum se fazer o tratamento desse conteúdo de forma a priorizar o cálculo algébrico. Além disso, temos também a interpretação geométrica, por vezes adotada em vários segmentos de livros didáticos, entrando como um aprofundamento do mesmo. Isto faz sentido pela epistemologia deste conjunto que será descrita no estudo histórico a respeito dos complexos que realizaremos.

A BNCC não indica explicitamente o ensino de números complexos no currículo. Estudando a estrutura do texto concluímos que não são encontradas orientações a respeito do tratamento dos números complexos no Ensino Médio. Neste documento são fornecidos alguns conteúdos obrigatórios separados em blocos, os quais compõem apenas uma parte total do currículo; o texto tem a prerrogativa de deixar o currículo mais "livre". Deste modo, o conteúdo volta a ser algo flutuante nesse nível de Ensino.

Isso, para nós, já se configura como um resultado de pesquisa, além que, entender que um documento tal qual a BNCC não orienta para o ensino deste conteúdo sugere imediatamente a indagação: se a BNCC não apresenta este conteúdo, será que ele vai aparecer nos livros didáticos? E se aparecer, como será? Ou seja, como ele desapareceu do "currículo oficial" será que vai aparecer em sala de aula? Como será tratado este conceito? Como ferramenta de resolução ou como um objeto matemático.?

A caracterização de um conceito matemático como ferramenta ou objeto constitui a dialética ferramenta objeto, daqui por diante DFO, proposta por Douady (1986). Todo conceito matemático passa por esses dois estatutos: ferramenta para resolução de um problema e objeto de estudo. Pensando nos complexos, eles foram primeiro propostos para resolução de equações cúbicas, como veremos posteriormente, em nossa análise histórica. Com o passar do tempo, este conceito, começou a ser encarado como objeto da matemática, e estudado como tal, seus operadores e suas aplicações. Mais especificamente, segundo Douady (1986) os conhecimentos, ou conceitos matemáticos são ferramentas quando focamos o interesse sobre o uso que é feito para resolver um problema, podendo uma mesma ferramenta ser adaptada a vários problemas ou várias ferramentas serem usadas para um mesmo problema. Já o estatuto de objeto ocorre quando um conceito matemático é *tirado de contexto*, principalmente para transmissão à comunidade científica, de modo que ocorre sua formulação da forma mais geral possível; é um saber científico, que em determinado momento passa a ser reconhecido socialmente.

> Em suas pesquisas, os matemáticos são confrontados a problemas que ninguém sabe como resolver. Uma parte importante de seu trabalho consiste em fazer perguntas e resolver problemas. Para fazer isto, eles têm que criar ferramentas conceituais às quais são agora acrescentadas as técnicas [...] Para fins de transmissão à comunidade científica, os conceitos assim criados são descontextualizados, formulados da maneira mais geral possível. Eles são então integrados ao corpo de conhecimento já

> constituído, para ampliá-lo ou substituir algum deles. Eles adquirem o estatuto de objeto. (DOUADY, 1986, p.9 Tradução nossa[2])

Compreender isso é importante para descrever a razão de ser do ensino deste conteúdo.

Quando comparamos a BNCC com os PCNEM podemos ver que outrora esse assunto já foi orientado para estar no currículo. Os Parâmetros Nacionais orientam de forma mais clara como deve ser o tratamento de números complexos; primeiramente há uma orientação geral sobre o conteúdo: “os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$” (BRASIL, 2006, p. 71). Em seguida, este documento trata do conteúdo dos números complexos como um tema complementar no ensino de matemática, de modo a trabalhar seu aprofundamento:

> Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. (BRASIL, 2006, p. 93-94)

De acordo com esses dois pontos apontados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio em suas orientações sobre o tratamento dos números complexos, somos levados à conclusão de que o conteúdo deve ser trabalhado no Ensino Médio, com objetivo claro de ser apresentado como uma aplicação e expansão do conteúdo de equações do segundo grau (bem como terceiro grau), mas seu aprofundamento fica a critério do professor ou dos autores do livro didático. E nesse aspecto, podem surgir diversas propostas de apresentação deste conteúdo nos livros didáticos.

Para podermos olhar para apresentação do conteúdo em questão nos LD, se faz necessário o uso de uma metodologia e uma teoria para análise, de forma a atenderem as

---

[2] Dans leurs recherches, les mathématiciens sont confrontés à des problèmes que personne ne sait résoudre. Une part importante de leur activé consiste à poser des questions et résoudre des problèmes. Pour ce faire, ils sont amenés à créer des outils conceptuels auxquels s'adjoignent maintenant des techniques [...] Pour les besoins de la transmission à la communauté scientifique les concepts ainsi crées sont décontextualisés, formulés de la façon la plus générale possible. Ils s'intègrent dès lors au corps des connaissances déjà constituées, pour les étendre ou se substituer à certaines d'entre elles. Ils acquièrent le statut d'objet.

necessidades deste tipo de análise proposta. Para nossa investigação escolhemos trabalhar com a Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1999) como aporte teórico e metodológico por acreditarmos que ela oferece elementos para investigar práticas institucionais. De acordo com Bosch e Gáscon (1999) apud Bittar (2017),

> A Teoria Antropológica do Didático, diz, entre outras coisas que toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, apud BITTAR, 2017, p. 5)

Nessa pesquisa propomos um estudo epistemológico a respeito dos números complexos que nos auxiliará a desenhar o modelo praxeológico dominante do objeto matemático números complexos no ensino médio, guiados pela questão de pesquisa: como é o tratamento do conteúdo de números complexos em LD do Ensino médio e por que esse saber é ensinado no Ensino Médio? Para isso será parte dos procedimentos metodológicos olharmos para estruturação do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM. Este programa foi instaurado em 2004 (atualmente é usada somente a designação PNLD), com objetivo de fornecer material de apoio pedagógico de qualidade, avaliar as obras selecionadas por meio de editais e efetuar a compra e distribuição destes materiais na maior parte do Brasil. O PNLD, por meio da avaliação realizada, regula a qualidade dos materiais a serem distribuídos aos alunos.

Pensando na nossa questão de pesquisa, evidenciada no parágrafo anterior e em nossas indagações a respeito do ensino de números complexos no Ensino Médio, delimitamos nosso objetivo geral da seguinte forma:

I**nvestigar a razão de ser do conjunto dos números complexos no Ensino Médio.**

Para atingir este objetivo definimos os seguintes objetivos específicos:

- analisar o desenvolvimento dos números complexos e sua institucionalização como conceito matemático;
- modelar e analisar as Organizações Matemáticas (OM) propostas em torno de números complexos em livros didáticos aprovados no PNLD 2018;
- modelar e analisar a Organizações Didáticas (OD) propostas em torno de números complexos em livros didáticos aprovados no PNLD 2018.

2 NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo realizamos um breve estudo histórico a respeito do desenvolvimento dos números complexos, bem como sua caracterização como objeto matemático. Como veremos a seguir, a organização em volta da elaboração deste conjunto foi motivada principalmente pelos algebristas italianos do século XVI ao estudar equações de grau 3, o que não exclui o fato de que problemas envolvendo esse conteúdo já tenham surgido na antiguidade:

> O primeiro registro do interesse do ser humano por equações cúbicas data da antiga civilização babilônica, por volta de 1800-1600 a.C.. No entanto, passaram-se muitos séculos depois da resolução da equação de 2º grau sem que se soubesse como resolver as de 3º grau. (VIEIRA, 1999, p. 9)

Procuraremos também, neste capítulo, responder quando este conteúdo passou a ser ensinado na educação básica brasileira como componente curricular.

2.1 Números complexos: da história para a educação básica

Em matemática tem-se a impressão, pelo menos em grande parte na educação básica, que tudo que é apresentado ou proposto a ser estudado já está feito e foi descoberto de uma hora para outra, em um ponto específico da história e foi obra de uma pessoa somente. O pensamento de que tudo existe e está ali a ser aprendido é muito comum entre as ciências, principalmente na matemática, o que pode ser visto como um pensamento simplista, pois tudo está em movimento e em constante mudança.

O estudo do desenvolvimento histórico dos números complexos, o conjunto $\mathbb{C}$, nas palavras de Viera (1999), mostra uma matemática viva, com vários momentos, matemáticos envolvidos e várias etapas do desenvolvimento desse conjunto até chegarmos à sua introdução na educação brasileira.

Normalmente o estudante brasileiro se depara com o conteúdo dos números complexos ainda no ensino fundamental, de forma bem rudimentar, quase como somente um vislumbre. Será? Ao ser introduzido o conteúdo de equações do segundo grau, é estudado o método de resolução conhecido como *fórmula de Bháskara*:

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0, com\ a, b, c \in R, e a \neq 0$, suas raízes são dadas por: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$ Esta solução implica que x assumirá dois valores reais, da seguinte forma: $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

O problema não está na apresentação das duas soluções para x, mas sim do termo dentro da raiz quadrada, que é trazido de forma recorrente nos materiais didáticos como sendo o Δ(delta) da equação, calculado separadamente, da seguinte maneira:

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

Quando se tem $\Delta < 0$ diz-se que a equação não tem solução real. Alguns materiais ainda trazem que este tipo de equação é impossível, ou que não existe solução. Dessa forma, o primeiro contato com as raízes negativas em soluções de equações já é proposto no Ensino Fundamental 2, por mais implícito que seja. É somente nas etapas finais da educação básica, normalmente no terceiro ano do Ensino Médio, que este problema ganha solução.

Talvez por inicialmente ser uma solução tratada como algo que não existe em R, é comum, segundo Vieira (1999), que ao apresentar o conteúdo dos Números Complexos, ou Números Imaginários, a primeira coisa a ser pensada pelos estudantes é que se trata de números, especificamente complicados, ou que como se chamados de imaginários, não existem e por isso não haveria a necessidade de estudá-los. Além disso, essa estruturação cria uma falsa impressão de que o conjunto C existe para solucionar equações do segundo grau, e deve ter sido desenvolvido para isso, o que não é verdade, conforme veremos brevemente a seguir.

2.2 Contexto histórico e desenvolvimento

A produção matemática acerca do conjunto C provém principalmente da obra de Girolamo Cardano de Milão (1501-1576), em 1545, o *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis* (Livro Número Um sobre a Grande Arte ou as Regras da Álgebra*)*, que procurava estudar as resoluções de equações de grau 3. Tal estudo gerou o resultado que ficou conhecido como fórmula de Cardano (VIEIRA, 1999).

> No livro *Ars Magna*, de Girolamo Cardano, é apresentado um método de resolução de alguns tipos de equação do 3º grau que, quando aplicado à equação $x^3 = 15x + 4$, chegava-se à solução: $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$. Esse parecia ser um resultado inválido, pois envolve a raiz quadrada de um número negativo. Porém, percebeu-se que, ao operar com esses números utilizando-se as propriedades usuais de números reais, essa expressão era igual a 4 e, como se pode verificar, $x = 4$ é realmente uma raiz da equação $x^3 = 15x + 4$. Assim, apesar do desconforto de se lidar com números aparentemente "ilegais", chegava-se, ao final, a um resultado legítimo. (PRESTES & CHAVANTE, 2018 p. 188).

De acordo com Mol (2013) existe uma polêmica envolvendo a participação de Cardano na resolução de equações de grau 3. O que se sabe é que no século XVI existia um desafio entre Cardano e Nicollo Fontana (c. 1499-1557), conhecido como Tartaglia, para se chegar à solução de equações do tipo $x^3 + px^2 = q$ e $x^3 + px = q$:

> Tartaglia revelou seu método de solução de equações cúbicas a Cardano sob o juramento de que este guardasse segredo. No entanto, em 1545, com a publicação do seu livro *Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis* [...] Cardano tornou público o método de resolução de Tartaglia, gerando a ira do mesmo. Aparentemente, Cardano decidiu divulgar a solução de Tartaglia após tomar conhecimento de trabalhos não publicados de Scipione del Ferro (c. 1465-1526), com data anterior a solução de Tartaglia. (MOL, 2013 p. 92).

Apesar de Tartaglia aparentemente ter chegado primeiro à solução de equações de grau 3, Cardano traz o método de resolução geométrico, mesmo método utilizado por Al-Khwarismi para resolução de equações de segundo grau, conhecido, no Brasil, como fórmula de Bháskara. Enquanto o método de Al-Khwarismi consistia em completar o quadrado, o método que Cardano estudava era o de completar do cubo:

> Cardano tomava como representante de uma categoria geral alguma equação com coeficientes numéricos específicos. Por exemplo, um problema da forma "o cubo e seis vezes o lado igual a 20", ou seja, a equação $x^3 + 6x = 20$, apresentava o método que se aplicava a todas as equações do tipo $x^3 + px = q$. (MOL, 2013 p. 92)

Faziam-se estes procedimentos nesta época, pois o tratamento algébrico ainda era muito rudimentar, então, o procedimento mais confiável era operar com os números de maneira geométrica, concreta. A própria noção do sinal "–" (menos; *minus*) como relação entre números e não a simples operação ainda estava em discussão[3]. Vamos analisar a equação (adaptando para a linguagem algébrica atual) de Cardano e Tartaglia. Rosa (1998),

[3] Esta noção seria desenvolvida por Gauss, no plano de Argand-Gauss, ao se estudar mais profundamente o conteúdo dos números complexos.

Vieira (1999), Chagas (2013) também apresentam este modelo de equação, até mesmo com a linguagem matemática semelhante à original, porém faremos o estudo destas equações com exemplo numérico próprio com a linguagem algébrica atual.

Para demonstrar o método de Cardado e Tartaglia, vamos tomar uma equação cúbica geral:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \text{ (I)}$$

Queremos que essa equação cúbica genérica fique semelhante à equação que Cardano e Tartaglia estavam se debruçando, aquelas do tipo:

$$x^3 + px = q \text{ (II)}$$

Para que a equação (I) fique semelhante a equação (II) primeiramente, vamos dividir toda a equação (I) por *a*:

$$\frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{a} = \frac{0}{a}$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$$

Vamos agora, fazer uma troca de variável afim de forma conveniente a fim de zerar o termo de grau 2 desta equação. Tomaremos $x = y - m$, onde y será nossa nova variável e m uma constante:

$$(y-m)^3 + \frac{b}{a}(y-m)^2 + \frac{c}{a}(y-m) + \frac{d}{a} = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^3 - 3y^2m + 3ym^2 - m^3 + \frac{b}{a}(y^2 - 2ym + m^2) + \frac{c}{a}(y-m) + \frac{d}{a} = 0$$

A partir deste resultado vamos escrever esta equação de forma a colocar y em evidência:

$$y^3 + \left(-3m + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3m^2 - \frac{2mb}{a} + \frac{c}{a}\right)y + \left(-m^3 + \frac{bm^2}{a} - \frac{cm}{a} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

Vamos destacar o termo de grau 2. Nota-se que se $m = \frac{b}{3a}$, conseguimos zerar este termo:

$$\left(-3m + \frac{b}{a}\right)y^2 = \left(-3\left[\frac{b}{3a}\right] + \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{-3b}{3a} + \frac{b}{a}\right) = 0$$

Sabendo disso, vamos substituir todo valor de m por $\frac{b}{3a}$:

$$y^3 + \left(-3m + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3m^2 - \frac{2mb}{a} + \frac{c}{a}\right)y + \left(-m + \frac{bm^2}{a} - \frac{cm}{a} + \frac{d}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y^3 + \left(-3\left[\frac{b}{3a}\right] + \frac{b}{a}\right)y^2 + \left(3\left[\frac{b}{3a}\right]^2 - \frac{2\left[\frac{b}{3a}\right]b}{a} + \frac{c}{a}\right)y$$

$$+\left(-\left[\frac{b}{3a}\right]^3 + \frac{bm\left[\frac{b}{3a}\right]^2}{a} - \frac{c\left[\frac{b}{3a}\right]}{a} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

Fazendo as operações indicadas chegaremos em:

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(-\frac{b^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}\right) = 0$$

A partir daqui podemos reescrever este resultado com termos mais “confortáveis”, isto é, chamaremos os termos de grau 1 de p, e os termos de grau 0 de q:

$$-\frac{b^2}{3a} + \frac{c}{a} = p$$

$$\frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = q$$

Assim obtemos:

$$y^3 + py + q = 0 \text{ (III)}$$

Esta equação já é seguramente semelhante às equações que Cardano e Tartaglia estudavam. Para chegarmos à solução desta, basta resolver essa nova equação, obtida de (I) em termos de y. Usaremos uma ferramenta que Tartaglia usara, adotaremos uma outra mudança de variável, chamando a nossa nova incógnita de uma soma de outras duas, isto é:

$$y = u + v \Leftrightarrow (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \Leftrightarrow$$

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = 0$$

Escrevendo a equação em termos de u e de v, agrupando e colocando em evidência teremos:

$$(u+v)(3uv+p) + (u^3+v^3+q) = 0 \text{ (IV)}$$

Observando a equação IV podemos afirmar que existem inúmeras soluções para u e v, porém tomaremos aquelas que nos favoreçam em resolver nosso objetivo, isto é, podemos tomar os termos dentro dos parênteses e igualá-los a zero e, nas palavras de Tartaglia, “seu produto seja sempre igual ao cubo da terça parte da coisa certa”, obtendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

Ou seja:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Afim de trabalharmos com as incógnitas em um mesmo expoente, vamos elevar os termos da segunda equação do sistema ao cubo:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Fazemos isto porque em termos de resolução obtemos a partir deste sistema a soma de dois cubos e o produto de dois cubos. Isso nos lembra a resolução de equações de segundo grau, mais especificamente o método da soma e do produto em que dada uma equação quadrática a$x^2 + bx + c = 0$, temos:

$$\mathrm{a}x^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Semelhantemente podemos afirmar que u^3 e v^3 são soluções da equação:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \end{cases} \Leftrightarrow w^2 - (u^3 + v^3)w + (u^3v^3) = 0 \Leftrightarrow w^2 - (-q)w + \left(-\left[\dfrac{p}{3}\right]^3\right)$$

Em outras palavras, u^3 e v^3 são soluções da equação:

$$w^2 + qw - \left(\tfrac{p}{3}\right)^3 = 0 \text{ (V)}$$

Seguindo neste raciocínio, vamos resolver esta equação quadrática que deduzimos usando as ferramentas já conhecidas de resolução:

$$w = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 - 4 \cdot \left[-\left(\frac{p}{3}\right)^3\right]}}{2} \Leftrightarrow w = -\frac{q}{2} \pm \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}$$

Fazendo as simplificações, obtemos:

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Temos então duas soluções para esta variável *w*, uma positiva e outra negativa. Iremos atribuir uma para u^3 e uma para v^3:

$$u^3 = -\tfrac{q}{2} + \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}} \text{ e } v^3 = -\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}}$$

A partir das respostas de *u* e de *v* podemos descobrir seus possíveis valores, que serão:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Porém, nos passos anteriores, escrevemos *u* e *v* como sendo a soma que resulta em *y*, assim, $y = u + v$:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Voltando um pouco mais no nosso raciocínio, havíamos feito a mudança de variável de *x* para $y – m$, onde *m* seria $\frac{b}{3a}$. Desta forma, obtemos a solução de Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}$$

Porém, ao obter as soluções de algumas equações eles acabavam por encontrar respostas que envolviam o tratamento de raízes quadradas de números negativos, que parecia ser um erro, o modo encontrado para sair desse problema foi expandir o conjunto numérico. Data desta época as formalizações sobre o conjunto C, primeiramente chamado por Cardano como “números sofistas”, e de acordo com Mol (2013) tratados como “sutis e inúteis”.

Depois das divulgações de Cardano, a solução para raízes quadradas de números negativos se constituiria na academia graças às contribuições de Rafael Bombelli (1526-1572), admirador do trabalho de Cardano, e último grande algebrista italiano do Renascimento.

Albert Girard (1590-1633) foi outro estudioso deste tempo que enfocou os números imaginários com grande ousadia. Em seu livro *L' Invention Nouvelle en Algèbre* (A nova invenção na álgebra), de 1629, usa números negativos para resolver problemas geométricos e sugere que, aceitando-se também números imaginários como raízes seria possível chegar aos resultados reais. Desta forma seria possível afirmar que uma equação admite tantas raízes quanto é seu grau (VIEIRA, 1999). Esta indagação seria precursora do que ficaria conhecido como o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), enunciado por ele.

Girard também enunciou as relações entre coeficientes de uma equação polinomial e sugeriu que as raízes imaginárias são úteis por tomar relações mais gerais. Pode-se perceber uma mudança de atitude dos matemáticos em relação aos números complexos que, nesta época, a partir de Cardano e Bombelli aceitavam a existência dos Números Complexos, mas tratavam os mesmos como não úteis, ou até mesmo empecilhos.

A introdução do termo imaginário para descrever $\sqrt{-1}$ é atribuída à René Descartes (1596-1650) que

> [...] prestou grande contribuição para que as raízes negativas fossem aceitas como soluções de equações algébricas, o que, na época, ainda encontrava resistências. Descartes também descobriu um critério para se conhecer o número de raízes positivas e negativas de uma equação algébrica, mesmo sem saber seus valores, através da análise das variações dos sinais de seus coeficientes. [...] Foi Descartes que batizou $\sqrt{-1}$ de número imaginário, o que lamentavelmente foi inadequado e nada matemático, afinal não há nada de "imaginário" na $\sqrt{-1}$ e nem são "complexos" os números que a contêm. (VIEIRA, 1999, p. 26-27)

Assim, um dos problemas que o conjunto $\mathbb{C}$ enfrentava neste período era o de aceitação por parte da comunidade de matemáticos e cientistas, para se estabelecer como um objeto matemático. Problemas semelhantes foram enfrentados anteriormente por outros conceitos matemáticos até o seu estabelecimento como objeto e atualmente tratados como comuns ou até mesmo quase óbvios, como é o caso do número 0 e do conceito de infinito: apesar de bem “aceitos”, estes conceitos nada têm de óbvio, ao menos não para os estudantes que iniciam seus estudos.

Posteriormente a este período, estudos significativos que orbitavam os números complexos foram desenvolvidos por Jean Le Rond d’Alembert (1717-1783), um dos mais importantes cientistas do século XVIII.

> [...] d’Alembert foi também um matemático atuante. Procurou dar uma demonstração, sem sucesso, do Teorema Fundamental da Álgebra: todo polinômio não constante *p(x)* com coeficientes complexos possui pelo menos uma raiz complexa. Em um trabalho sobre resistência de fluidos, obteve as relações hoje conhecidas como equações de Cauchy-Riemann, que estão no alicerce da teoria de funções de variáveis complexas. (MOL, 2013 p. 120 - 121)

Por mais que d’Alembert não tenha chegado a uma resposta final sobre o estudo dos complexos, seus trabalhos impulsionaram outros matemáticos, como Carl Friedrich Gauss

(1777-1855). De certa forma d'Alembert passou grande parte de sua vida tentando solucionar o teorema enunciado por Girard, mas o que ele conseguiu como resultado foi descrever os tipos de Números Complexos que podem ser encontrados a partir de equações algébricas (VIEIRA, 1999), que ficou marcado em seu livro *Réflexions sur la cause générale des vents* (Reflexões sobre a causa geral dos ventos) de 1747.

Antes de falarmos sobre um dos mais importantes matemáticos do século XVIII, Gauss, vamos comentar sobre outro grande estudioso de seu tempo, Leonhard Euler (1707-1783), que nasceu na Suíça, mais especificamente na cidade de Basel (Mol, 2013) ou Basiléia (VIEIRA, 1999). Segundo Mol (2013) e Vieira (1999) Euler foi a mente mais brilhante do século e, apesar de seus problemas de saúde relacionados à visão – que o levaram à cegueira em 1766 – foi o matemático que mais produziu em todos os tempos, e em múltiplas áreas. "Em sua vida, publicou 560 livros e artigos, número que se aproxima de 800 quando também contabilizados os manuscritos que foram publicados após sua morte." (MOL, 2013 p. 118)

Muitas notações que usamos hoje em dia em álgebra e em geometria, dentre outras áreas da matemática, ou foram implementadas por Euler, ou foram popularizadas por ele em suas diversas obras.

> Euler foi responsável pela introdução de diversos símbolos empregados na escrita matemática. A letra "*e*" para "o número cujo logaritmo hiperbólico vale 1" foi introduzida por Euler, possivelmente tendo como referência a primeira letra da palavra exponencial. Embora não tenha sido criação sua, o símbolo π, [...], passou a ter uso generalizado após ser sistematicamente empregado por Euler. A introdução do símbolo i para $\sqrt{-1}$ e das notações sin.*v*, cos.*v*, tang.*v*, cosec.*v*, sec.*v*, cot.*v* para as funções trigonométricas também é devida a Euler. (MOL, 2013 p. 119)

A definição de número complexo (Z) de Euler – formalizada por Willian Rowan Hamilton (1805-1865) – é ainda trazida nos Livros Didáticos Brasileiros:

$Z = a + bi$, sendo a e $b \in R e i = \sqrt{-1}$.

A partir desta definição, pode-se deduzir que quando $b = 0$, temos $Z = a$, isto é, os Números Reais R são um caso particular de Números Complexos C, ou seja, são um subconjunto dos Números Complexos. Aqui está uma grande constatação matemática, isto pode explicar por exemplo, o motivo de Cardano encontrar uma solução real para uma equação de grau três quando algebricamente ela não existia, por consequência da raiz quadrada negativa contida na resolução. Porém, as demonstrações mais satisfatórias do Teorema Fundamental da Álgebra, a respeito das soluções complexas, seriam atribuídas, posteriormente, a Gauss.

Em sua tese de doutorado Carl Friedrich Gauss (1777-1855) forneceu soluções para o Teorema Fundamental da Álgebra, inclusive apontando erros nas tentativas de d'Alembert na demonstração desse teorema: "A demonstração contida em sua tese foi uma das quatro demonstrações para o Teorema Fundamental da Álgebra que ele daria ao longo de sua vida." (MOL, 2013 p. 125) Nascido na cidade da Brunswick, na Alemanha, Gauss mostrara aptidão para a matemática e para o raciocínio desde criança (VIEIRA, 1999) além de dominar vários idiomas. Gauss vivera sua infância já no fim da vida de Euler, porém seus trabalhos ficaram conhecidos quase tanto quanto os trabalhos de Euler (MOL, 2013).

É importante ressaltar que nesta época, pós newtoniana, muitos desses matemáticos citados até então estudaram a obra *Principia* escrita por Isaac Newton (1643 – 1727). Uma das grandes áreas do conhecimento matemático que estava sendo desenvolvida neste período era o cálculo diferencial e integral. Destes estudos aos qual Newton fora precursor ao estudar os movimentos físicos e gravitação universal, surgiam no "meio do caminho" contribuições que iam nascendo ao longo do desenvolvimento do rigor. O estudo de Funções, a formalização da álgebra e o conjunto C foram contribuições paralelas ao estudo e desenvolvimento do Cálculo Diferencial.

Um dos problemas acerca do conjunto C para ser aceito pelos algebristas e circular na Academia é praticamente o mesmo problema que atualmente este conjunto enfrenta na educação básica que é o seu nome. Mol (2013) afirma que a noção arbitrária de que os complexos seriam empecilhos na álgebra ou que os valores de $\sqrt{-1}$ fossem complexos é uma forma negativa de encarar o conjunto dos números complexos. Além de Mol (2013), Rosa (1998) em seu trabalho, assumiu como hipótese que para trabalhar com esse conjunto seria necessário levar os alunos a resolverem situações reais, mas que envolviam o tratamento de raízes quadradas de números negativos; destacou que a primeira impressão ao se introduzir o assunto em sala de aula é de que os números complexos são "números diferentes" ou "mais difíceis" por isso se chamariam complexos.

Seja pelas primeiras nomenclaturas dadas por Cardano, como números sofistas, ou pelos seus sucessores no estudo deste conjunto, como números imaginários, ou números complexos, o conjunto $\mathbb{C}$ foi ganhando uma imagem de desnecessário, difícil, misterioso, ou até mesmo visto como problema e não como solução, haja vista o peso da adjetivação negativa das coisas, como Gauss observou:

> Outra observação feita por Gauss é que se as unidades 1, -1 e $\sqrt{-1}$, não fossem chamadas de positiva, negativa e imaginária, mas de direta, inversa e lateral, as pessoas não teriam a impressão de que havia algo de misterioso nesses números. Quando Gauss faz essa observação fica claro a visão da matemática na época, ou seja, o fato dos números complexos poderem ser representados geometricamente fez com que adquirissem a realidade que a aritmética não havia conseguido lhes dar. (VIEIRA, 1999, p. 45)

Uma melhor compreensão dos Números Complexos seria entendê-los como algo formado por partes e não algo complicado (VIEIRA, 1999) como muitas vezes é interpretado, seja por professores ou por alunos.

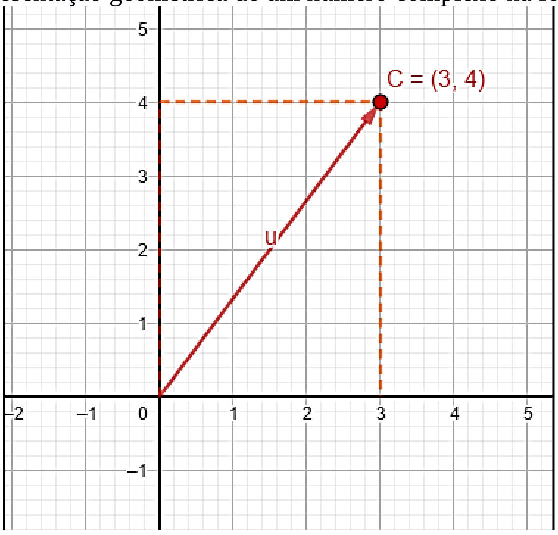
A demonstração geométrica dos números imaginários se deu, provavelmente, após a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). Os principais estudiosos responsáveis por esta demonstração foram Gauss, Wessel, Hamilton e Argand. Foi Gauss quem fez essa demonstração pela primeira vez. Essa foi sua tese de doutorado, na qual ele, além de apresentar a demonstração do TFA, mostra que todas as demonstrações feitas pelos que o precederam estavam incorretas.

Mol (2013) aponta que em 1831 Gauss publicou um tratado que teve uma grande importância histórica por este conter uma representação geométrica dos Números Complexos, estabelecendo a correspondência entre o número $z = x + iy$ e o ponto do plano cartesiano de coordenadas (x, y).

Uma representação geométrica similar dos números complexos já havia sido obtida, em 1797, pelo norueguês Caspar Wessel (1745-1818). No entanto, segundo Mol (2013) e Vieira (1999) foi o trabalho de Gauss que a popularizou dentro da comunidade de matemáticos, tanto que o plano dos números complexos passou a ser também conhecido como plano Gaussiano.

Segundo Costa (2015) a partir do ano de 1800, Jean Robert Argand (1768-1822) e Gauss chegaram à conclusão de que seria possível uma representação geométrica por meio de coordenadas retangulares. Desta forma convencionaram que o eixo horizontal seria representante da parte real e o eixo vertical da parte imaginária, e qualquer complexo poderia ser representado na forma de par ordenado, onde temos $z = a + bi$ um complexo qualquer, e seu par ordenado C (a, b).

Figura 1 - Representação geométrica de um número complexo na forma Z = 3 + 4i.



Fonte: própria, com uso do software GeoGebra.

Com a definição do plano retangular de pares ordenados de números complexos realizados por Argand e Gauss, qualquer Número Complexo passou a ter uma representação no plano bidimensional. Este plano leva o nome dos dois estudiosos, plano de Argand-Gauss (Costa, 2015).

Vieira (1999) afirma que a formalização completa dos números complexos foi trazida por William Rowan Hamilton, em 1837, e por Augustin Cauchy em 1847. Coube a Willian Rowan Hamilton (1805-1865) introduzir a notação "$a + bi$" para um número complexo, denominada atualmente como forma algébrica de um número complexo, e a relação entre a notação algébrica e seu tratamento como par ordenado (a, b). Hamilton teve sua vida dedicada à física, com ênfase na óptica, dinâmica e álgebra. Já Cauchy, de acordo com Mol (2013), foi um dos precursores da análise matemática, tendo sido responsável por formular e demonstrar de maneira rigorosa resultados do cálculo infinitesimal e pelo desenvolvimento da teoria de funções complexas com aplicabilidade na Física Matemática, Dinâmica dos Fluidos, Eletromagnetismo, por exemplo.

Pensando por exemplo na aplicabilidade que os números complexos têm na resolução de *equações diferenciais*, podemos ver uma utilidade real dos complexos. Em engenharia, por exemplo, é comum ter de se resolver equações da forma $y'' + by' + cy = 0$, para a função desconhecida y. Uma forma de resolver passa por achar as raízes do polinómio, em r, $r^2 + br + c = 0$. Porém, diversas vezes, não é possível encontrar raízes reais e só encontramos complexas. O que se faz é achar todas as raízes em $\mathbb{C}$, e depois considerarmos apenas aquelas que são reais. Apesar de somente considerarmos as raízes reais os complexos foram necessários.

Outro exemplo clássico é a aplicação em eletromagnetismo. Um campo eletromagnético tem uma componente eléctrica e outra magnética e por isso, é preciso um par de números reais para o descrever. Esse par pode ser apresentado como um número complexo, e esta é uma aplicação direta em física.

Podemos ainda ver aplicação dos complexos de forma mais prática com um problema de geometria – o problema foi baseado em uma atividade formativa de Almeida (2013, p.31):

Consideremos o quadrado ABCD cuja diagonal AC tem extremidades A(3,1) e C(5,4). Determinar as coordenadas dos vértices B e D.

Os pontos conhecidos A e B, representados no plano complexo representariam os números complexos 3 + i e 5 + 4i respectivamente.

Já os pontos desconhecidos, por hora chamaremos de B(b_1, b_2) e D(d_1, d_2), os quais podem ser escritos como sendo os complexos $b_1 + b_2 i$ e $d_1 + d_2 i$, respectivamente.

O vetor $\overrightarrow{BC}$ *é obtido com uma rotação de 90º em torno do vetor* $\overrightarrow{BA}$, *em sentido horário e como:*

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} = C - B = (5 - b_1) + i(4 - b_2) \\ \overrightarrow{BA} = A - B = (3 - b_1) + i(1 - b_2) \end{cases}$$

temos:

$$(5 - b_1) + i(4 - b_2) = -i([(3 - b_1) + i(1 - b_2)]$$

$$(5 - b_1) + i(4 - b_2) = -3i + b_1 i - i^2(1 - b_2)$$

$$(5 - b_1) + i(4 - b_2) = (1 - b_2) + i(b_1 - 3)$$

Assim, obtemos um novo sistema:

$$\begin{cases} (5 - b_1) = (1 - b_2) \\ (4 - b_2) = (b_1 - 3) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, tem-se:

$$b_1 = \frac{11}{2} \; e \; b_2 = \frac{3}{2}$$

Para obter as coordenadas de D basta prosseguir de mesmo modo, ou então notar que os vetores diagonais são equipolentes. Logo D será (d_1, d_2) tal que:

$$d_1 = \frac{3}{2} \; e \; d_2 = \frac{11}{2}$$

Um pouco da história do surgimento do conjunto $\mathbb{C}$ pode nos mostrar como é fascinante o surgimento e a estruturação deste conjunto desenvolvido por várias pessoas e por mais de 2 séculos. É possível perceber que a história da sua formulação e formalização tem muitas relações com a geometria, com a álgebra e com o cálculo, além de expandir a noção do próprio conjunto dos $\mathbb{R}$.

Apresentaremos na próxima seção como esse conteúdo do saber foi introduzido na educação básica, com enfoque nos livros didáticos brasileiros,

2.3 A didática e a epistemologia dos números complexos

Como apontado no item anterior, parte das dificuldades de aceitação do conjunto $\mathbb{C}$ pelos estudiosos da época, estavam ligadas à sua importância e até mesmo ao seu nome; isto pois eram chamados pelos algebristas da época de números sofistas[4], e considerados muitas vezes como desnecessários, ou até empecilhos. Tudo isso ocorreu no início dos primeiros trabalhos matemáticos que lidavam com esse novo tipo de operador. Tudo mudou depois do uso de raízes complexas para a demonstração do Teorema fundamental da Álgebra (TFA). O conjunto dos números complexos era o elemento que faltava para que se pudesse avançar neste campo da matemática, permitindo a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Com isso podemos dizer que o conjunto dos números complexos atuou como ferramenta no auxilio da demonstração do TFA ao mesmo tempo passou a ser visto como objeto da matemática quando estudado descontextualizado da realidade se olharmos para os trabalhos da aplicação de complexos no campo da física dos fluidos e alguns modelos meteorológicos (MOL, 2013)

Pesquisadores como Rosa (1998), Caldeira (2013) e Vieira (1999) indicam que existe certa reação dos estudantes ao lerem "números complexos" ou "números imaginários"[5]: "quando se começa a falar em números complexos pensa-se que vão aparecer novos números, mas pode-se ver pela história, que não são novos números que surgem, mas sim novos operadores." (ROSA, 1998, p. 71)

---

[4] Mol (2013) afirma que a qualificação dos números complexos como números sofistas é porque o termo sofista era pejorativo e indicava algo "desnecessário".

[5] Isto não é algo limitante à aprendizagem, mas essa crítica existe desde que foram nomeados assim de acordo com Vieira (1998) e Mol (2013).

Assim, entender a construção epistemológica do conjunto dos números complexos, que hoje chamamos de Números Complexos, ou conjunto $\mathbb{C}$, pode evidenciar quais podem ser os obstáculos epistemológicos[6] ou didáticos[7] para seu desenvolvimento em sala de aula.

Desta forma, esta primeira fase do estudo é de certa forma tranquilizadora para o didático porque mostra a pertinência epistemológica de certas ferramentas para a didática: a primeira fase da história do desenvolvimento dos números complexos é evidenciada pela pertinência epistemológica de ferramentas ou mesmo de apoios didáticos (ARTIGUE & DELEDICQ, 1992).

Do ponto de vista da análise didática do conteúdo, Artigue & Deledicq (1992) evidenciam alguns pontos que, para eles são importantes, reforçando o fato de não excluir outros:

> Salientando que a nossa análise não exclui outros, examinaremos três pontos:
> - o papel motor dos **desequilíbrios cognitivos**;
> - a distinção entre **os polos de ferramenta e de objeto** de um conceito matemático;
> - as diferenças entre a lógica do **ensino** e a lógica da **história.**[8] (ARTIGUE & DELEDICQ 1992, p. 10 Tradução nossa)

O primeiro ponto abordado por Artigue e Deledicq (1992) é o papel motor dos desequilíbrios cognitivos. No âmbito das equações do segundo grau, o trabalho com a manipulação deste objeto não motiva o surgimento de novos operadores, como as quantidades imaginárias ou unidades imaginárias. Como epistemologicamente as soluções de equações quadráticas envolviam a demonstração via completamento de quadrados, não caberiam soluções complexas; era mais aceitável concordar que equações que envolvessem quadrados negativos não tinham solução. A exploração de raízes dessa forma caberá ao quadro das equações do terceiro grau, como vimos no levantamento epistemológico e histórico dos Números Complexos.

---

[6] Um obstáculo de origem epistemológica é verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode em princípio encontrar na história do conceito. (IGLIORI, 1999, p. 97)

[7] Obstáculos didáticos surgem no âmbito do planejamento (ou na falta deste) do trabalho a ser realizado em sala de aula, e também é o planejamento o espaço privilegiado para a busca de sua superação, como define Pais (2011) os obstáculos didáticos são conhecimentos relativamente estabilizados no plano intelectual, dificultando a evolução da aprendizagem do saber escolar. (MIRANDA, 2016, p.159)

[8] En insistant sur le fait que notre analyse n'en exclue pas d'autre, nous examinerons successivement trois points:
- le rôle moteurs des **déséquilibres cognitifs**,
- la distinctions entre les **pôles outil et objet** d'un concept mathématique,
- les différences entre la logique de **l'enseignement** et celle de **l'histoire**. (ARTIGUE, 1992, p. 10)

O desequilíbrio cognitivo que impulsionou os matemáticos a desenvolverem estratégias de cálculos para resolução de problemas foi devido ao trabalho e manipulação das equações do terceiro grau. A partir da proposição de problemas reais, os algebristas encontravam raízes que não pareciam corretas, pois estas raízes envolviam radicais negativos com índice par, o que até o momento era considerado um erro, pois não há número real que multiplicado por ele mesmo que resulte em um número negativo. Assim, a partir de expressões que envolviam uma raiz quadrada negativa parecia ilógica ou impossível. Deste desequilíbrio nascem as ferramentas e estratégias mais convenientes para a resolução e notação dos cálculos. (ROSA, 1998).

Porém, como irá apontar Caraça (1951) não é porque um problema não possui solução aparente que significa que este problema é impossível. No livro "Conceitos fundamentais da matemática" (CARAÇA, 1951), ao tratar o tema dos números complexos o autor apresenta o seguinte problema de geometria: "seja v o volume dum cubo de aresta x e v' o de um paralelepípedo retângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo. Determinar x de tal modo que seja $v = v'+1$" (CARAÇA, 1951, p. 160). Vamos traduzir este problema para a linguagem matemática:

$$v = x^3$$

$$v' = 3 \cdot x$$

É possível determinar x, de modo a obter $v = v' + 1$ (p.160)? De fato, teremos:

$$v = v' + 1$$

$$x^3 = 3x + 1$$

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

Esta equação é da forma $x^3 + ax + b = 0$ e, de acordo com Caraça (1951, p. 159), a solução de uma equação deste tipo é dada pela fórmula:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

Assim, substituindo $a = -3$, $b = -1$ nesta fórmula, obtemos:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-1)}{2} + \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-1)}{2} - \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}$$

Logo, para resolver o problema dado é preciso calcular $\sqrt{-\frac{3}{4}}$ e já vimos que, ao considerar o conjunto dos números reais esta raiz não existe. Será então que este problema é impossível? Que não tem solução? Para responder esta questão Caraça faz a seguinte observação, lembrando que se quer encontrar x que satisfaça a equação $x^3 = 3x + 1$. Tomando x=1 (uma unidade), o volume do cubo será também 1 unidade cúbica, e o volume do paralelepípedo acrescido de 1 será 4 unidades cúbicas, ou seja, $v < v'$. Se a aresta do cubo tiver 2 unidades (x=2), seu volume será 8 unidades cúbicas, e o volume do paralelepípedo, acrescido de 1, será de 7 unidades cúbicas, ou seja, $v > v'$. Logo, deve haver algum valor entre 1 e 2 para o qual $v = v'$. Caraça conclui, então, sobre a necessidade de um "novo número" que satisfaça a igualdade, um número não real.

> [...] as necessidades do cálculo ultrapassam-na; o nosso instrumento de cálculo – conjunto dos números reais – não chega; há uma raiz, e ele não permite calculá-la; há que se ir mais além. Que essa necessidade imperiosa tenha sido posta em relevo pelas equações do 3.º grau e não pelas do 2.º (nas quais, porém, o facto da impossibilidade analítica já aparecia muitos séculos antes) mostra bem que o progresso da Matemática se não realiza sempre em obediência a um plano lógico de desenvolvimento interno, mas, muitas vezes, pelas pressões exteriores, que a obrigam a procura, às apalpadelas, o seu caminho. (CARAÇA, 1951, p. 161)

Segundo Artigue & Deledicq (1992) e Rosa (1998) inicialmente os números complexos eram vistos e estavam constituídos mais como ferramentas que como objetos bem delimitados da Matemática, tendo sido por muito tempo usados para resolver problemas reais, sem a necessidade de teorização a respeito deles.

Como estamos destacando neste item a epistemologia didática dos complexos, passar por conceitos, advindos principalmente da psicologia Piagetiana e dos primeiros teóricos da Didática da Matemática, como Brousseau, se torna irremediável. O desequilíbrio cognitivo é um termo da psicologia Piagetiana e trata, entre outras coisas, dos processos de aprendizagem, como o da assimilação e da acomodação de um conceito por um sujeito, além de sua relação com o meio. Nesta abordagem, dizemos que está havendo aprendizado quando há, inicialmente, desequilíbrio cognitivo e quando novo equilíbrio é atingido.

> Historicamente, vemos um fenômeno operando aqui que é completamente paralelo aos fenômenos de desequilíbrios / reequilíbrios identificados como centrais na construção do conhecimento pela psicologia genética. Na teoria construtivista piagetiana, a construção do conhecimento resulta do processo de interação entre o sujeito e seu ambiente. Essa adaptação é produzida pelo duplo jogo de mecanismos de assimilação e acomodação, assimilação se o sujeito pode assimilar de maneira bastante direta sua experiência na interação à sua organização mental existente, acomodação se o sujeito deve modificar para levar em conta a realidade dessa organização[9]. (ARTIGUE & DELEDICQ 1992, p. 10-11 Tradução nossa)

O que Artigue e Deledicq (1992) querem dizer é que podemos trazer os termos de desequilíbrio e reequilíbrio para a epistemologia dos complexos em seus vários momentos de introdução até sua constituição como objeto. Isto é, durante o tempo ele foi passando por várias "*reequilibrações*" até se constituir como tal.

Brousseau também discutiu a dialética entre o status de ferramenta e de objeto que Douady se debruçou. Brousseau (1986) irá nos dizer que o conhecimento (ou objeto matemático, neste sentido) nasce da adaptação a uma situação específica, para resolver um problema. Uma ferramenta para resolução de um caso específico torna-se então uma regra, e passa a se estabelecer no campo de estudo como um objeto.

Como podemos observar esta caracterização entre ferramenta-objeto ganha força quando estamos falando de objetos matemáticos através do tempo, como aponta Rosa (1998, p. 12): "Ainda assim o conhecimento visado é de início chamado a funcionar como ferramenta de resolução de problema dentro da adaptação." Quando essa adaptação tem fins de aprendizado, dizemos que a ferramenta passa a ter estatuto de objeto.

Vamos agora nos ater ao último ponto, tido como importante por Artigue (1992), tendo em vista, ou refletindo sobre, as diferenças entre a lógica do ensino e a da história dos números complexos.

2.4 Introdução dos números complexos na educação básica

---

[9] On voit là fonctionner historiquement un phénomène tout à fait parallèle aux phénomènes de déséquilibrations/rééquilibration identifiés comme centraux dans la construction des connaissances par la psychologie génétique. Dans la théorie constructiviste piagétienne la construction de connaissance résulte de processus d'interaction entre le sujet et son environnement. Cette adaptation se produit par le double jeu de mécanismes d'assimilation et d'accommodation, assimilation si le sujet peut assez directement assimiler son vécu dans l'interaction à son organisation mentale existante, accommodation si le sujet doit modifier pour prendre en compte ce réel cette organisation. (ARTIGUE & DELEDICQ, 1992, p. 10-11)

As primeiras aparições do termo "Números Complexos" nos manuais didáticos brasileiros datam do início do século XX e, de acordo com Oliveira & De Gouveia Neto (2015) e Brockeld (2017), a definição para Número Complexo em manuais didáticos se deu pela necessidade de falar sobre as quantidades decimais do número.

Os primeiros livros didáticos ou manuais didáticos (como eram entendidos) segundo Brockeld (2017) e Valente (2007), como *Elementos de Arithmetica* de João José Luiz Vianna (1918); *Arithmetica Elementar Illustrada*: *Para uso dos alumnos adiantados das escolas primarias* de Antônio Bandeira Trajano (1922); *Lições de Aritmética* de Euclides Roxo (1928); *Segunda Arithmetica* de José Teodoro de Sousa Lobo (1932), trazem para o ensino de aritmética o termo número complexo para designar as quantidades "quebradas do número", isto é, para o tratamento dos conjunto dos Racionais, e não do conjunto dos Complexos.

Esta classificação que aparecera nos primeiros manuais didáticos faz todo sentido. Nessa época, estava havendo a estruturação do currículo educacional no Brasil que, segundo Valente (2007), teve como um dos seus focos os conteúdos da matemática, devido sua importância histórica para o desenvolvimento militar desde o Império. Nesta época, no Brasil não havia materiais nacionais: tinha traduções de materiais franceses. Além disso, nem o ensino secundário nem o próprio primário eram uma realidade em todo o país. A aritmética e a álgebra eram trabalhadas principalmente para as forças armadas, que usavam estas matemáticas, entre outras. Este currículo estava sendo organizado visando objetivos que ainda não estavam claros, isto é, havia a preocupação de que os conteúdos cobrados nas Escolas de Primeiras Letras e no Ensino Secundário fossem pré-requisitos para os cursos superiores que estavam surgindo nas principais metrópoles e com demandas principalmente das organizações militares.

> [...] em 1837, com o intuito de servir como modelo de escolarização secundária para o país, é criado o Imperial Colégio de D. Pedro II. [...] em seu Regulamento: a Aritmética era ensinada nos três primeiros anos do curso, seguida pela Geometria por mais dois anos, e Álgebra no sexto ano. Nos dois últimos, as matemáticas eram ensinadas sob o título de matemática. Na verdade, tratava-se do ensino de Trigonometria e da Mecânica. (VALENTE, 2007 p. 118)

A partir daí a estruturação da matemática seguiu dois caminhos, ou era o modelo de Bézout: Aritmética – Geometria – Álgebra, ou o de Lacroix: Aritmética –Álgebra – Geometria. Bézout valorizava a prática, logo, sua Geometria se utiliza mais da Aritmética, enquanto Lacroix era mais rigoroso matematicamente, para ele fazia todo sentido utilizar as ferramentas algébricas na Geometria, por isso a apresentação da Álgebra deveria anteceder a da Geometria. No colégio D. Pedro II a proposta adotada era a de Bézout até 1840, quando, após a restruturação dos conteúdos, o modelo adotado passou a ser o de Lacroix (Valente, 2007).

Sabe-se que até meados da década de 1930, a Era Vargas, havia uma demanda para que estes conteúdos fossem trabalhados, bem como havia grande importação de materiais advindos da Europa, principalmente da França. No início, os números complexos eram definidos como "números [...] que apresentam subdivisões não decimais de uma unidade principal”. (DUMONT, 1945, p. 229 *apud* OLIVEIRA & DE GOUVEIA NETO, 2018, p. 98).

> Numeração decimal é aquella que, como já dissemos, tem o número dez como base para a formação das diversas unidades. Todos os números sujeitos a esta numeração chamam-se números decimaes. Numeração complexa é a que não tem base determinada e forma as unidades de um modo irregular e variado. Todos os números sujeitos a esta numeração chamam-se números complexos (TRAJANO, 1922, p. 88 *apud* OLIVEIRA & DE GOUVEIA NETO, 2018, p. 98)

O conjunto numérico dos Complexos não apareceria nos manuais da época por algumas décadas, isto pois não havia muito sentido de este saber se fazer presente para a escolarização básica além do que não havia parâmetros de nível nacional que os trouxessem no currículo de matemática, não havia nem mesmo uma Lei de Diretrizes e Bases (LDB) que só seria proposta em 1948 e promulgada em 1961.

Com o fim da Era Vargas e do evento da 2º Guerra Mundial (1946) o Brasil buscava uma reorganização na esfera educacional, foi assim que em 1948 o então ministro da Educação, Clemente Mariani (UDN/MG) através de uma convocação de notáveis propunha o projeto de lei. Fato interessante apontado por Saviani (2019) é de que os ideais do Manifesto da Escola Nova, de 1932, predominavam na comissão de elaboração do projeto. Saviani ainda afirma que a maioria dos 16 membros da comissão pendia para o lado dos escola-novistas, com exceção de 2 deles. Isso teve profundo impacto na estruturação da LDB e consequentemente influenciou na estruturação do currículo de matemática e no ensino de números complexos, posteriormente. Os escola-novistas tinham como principais objetivos a modernização e industrialização da sociedade urbana. Na época, os números complexos já faziam parte do currículo de álgebra das escolas europeias, e estavam sendo associados principalmente ao setor tecnológico, portanto esse fenômeno ocorre no Brasil também; vale ressaltar que o país se aproximava da ditadura militar, e esses valores foram mantidos.

Na edição de 21 de dezembro de 1961 do Diário Oficial da União, era promulgada a primeira Lei de Diretrizes e Bases brasileira, com mais de 13 anos da apresentação do primeiro projeto da lei educacional. Nem mesmo as noções de matéria e disciplina estavam bem fixadas na nova cultura escolar que estava emergindo:

> De acordo com o Parecer 853/719 do Conselho Federal de Educação, de autoria do Conselheiro Valnir Chagas, o sentido dado ao termo "matéria" correspondia a um recorte que englobava algumas disciplinas que deveriam constar no currículo e separava essa versão do currículo pleno, este sim ampliado pela parte diversificada. Os conteúdos que iriam compor as disciplinas formadoras das matérias do núcleo comum (correspondendo ao conteúdo mínimo para uma formação no 1º e 2º graus), assim como a parte diversificada, eram escolhidos pelos estabelecimentos de ensino a partir da proposta fixada pelos Conselhos Estaduais de Educação, e variavam conforme as especificidades das regiões e das respectivas escolas, como exposto no Parecer 853 (DOS SANTOS, 2014, p. 157)

Basicamente isto significa que nesta época o termo matéria englobava algumas disciplinas; o termo currículo, (que seria ampliado e diversificado) fazia referência ao conjunto das matérias e disciplinas a serem ensinadas. Havia um núcleo comum que era trabalhado, ou pelo menos deveria ser, pelas instituições de ensino de forma geral, porém, a diversificação deste núcleo comum (currículo) seria escolhida e trabalhada pelas instituições de ensino, bem como norteados por parâmetros estabelecidos pelos Estados como, afirma Dos Santos (2014). Admite-se então a parte "livre", dos currículos, em que os Estados da Federação elaboram seus próprios currículos.

É importante ressaltar que neste ponto estamos no período de Ditadura Militar Brasileira, regime instaurado em 1 de abril de 1964, com a queda do então presidente eleito João Goulart, e que durou até 15 de março de 1985, sob comando de sucessivos governos militares. Os governos desse período atuavam pelo que se chama no Direito de AI – Atos Institucionais – que simplesmente eram saídas jurídicas que serviam para legitimar o governo autoritário. Mas por que isso importa? Como dito anteriormente na análise epistemológica e histórica de um conteúdo, é muito importante saber o que está acontecendo no cenário global, pois, de fato isso altera o curso normal do que está sendo desenvolvido em várias esferas da sociedade, principalmente na educação, com sua jovem LDB, que já passava por mudanças.

Ainda de acordo com o Artigo 4º da resolução nº 8 de 1971 do Parecer 853/71, tratada por dos Santos (2014), a Matemática compunha uma disciplina da matéria de Ciências, juntamente com as ciências Físicas e Biológicas.

O fato de a elaboração do currículo específico a ser ensinado ser responsabilidade das instituições de Ensino nos traz uma dificuldade a mais de responder ao certo quando os complexos entram na educação básica, com abrangência nacional. O fato é que pela valorização do nível técnico de ensino, bem como a valorização da ciência por parte dos militares em exercício, o conteúdo de números complexos (que não era o conjunto $\mathbb{C}$), um saber acadêmico, entrara na educação básica, mas não em toda ela.

Desta forma, observamos que não podemos dizer ao certo, sem uma pesquisa detalhada (que constituiria outro trabalho voltado mais para a história da educação) quando os números complexos passaram a ser ensinados na educação básica brasileira. Nossa hipótese é que esse conteúdo entrou para a educação básica brasileira em algum momento entre as décadas de 1960 e 1980. Isto pois na década de 1990, os documentos que viriam a constituir os parâmetros nacionais para estruturação de currículo, já traziam este conteúdo, o que nos leva a crer que em algum momento anterior a isto os números complexos já eram ensinados em algumas instituições de ensino – que não as de ensino superior.

O Currículo de Referência do Mato Grosso do Sul[10] de 2018, estabelece como as instituições estaduais de educação básica desenvolverão seu trabalho. Este documento entende que a escola tem uma função social, ligada a garantia de uma educação formal:

> A escola, enquanto instituição social cuja função é garantir acesso à educação formal, é o espaço em que profissionais da Educação Básica e seu público – constituído por crianças, adolescentes e jovens – promovem a socialização de informações, tradições e valores histórica e culturalmente constituídos com a finalidade de promover a construção de conhecimentos. (BRASIL, 2018, p. 21)

Para o tratamento dos conteúdos relativos à disciplina de Matemática, o Currículo Estadual traz orientações a partir do item 8.4 – MATEMÁTICA, que é subdividido em outros dois: 8.4.1 – Competências Específicas de Matemática de acordo com a BNCC (2017) e 8.4.2 – Unidades temáticas, objetos de conhecimento, habilidades e ações didáticas, dedicando então para esta disciplina da página 442 à página 491.

No Brasil, o currículo atual é estruturado a partir da BNCC. Como comentado anteriormente a BNCC substitui os parâmetros nacionais na orientação para estruturação dos currículos, que ocorrerão de forma mais específicas, atendendo as demandas da região. O objeto matemático analisado neste trabalho era explorado no final do ciclo do Ensino Médio, geralmente no quarto bimestre da terceira série, até o PNLD – 2018 que foi o último realizado

[10] O Estado de Mato Grosso do Sul é pioneiro ao organizar o seu Currículo de Referência como sendo pautado na Base Nacional Comum Curricular, com o prazo de 2 anos para que todas as escolas se adequem ao novo currículo.

sob orientação dos PCN. Nas novas orientações da base nacional não aparecem orientações específicas a respeito deste objeto.

Queremos destacar que o documento que regulamentou o ensino de números complexos como parte obrigatória do currículo das escolas no Ensino Médio Foram os PCNEM, entre os anos de 2004 e 2006, quando houve o implemento do Ensino Médio como etapa obrigatória da educação básica, pela alteração da lei 9.394/96 – Lei de Diretrizes e Base, por meio de emenda constitucional. Isto é, quando de fato este conteúdo se tornou obrigatório para os estudantes do Ensino Médio em todo país.

Podemos dizer, do período anterior a este citado no parágrafo acima, é que os complexos passaram por valorização no período do Movimento da Matemática Moderna, como aponta Valente (2007) entre os anos 1960 e 1970, quando a tendência pedagógica era principalmente a Liberal Tecnicista, que tinha como fundamento o conhecimento científico, por meio da exploração de técnicas e da exploração repetitiva de exercícios semelhantes.

Já com o fim da Ditadura Militar brasileira, novas tendências pedagógicas surgiam (SAVIANI, 2005). Com os presos do governo autoritário sendo libertados, e os exilados retornando ao país, surgia a Pedagogia Libertadora, de Paulo Freire; a Pedagogia Libertária de Celestin Freinet (entre outros); e a pedagogia crítico-social dos conteúdos. Estas tendências, entendidas como progressistas, viam o currículo com olhos de amarras. Portanto este assunto era demasiado complexo, com o perdão do trocadilho, para que se discutissem uma “norma” que amarrasse o ensino.

Até a LDB de 1996 e os PCN não havia uma política pública de currículo que definisse de maneira nacional o que deveria ser ensinado. Constatando isso, e com os PCNEM, podemos concluir que os números complexos passam a aparecer como parte do currículo obrigatório entre 2004 e 2006, com herança dessas tendências pedagógicas, vivenciadas outrora pelos professores responsáveis pela elaboração dos primeiros PCN.

3 APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

Neste capítulo discorremos sobre a Teoria Antropológica do Didático, daqui para frente TAD, trazendo alguns dos elementos que serão utilizados em nossa pesquisa. Nesta parte do trabalho ficará explícita a escolha da Teoria Antropológica para a análise de Livros Didáticos bem como os processos metodológicos envolvidos na análise. A TAD oferece tanto os aportes teóricos para uma análise praxeológica, quanto aportes metodológicos para tais fins, por ser uma teoria que permite estudar a atividade humana na construção do saber.

3.1 Proposta de trabalho e escolha das obras

Neste trabalho propomos realizar um estudo sobre a presença do conteúdo números complexos em livros didáticos do Ensino Médio. Para este estudo escolhemos analisar todas as obras aprovadas no PNLD 2018, pois, como este conteúdo não tem um tratamento extenso nesta etapa de ensino, acreditamos ser possível, no espaço de tempo de uma pesquisa de mestrado, analisar várias obras para, assim, termos uma aproximação maior com o que é proposto para alunos de escolas públicas brasileiras que usam livros do PNLD. Ou seja, estará bem mais próximo do que ocorre, em sala de aula a respeito deste saber matemático.

> Uma análise de LD descortina ao pesquisador diversas paisagens que podem ir desde o estudo da cultura escolar em uma dada época à identificação de possíveis razões de dificuldades de aprendizagem e à elaboração de sequências didáticas. Conforme o objetivo da investigação, uma ferramenta teórica pode se mostrar mais pertinente do que outra. (BITTAR, 2017, p. 366)

Uma vez identificados, em cada livro, os capítulos ou sessões nos quais este tema é proposto, procederemos sua análise à luz da Teoria Antropológica do Didático. Reiteramos que sob a perspectiva teórica da TAD conseguimos descrever os aspectos teóricos e metodológicos em paralelo. Faremos esta escolha metodológica, aqui pontuando que não é a única maneira de realizar este tipo de pesquisa. A seguir, exploraremos mais essa discussão e apresentaremos alguns conceitos da TAD.

3.2 A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Vamos iniciar refletindo rapidamente sobre o significado dos termos que constituem o nome deste aporte teórico.

A palavra Teoria tem seu próprio significado na TAD, ela "é, juntamente com a tecnologia, o *logos* de um sistema praxeológico" (CHEVALLARD, 2018, p. 21) isto é, seu cerne; a Teoria, em termos da TAD, seria o "tudo". Observando a etimologia da palavra, em grego *theorein* que tem os significados de "olhar", "observar", "contemplar" o *theoros* seria aquele que contempla, de fora, uma obra. Assim, a palavra Teoria, em si mesma, já possui um significado dual, assumindo uma dialética praxeológica entre o interior de uma obra e seu exterior (CHEVALLARD, 2018), ou seja, a contemplação de uma obra, do ponto de vista externo, e sua essência, seu logos.

Em todo campo científico de estudo existe um objeto a ser estudado – um *objeto de estudo* – e um problema a ser resolvido – um *problema de estudo* deste objeto. Na TAD não é diferente. O objeto de estudo é o Didático. Uma definição simplista do termo "didático" seria a atribuição deste adjetivo a qualquer "gesto" (nas palavras de Chevallard) que diante de uma pessoa, ou de uma instituição parece estar propenso a ajudar alguma instância a avançar, perante outra, seu conhecimento relativo a algum objeto ali presente.

O caráter *antropológico* da TAD surge como problemática antropológica do objeto *didático*. As abordagens clássicas procuram explicar os acontecimentos de uma sala de aula a partir do que os alunos realizam ou a partir das ações dos professores (ou ambos). Além de observar as condições e restrições endógenas (abordagem clássica) é também necessário considerar as condições e restrições externas ou estranhas a esse sistema: esta é uma ruptura epistemológica proposta inicialmente em 1980 por Yves Chevallard na Teoria da Transposição Didática – TTD.

Além disso, é necessário compreender que o contexto de pesquisa do didático é de onde vêm os conhecimentos. Podemos entender que os saberes, ou os modos de se fazer ou executar uma tarefa saem da sala de aula e vão para outras esferas, outros meios; por exemplo, as escolas, ou os sistemas de escolas que estão dentro do âmbito de uma instituição geradora do conhecimento "academia científica", que acaba fazendo uma interface com os sistemas de escolas e a sala de aula. Existe uma sociedade para a qual esse conhecimento é produzido e praticado, portanto existe uma esfera social, civil, que também está em conjunto com as outras esferas, como o exemplo anterior. Essa interface é chamada de Noosfera, "que significa em grego antigo, intelecto, porque é o lugar onde, em princípio, pensamos o que deve ser ensinado" (CHEVALLARD, 2018, p. 23). Segundo Verbisck (2019, p. 18):

> [...] noosfera é a parte da sociedade incumbida da inter-relação entre a sociedade e as esferas responsáveis pela produção dos saberes; nela estão inclusos os representantes e responsáveis pela elaboração de documentos e orientações para o ensino, e os resultados são vistos em documentos curriculares oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais, Referenciais Curriculares dos estados, etc.

Em um sistema didático estuda-se um saber que, embora mude de uma instituição[11] para outra, é analisado como sendo uma realidade objetiva com uma materialidade ostensiva (BOSCH & CHEVALLARD, 1999). Portanto, o saber é uma realidade com a qual uma pessoa ou uma instituição tem uma relação não vazia. Define-se, assim, a relação $R(x,o)$ de uma pessoa x com um objeto o, isto é, x conhece o se $R(x,o) \neq \emptyset$. De forma semelhante é definida a relação $R(p_I, o)$, de uma posição institucional p_I em uma instituição I a um objeto o, ou seja p_I conhece $o \Leftrightarrow R(p_I, o) \neq \emptyset$. O estudo dessas relações entre as pessoas, posições institucionais e saber são complexas, mas de forma geral basta, por ora, sabermos que um bom sujeito de uma instituição I é aquele cuja relação com os objetos de I se assemelham com as relações que I tem com esses objetos, denotamos: $\forall o, R(x,o) \cong R_I(p_I, o)$

Os conceitos fundamentais até agora são: o objeto o, a pessoa ou indivíduo x e as instituições I. Segundo Santos e Menezes (2015):

> O objeto O toma uma posição privilegiada em relação aos outros temas, em virtude de ser o "material de base" da construção teórica. Segundo o autor, tudo é objeto, e ele faz uma analogia com o universo matemático contemporâneo, fundado na teoria dos conjuntos, em que tudo é um conjunto [...] "todas as coisas serão objetos"; as pessoas X e as instituições I também são objetos, assim como as outras entidades que serão introduzidas. O objeto irá existir no momento em que for reconhecido como existente por uma pessoa X ou instituição I. [...] Ou seja, o objeto irá existir caso seja reconhecido por, pelo menos, uma pessoa X ou instituição I. (SANTOS & MENEZES, 2015, p. 649-650)

Assim, podemos exemplificar uma relação institucional com um objeto e um bom sujeito dessa instituição. Pensemos, por exemplo, em uma orquestra sinfônica; o objeto desta instituição, ao qual esta instituição se relaciona é a música clássica. Podemos denotar a relação institucional $R(I, o)$, onde I é a orquestra e o é a música. Um músico que queira fazer parte desta instituição – uma pessoa x – terá que se adequar a posição p_I de forma a se relacionar com o, da mesma forma, ou muito próxima, à relação que I tem com o neste caso, haja vista que x precisa ser um bom sujeito de I para poder fazer parte de I. Este é um exemplo de como seria denotado um bom sujeito de I, porém não há um paralelo exato com a instituição escola, isto pois na instituição orquestra, aquele que não for considerado bom sujeito de I não poderá fazer parte dela.

---

[11] Chevallard trata este termo de maneira bem definida; é um importante termo da Teoria Antropológica que trataremos adiante. E o que é? Falar que é importante não é suficiente.

3.3 Dispositivo social total

Dos termos teóricos tratados até o momento, podemos dizer que os principais trazidos por Chevallard e colaboradores são quatro: *objeto*, *relação* pessoal ou institucional *com um objeto*, *pessoa*, e, por fim *instituição*.

Como dito anteriormente, a noção de objeto é pautada em algo existente em uma instituição, ou que habita uma instituição qualquer, fruto da atividade humana. Para que uma instituição se configure como tal é necessário que seus sujeitos estejam bem definidos: uma instituição é legitimada por pessoas[12] e/ou sujeitos, e para tanto, quem seriam os sujeitos ou pessoas do LD? Kaspary (2019) afirma que podemos nos guiar para compreender o conceito deveras entrelaçado entre instituição, objeto e relações institucionais com esse objeto, pensando na seguinte questão: “em quais instituições, para quem e em quais condições um objeto existe ou pode vir a existir?” (KASPARY, 2019, p. 231)

Uma autora que contribui para entendermos instituições, inclusive na qual Chevallard se apoiou para elaborar este conceito de instituição, é a antropóloga americana Mary Douglas, que se apoiou, entre outros, nos estudos de grupos sociais de Durkheim e Fleck. De acordo com Douglas (1998) não é qualquer ônibus lotado ou feira de domingo que pode ganhar o nome de instituição legítima; para que um grupo social (convenção) possa ser considerado como instituição é necessário que tenha característica de convenção cognitiva.

> [...] uma instituição não passa de uma convenção. [...] uma convenção surge quando todos os lados têm um interesse comum na existência de uma regra que assegure a coordenação, quando nenhum deles apresenta interesses conflitantes e quando nenhum deles se desviará, a menos que a desejada coordenação se tenha perdido (Lewis 1968). Assim, nessa medida, por definição, uma convenção se autopolicia. [...]. As comunidades não crescem, transformando-se em pequenas instituições e essas não se transformam em grandes instituições seguindo qualquer processo contínuo. Para que uma convenção passe a ser uma instituição social legítima é necessária uma convenção cognitiva paralela que lhe dê apoio. (DOUGLAS, 1998, p. 57-58).

Douglas (1998) utiliza o termo instituição como agrupamento social legitimado, criada para resolver algum problema do grupo social. Uma instituição, de acordo com a autora, pode ser a família (com a autoridade legitimadora sendo o pai ou a mãe) ou um jogo (onde a autoridade legitimadora seja o juiz). Também pode ser difusa, desde que baseada no desejo comum de um ou outro princípio inicial.

---

[12] Em termos de TAD “a pessoa X torna-se sujeito de I, quando se ¨sujeita¨ a I. ¨O objeto O começará a ‘viver’ para X sob a restrição da relação institucional R_I (O).” (CHEVALLARD, 1992, p.89). Ou seja, estar na posição de sujeito de uma instituiçao implica assujeitamento.

O autopoliciamento institucional (que consiste na autorregulamentação institucional, que irá delimitar as relações institucionais, se elas estão ocorrendo de acordo com as regras estabilidades, e se os sujeitos de *I* estão se relacionando com seus objetos de forma semelhante à que *I* se relaciona), característica destacada pela antropóloga, será muito importante para entendermos alguns termos da TAD, como, por exemplo, o indivíduo que se torna “bom sujeito” ou “mau sujeito” de uma instituição *I*. O indivíduo não é bom ou mau em si, mas quanto mais sua relação com os objetos de *I* for semelhante às relações de *I* com os mesmos, isto é, quanto mais ele se aproximar da convenção cognitiva de *I*, *melhor* sujeito desta instituição ele será. Migramos de convenções sociais durante toda a vida buscando convenções cognitivas mais adequadas com a evolução ou retrocesso do pensamento pessoal. As expressões “bom sujeito” ou “mau sujeito” de *I* significam ser adequado ou não à instituição à instituição. Quanto mais adequado à I, o sujeito “assujeita-se” às regras institucionais de *I* e se relaciona com seus objetos, quanto menos adequado à I, ocorre o oposto.

Para Chevallard, somos resultado de todos os “assujeitamentos” institucionais aos quais fazemos parte desde o nascimento. O teórico defende a ideia de que ao nascermos, estamos inicialmente sujeitos à instituição família, à instituição linguagem (da família), posteriormente, à instituição escola, e a partir daí todas as instituições que compõem os quadros sociais da *noosfera*. Nas palavras do autor,

> Uma instituição *I* é um dispositivo social, “total”, que certamente pode ter pequenas extensões no espaço social [...], mas que permite – e impõe – à seus *sujeitos*, isto é, às pessoas *x* que ocupam diferentes posições *p* ofertadas em *I*, a implementação de maneiras de fazer e pensar próprios – ou seja, as *praxeologias*. (CHEVALLARD, 2018, p. 32)

Desta forma, podemos pensar que a sala de aula é uma micro-instituição da instituição escola, na qual as posições essenciais são a do professor e do aluno. Podemos entender as maneiras como se dão a implementação das formas de fazer e pensar nesses ecossistemas, escola e sala de aula. Na perspectiva teórica da TAD a aprendizagem é entendida como sendo a modificação da relação de um sujeito a um objeto do saber, ou seja, a relação de x a um objeto O em um instante é diferente de sua relação a este objeto em um instante posterior. Porém, neste trabalho não estamos interessados em estudar a aprendizagem; nosso foco é estudar que matemática, relativa ao conjunto dos números complexos, é proposta para ser ensinada no ensino médio. Como esta realidade pode ser investigada? A resposta fornecida pela TAD é dada pelo quarteto praxeológico que passamos a apresentar a seguir.

3.4 Praxeologias

O conceito de praxeologia está relacionado às instituições que impõem certas formas de pensar e fazer aos seus sujeitos em uma posição *p* em *I*. (CHEVALLARD, 2018)

Primeiramente, é importante definir o conceito de tarefa trazido na Teoria[13]. Este conceito é entendido como sendo as situações a serem realizadas. Estas situações estão presentes em muitas atividades que desenvolvemos durante nosso dia. Por exemplo, quando vamos dirigir até o centro de nossa cidade, há certas maneiras de se fazer isso, dentro da instituição “trânsito local”; há também tarefas em torno da atividade “dirigir um carro” tais como ligar os faróis, dar a seta quando for fazer uma curva, parar ao sinal vermelho, etc. Em torno dos tipos de tarefas (T), desenvolvidas dentro de uma determinada instituição, nasce uma organização praxeológica (CHEVALLARD, 1998).

> [...] o modelo praxeológico proposto para descrever qualquer atividade, matemática ou não [...] é composto por: tipo de tarefas T; técnicas que resolvem as tarefas desse tipo; tecnologia (θ) que justificam a técnicas e garantem sua validade, e, finamente, a teoria (Θ) que justifica a tecnologia. Esse quarteto praxeológico é denotado [T, τ, θ, Θ]. O bloco [T, τ] é denominado de prático-técnico, ou bloco do saber-fazer; e o bloco [θ, Θ] é denominado bloco tecnológico-teórico ou bloco do saber. (BITTAR, 2017, p. 367)

Em análises diversas encontraremos muitos tipos de tarefas (T) em relação a um objeto. Por exemplo, um tipo de tarefas T como no exemplo anterior: dirigir um carro. Dentro deste tipo de tarefas T podemos diferenciar alguns subtipos, Ti. Isto porque, por mais que “dirigir um carro” seja uma tarefa genérica, dirigir um carro de câmbio automático é diferente de dirigir um carro de câmbio manual que, por sua vez, é diferente de dirigir um carro adaptado. Neste exemplo temos, dentro do tipo de tarefas T: dirigir um carro, as tarefas T_1: dirigir um carro automático e T_2: dirigir um carro manual.

Para cada tarefa ou tipo de tarefas é necessário uma maneira de resolver ou realizar esta tarefa. Este é o conceito de técnica. Uma técnica para dirigir um carro pode ser ligar com a chave, colocar as mãos no volante e acelerar. A técnica para T_1 será diferente da técnica para T_2, pois além de entrar no carro, dar partida e acelerar, há especificidades nestas tarefas

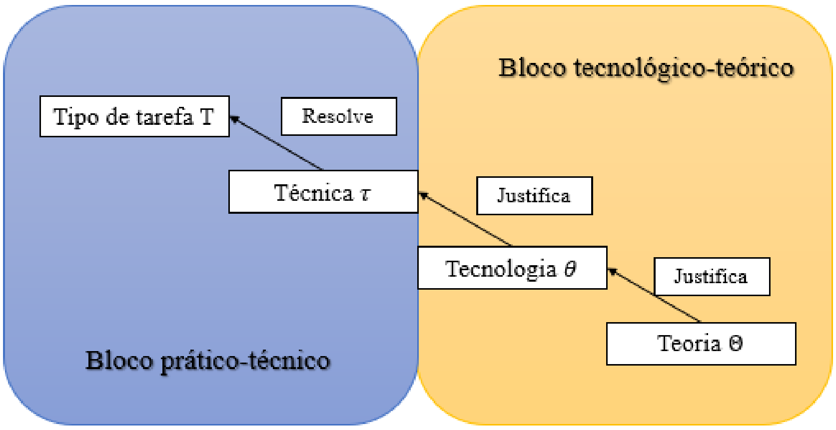
---

[13] Sempre que a palavra “Teoria” estiver com letra maiúscula ela é equivalente à TAD.

que necessitam de técnicas diferentes para sua execução. Para carros manuais, a técnica mobilizada envolve o controle da embreagem, o que não ocorre com o carro automático (e para carros adaptados serão necessários controle sobre mecanismos específicos, e para tal técnicas ainda mais específicas).

Tanto a técnica de resolução de T_1 quanto a técnica de resolução para T_2 são justificadas por um discurso que as legitimam. O motivo de algo ser feito da maneira como é feito – de uma técnica ser empregada para resolver uma determinada tarefa – é entendido em termos de TAD como sendo a tecnologia. A tecnologia está em um nível de saber mais elevado, pois, justifica o modo como as tarefas são realizadas, a maneira como são realizadas. Por fim temos ainda o termo teoria, que é um nível acima da tecnologia. Chevallard (2018) trata teoria como um saber que justifica a tecnologia.

Figura 2 - Esquema de modelo praxeológico



Fonte: própria

Nesta proposição de modelo praxeológico, conseguimos separar as atividades humanas que são modeladas em um quarteto no qual identificamos dois blocos: saber-fazer e saber. Ao escrever primeiramente suas proposições sobre a Transposição Didática, Chevallard (1991) chamou esse segundo grupo de saber sábio, referindo-se a um saber científico, ou um conhecimento instituído, diferente daquele presente no saber fazer. O conhecimento existente em uma instituição irá perpassar ambos os grupos migrando de uma esfera institucional para outra, sofrendo transformações com o objetivo de tornarem-se inteligíveis nas instituições que habita.

Analisar as praxeologias que vivem em uma instituição identificando os blocos prático-técnico (saber-fazer) e tecnológico-teórico (saber) possibilita estudar se há uma valorização de um dos blocos em detrimento do outro e, assim, verificar, dentre outras coisas, quais saberes estão sendo mobilizados ali, além do perfil da instituição ao valorizar conhecimentos técnicos ou conhecimentos teóricos. Por exemplo, podemos dizer que um LD tem uma perspectiva mais tecnicista quando nele houver uma valorização maior do bloco prático-técnico. Quando é trazida uma grande valorização do bloco do saber, diremos que nele há uma tendência teoricista.

Falamos até agora sobre a praxeologia e os dois blocos; do saber-fazer e do saber (em alguns trabalhos o bloco do saber é denotado como "saber sábio"). O bloco do saber é onde ocorre a teorização de algo, por exemplo, uma descoberta inovadora na academia científica. Desenvolvido o saber, é necessária uma "tradução" deste para que este saber possa existir em uma outra instituição, por exemplo, a escola (ou outra instituição).

> Para Chevallard todo saber é saber de uma instituição[8], assim, o saber não existe no vácuo, isolado. Além disso, este saber sofre transformações adaptativas conforme a instituição em que vive. Este processo de transformações é denominado transposição didática (Chevallard, 1991). Cada instituição tem um conjunto de condições e restrições que devem ser respeitadas para que um certo saber possa existir nesta instituição (BITTAR, 2017 p. 366)

Desta forma, temos o quarteto praxeológico [T, τ, θ, Θ] proposto por Chevallard (1999). A partir de agora iremos falar sobre dois ingredientes essenciais deste quarteto que de certa forma viabilizam o mesmo, que são os objetos ostensivos e os não ostensivos.

3.5 Objetos Ostensivos e Objetos não-Ostensivos

De acordo com Chevallard (1999) qualquer produto da atividade humana é um objeto material ou imaterial. Esse conceito é a base fundamental para o desenvolvimento da Teoria. Consideramos importante essa pontuação pois, como apontado pelo próprio autor, um objeto não existe no "nada", ele existe a partir de uma ação humana, bem orientada em uma instituição, seja uma *macro instituição* ou *micro instituição* que vai guiar as formas de se fazer e saber fazer dentro delas.

Quando estamos trabalhando com os conceitos matemáticos, estamos manipulando entidades imateriais, denominadas objetos não-ostensivos, e para realizar tal manipulação é preciso fazer uma representação desse conceito, representação esta que pode ser variada, como uma figura, um símbolo, uma expressão, entre outros, denominados objetos ostensivos.

De acordo com Bittar (2017), objetos ostensivos são aqueles que têm caraterísticas sensíveis, ou materiais, ou seja, são dotados de uma realidade perceptível, que podem ser percebidos por algum dos órgãos dos sentidos, inclusive a audição. Já os objetos não-ostensivos são como as ideias, ou pensamentos, coisas que não são tangíveis, que só podem ser descritos por meio de objetos ostensivos, como a escrita, uma representação simbólica ou um desenho. Um exemplo de objeto não ostensivo é o conceito de número que existe porque demos sentido a ele e o representamos por meio de algum sistema de representação como o sistema indo-arábico, o romano, o maia ou simplesmente pela língua materna. Por exemplo, 12, XII, , doze, são objetos ostensivos que representam a ideia de um número.

Ao modelar as praxeologias propostas em LD é necessário estudar os ostensivos e não-ostensivos mobilizados pelos autores dos livros, como veremos na análise que realizamos.

3.6 Organização Matemática e Organização Didática

Para a TAD toda atividade humana pode ser modelada por meio de uma praxeologia (o quarteto praxeológico, apresentado no item 3.5). Passar roupa, dirigir um carro, usar um computador ou mesmo “dar uma aula” são atividades humanas, logo possíveis de serem modeladas por meio de um quarteto praxeológico.

No decorrer de uma aula o professor se depara com certas situações e deve realizar determinadas escolhas. Por exemplo, um professor do ensino fundamental irá ensinar uma turma de oitavo ano sobre congruência de triângulos. Nesta turma ele irá optar por uma abordagem mais construtivista, trazendo situações sobre o conteúdo ou simplesmente apresentará os casos de congruência seguidos de exemplos de uma forma mais tradicional? Durante o processo de elaboração e aplicação da aula, o professor faz escolhas matemáticas e escolhas didáticas a respeito desta aula. As escolhas didáticas também podem ser modeladas por uma praxeologia, uma vez que são atividades humanas, e, nesse caso, trata-se da praxeologia didática, ou organização didática (OD):

> O estudo dessa praxeologia é fundamental nas análises de livros didáticos, haja vista que uma organização didática está diretamente relacionada aos paradigmas de aprendizagem do “sujeito autor” da praxeologia. Gascón (2003) discute possíveis formas de OD, partindo de três modelos: teoricista, tecnicista e modernista. (BITTAR, 2017 p. 368)

Podemos compreender que na TAD há dois aspectos das atividades humanas de certa forma complementares, o aspecto estrutural descrito pelas praxeologias, e o aspecto funcional que pode ser analisado por meio do que Chevallard (1999) chama de momentos didáticos. De acordo com o autor os momentos didáticos são seis: o *primeiro encontro* com o conteúdo; o segundo momento é a *exploração de um tipo de tarefas T e elaboração de uma técnica* para resolver este tipo de tarefas; o terceiro momento é caracterizado como *constituição do bloco tecnológico-teórico*; o quarto momento é o *refinamento da técnica*; o quinto momento é o de *institucionalização*; e o sexto momento é o de *avaliação*. Destacamos que estes momentos não são temporais, não seguem, necessariamente, a ordem aqui enunciada. Os dois últimos momentos didáticos estão entrelaçados, pois, de acordo com Chevallard (1999, p. 244-245) o momento de institucionalização é onde aquilo que está sendo estudado ganha status de válido. É também onde ocorre a proximidade com o conhecimento matemático e o reconhecimento dos elementos que compõem definitivamente a organização matemática. O momento de avaliação é o momento determinante na relação do objeto e o sujeito, ou seja, avalia toda a organização do conhecimento, ou em outras palavras o sucesso da organização matemática (ou seu fracasso).

Conseguimos então caracterizar a praxeologia matemática, ou Organização Matemática (OM) que nada mais é que a organização em volta dos conteúdos relativos à matemática em si; enquanto as praxeologias didáticas, ou Organização Didática (OD), são as escolhas didáticas feitas pelo professor ou pelo autor de um LD para apresentar determinado saber. Uma observação apontada por Bittar (2017) é de que uma mesma OM com duas OD diferentes leva a diferentes aprendizados. Isto é, se tivermos em duas instituições, por exemplo, 6° ano A e 6° ano B, dois professores dando aula de um mesmo tema e, se modeladas as praxeologias matemáticas estas forem iguais, porém com organizações didáticas diferentes, então há maior probabilidade de estas escolhas gerarem diferentes aprendizados.

Na perspectiva teórica da TAD o conhecimento é fruto da atividade humana e deve ser analisado em termos de organizações matemáticas (OM) e organizações didáticas (OD):

> A organização matemática é o estudo em torno da Matemática; e a organização didática é o estudo do modo como são apresentados e estruturados os saberes matemáticos que compõem a praxeologia. Em consonância com o quadro teórico da TAD realizamos [...] uma análise da organização matemática e da organização didática propostas em livros didáticos, o que significa, em resumo, investigar o que é e como é proposto o ensino das operações de adição e subtração dos números naturais (KASPARY, 2014, p. 39)

De forma resumida, podemos diferenciar os termos de organização matemática e organização didática dizendo que:

> Falamos sobre praxeologia matemática – ou organização matemática (OM) – quando os tipos de tarefas T vêm da matemática, e de praxeologia didática – ou organização didática – quando os tipos de tarefas T são tipos de tarefas de estudo. (CHAACHOUA & BITTAR, 2018)

Até aqui podemos destacar que o estudo sobre os tipos de tarefas, das técnicas necessárias para a resolução destas tarefas, das tecnologias e talvez das teorias possibilitará, além do estudo das praxeologias didáticas, fornecer dados para dar clareza quanto a intencionalidade da instituição LD para com o objeto “números complexos”.

Antes de prosseguirmos com a análise e com outros termos da Teoria como tipos de tarefas Ti ou subtipos de tarefas Tij, é importante ressaltar, do ponto de vista da TAD o que se constitui como Tarefa. Chevallard comenta que uma tarefa está sempre associada a um verbo, por exemplo: calcular, resolver, simplificar. Trazendo para o nosso tema de estudo, um tipo de tarefa que pode surgir é: “somar com números complexos”. Para a resolução de tarefas, é necessário um modo de fazer, certo? Este “modo” é, em termos de TAD, a técnica utilizada e assim por diante.

Poderemos, através desta análise, elaborar uma tabela quantitativa, e ver, por exemplo, quantas vezes um tipo de tarefas T_1 aparece, em detrimento de outra T_2. Isto poderá nos fornecer dados para entender os objetivos que os livros didáticos têm como tendência e talvez observar o modelo dominante presente nessas obras, como apresentado em Terêncio & Bittar (2020).

4 ANÁLISE DE DADOS

Vamos modelar as praxeologias presentes nas obras aprovadas no PNLD 2018 e, para isso, procuraremos compreender, a partir da quantidade e qualitativa de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, qual o modelo dominante presente neste PNLD. Ao final será trazida uma tabela de dados para resumir a visão encontrada nesta análise.

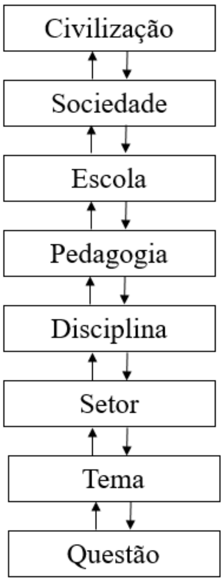
4.1 A instituição do LD: PNLD – MEC ou FNDE?

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático – PNLD –, criado em 1985 pelo governo federal, regulamenta a distribuição de material didático e sua estruturação de acordo com a demanda do país levando em conta as normas pedagógicas estabelecidas.

O Programa Nacional do Livro e do Material Didático também teve seu alcance ampliado com a possibilidade de inclusão de outros materiais de apoio à prática educativa além dos livros didáticos. Ocorreu o acréscimo de: obras pedagógicas, softwares e jogos educacionais, materiais de reforço e correção de fluxo, materiais de formação e materiais destinados à gestão escolar. A instituição PNLD habitava na macro instituição Ministério da Educação (MEC), até o ano de 2018. Com a mudança de governo do presidente Michel Temer do MDB, com início em 12 de maio de 2016 (através da deposição da presidenta Dilma Rousseff) para o governo Bolsonaro do PSL em janeiro de 2019, o PNLD passou a habitar a plataforma do FNDE.

Fazer esta discussão sobre onde a instituição "habita" é importante – isso nos permite entender quais as condições e restrições impostas ao saber de acordo com a *I* que este habita, o que nos leva à uma discussão ecológica do saber – quando analisamos os níveis de *co-determinação didática*, apresentados por Chevallard (2002). Essa terminologia seria dada pelo autor à relação entre a OD e a OM. Para ser explicada, Chevallard se utiliza de termos da biologia, como ecossistema, nicho, ecologia, entre outros. Chacón (2008) define a co-determinação didática como um fenômeno em que fazem parte as restrições e condições pelas quais a OM e a OD serão organizadas nas instituições. Chaachoua & Bittar (2018) afirmam que o conceito de níveis de co-determinação representa "uma escala para identificar as condições e restrições que são presentes na difusão de saberes e que permitem estabelecer relações com os diferentes níveis de determinação" (CHAACHOUA & BITTAR, 2018, p. 34). De acordo com Chevallard (2002) os níveis são: civilização, sociedade, escola, pedagogia, disciplina, setor, tema, assunto; como mostra o esquema a seguir:

Figura 3 - Níveis de co-determinação didática.



Fonte: Chevallard (2002) apud Chaachoua & Bittar (2018)

O LD atravessa estes níveis de co-determinação; é uma questão da política pública brasileira, permeando o nível de sociedade (brasileira); atravessa o nível da escola, pedagógico. De forma geral, o nível em foco de um objeto que irá ser estudado é o da disciplina, mas esse nível sempre estará em constante contato com os acima e os abaixo dele (CHAACHOUA& BITTAR, 2018). O LD representa uma importante ferramenta para a educação básica, logo, observar os movimentos que ele faz nestes diferentes níveis é entender o que pode acontecer com este programa, tão importante para a Educação no Brasil.

Como dito no item 2.1 deste trabalho escolhemos trabalhar com as obras aprovadas no PNLD – 2018[14] que são os descritos na Tabela 1:

---

[14] A avaliação de livros didáticos, proposta no PNLD, é realizada para cada nível escolar a cada 3 anos. Assim, o de PNLD/2018 corresponde a avaliação mais recente no Ensino Médio. Para o ano de 2021 os livros a serem comprados para este nível de ensino deverão passar por nova avaliação.

Tabela 1: Livros didáticos aprovados no PNLD – 2018

Editora	Índice	Título da obra	Autor(es)
Editora Ática	LD1	**Matemática - contexto & aplicações**	Luiz Roberto Dante
SM	LD2	**Quadrante matemática**	Diego Prestes; Eduardo Chavante
Saraiva Educação	LD3	**Matemática: ciência e aplicações**	David Degenszajn; Gelson Iezzi; Nilze de Almeida; Osvaldo Dolce; Roberto Périgo
Saraiva Educação	LD4	**Matemática para compreender o mundo**	Kátia Stocco Smole**;** Maria Ignez Diniz
LEYA	LD5	**Matemática: interação e tecnologia**	Rodrigo Balestri
FTD	LD6	**#contato matemática**	Jacqueline Garcia; Joamir Souza
MODERNA	LD7	**Matemática Paiva**	Manoel Paiva
MODERNA	LD8	**Conexões com a matemática**	Fabio Martins de Leonardo

Fonte: PNLD 2018 / portal do FNDE

Reiterando o método, Bittar (2017) sugere que para a análise de LD é importante dividir o livro em parte *curso* e parte *atividades propostas*; parte curso é tudo o que não é atividade proposta. Para analisar a OM olhamos parte curso e parte atividades resolvidas;

> Para a modelagem da OM é realizada uma leitura, linha por linha, da *Parte Curso*, sem esquecer os boxes tão comuns em LD brasileiros e que podem dar a impressão de trazerem informação extra, talvez não necessário. [...] Assim, a leitura para a elaboração do quarteto praxeológico matemático deve ser feita levando em consideração todos os elementos de cada página do livro, entretanto nem todos serão considerados na modelagem realizada. Na Parte Curso, uma tarefa nem sempre é apresentada explicitamente; muitas vezes o estudo de um determinado conteúdo é proposto por meio de atividade resolvida, como, "Vamos estudar como calcular a altura de um prédio" (BITTAR, 2017 p. 374)

Para atingir nossos objetivos de pesquisa vamos fazer o estudo da organização didática e da organização matemática propostas no LD relativa ao conteúdo Números Complexos. Usaremos como aporte metodológico de classificação de tarefas e técnicas da TAD, que foram descritos no capítulo anterior. Faremos uma análise fina a respeito das tarefas, e técnicas presentes nos LD que movem o conceito de complexos, observando também o bloco tecnológico-teórico, o bloco do saber. Com isso queremos mostrar como tem sido o a proposta deste conteúdo no Ensino Médio, para então posteriormente procurarmos responder, a partir das nossas reflexões baseadas na TAD e na DFO, além do estudo histórico-epistemológico, porque se ensina esse conteúdo neste nível e Ensino.

4.2 Análises das praxeologias matemáticas

Ao estudar as obras a serem analisadas constatamos que das oito obras aprovadas no PNLD 2018, uma delas não apresenta o conteúdo de números complexos enunciado como capítulo ou sessão, o Livro Matemática Paiva, de Manoel Paiva. Em nenhum dos três volumes desta coleção este objeto matemático foi apresentado, logo, ela foi excluída desta análise.

Para tal, a seguir escolhemos duas obras para detalhar o processo de construção didática que o LD realiza em torno do conjunto dos complexos, isto é, a organização matemática e a organização didática do conteúdo, nessas duas obras.

Essa escolha se justifica pois queremos demonstrar como são modeladas a OM e a OD de LD que partem do mesmo ponto de questionamento, mas que evoluem por caminhos diferentes: uma que apresenta o conteúdo de números complexos antes do conteúdo de polinômios e equações polinomiais e outra que faz o contrário. Quando pensamos no primeiro caso podemos inferir que o trabalho deste conteúdo antes do trabalho com polinômios confere ferramentas para o desenvolvimento de raízes complexas de polinômios de grau n. Mas quando acontece o contrário, qual seria a razão dessa escolha que pode apresentar, como consequência, diferentes organizações matemáticas? As duas obras analisadas neste momento são: "Matemática, conceitos e aplicações v.3" – Luiz Roberto Dante e "Matemática para compreender o mundo v.3" – Kátia Stocco Smole; Maria Ignez Diniz. Inferimos que esta análise pode nos ajudar a modelar as praxeologias e verificar como elas evoluem em cada caso além de nos possibilitar ter clareza sobre nosso objetivo principal que é a razão de ser desse conteúdo no Ensino Médio.

Ao final, traremos os dados a respeito do bloco prático-técnico em torno dos complexos nas sete obras do PNLD 2018. Isto pois queremos ter uma ideia de como os complexos são ensinados a partir da análise de LD. Porém, consideramos que no corpo do texto deste trabalho a análise fina de duas obras corroboram o tipo de pesquisa que realizamos, e como organizamos nossos dados em torno das sete obras, a fim de não termos uma leitura cansativa e demasiado extensa, a respeito do mesmo tipo de análise.

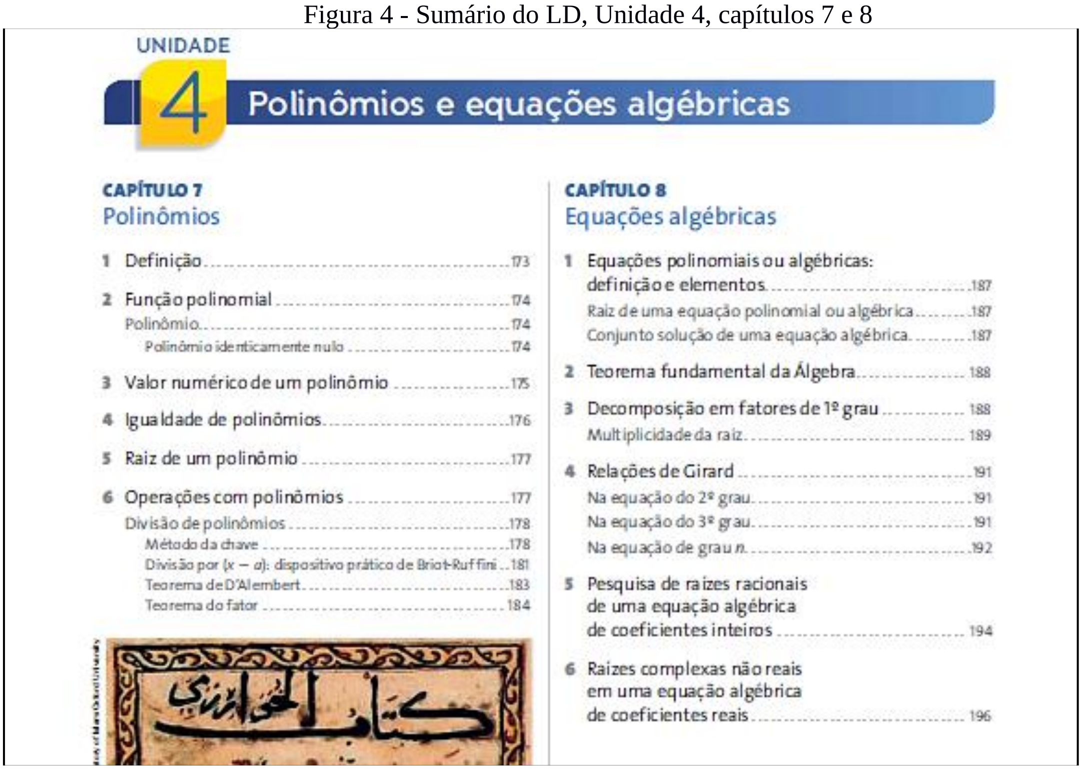
Como já foi apontado, nossa análise buscou ser baseada no que é proposto pelo LD e propositalmente descritiva, isto pois queremos desvendar o currículo *real* – que de acordo com Bittar (2017) pode ser revelado, dentre outros métodos, a partir da análise de LD – e determinar qual o modelo dominante de ensino deste conteúdo.

4.2.1 LD1: Matemática, conceitos e aplicações v.3 – Luiz Roberto Dante

O Livro é dividido em quatro Unidades, separando o tratamento do assunto a ser trabalhado em cada Unidade. A primeira trata de Matemática Financeira e Estatística; na Unidade 2 é apresentada a Geometria Analítica: ponto, reta e circunferência; a Unidade 3 é dedicada ao estudo de Cônicas e de Números complexos; e, por fim, na Unidade de número 4 ocorre o estudo de Polinômios e Equações algébricas, onde o conteúdo de números complexos volta a aparecer, desta vez como ferramenta, no Teorema Fundamental da Álgebra (TFA), nas relações de Girard e nas fórmulas de Moivre.

Neste LD o conteúdo dos números complexos ocorre em dois momentos: na Unidade 3 "Cônicas e números complexos" mais especificamente no *capítulo 6* "números complexos", dedicando-se por 25 páginas para o tratamento deste conteúdo. Depois ele retorna no capítulo 8 da unidade 4, "Equações Algébricas" (figura 4) sendo o último conteúdo do LD.

Figura 4 - Sumário do LD, Unidade 4, capítulos 7 e 8


UNIDADE 4
Polinômios e equações algébricas

CAPÍTULO 7
Polinômios

1 Definição ... 173
2 Função polinomial ... 174
Polinômio ... 174
Polinômio identicamente nulo ... 174
3 Valor numérico de um polinômio ... 175
4 Igualdade de polinômios ... 176
5 Raiz de um polinômio ... 177
6 Operações com polinômios ... 177
Divisão de polinômios ... 178
Método da chave ... 178
Divisão por $(x - a)$: dispositivo prático de Briot-Ruffini ... 181
Teorema de D'Alembert ... 183
Teorema do fator ... 184

CAPÍTULO 8
Equações algébricas

1 Equações polinomiais ou algébricas: definição e elementos ... 187
Raiz de uma equação polinomial ou algébrica ... 187
Conjunto solução de uma equação algébrica ... 187
2 Teorema fundamental da Álgebra ... 188
3 Decomposição em fatores de 1º grau ... 188
Multiplicidade da raiz ... 189
4 Relações de Girard ... 191
Na equação do 2º grau ... 191
Na equação do 3º grau ... 191
Na equação de grau *n* ... 192
5 Pesquisa de raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros ... 194
6 Raízes complexas não reais em uma equação algébrica de coeficientes reais ... 196

Fonte: Matemática, conceitos e aplicações v.3, 2018, p. 8

Queremos destacar dois pontos. O primeiro é que esta obra (assim como as outras que analisaremos a seguir) aborda o conteúdo em dois capítulos. O segundo ponto diz respeito a posição deste conteúdo no ciclo: mesmo que o autor do LD queira trazer um estudo detalhado sobre os números complexos, a posição do mesmo como último conteúdo a ser estudado, levando em conta esta organização didática do livro e o fato de este conteúdo não ser mais conteúdo fixo na matriz do ENEM, podem indicar que este conteúdo poderá ser negligenciado ou é um fato a ser pensado quando refletimos sobre o que ocorre, de fato, em sala de aula.

Além dos momentos destacados em que ocorre o tratamento deste conteúdo no LD, também devemos nos atentar ao fato de algumas atividades serem modeladas "fora" destes campos. Ao final de cada Unidade ou Capítulo o autor dedica um espaço para alguns campos extras. No capítulo 6, que encerra a Unidade 3 deste LD, o autor traz três seções extras de estudo: *Leitura*, *Pensando no Enem* e *Vestibulares de Norte a Sul*.

Leitura, segundo Dante, é um espaço reservado para "textos que visam ampliar e enriquecer o conteúdo estudado no capítulo" (DANTE, 2018, p. 5). Nesta seção o autor opta por trazer algumas curiosidades históricas sobre o desenvolvimento do conjunto numérico que hoje chamamos de números complexos, como o fato de existir uma disputa sobre a resolução de equações de grau 3 entre Tartaglia e Girolamo.

A seção "*Pensando no Enem*" é ocupada por "atividades contextualizadas que visam o desenvolvimento das competências e habilidades previstas na Matriz do Enem" (DANTE, 2018, p. 5). Isto é importante, pois, como vimos, a Matriz do Enem já não especifica o tratamento de números complexos em seus exames. Neste campo são trazidas atividades de cônicas e de números complexos – que serão analisadas.

Na seção "*Vestibulares de Norte a Sul*" o autor se dedica mais uma vez em trazer atividades extras a respeito dos conteúdos estudados, porém com foco nos vestibulares julgados mais importantes e/ou populares do Brasil, isto é, são "questões de vestibulares, de todas as regiões geográficas do Brasil relacionadas aos conteúdos estudados." (DANTE, 2018, p. 5).

Durante o desenvolvimento do conteúdo dentro do capítulo, podemos dividir os exercícios em dois grupos. A primeira a ser explorada são os Exercícios Resolvidos, que segundo o próprio autor é um campo que visa a resolução detalhada do exercício, porém que não tem a intenção de servir como modelo, mas sim inspirar resoluções e estratégias para os alunos. O segundo é o campo de Exercícios Propostos, que, nas palavras do autor são "essenciais para a aprendizagem. Ajudam a fixar e aprofundar os conteúdos estudados." (DANTE, 2018, p. 4). Fato a ser posto em evidência é que o autor sugere que muitos desses exercícios sejam realizados em duplas – na análise das atividades ficará claro como o autor sugere isto - indicando além de uma OM do conteúdo uma OD já que propõe, de certa forma, uma maneira de fazer.

Por fim, achamos importante destacar que durante todo o trabalho com o conteúdo são trazidos alguns *cards* que recebem o título de "*Para Refletir*", "*Fique Atento*" ou "*Você Sabia*". Sua finalidade é chamar a atenção do estudante para um fato ou dar dicas para o estudo.

4.2.2 Organização do conteúdo: CAPÍTULO 6 - Números complexos

Neste LD o autor começa por trazer um estudo acerca dos conjuntos numéricos – *Retomando: conjuntos numéricos* – onde brevemente será trazido no texto uma definição de cada conjunto numérico para chegar a uma importante definição de que um conjunto numérico está contido em outro, vide a figura 5.

Figura 5 - Definição de conjuntos numéricos

Da união dos racionais com os irracionais surgem os números reais ($\mathbb{R}$):

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}r$$

Portanto, podemos identificar $\mathbb{N}$ como uma parte de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ como uma parte de $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Q}$ como uma parte de $\mathbb{R}$ e escrever:

$$\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geqslant 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

e não existe um número real x que elevado ao quadrado resulte -1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos.

Fonte: DANTE (2018 p. 145; grifo nosso)

O primeiro encontro com os números complexos é realizado por meio do anúncio de uma necessidade. E este momento prossegue com uma argumentação sobre algumas condições que este novo conjunto deve satisfazer e o fato de que este novo conjunto deve conter o conjunto dos números reais:

> O conjunto C é um conjunto cujos elementos — os números complexos — devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e também possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Logicamente, os números reais precisam ser elementos desse conjunto C, e as operações de adição e multiplicação realizadas com os números reais no conjunto C devem ser as mesmas já conhecidas. Note que, se isso não fosse observado, o conjunto R não seria um subconjunto de C. (DANTE, 2018, p. 146)

O momento de exploração de um tipo de tarefas T é um momento didático em que as primeiras técnicas para resolução de tipos de tarefas que definimos como T_1 são apresentadas. A partir do questionamento sobre a não existência de um número real que elevado ao quadrado resulte em um número negativo, é apresentada a primeira praxeologia, que denominamos $\wp_0$:

$$\wp$$
$$T_0: x^2 + k = 0, k > 0R$$
$$\tau_0: x^2 + k = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-k}$$

Percebe-se que parte das tarefas de $\wp_0$ não podem existir nos reais (k >0). Para tal Dante (2018) afirma que é necessário expandir o conjunto dos reais para que este tipo de tarefas possa ser resolvido.

Alguns tipos de tarefas e técnicas são apresentados como exercícios resolvidos ao longo do LD. Entendemos que estas são as técnicas que se deseja que os alunos mobilizem diante de tarefas do mesmo tipo, daí a importância de olharmos para estas atividades (TERÊNCIO & BITTAR, 2020). Algumas destas podem ser observadas nos exercícios resolvidos acerca da forma algébrica de um complexo qualquer.

A forma algébrica de um número complexo é apresentada com a definição do conjunto Z e das partes real e imaginária de um número complexo.

> Todo número complexo *z* pode ser escrito de maneira única na forma:
> $$z = a + bi(a \in R, b \in Rei^2 = -1);$$
> Essa é a **forma algébrica** ou **forma binomial** de escrever um número complexo. Observemos que um número complexo escrito nessa forma tem duas partes: a parte real de z, Re(z) = a e a parte imaginária de z, Im(z) = b. (DANTE, 2018, p. 146)

Nesta definição de conjunto dos complexos, por exemplo, são apresentadas as técnicas para descrever como separar a parte real de *z* da parte imaginária de *z*, além de na definição constar também a técnica primeira para manipulação de raízes de índices pares de números negativos, na sentença "$i^2 = -1$."

O primeiro tipo de tarefas identificado é relativo à adição de dois complexos, sendo definida a técnica$_1$, constituindo a praxeologia $\wp_1$:

T_1: Adicionar dois números complexos, z_1 = $a_1 + b_1i$ e **z_2 =** $a_2 + b_2i$

τ_1: $z_1 + z_2$ $(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)$ $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

As tarefas que classificamos como sendo do tipo 2 são aquelas que lidam com a subtração de complexos, na forma algébrica.

T_2: Subtrair dois números complexos, z_1 = $a_1 + b_1i$ e **z_2 =** $a_2 + b_2i$**:**

τ_2: $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

Algumas dúvidas surgiram durante a classificação dos tipos de tarefas que estamos enunciando. Uma delas seria se englobaríamos a adição e a subtração como uma tarefa de mesmo tipo, pois o aparato tecnológico é bem parecido, e as técnicas também. Porém separamos estas tarefas em dois tipos diferentes, mas entendemos que elas fazem parte de um grupo de tarefas e técnicas que irão fornecer técnicas e tecnologias para a evolução das praxeologias dos complexos que envolvem o tratamento trigonométrico e o Teorema Fundamental da Álgebra.

Classificamos como sendo as tarefas do tipo T_3: Multiplicar dois números complexos, dados na forma algébrica:

T_3: Multiplicar dois números complexos dados na forma algébrica, z_1 = $a_1 + b_1 i$ e **z_2 =** $a_2 + b_2 i$**:** τ_3: $z_1 \times z_2 \Longrightarrow (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \Longrightarrow (a_1 \times a_2) + (a_1 \times b_2 i) + (b_1 i \times a_2) + (b_1 i \times b_2 i) \Longrightarrow (a_1 \times a_2) - (b_1 \times b_2) + (a_1 \times b_2 i) + (b_1 i \times a_2)$

Por hora estamos colocando as técnicas das primeiras tarefas deste tipo. Como foi dito anteriormente, com a evolução do conteúdo outras técnicas surgirão quando estas forem perdendo o alcance.

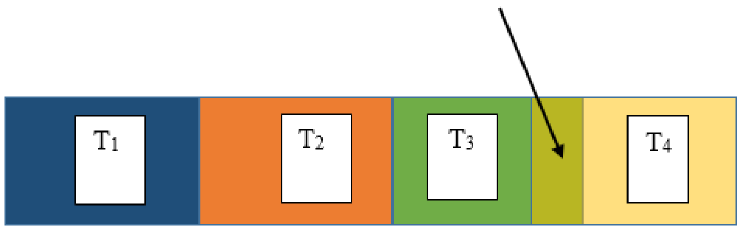
O tipo de tarefas T_4 tarefa é aquele que lida com as potências de um número complexo:

T_4: Calcular a potência de um número complexo, z_1^n, z_1 = $a_1 + b_1 i$ *Quando n = 2, podemos aplicar $\tau_{2;}$ Quando n > 3 usa-se τ_3: aplicar a fórmula de Moivre $z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + \sin(n\theta)]$

Para calcular a potência de um número complexo, z_1^n, quando *n* for menor ou igual a três podemos aplicar a propriedade distributiva e realizar o quadrado ou o cubo destes (aplicando τ_2), porém, para *n* superior a três, esta técnica perderá força, o que chamamos em termos de TAD de alcance da técnica. Logo serão necessárias novas técnicas, novas maneiras de saber fazer, mas por hora podemos pensar no esquema abaixo:

Figura 6 - Esquema de intersecção de técnicas para tarefas diferentes

Quando n = 2, podemos aplicar τ3;



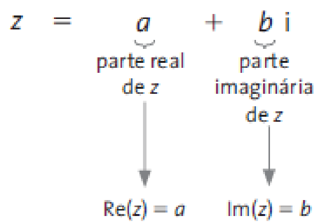
Perda de alcance de τ3 : τ4: aplicar a primeira fórmula de Moivre

Fonte: própria

Neste esquema a interseção entre T_3 e T_4 (indicada pela seta) representa o uso de uma mesma técnica para o mesmo tipo de tarefas diferentes.

A partir da definição algébrica de um complexo qualquer surge a definição dos termos de imaginário puro e real puro, visto que a partir da definição qualquer número real é também complexo. Quando o coeficiente a for zero, o número complexo será imaginário puro, pois a parte real será igual a zero; já quando o coeficiente b for zero, a parte imaginária será igual a zero, ficando somente a parte real, ou seja, um real puro. Esta constatação é importante do ponto de vista matemático, pois, permite compreender que todo número real (por definição) é um complexo cujo coeficiente que acompanha a unidade imaginária vale zero.

Figura 7- Definição algébrica de um complexo – parte real e parte imaginária



Fonte: Dante, 2018 p. 146

Surgem então as tarefas do tipo T_5, que são relativas à resolução de igualdades. Essas tarefas geraram conflitos no momento da classificação pois estas aparecem quase como tarefas auxiliares para a exploração de técnicas algébricas para o tratamento dos objetos de C. É também neste ponto do LD que é apontado o fato de que como $i^2 = -1$, este conjunto admitirá raiz quadrada de números negativos, e exemplifica com a raiz quadrada de - 25:

$$\sqrt{-25} = \sqrt{25 \cdot (-1)}$$

$$i^2 = -1 \therefore \sqrt{25 \cdot (-1)} = \sqrt{25 \cdot i^2}$$
$$\sqrt{25 \cdot i^2} = 5i$$

A exploração desta técnica ($i^2 = -1$) permite a expansão do conjunto de tarefas já colocadas, como o surgimento de novas tarefas em C. A partir daqui o autor segue com a primeira seção de Exercícios Resolvidos (totalizando 7) e a primeira seção de Exercícios (totalizando 8 atividades). Vide as tarefas do Tipos T_5 e T_6 e as técnicas exploradas na resolução das mesmas que surgem neste ponto do LD nos quadros a seguir.

Antes de introduzirmos o quadro contendo o tipo de tarefas seguinte, vamos ver um exemplo deste tipo de tarefas na figura 8.

Para este tipo tarefas colocamos todas as tarefas que solicitam encontrar uma incógnita dentro de uma equação de grau um ou dois, com condições pré-estabelecidas. Neste exemplo da figura 8 os requisitos são encontrar a incógnita de forma que no item *a* o complexo seja um imaginário puro (o que classificamos como um subtipo de T_5; e no item *b* um número real, que também classificamos como outro subtipo de T_5):

Figura 8 - Exemplo de T_5 – Encontrar a incógnita que satisfaça a igualdade

2. Determine o valor real de x para que o número complexo:
   a) $z = (1 - 2x) + 3i$ seja um número imaginário puro.
   b) $z = 6 - (3x - 5)i$ seja um número real.

Fonte: Dante, 2018, p. 147

T_5: Encontrar a incógnita que satisfaça a igualdade:

$\tau_{5:}$ operar no conjunto dos complexos com as técnicas auxiliares de equação em R: sendo *x* a incógnita desejada, então:

- Para igualdades de grau 1: $ax + b = c \Rightarrow ax + b - b = 0 - b \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

- Para igualdades de grau 2: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$ Bháskara ou diferença de quadrados;

- Para igualdades com grau superior, reduzir para grau 2, por exemplo: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, chamando $x^2 = u$, temos $au^2 + bu + c = 0$

Esta τ_5 pode como mostrado no quadro acima inclui técnicas auxiliares de resolução de equações de primeiro e segundo grau. Pensamos em classificar este tipo de tarefas pois é o principal modo que o LD em questão faz para explorar a manipulação algébrica do conjunto dos complexos. A manipulação das unidades imaginárias por vezes faz parte destas igualdades, mas ocorre em casos específicos (um dos tipos de tarefas de T_6); muito do que é explorado são as equações de primeiro e, por vezes, segundo grau.

Figura 9 - Exemplo de T_5 – Encontrar a incógnita que satisfaça a igualdade

2. Determine o valor real de x para que o número complexo:

a) $z = (1 - 2x) + 3i$ seja um número imaginário puro.

b) $z = 6 - (3x - 5)i$ seja um número real.

Fonte: Dante, 2018, p. 147

T_6: Calcule o valor das unidades imaginárias

τ_{6}: utilizar da relação de que $i^2 = -1$

Neste LD, a tecnologia θ envolta na praxeologia $\wp_6$ que engloba as tarefas do tipo T6 e seus subtipos é apresentada em um exercício resolvido. Consideramos assim, pois, a técnica que poderá ser utilizada para resolver as tarefas deste tipo é produzida por meio de uma explicação, como podemos observar na figura 9:

Figura 10 – Desenvolvimento da técnica para resolução de T_6

Observe que as potências de **i** começam a se repetir depois de i^4. De modo geral, temos:

$i^{4n} = (i^4)^n = 1$

$i^{4n+1} = (i^4)^n i = 1 \cdot i = i$

$i^{4n+2} = (i^4)^n i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$

$i^{4n+3} = (i^4)^n i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = 1 \cdot (-1) \cdot i = -i$

Ou seja:

$i^{4n+p} = i^p$

Fonte: Dante, 2018, p. 147

A discussão em torno das tarefas de tipo T_6 se justifica por se caracterizarem como o principal elemento do Conjunto Complexo. As unidades imaginárias e a manipulação algébrica das mesmas é necessária para se saber operar em C.

O trabalho em torno das tarefas de tipo T_6, bem como seus subtipos, a técnica envolta na resolução e a tecnologia explorada, permite a expansão do estudo sobre complexos. Esta expansão começa a ser notada no item 3 deste capítulo com a apresentação do conceito e definição de *Conjugado de um número complexo.* Este assunto será introduzido como um recurso para definir o inverso multiplicativo de um número complexo, isto é, definir um número complexo $\frac{1}{z}$ tal que $\frac{1}{z} \cdot z = 1$ e $z = a + bi$. A questão "*Como podemos definir* $\frac{1}{z}$ *na forma algébrica?*" é que trará a necessidade de definir o conjugado de z, como sendo $\acute{z} = a - bi$ (nesta obra).

Ao final deste item são colocados um total de 3 Exercícios Resolvidos com a intenção de demonstrar como definir o tal número complexo $\frac{1}{z}$. Não há campo de Exercícios neste item.

Ao seguir para o item 4 deste capítulo podemos entender que uma das possíveis intenções do autor, ao trazer o conjugado como resposta a definição de um inverso multiplicativo é usar o mesmo para a *Divisão de números complexos*, assunto deste item. De forma bem sucinta o autor define que: "o quociente entre dois números complexos $\frac{z_1}{z_2}$ com $z_2 \neq 0$, é dado por $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} . \frac{\acute{z_2}}{\acute{z_2}}$." (DANTE, 2018, p. 150). Isto pessoalmente pareceu estranho pois enquanto pesquisador e professor, temos o conhecimento empírico de que o autor deste LD se preocupa com rigor matemático, e neste caso, não houve uma justificativa tecnológica muito avançada.

A partir desta definição, são postos 2 Exercícios Resolvidos – um com intenção de definir o inverso multiplicativo de *z* na forma algébrica usando o conjugado, e o outro com a intenção de demonstrar a divisão entre complexos usando o conjugado – e uma nova seção de exercícios. As tarefas presentes até então surgem com suas técnicas de resolução como mostram os quadros a seguir:

T_7: Resolva a equação de primeiro ou de segundo grau
$\tau_{7:}$ utilizar de τ_{5} : isolar a incógnita para equação de grau 1 e Bháskara para equações de grau 2.
$T_{7.1}$: Resolva a equação de grau n em C.
$\tau_{7.1:}$ utilizar a relação $i^2 = -1$ quando obtiver um termo negativo em radiciação.

As equações de tipo T_7 aparecerão em todas as obras. No momento de classificação e separação notamos que em algumas obras surgem subtipos de T_7. Estes estarão na tabela final de classificação. As técnicas relativas a estas tarefas são as técnicas auxiliares como descritas em τ_5, e Bháskara, principalmente. Este tipo de tarefas tão presente no conjunto dos reais, mas que não possuem solução quando se encontra um termo negativo "dentro da raiz quadrada"; passa a ter solução no conjunto dos complexos, bastando para tal aplicar a relação das unidades imaginárias e se chegar às soluções, neste caso soluções complexas da equação.

As tarefas do tipo T_8 também surgem com a exploração da operação de divisão entre complexos, ou representação canônica (z = a + bi) de um complexo na forma fracionária e a exploração da definição de conjugado de um complexo.

T_8: Escreva o complexo dado na forma fracionária na forma canônica a + bi.

$\tau_{8:}$ utilizar da definição de conjugado de que:

$$\frac{x}{a+bi} = \frac{x}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} \Rightarrow \frac{xa-xbi}{a^2+b^2}$$

No tratamento de $T_{9.2}$ o LD explora a técnica $\tau_{9.2}$ semelhante ao que foi feito com T_6. Quando isso ocorreu o que notamos foi a necessidade de manipular as unidades imaginárias do conjunto dos complexos para expansão da praxeologias dos objetos matemáticos deste conjunto. Neste caso, indaga-se se a razão de ser deste objeto neste LD está se desenrolando para um ponto específico, dadas as ferramentas que estão sendo valorizadas no tema. A figura 10, a seguir, mostra como ocorreu esta justificativa tecnológica.

T_9: Efetue a divisão entre complexos.

$T_{9.1}$: Divida complexos na forma algébrica

$\tau_{9:}$ $\frac{z_1}{z_2} = z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2 \cdot z_3$ resolução via sistema de variáveis dos coeficientes de z_3

$\tau_{9.1:}$ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ resolução via definição de conjugado.

$T_{9.2}$: Determine o inverso multiplicativo de z.

$\tau_{9.2}$: seja z = a + bi, então:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Desde o início da exploração deste tipo de tarefas T_9 o autor se preocupou em deixar claras as técnicas que o mesmo valoriza, ou pretende valorizar, para a resolução destes tipos de exercícios. O aparecimento dessas técnicas em exercícios resolvidos indica que estas são as técnicas que o autor deseja que sejam mobilizadas por quem usar este LD.

Figura 11 - estudo da técnica para resolução de $T_{9.2}$

9. Dado $z \neq 0$, determine $\frac{1}{z}$ na forma $a + bi$ de tal modo que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (questão proposta anteriormente).

Resolução:

Basta multiplicar numerador e denominador por $\bar{z}$, ou seja, pelo conjugado de z, que é diferente de 0, pois $z \neq 0$. Assim:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} \Rightarrow \frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

Logo:

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$$

Fique atento!

Se $z \neq 0$, $\frac{1}{z}$ é o inverso multiplicativo de z e pode ser indicado também por z^{-1}.

Fonte: DANTE, 2018, p. 149; grifo nosso.

Ocorre também a exploração das tarefas relativas a determinar o conjugado de um número complexo qualquer. Decidimos separar este tipo de tarefas da operação de divisão entre complexos e de inverso multiplicativo. Entendemos que determinar o conjugado de um complexo, como tarefa, serve para explorar a técnica que será utilizada para o inverso multiplicativo e para divisão, posteriormente outros tipos de tarefas.

T_{10}: determine o conjugado de um complexo z.

τ_{10}: seja $z = a + bi$, o conjugado de z é indicado por $\acute{z}$ e dado como por $\acute{z} = a - bi$

Nos próximos itens do LD serão tratados os assuntos geométricos do conjunto dos complexos oscilando entre representação geométrica e representação trigonométrica.

No item 5, *Representação geométrica dos números complexos*, se dá início ao estudo das representações geométricas por meio da introdução do plano de Argand-Gauss, definindo que neste plano o complexo $z = a + bi$ será representado por um ponto P (a, b) no plano:

> Conforme foi dito anteriormente, os números complexos podem ser representados de várias formas. [...]. Outra maneira de representar um complexo z é por meio de um par ordenado de números reais. Assim, se z = a + bi, podemos escrever que z = (a, b). (Gauss só usava essa notação). Também sabemos que a cada par de números reais (a, b) está associado um único ponto do plano. Logo, podemos associar a cada número complexo z = a + bi o ponto P do plano de coordenadas a e b, isto z, P (a, b).

> O plano cartesiano no qual estão representados os números complexos é denominado plano complexo ou plano de Argand-Gauss. Dizemos que o ponto P (a, b) é o afixo do número complexo a + bi. (DANTE, 2018, p. 151)

Primeiro vê-se uma preocupação no LD de fazer a passagem da representação algébrica para a geométrica com vários exemplos desta passagem de representação. No momento seguinte já percebemos a interpretação geométrica de outros conceitos trazidos, como o conjugado, seguido de um campo de Exercícios Resolvidos cujo objetivo gira em torno de fazer a passagem da representação algébrica para a geométrica no plano complexo, e fazer operação de adição algebricamente e geometricamente através dos complexos apresentados no plano.

As tarefas relativas ao tratamento geométrico do conjunto dos complexos são bastante presentes nos LD. Os dados quantitativos estarão descritos ao final da análise da classificação das tarefas e técnicas relativas ao conjunto complexo.

T_{11}: Represente o complexo *z = a + bi* no plano complexo.

τ_{11} : seja z = a + bi um complexo qualquer na forma algébrica, então sua representação no plano complexo será dada pelo ponto P: P (a, b), com a sendo o coeficiente real de z e b o coeficiente da parte imaginária de z

Ocorrem alguns subtipos de T_{11}, mas sempre estão ligados em “achar o ponto”, ou “determinar o complexo no plano”, variando os operadores (por vezes ocorre um subtipo que classificamos como representar a raiz da equação no plano complexo, por exemplo). O conjugado e o módulo também estão bastantes presentes neste tipo de tarefa específico, solicitando sua representação geométrica. Observamos 15 tarefas relativas ao tipo de tarefas T_{11}.

Ocorre também o surgimento de algumas tarefas que solicitam a passagem da representação geométrica para a forma algébrica. Esses tipos te tarefas aparecem menos do que as de T_{11} (contamos 2 ocorrências), então classificamos como T_{12} os tipos de tarefa que lidam com a passagem da representação geométrica para a forma algébrica.

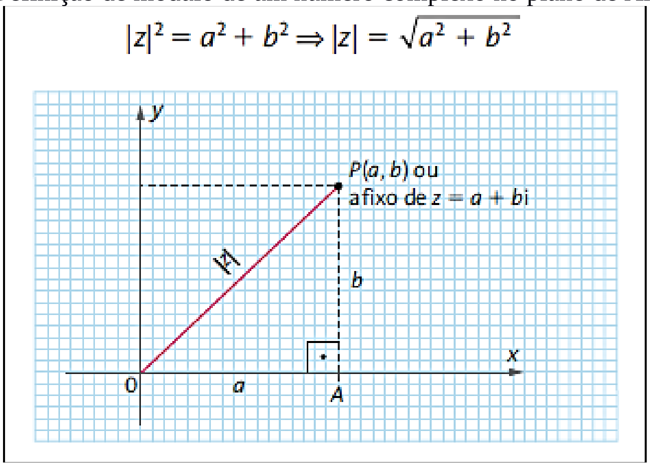
T_{12}: Represente um complexo representado pelo ponto P (a, b) na forma algébrica.

τ_{12} : Seja z um ponto P de coordenadas P(a, b) no plano complexo, então sua

O módulo de um número complexo, será trabalhado fazendo um *link* com o Teorema de Pitágoras, através da representação de um vetor da origem ao ponto P (a, b), vide **fig. 11**. Esta escolha didática é interessante visto que a representação algébrica e geométrica já foi demonstrada, e estudada, a definição de módulo como sendo a distância de um ponto no plano à origem (0, 0) possibilita que o leitor possa olhar para esta representação neste LD e não veja somente uma fórmula, mas pelo menos dois registros do conteúdo.

Essa representação geométrica será a justificativa tecnológica para novas técnicas, como por exemplo a passagem da representação geométrica (como ponto ou semirreta do ponto à origem). Aplicando Pitágoras no triângulo de catetos a e b, e hipotenusa igual ao módulo, podemos fazer as relações matemáticas para se chegar à representação trigonométrica.

Figura 12 - Definição de módulo de um número complexo no plano de Argand-Gauss.



Fonte: DANTE, 2018, p. 153

Logo, essa “passagem” de representações de um complexo na forma algébrica > forma geométrica > forma trigonométrica, seguem um raciocínio e um fim. Nem todas as obras analisadas seguem essa ordem de representação e estudo, mas neste LD, começamos a visualizar que talvez, nesta obra, os complexos caminhem para as fórmulas de Moivre e o TFA.

As tarefas que lidam com o módulo de um complexo foram classificadas como T_{13}. Apareceram subtipos de T_{13}, principalmente ligadas a encontrar a distância entre dois pontos (definição de módulo, geometricamente) ou como aconteceu com o conjugado, interpretar ou representar o resultado de uma expressão numérica com complexos.

T_{13}: Calcule os módulos dos complexos. τ_{13} : Seja z = P(a, b) então o módulo de z é a semirreta com origem em O e extremidade em P, e dado por $\lvert z \rvert = \sqrt{a^2 + b^2}$.

A τ_{13} é introduzida a partir da utilização de técnicas auxiliares para se chegar a esse resultado. A tecnologia é estudada a partir do estudo da representação geométrica do módulo, como mostra a figura 13, adiante.

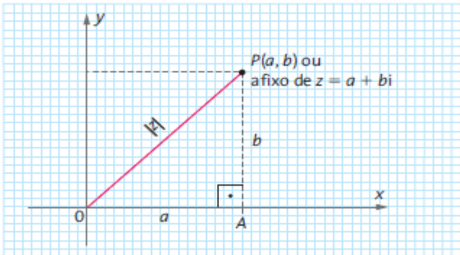
O módulo de z é um número real, positivo ou nulo. Parece ser trivial frisar esta informação, porém será importante (por mais que matematicamente seja claro) para utilização em outras tarefas que surgirão com a evolução das praxeologias matemáticas dos complexos.

Essa representação geométrica será a justificativa tecnológica para novas técnicas, como por exemplo a passagem da representação geométrica (como ponto ou semirreta do ponto à origem). Aplicando Pitágoras no triângulo de catetos a e b, e hipotenusa igual ao módulo, podemos fazer as relações matemáticas para se chegar à representação trigonométrica.

Figura 13 - Justificativa tecnológica de τ_{13}

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OAP*, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Observemos que essa igualdade vale também para os pontos situados nos eixos e nos demais quadrantes.

Então podemos dizer que, dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se **módulo** de z e indica-se por $|z|$ o número real positivo ou nulo dado por:

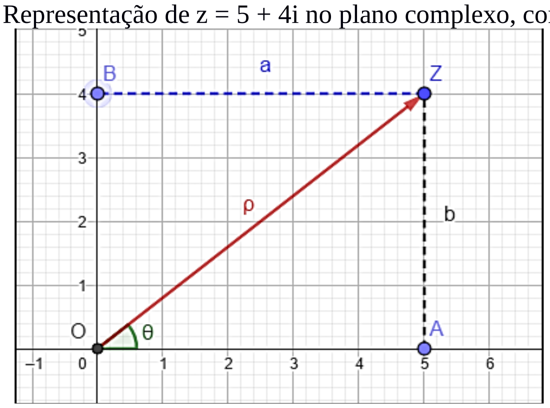
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Fonte: DANTE, 2018, p. 153; grifo nosso

Para introduzir a forma trigonométrica de um número complexo, item 7 deste capítulo, o autor, opta por ligar os dois conceitos trabalhados anteriormente, a representação algébrica e a representação geométrica no plano complexo. A partir dessas representações é introduzido o conceito de argumento de um número complexo: seja um número complexo $z = a + bi$ representado no plano complexo, e o vetor $\overrightarrow{Oz}$ onde O é a origem no plano complexo, o ângulo θ formado entre $\overrightarrow{Oz}$ e o eixo x, onde $0 \leq \theta < 2\pi$ é o argumento principal de z (DANTE, 2018).

E para demonstrar a forma trigonométrica do número é usado o teorema de Pitágoras como recurso didático, da seguinte maneira:

Figura 14 - Representação de z = 5 + 4i no plano complexo, como exemplo



Fonte: própria

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OZA, pode-se chegar à representação trigonométrica de um número complexo, onde $\rho = |z|$:

$$z = a + bi, z \neq 0$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Trigonometricamente sabe-se que:

$$cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

Logo:

$$a = \rho \cdot cos\theta$$

Sabe-se também que:

$$sin\theta = \frac{b}{\rho}$$

Logo:

$$b = \rho \cdot sin\theta$$

E como $z = a + bi$, tem-se:

$$z = \rho \cdot cos\theta + \rho \cdot sin\theta i$$

$$z = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$$

Como sendo a Representação trigonométrica de um complexo z. É desta forma que no LD é realizada a passagem da representação algébrica para a forma trigonométrica. Epistemologicamente faz sentido, pois primeiramente a preocupação eram as soluções de equações de terceiro grau, nos campos da álgebra, posteriormente surgiram trabalhos em geometria analítica e outros campos da matemática com conjunto C. Também podemos observar que os Registros de Representação[15] são comumente adotados pelo autor, ao se comentar sobre as passagens de um conceito para outro.

O LD define $z = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$ como forma trigonométrica de z ou forma polar de z; a partir daí segue no LD uma página de exercícios e atividades propostas. Nestas atividades são propostos que os alunos manipulem a passagem de um registro algébrico para um registro geométrico e trigonométrico; também é pedido que se faça o contrário, a partir da representação trigonométrica é mostrado nessa atividade como se obter o registo algébrico. A partir do campo de Exercícios Resolvidos, passa-se para o campo de Exercícios, com objetivo de mobilizar os conceitos de representação no plano de Argand-Gauss, cálculo do módulo, cálculo do argumento de z, transformações de registros algébricos e geométricos e vice-versa. Estas são as tarefas de T_{14} e T_{15}, como mostram os quadros a seguir:

T_{14}: Determine a representação geométrica e/ou a forma trigonométrica do número complexo.

τ_{14}: seja z = a + bi, sua forma trigonométrica ou polar é dada por $z = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$, onde a letra grega "rô" representa o módulo de um complexo.

$\tau_{14.1}$: desenhar um plano cartesiano e usar de τ_{12}.

Anteriormente, no estudo de módulo frisamos o fato de este ser sempre um número positivo ou nulo. Nesses tipos de tarefas as técnicas de operações no conjunto dos complexos começam a aparecer como ferramentas para novas tarefas a serem respondidas, com técnicas aprimoradas. Fazer a operação oposta da proposta de T_{14} são os tipos de T_{15}:

T_{15}: Determine a forma algébrica dos complexos apresentados na forma trigonométrica.

τ_{15}: seja$z = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$ um complexo na sua forma trigonométrica, sua forma algébrica é dada por z = a + bi, calculando-se o módulo, o seno e cosseno do ângulo dado, ou seja, resolvendo a "equação" indicada.

Antes de prosseguir, queremos justificar a maneira como escrevemos "T_{14}: Determine a representação geométrica e/ou a forma trigonométrica do número complexo". A palavra geométrica parece fazer alusão ao afixo de z, não é o caso. O que se pede é a representação, ou interpretação geométrica (se assim podemos dizer), do que se está sendo calculado. As

[15] A Teoria dos Registros de Representação Semiótica (RRS) foi desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval, a partir dos estudos sobre semiótica de Charles Sanders Peirce e Ferdinand de Saussure (MORETTI e THIEL, 2012). É uma lente geralmente usada para estudar diferentes tipos de representação sobre um mesmo objeto, como a língua fala, escrita, escrita algébrica, gráfico, etc.

técnicas empregadas aparecem no exemplo a seguir, do exercício resolvido 19, como mostra a figura 15, a seguir:

Figura 15 - Exemplo de “T_{14}: Determinar a representação geométrica e/ou a forma trigonométrica de um número complexo”.

19. Determine a representação geométrica e a forma trigonométrica do número complexo dado em cada item:

a) $z = 1 + i\sqrt{3}$ c) $z = 2i$

b) $z = -1 + i$ d) $z = -3$

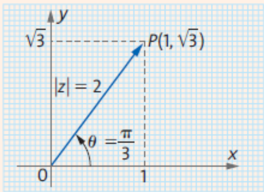
Resolução:

a) $a = 1$ e $b = \sqrt{3}$

Então:

$$|z| = |1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$



Portanto, a forma trigonométrica é dada por:

$$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Fonte: DANTE, 2018, p. 155

Como podemos ver na imagem anterior, uma técnica auxiliar que aparece na resolução deste tipo de tarefa é a de módulo de um complexo, como apontamos que aconteceria.

Posteriormente o que observamos neste LD foi a exploração das operações de multiplicação e divisão de complexos na forma trigonométrica como sendo subitem do item 7 do capítulo. Analisando o objeto de estudo ao qual estamos debruçados essa escolha pode ter sido feita pelo autor deste LD por trabalhar operações dentro de um conjunto numérico que não é familiar para os alunos, além do fato que deste produto surge uma propriedade que pode ser trabalhada para resolução de potenciações de um número complexo.

> A fórmula da multiplicação de dois números complexos, segundo a qual *basta multiplicar os módulos e somar seus argumentos*, é válida para um número qualquer finito de valores. Isso nos levará à potenciação de números complexos. (DANTE, 2018, p. 157)

Isso se justifica no próximo assunto a ser trabalhado, que é justamente a potenciação de números complexos e a primeira fórmula de Moivre[16]. Este subitem está contido também no item 7 do capítulo. Este é um assunto delicado dentro do tema pois neste ponto o tratamento do objeto matemático passa a possuir uma natureza mais rigorosa. Isto é, para resolver as atividades propostas a partir deste ponto o aluno terá que mobilizar técnicas e compreender as tecnologias que aparecem justificando as técnicas de resolução em forma de demonstrações, além disso podemos observar que o conteúdo começa a transitar do caráter ferramenta para o caráter de objeto de estudo, e, portanto, passa a ficar mais próximo do que ele é em outra Instituição, a academia científica. Ao final é separado um espaço para Exercícios resolvidos, onde o objetivo é demonstrar o cálculo da multiplicação de z por z usando a propriedade observada.

Na figura a seguir, podemos ver como o LD fornece a técnica a partir de uma justificativa (tecnologia) para a mesma:

Figura 16 - Estudo da técnica para a multiplicação entre complexos na forma trigonométrica

Consideremos os números complexos z_1 e z_2, dados na forma trigonométrica:

$$z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2)$$

O produto z_1z_2 é dado por:

$$z_1z_2 = |z_1|(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)|z_2|(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2) = |z_1||z_2|(\cos\theta_1 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \cdot \operatorname{sen}\theta_2) =$$

$$= |z_1||z_2|[(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \cdot \operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_2 \cdot \cos\theta_1)] =$$

$$= |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Portanto:

$$\boxed{z_1z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Fonte: DANTE, 2018, p. 157

O estudo da divisão de complexos na forma trigonométrica segue o mesmo raciocínio da operação de multiplicação. Porém, a técnica é apresentada e sua justificativa, ou tecnologia θ, é deixada a cargo dos alunos. A demonstração da relação da divisão de z_1 por z_2 pode ser obtida mostrando que o produto desta fração por z_2 é igual a z_1 (DANTE, 2018). A tarefas relativas a multiplicação e divisão em Z são denominadas, respectivamente, T_{16} e T_{17}:

[16] Abraham de Moivre (Vitry-le-François, Champanhe, França, 26 de maio de 1667- Londres, 27 de novembro de 1754) foi um matemático francês, conhecido pela fórmula de Moivre, uma fórmula que liga números complexos e trigonometria, e por seu trabalho sobre a distribuição normal e a teoria das probabilidades, principalmente. (CAIRE, 2012, p. 9)

T16: Multiplique dois complexos dados na forma trigonométrica, $\boldsymbol{z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1)}$ e $\boldsymbol{z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)}$

τ_{16}: o produto de z_1 por z_2 é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

T17: Divida dois complexos dois complexos dados na forma trigonométrica, $\boldsymbol{z_1 = \rho_1 \cdot (\cos\theta_1 + i \cdot \sin\theta_1)}$ um complexo na sua forma trigonométrica, e $\boldsymbol{z_2 = \rho_2 \cdot (\cos\theta_2 + i \cdot \sin\theta_2)}$

τ_{17}: o quociente de z_1 por z_2 é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Quando expandimos o estudo sobre o produto de complexos (iguais) na forma trigonométrica chegamos à propriedade relativa à potenciação de complexos na forma trigonométrica, que consiste na primeira fórmula de Moivre. E, assim, modelamos um novo tipo de tarefas, enunciado a seguir:

T18: Seja $\boldsymbol{z = \rho \cdot (\cos\theta + i \cdot \sin\theta)}$ um complexo na sua forma trigonométrica e *n* um número natural, efetue a enésima potência de z.

τ_{18}: seja z^n a enésima potência de z, logo:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + \sin(n\theta)]$$

Para chegar a este resultado o autor deste LD aplica a técnica $_{16}$ para a multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica, estendendo-a até a multiplicação *n* fatores (n complexos), como mostra a figura 17.

Desta forma, o LD se aproxima de um estudo matemático mais teórico, ou em termos de TAD, um estudo do bloco do *saber*, a razão de ser deste objeto neste LD começa a se assemelhar com a razão de ser da Matemática, como ciência. Logo podemos inferir que o LD está se aproximando de um objetivo para o estudo deste conteúdo, por isso cabe uma breve discussão acerca da ecologia dos saberes e o nível de co-determinação ao qual está apresentado este saber.

Figura 17 - Definição da potenciação de complexos na forma trigonométrica

Assim, se um número complexo z está escrito na forma trigonométrica $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, temos:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{\substack{\text{multiplicação} \\ \text{de } n \text{ fatores}}} = \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot \ldots \cdot |z|}_{\substack{\text{produto de} \\ n \text{ módulos}}}\left[\cos\underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\substack{\text{soma de } n \\ \text{argumentos}}} + i \cdot \text{sen}\underbrace{(\theta + \theta + \ldots + \theta)}_{\substack{\text{soma de } n \\ \text{argumentos}}}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \cdot \text{sen}(n\theta)]} \text{ fórmula de De Moivre}$$

Para $n = 0$, temos:

$$z^0 = |z|^0[\cos(0 \cdot \theta) + i \cdot \text{sen}(0 \cdot \theta)] = 1(\cos 0 + i \cdot \text{sen}\,0) = 1(1 + 0) = 1$$

Fonte: DANTE, 2018, p. 158

Chevallard (2002) fornece uma construção dos níveis co-determinação didática em uma escala hierárquica, como vimos no capítulo teórico e metodológico deste trabalho. Estudar a ecologia da organização praxeológica analisada significa estudar quais as condições e restrições que pesam sobre ela, neste caso, tentar entender a partir da organização matemática e didática, qual a razão de ser deste saber na instituição I_{PNLD}, ou até mesmo na $I_{\textit{Ensino Médio}}$ – por se aproximar do currículo real, como também já foi apontado.

Podemos apontar também, a influência dos níveis de co-determinação superiores. Entendemos este objeto matemático é ensinado no nível médio da educação básica porque há um interesse da sociedade pelo mesmo. De fato, todos os conteúdos curriculares que foram definidos, estão lá pelo interesse das camadas superiores dos níveis de co-determinação didática.

Neste trabalho, estamos analisando a presença dos complexos na IPNLD, mas ele passa por influências da noosfera. Os níveis superiores são o de Sociedade e Civilização/Humanidade, como apontam Chaachoua & Bittar (2018). No nível de sociedade podemos apontar o interesse da sociedade em se ensinar algo; aqui estão presentes os interesses práticos e subjetivos, portanto, podemos apontar principalmente os interesses políticos entorno de se ensinar este tipo de conteúdo, “para quem, e para quê?”. Já a influência do nível de Civilização, podemos apontar o interesse comum em desenvolver o saber. Como este é o mais alto nível, se torna subjetivo pensar nisso; porém podemos apontar o interesse de avanço da humanidade em direção ao futuro, e avanço tecnológico, uma vez que os complexos são usados atualmente pra modelos de previsão do tempo e na robótica.

Quando comentamos sobre a influência das mudanças de tendências pedagógicas, no início do capítulo da análise de dados deste trabalho, foi pontuado a mudança de foco, a partir de mudanças na esfera política. E esse é um bom exemplo de como mesmo em instituições de

Ensino, que estão no nível de co-determinação de Escola, ou Sociedade (ou entre eles) afeta o conteúdo, por si só. Ainda sobre a ecologia dos saberes, é importante para nossos objetivos, destacar a diferença de "motivo" de se estudar o conjunto ℂ na $I_{Matemática}$ e na microinstrução $I_{Ensino\ Médio}$. Entender essa passagem pode nos ajudar a concluir, mesmo que por parte, a razão de ser deste objeto matemático.

Tanto a primeira quanto a segunda fórmula de Moivre (que será trabalhada nas próximas páginas do LD) são "ferramentas" que possibilitam, por exemplo, o cálculo de equações de grau *n*, e por meio do estudo e aprofundamento destas, é possível responder o Teorema Fundamental da Álgebra, objetivo pelo qual o conjunto ℂ foi desenvolvido.

Os tipos de T_{17} são diferentes dos já analisados T_4. As técnicas de resolução não são as mesmas, além de tratarem de representações diferentes (trigonométrica e algébrica); o saber mobilizado em T_4 não é o mesmo mobilizado em T_{17}.

Outro ponto a ser comentado é que ocorre o surgimento de técnicas auxiliares do estudo de trigonometria, que são saberes a serem consultados para que seja possível o trabalho neste espaço (trigonométrico) e desenvolvimento destes tipos de tarefas propostos.

Ao final deste subitem a respeito da primeira fórmula de Moivre é reservado um espaço para Exercícios resolvidos, onde são trazidas duas atividades. Na primeira o objetivo é usar a primeira fórmula de Moivre para calcular a décima potência de um número $z = 1 - i$. E por fim um espaço para Exercícios, contendo algumas atividades para mobilizar os conceitos de multiplicação e divisão de complexos e manipulação da primeira fórmula de Moivre.

Também como subitem, o LD apresenta a radiciação de números complexos com o objetivo de introduzir a segunda fórmula de Moivre, que diz respeito às soluções de equações de grau *n:* "Quantas são as raízes enésimas de um número complexo $z \neq 0$ e como podemos determiná-las? Veremos isso com a **segunda fórmula de Moivre**." (DANTE, 2018, p. 161)

A discussão acerca da questão apontada no parágrafo anterior possibilitou o estudo das raízes enésimas (e complexas) de equações (e polinômios) de grau *n*, ou seja, solucionou o TFA (MOL, 2013).

A partir da radiciação de complexos são apresentadas as soluções para equações de grau *n*, de modo semelhante à introdução da primeira fórmula de Moivre. É definido que para um número complexo escrito na forma de $z = \rho(cos\theta + isin\theta)$ e um número inteiro *n*, natural, tal que $n \geq 2$:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i.sin\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Onde:

$$+; k \in Z; k = 0,1,2, \dots n$$
$$\omega^n = z; \sqrt[n]{\rho} \in R$$

Para fazer isto, parte-se do fato de que encontrar as raízes enésimas de z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo $\omega = |\omega|(cos\alpha + sin\alpha)$, ou seja encontrar os números ω de forma que$[|\omega|(cos\alpha + sin\alpha)]^n = |z|(cos\theta + i \cdot sin\theta)$. A partir daqui com algumas deduções e aplicando a primeira fórmula de Moivre é apresentado o resultado, que é a segunda fórmula de Moivre. Existe uma justificativa tecnológica e uma exploração do *bloco do saber*, principalmente neste ponto do LD. A figura 18, a seguir, mostra como o autor apresenta uma justificativa para esta técnica, acerca da radiciação de complexos:

Fato observado na análise é que o autor parece optar por fazer um trabalho matemático bem detalhado, trazendo diferentes registros, como o registro na forma algébrica, geométrica, no plano e até com elementos da geometria analítica com a rotação de objetos no plano, tudo isso tentando interligar os conteúdos trabalhados em diferentes momentos. É dito, por exemplo, que as equações de grau *n* admitem *n* soluções e por se tratar de uma soluções que dependem do termo: $cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i.sin\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)$; existem *n* soluções, que são números complexos e seus argumentos formam um progressão aritmética (vide fig. 19) onde o primeiro termo é $\frac{\theta}{n}$ e a razão é $\frac{2\pi}{n}$.

Figura 18 - Justificativa tecnológica acerca das técnicas de radiciação de complexos na forma trigonométrica

A segunda fórmula de De Moivre

Consideremos o número complexo $z \neq 0$ tal que $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$. Encontrar as raízes enésimas de z significa determinar todos os números complexos distintos do tipo:

$$\omega = |\omega|(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)$$

de modo que $\omega^n = z$, para $n > 1$, ou seja, procurar números ω tal que:

$$[|\omega|(\cos\alpha + i \cdot \text{sen}\,\alpha)]^n = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Aplicando a primeira fórmula de De Moivre, temos:

$$|\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \text{sen}\,n\alpha) = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

Da igualdade:

$$\omega^n = |\omega|^n(\cos n\alpha + i \cdot \text{sen}\,n\alpha) = z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$$

vem $|\omega|^n = |z|$, $\cos n\alpha = \cos\theta$ e $\text{sen}\,n\alpha = \text{sen}\,\theta$.

De $|\omega|^n = |z|$, temos $|\omega| = \sqrt[n]{|z|}$ (sempre real e positivo).

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n} (\text{com } k \in \mathbb{Z})$$

Mas, para que $0 \leq \alpha < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k \leq n - 1$.

Fonte: DANTE, 2018, p. 161

Os tipos de tarefas T_{19} são as que tratam da radiciação ou aplicação da segunda fórmula de Moivre, e estão descritas no quadro a seguir:

T_{19}: Determine as raízes enésimas de um complexo.

τ_{19}: para um número complexo escrito na forma de $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e um número inteiro n, natural, tal que $n \geq 2$:

$$\omega_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i.\sin\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Onde:

$$\omega^n = z;\ \sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}_+;\ k \in \mathbb{Z};\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots n$$

As raízes enésimas, como descritas em T_{19} correspondem às raízes, quadradas, cúbicas, quartas e etc. de z. Ao passo que a técnica de resolução sempre será pela segunda fórmula de Moivre, pelo menos neste LD.

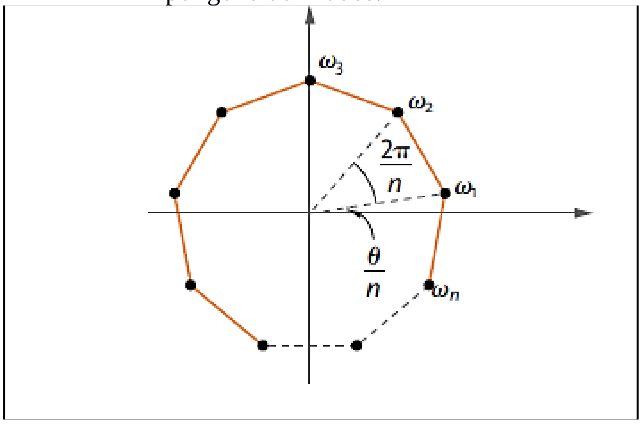
Ao final da exploração do tipo de tarefas T_{19} é posta uma sessão de Exercícios Resolvidos contendo duas atividades para que exploram a propriedade de rotação que existe na representação geométrica da multiplicação de complexos. Observamos que a partir da exploração da técnica que envolve o tratamento de módulo o LD assume uma apresentação do conteúdo do tipo exemplo > exercício de maneira mais forte. O LD vai explorar a representação geométrica da multiplicação na forma trigonométrica para trabalhar com a rotação no plano complexo.

O assunto da sessão que trabalha com a rotação da representação geométrica da operação de multiplicação de complexos na forma trigonométrica será trabalhado as *Aplicações à geometria*, que pela análise é um espaço reservado para alguma contextualização proposta pelo autor. O estudo da rotação de coordenadas no plano a partir da multiplicação pode ser visto na figura 18, ao que o autor acrescenta:

> [...] na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Portanto, se um ponto (*a*, *b*) deve ser rotacionado em relação à origem, em αgraus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo *a* + *b*i pelo complexo 1(cos α + i . sen α). (DANTE, 2018, p. 165)

Seguindo a lógica até agora observada, o LD apresenta um campo de Exercícios Resolvidos, com duas atividades, ambas com o mesmo objetivo de encontrar as novas coordenadas a partir de uma rotação de *n* graus. Pudemos observar em nossa pesquisa que primeiramente este LD apresenta os tipos de tarefas e as técnicas a serem valorizadas em detrimentos de outras e depois fornece tarefas de mesmo tipo para que se explore o *saber* e o *saber fazer*, consideramos este um de nossos resultados de pesquisa, relativos a organização que o autor escolhe fazer para linkar os conteúdos que estão sendo estudados no livro.

Figura 19 - Representação geométrica das soluções de uma equação de grau n como vértices de um polígono de n lados:



Fonte: DANTE, 2018 p. 162

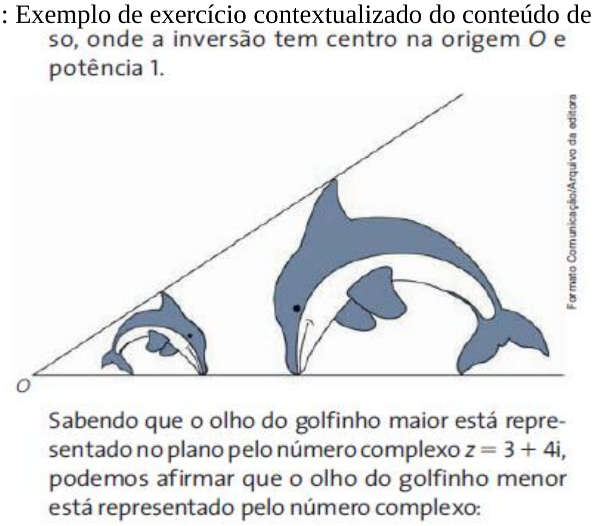
Surgem alguns tipos de tarefas muito particulares como os tipos de tarefas T_{20}: Determine as novas coordenadas de z no plano complexo após uma rotação de θ graus.

T_{20}: Determine as novas coordenadas de z no plano complexo após uma rotação de θ graus. τ_{20}: se um ponto (a, b) deve ser rotacionado em relação à origem, em θ graus no sentido anti-horário, basta multiplicar o número complexo $a + bi$ pelo complexo $1(\cos\theta + i \cdot \sin\theta)$

No encerramento do capítulo são trazidos os campos “Pensando no Enem” e “Vestibulares de Norte a Sul” onde foram observadas seis atividades a respeito do nosso objeto de estudo que também foram analisadas. Podemos ver um exemplo de exercício desta sessão na figura 20, na página a seguir.

Podemos destacar um desses exercícios como mostra a figura 20, anteriormente. Na sessão de vestibulares e ENEM o autor procurar trazer contextualizações que possam vir a se fazer presentes em provas de seletivas universitárias.

Figura 20: : Exemplo de exercício contextualizado do conteúdo de complexos



Fonte: DANTE, 2018 p. 167

Como vemos, nesta atividade a exploração da representação geométrica é bastante presente. O enunciado traz informações sobre a função de z, que inverte a figura e a aumenta na semirreta de origem em *O*. Ocorre neste tipo de exercício a necessidade de operar os complexos na forma trigonométrica e elaborar técnicas para trabalhar com a função de z dada pelo enunciado.

Ademais, classificamos e separamos todos os tipos de tarefas e técnicas que aparecem neste capítulo. Na análise deste livro didático conseguimos classificar vinte tipos de tarefas Ti. No total conseguimos observar 153 Tarefas relativas ao tratamento de números complexos. Resultados desta pesquisa também foram apresentados em Terêncio & Bittar (2020), porém neste texto amadurecemos algumas ideias que estavam em gestação outrora. Vamos colocar os dados quantitativos a respeito das tarefas e das técnicas exploradas no LD1 – Dante, Contexto e Aplicações para temos uma visão geral da exploração deste conteúdo em sua obra:

Tabela 2: Quantitativo dos tipos de Tarefas e técnicas analisadas no LD1:

Tipo de Tarefas Ti	**Quantitativo total**	**Técnica explorada**	**Quantitativo total**
T_1	6	τ_1	10
T_2	2	τ_2	11
T_3	3	τ_3	13
T_4	6	τ_4	7
T_5	18	τ_5	18
T_6	4	τ_6	18
T_7	5	τ_7	5
T_8	3	τ_8	3
T_9	11	τ_9	10
T_{10}	11	τ_{10}	26

T_{11}	15	τ_{11}	30
T_{12}	2	τ_{12}	18
T_{13}	19	τ_{13}	46
T_{14}	15	τ_{14}	21
T_{15}	7	τ_{15}	8
T_{16}	3	τ_{16}	4
T_{17}	3	τ_{17}	5
T_{18}	10	τ_{18}	9
T_{19}	5	τ_{19}	7
T_{20}	5	τ_{20}	5
Total	**153**	**-**	**-**

Fonte: Própria

Como pudemos observar ocorre neste LD a maior presença de técnicas que preparam para a exploração dos tipos de tarefa posteriores a T_{16}. Isto é, tipos de tarefas que englobam o tratamento de números complexos e suas operações na forma trigonométrica e derivados. A técnica mais presente, e mais explorada é a de módulo de um complexo. Isto ocorre porque para resolver as tarefas de tipo T_{16}, T+, T_{18} e T_{19}, até mesmo T_{20}, é necessário que se calcule o módulo de z, ou rô, como indicado nas fórmulas de Moivre, é um dos operadores que aparecem. Vale ressaltar que não incluímos as técnicas auxiliares do ciclo trigonométrico, pois o LD trata dos operadores de seno e cosseno de maneira muito natural, como um operador comum que faz parte da representação trigonométrica.

Vamos agora explorar o LD4, de acordo com a tabela1 da página 47 deste trabalho e ao final apresentaremos mais conclusões sobre nossos dados até o momento.

4.2.3 LD4: Matemática para compreender o mundo, v.3 – Kátia Stocco Smole; Maria Ignez Diniz

Este LD está organizado em quatro Unidades, cada uma organizada em capítulos. No início de cada Unidade são apresentados textos a respeito do que será estudado neste bloco. O livro conta também com boxes informativos, e outros campos como o “fazer e aprender” que possui o objetivo de fornecer tarefas extras, “foco na leitura” que possibilita a leitura matemática, “invente você”, campo em que os alunos possam criar problemas a partir do que está sendo estudado, “fique conectado” que fornece sites, crônicas e textos na internet, “de olho na resolução” é onde serão dados os exemplos para a resolução de exercícios entre outros como: para complementar, foco no raciocínio lógico, palavras-chave, aprender a aprender, foco na tecnologia, cálculo rápido, mundo plural entre saberes, por dentro do Enem e de Vestibulares e Projeto.

No total, este Livro Didático apresenta doze capítulos. Os três primeiros formam a Unidade 1, o assunto neste bloco será o tratamento financeiro, probabilidade e estatística. A Unidade 2 possui quatro capítulos, ocorrerá neste bloco o tratamento de geometria analítica. Na Unidade 3 serão tratados os polinômios (capítulo 8), números complexos (capítulo 9) e equações polinomiais, como mostra a figura 21.

Figura 21 - Sumário do LD 4 – Unidade 3

Fonte: Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 8

Vemos que o tratamento de polinômios ocorre antes do tratamento de números complexos; nossa hipótese é que isso irá influir na apresentação de técnicas diferentes das vistas até o momento, observando a organização matemática que as autoras fizeram. Por fim a Unidade 4 tratará das funções trigonométricas e taxas de variação, com dois capítulos.

4.2.4 Organização do conteúdo: CAPÍTULO 9 - Números complexos L4

O que encabeça o tratamento do conjunto dos números complexos é o questionamento de existência de solução para um tipo de equação específica (semelhante ao tratamento de Dante, 2018). O primeiro momento didático, primeiro encontro se dá como mostra a figura 22:

Figura 22 - Primeiro encontro com o conteúdo

Quais são as raízes da equação $x^2 + 3x + 5 = 0$?

Para resolver essa equação, podemos utilizar a conhecida fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

No conjunto dos números reais, essa equação não possui solução, pois não existe um número real **r** tal que $r^2 = -11$. Não existe $\sqrt{-11}$ no conjunto dos números reais.

No entanto, no campo dos **números complexos** é possível resolver essa equação.

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 182

A partir deste questionamento, na seção descrita como “situe-se” ocorre a explicação do que será estudado neste capítulo. O estudo deste conjunto, de acordo com SMOLE & DINIZ, 2018, p. 182:

> [...] é um exemplo interessante de um conhecimento que nasce na Matemática para a resolução de equações que, por exemplo, a Física e áreas da engenharia utilizam em modelos para explicar fenômenos relacionados à eletricidade e movimentos em fluidos como ar ou água.

Primeiramente podemos discorrer que esta definição sobre a utilização dos complexos não é a mesma que motivou o estudo deste conjunto numérico, como estudamos no campo da epistemologia dos complexos. Podemos inferir que neste ponto a razão de ser dos números complexos neste LD se afasta de sua razão de ser na matemática.

O primeiro assunto a ser explorado é o campo da história de formação dos complexos. As autoras trazem Cardano e Tartaglia como os precursores da criação deste conjunto numérico, que ao procurarem soluções para equações de grau 3 começaram a notar especificidades nestas soluções que incluíam o tratamento de raízes quadradas negativas.

Além dos precursores do campo do desenvolvimento dos números complexos também são trazidas as contribuições de Bombelli, Girard, Euler, dando mais ênfase as contribuições de Gauss, foi a partir de seus trabalhos “que se passou a chamar os números da forma *a* + *bi* de complexos e esses números ganharam o *status* de campo numérico, merecendo um estudo organizado em torno de suas aplicações [...]” SMOLE & DINIZ, 2018, p. 183.

O tratamento de número complexo ocorre a partir da análise de solução para a equação $x^2 - 6x + 13 = 0$; pelo que se sabe, aplicando Bhaskara teremos:

$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.13$$

$$\Delta = 36 - 52$$

$$\Delta = -16$$

Portanto sem solução real. Porém ainda ocorre a sugestão do uso de outra técnica, a de completar os quadrados, para tentar resolver esta equação:

$$x^2 - 6x = -13 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = -13 + 9 \Leftrightarrow (x-3)^2 = -4$$

Smole & Diniz (2018) apontam que mesmo assim, no conjunto dos reais não temos solução pois não há raiz quadrada de – 4. Porém se considerarmos raiz quadrada de – 1 como sendo *i*, um valor imaginário, podemos chegar a solução *3 + 2i* ou *3 – 2i* (p.183).

Assim como O LD1 anterior, podemos chamar essa Tarefa T_0 como “resolver a equação quadrática com delta negativo” como precursora das técnicas de tratamento dos operadores do conjunto complexo, onde não há técnicas no conjunto real capazes de a resolver, sendo necessário assim expandir o conjunto dos reais, onde surgem novas praxeologias.

Desta forma as autoras definem um número complexo como sendo um par ordenado (a, b) que pode ser escrito na forma de $a + bi$, onde a e b são números reais e i é a unidade imaginária, tal que $i^2 = -1$, e a escrita da forma $a + bi$ é chamada de forma algébrica. Parece haver um truncamento de informações na organização didática do conteúdo, por exemplo, ocorre a definição de par ordenado, mas não há apresentação da representação no plano, ou ainda, a resolução da equação que mobilizará o estudo de complexos acontecer por completo (com elementos ainda não estudados) antes da definição de número complexo.

Neste LD, antes da exploração dos tipos de tarefas relativas aos números complexos ocorre uma sucessão de apresentação de exemplos e definições, o que torna a organização didática expositiva, isto é, uma sucessão de apresentações do conteúdo. Na primeira leva de exemplos podemos perceber que o objetivo destes é apresentar formas de escrever números complexos com a e b variados (naturais, inteiros, racionais, irracionais) e também definir os casos em que o número complexo é um número real (quando sua parte imaginaria é zero) ou imaginário puro (quando sua parte real é zero), vide a figura 23. Também neste ponto ocorre a importante definição do que é a parte real de um complexo z, Re(z), e do que se trata a parte imaginária de z, Im(z).

Figura 23 - Primeira leva de exemplos relativos às tarefas de T_{21}

Exemplos:

a) $\pi + \frac{2}{3} \cdot i$, em que $a = \pi$ e $b = \frac{2}{3}$.

b) $\left(1 - \sqrt{2}\right) - \sqrt{3} \cdot i$, em que $a = 1 - \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{3}$.

c) $0 + 6i$, em que $a = 0$ e $b = 6$, que convencionamos escrever $6i$.

d) $5 + 0i$, em que $a = 5$ e $b = 0$, que convencionamos escrever 5.

e) $0 + 0i$, em que $a = 0$ e $b = 0$, que escrevemos 0.

Fonte: Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 183

O tipo de tarefa que primeiro surge com estes exemplos foi a que classificamos como T_{21}, como mostra o quadro abaixo:

T_{21}: Classifique a parte real e a parte imaginária de um complexo.

τ_{21}: usar da definição de complexos de que, seja z = a + bi ou (a, b) a parte real de z Re(z) = a; e a parte imaginária de z, Im(z) = b.

Este tipo de tarefa não aparece no LD anterior, o LD1. A técnica, porém, é próxima da técnica utilizada para classificar um complexo como imaginário puro ou real, este tipo de tarefa aparece no LD.

A partir da exploração destas relações matemáticas de conjuntos numéricos é apresentado um diagrama (figura 25) que define que um número real é um caso particular de complexo, e, portanto, podemos dizer que o conjunto dos Reais está contido no conjunto os Complexos (embora este diagrama apresente um erro conceitual grave).

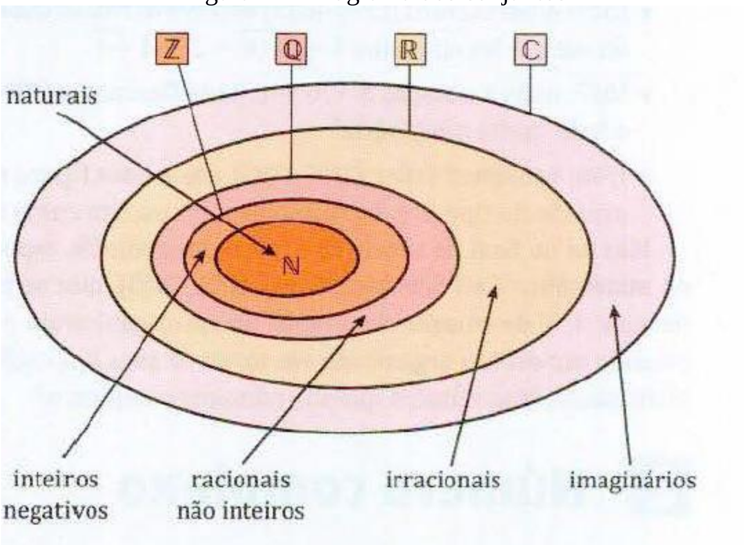
Pela definição apresentada no início do tratamento do conjunto dos complexos, em que são definidos como “pares ordenados”, cada complexo z corresponderá à somente um ponto P no plano ortogonal de abscissa Re(z) e ordenada Im(z). Este plano complexo é também chamado de plano de Argand-Gauss (p. 184). Ao que se segue de uma tabela de números complexos e sua representação no plano complexo. A representação dos complexos no plano foi o que possibilitou sua institucionalização na academia, segundo as autoras:

> Foi graças à representação geométrica feita por Argand *e* divulgada por Gauss que os números complexos acabaram aceitos. Para os matemáticos, a representação de Argand-Gauss tornou esses novos números concretos *e* visíveis, o que permitiu o desenvolvimento do estudo e o cálculo com esses números. SMOLE & DINIZ, 2018, p. 184

Como a definição de número complexo foi dada como par ordenado, a ordem das tarefas e técnicas aparecem em uma organização diferente da que conseguimos analisar no

LD1. Por exemplo, o surgimento de T_{21}, como foi descrita, e neste ponto do LD as tarefas de tipo T_{11} e T_{12} que envolvem a representação geométrica de complexos na forma algébrica e a representação algébrica de complexos representados na forma geométrica (ou de par ordenado), respectivamente.

Figura 24 - Diagrama dos conjuntos



Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 184

A partir deste ponto começam o tratamento das propriedades do conjunto. A primeira a ser tratada será a de igualdade, seguida da propriedade de adição. Estas propriedades são trabalhadas na forma algébrica do número complexo, apesar de a OD estar pautada na definição par ordenado. Adiante a propriedade de multiplicação é apresentada e neste ponto é chamado a atenção de que a multiplicação, deve-se proceder como fazemos a multiplicação em álgebra, sempre lembrando do fato de que $i^2 = -1$. Todas as propriedades são definidas e seguidas de um exemplo de cálculo. A propriedade de igualdade é dada a partir da τ_{21}, porém pela sua particularidade, podemos classificar a mesma como $\tau_{21.1}$:

$\tau_{21.1}$: usar da definição de complexos de que, seja $z_1 = a + bi$ ou (a, b); $z_2 = c + di$. Então $z_1 = z_2$ se $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$; $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$

A partir das propriedades apresentadas e estudadas, o LD apresenta as técnicas das operações de adição, subtração e multiplicação de complexos na forma algébrica. Também ocorre uma justificativa, mesmo que breve, das técnicas a serem exploradas, como mostra a figura 25.

Figura 25 - Exploração da técnica para multiplicação entre complexos na forma algébrica

Multiplicação

Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, chama-se produto de **z** por **w** o número complexo: $(ac - bd) + (ad + bc)i$.
Escrevemos: $z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Observe que essa relação aparece se usarmos as propriedades que conhecemos em $\mathbb{R}$.

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Considerando que $i^2 = -1$ (porque $i^2 = (\sqrt{-1})^2$), temos:

$$z \cdot w = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 186

Nesta imagem podemos ver a técnica apresentada em destaque, em um tom de azul mais forte, e a tecnologia que justifica a técnica abaixo. A tecnologia envolvida seria a aplicabilidade da propriedade distributiva neste saber matemático, chegando-se assim a uma técnica para a multiplicação entre complexos na forma algébrica. Neste LD há uma preocupação em definir e demonstrar (mesmo que ligeiramente) estas propriedades operatórias do conjunto.

Trabalhando as três propriedades iniciais, Igualdade, Adição e Multiplicação, Smole & Diniz (2018) introduzem a propriedade do conjugado de um complexo, seguido de alguns exemplos. Além do mais, o LD chama a atenção para a multiplicação de um complexo qualquer pelo seu conjugado. O objetivo é trabalhar a propriedade de que um complexo multiplicado pelo seu conjugado é sempre um número real da forma$a^2 + b^2$ – para tal ocorre a justifica a partir do eixo tecnológico-teórico.

Sabe-se que a escolha didática de se apresentar a propriedade do conjugado será utilizada para o fornecimento da técnica para se dividir dois complexos. Para a divisão este LD não explora o eixo tecnológico-teórico, isto é, não há justificativa para tal, há somente a definição de que a divisão de um complexo z por um outro w (diferente de zero) ocorre da forma:

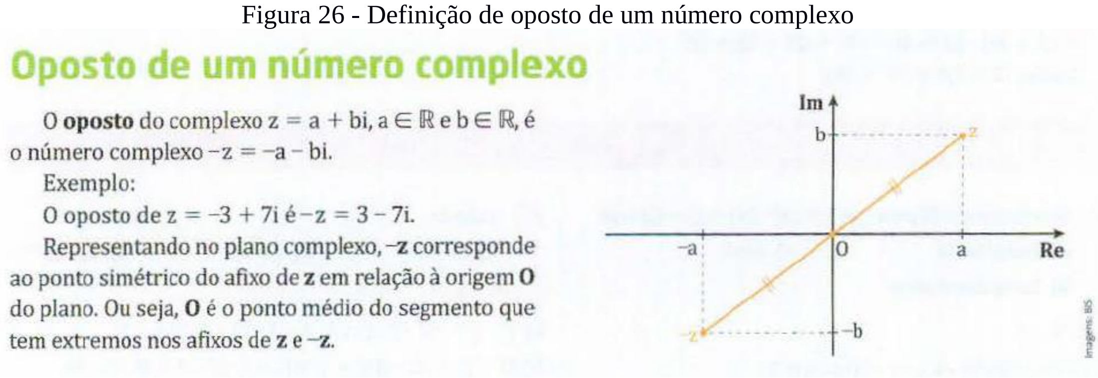
$$\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}}$$

A partir do fornecimento desta técnica é trabalhado um exemplo para a exploração da mesma.

Ao pensarmos neste tipo de tarefa que está sendo apresentado, a técnica fornecida pelo LD se assemelha bastante com a do LD1, trabalhado anteriormente, sem exploração do bloco do saber.

A última propriedade da forma algébrica, isto é, antes de iniciar as potências naturais da unidade imaginária é a de oposto. O oposto de um complexo z = a + bi, é o complexo da forma – z = – a – bi; é dado atenção ao fato de que o oposto é simétrico pela origem, e a origem representa o ponto médio entre z e – z no plano. Como mostra a figura 26 a seguir:

Figura 26 - Definição de oposto de um número complexo



Oposto de um número complexo

O **oposto** do complexo $z = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, é o número complexo $-z = -a - bi$.

Exemplo:

O oposto de $z = -3 + 7i$ é $-z = 3 - 7i$.

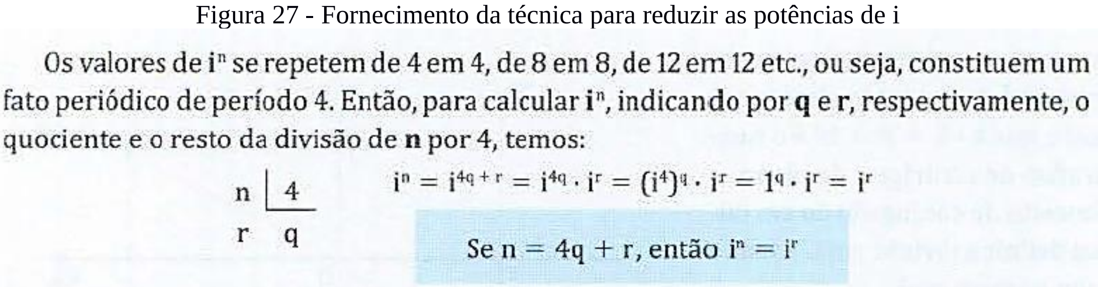
Representando no plano complexo, $-\mathbf{z}$ corresponde ao ponto simétrico do afixo de $\mathbf{z}$ em relação à origem **O** do plano. Ou seja, **O** é o ponto médio do segmento que tem extremos nos afixos de $\mathbf{z}$ e $-\mathbf{z}$.

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 187

Esta definição, com duas representações (algébrica e geométrica) não faz sentido já que não surgem tarefas para trabalhar esta propriedade. O que percebemos e estamos enfatizando é que na organização didática deste LD algumas definições e propriedades do conjunto são apresentadas sem razão – e aqui cabe o adendo de que quando dizemos sem razão queremos dizer que não surgem praxeologias entorno destes assuntos.

A partir da definição de oposto, ocorrerá a exploração das potências naturais da unidade imaginária. O tratamento deste assunto não diverge dos outros LD estudados até o momento. São apresentadas várias potências de i, i^n com n = 0, 1, 2, ..., 11. O objetivo também não diverge do tratamento que os outros LDs apresentaram, quer-se constatar que:

Figura 27 - Fornecimento da técnica para reduzir as potências de i



Os valores de $\mathbf{i}^n$ se repetem de 4 em 4, de 8 em 8, de 12 em 12 etc., ou seja, constituem um fato periódico de período 4. Então, para calcular $\mathbf{i}^n$, indicando por **q** e **r**, respectivamente, o quociente e o resto da divisão de **n** por 4, temos:

$$\begin{array}{r|l} n & 4 \\ \hline r & q \end{array} \qquad i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$$

Se $n = 4q + r$, então $i^n = i^r$

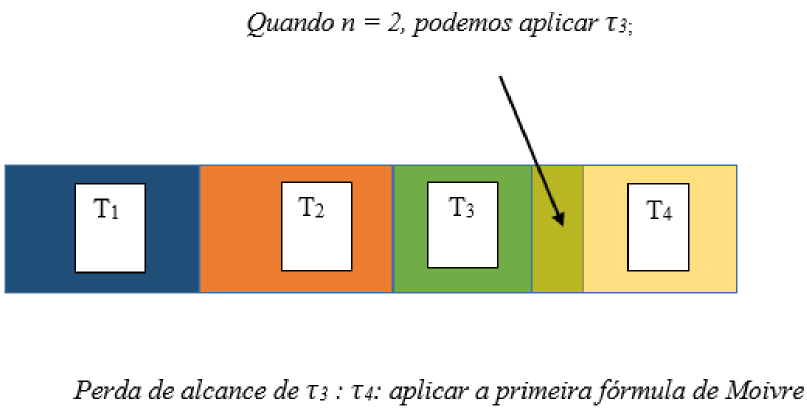
Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 188

Estas são as tarefas que classificamos como “T_6: Calcular o valor das unidades imaginárias.” Este tipo de tarefa trabalha com a redução das potências das unidades imaginárias para números complexos. O estudo da técnica não diverge dos outros LD analisados.

Então, definido a forma de se reduzir uma potência natural da unidade imaginária, é introduzido o assunto de potência de um complexo qualquer (T_4). Para obter a potência *n* de um complexo *z*, (*n* pertencente aos Naturais), se n = 2, 3 podemos aplicar a distributiva; para um n maior a técnica sugerida é o triângulo de pascal.

Ao lembrarmos do Esquema 1, de interseção de tarefas – que exemplificamos o alcance de determinadas técnicas e sua perda de uso, sua substituição por técnicas mais elaboradas, podemos adicionar esta técnica de resolução às tarefas de T_4 que classificamos.

Figura 28 - Esquema que demonstra o surgimento de uma nova técnica para o mesmo tipo de tarefa a partir de diferentes OD



Fonte: própria

Aqui confirmamos a hipótese de surgimento de técnicas diferentes dos outros LD, que trazem o conteúdo de polinômios depois do conteúdo de números complexos. Ou seja, organizações didáticas diferentes podem inferir no surgimento de técnicas diferentes para resolução de tarefas, bem como uma outra organização praxeológica do conteúdo.

Ao final deste assunto, são apresentados exercícios resolvidos na seção *“de olho na resolução”* e exercícios na seção “*faça você mesmo*”, além de duas propostas no campo “invente você”. Este LD faz um longo tratamento didático, técnico para depois apresentar uma lista de exercícios; existe uma valorização de um grande número de tarefas para exploração das técnicas estudadas.

Um ponto que podemos destacar neste LD é que nele ocorre o surgimento de tarefas depois dos blocos de *exercícios resolvidos* e *exercícios*, propriamente ditos. Estamos nos referindo ao "*foco na leitura*". Neste capítulo a informação trazida neste campo é dada a partir de um exercício retirado de um vestibular, onde a tarefa é responder a área de um triângulo isósceles, formado a partir da representação de três números complexos dados, no plano. O objetivo da leitura é destacar que "Algumas atividades que apresentam números complexos em seus enunciados não requerem conhecimentos muito aprofundados sobre eles" (SMOLE & DINIZ, 2018, p. 191.)

Este tipo de tarefa que descrevemos no parágrafo anterior é classificado como sendo de T_{11}, porém uma ramificação de T_{11} como mostramos no quadro a seguir:

$T_{11.5}$: Determine a área da figura formada pela imagem dos complexos dados. $\tau_{11.5}$: localizar os afixos de z no plano complexo usando a propriedade de $z = a + bi = P(a, b)$; calcular a área da figura a partir de técnicas auxiliares de geometria.

Usamos o índice 11.5 pois em nossa classificação das sete obras aprovadas no PNLD/2018 este subtipo de tarefa ficou descrito com este índice. Neste LD (LD4 – de acordo com a tabela 1) é a primeira vez que surge tarefas com este subtipo, mas estamos nos guiando pela análise completa que realizamos.

O próximo assunto a ser trabalhado é o módulo. O estudo de módulo é feito a partir do conjugado e da representação geométrica. No conjugado tem-se a relação de $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$; a partir da representação geométrica vemos a simetria de z, representado pelo ponto P e de seu conjugado P' pelo eixo Real; aplicando Pitágoras, obtém-se $\overline{OP} = \overline{OP'} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, o módulo de z é denotado por $|z|$ e representa a distância de P até a origem. A exploração do bloco tecnológico teórico é feita a partir da aplicação de conceitos de geometria e relações trigonométricas no triângulo retângulo formado a partir da representação geométrica dos complexos genéricos.

Acontece também o fornecimento da técnica para se calcular a distância entre dois complexos z e w. Isto é feito a partir do aprofundamento do cálculo de módulo, onde há a proposta de calcular o módulo da diferença entre dois complexos diferentes. Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, o módulo da diferença será:

$$|z - w| = |(a - c) + (b - d)i|$$

Aplicando a definição de módulo:

$$|(a - c) + (b - d)i| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

A seguir da justificativa da distância de dois complexos a partir da definição de módulo são trazidos exercícios resolvidos e exercícios a serem resolvidos. Como podemos observar, nestes assuntos relativos a tarefas de tipo T_{13}, surge um subtipo que classificamos como sendo $T_{13.3}$, como mostramos no quadro a seguir:

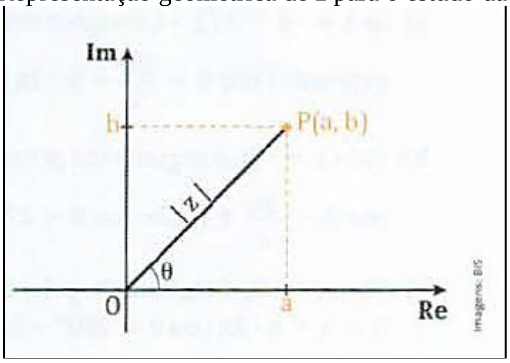
$T_{13.3}$: Determine a distância entre dois complexos representados no plano complexo. $\tau_{13.3}$: Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$, complexos quaisquer, então a distância d entre z e w é dada por: $dzw = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

O próximo assunto a ser tratado neste ponto do livro é a forma trigonométrica de um número complexo. Para trabalhar estes conceitos, o LD explorará os conhecimentos de trigonometria, assim como fez para estudar o módulo:

> Se z = a + bi é um número complexo qualquer, vamos considerar o arco θ, em radianos, formado entre o eixo real e a semirreta de origem O e que passa pelo afixo P (a, b) do número z, orientado da direção positiva do eixo real até essa semirreta. (SMOLE & DINIZ, 2018, p. 193)

A partir da figura abaixo (figura 29), serão trabalhadas as relações formadas pela representação de um complexo no plano:

Figura 29 - Representação geométrica de z para o estudo da forma polar



Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 193

Segundo Smole & Diniz (2018), se z está no primeiro quadrante vale a relação:

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} esin\theta = \frac{b}{|z|}$$

Dessa forma, as autoras trabalham demonstram com três exemplos como essas relações acontecem nos outros quadrantes. Assim, é definido o argumento de um número complexo, como sendo o número θ que satisfaça a relação acima. Além disso, o valor θ_0 de θ, tal que $0 \leq \theta_0 < 2\pi$ é chamado de argumento principal de z. Desta discussão, o LD trabalha a técnica para os exemplos anteriores, desta vez em busca da resolução da tarefa: encontrar o argumento principal de z.

Dadas as relações trabalhadas anteriormente, é imediato que:

$$\begin{cases} cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ sin\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = cos\theta \cdot |z| \\ b = sin\theta \cdot |z| \end{cases}$$

Esse raciocínio é utilizado para introduzir a escrita de um complexo na forma polar (ou trigonométrica). Como sabemos que $z = a + bi$, substituindo a e b, das relações acima, temos a forma polar de um complexo:

$$z = |z| \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta)$$

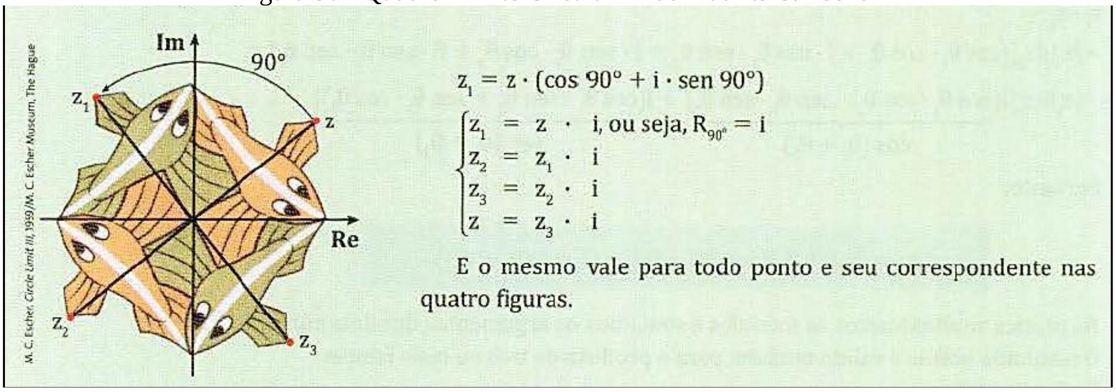
Nota-se que neste LD, que existe a escolha de deixar o módulo de z entre barras, ao contrários dos outros LD que neste ponto adotam a letra grega ρ (rô) para facilitar a escrita na forma polar, por assim dizer.

Neste ponto, Smole e Diniz (2018) se preocupam em dizer que que a forma trigonométrica de um número complexo é importante pois facilita a visualização no plano, e também das operações de multiplicação, divisão, mas principalmente da potenciação e da radiciação, assuntos que serão tratados na próxima sessão do capítulo. Para fechar este assunto, são apresentados dois exemplos, dois exercícios resolvidos no campo "de olho na resolução", dez exercícios no campo "fazer e aprender" além de duas propostas de atividades no campo "invente você mesmo".

Em decorrência do estudo da forma polar de um complexo, serão exploradas as operações de multiplicação e divisão na forma polar. Há neste tema alguma exploração do bloco tecnológico teórico, pois há justificativas (pequenas demonstrações) para se chegar a técnica reduzida que permite multiplicar e dividir dois complexos não nulos. Em suma, Smole & Diniz (2018) quer chegar a dedução de que multiplicar dois complexos na forma polar é o mesmo que multiplicar seus módulos e somar seus argumentos; de forma semelhante, dividir dois complexos é o mesmo que dividir seus módulos e subtrais seus argumentos (p. 197).

Há um campo de leitura complementar, que traz algumas relações entre a multiplicação de dois complexos e a rotação entre a reta formada pelo módulo de z e a rotação de grau θ. O objetivo é demonstrar a simetria que ocorre na multiplicação de complexos no plano, além disso chamamos atenção à uma nota de rodapé (no manual do professor) onde é dito que esta leitura possibilita um *link* entre matemática e arte, como a figura 30, a seguir.

Figura 30 - Quadro Limite Circular III de Maurits C. Escher



Fonte: Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 198

É interessante observar a preocupação das autoras em trazer em sua obra algumas conexões com outros assuntos, mesmo com um conteúdo tão abstrato. Outra obra deste mesmo autor (da figura acima) é citada neste campo: Limite Circular IV (céu e inferno) onde é pedido para que os leitores achem o grau de rotação.

Ademais, o LD entra no assunto de potenciação – há uma nota no manual do professor que este assunto é opcional. É interessante pensar que houve o fornecimento técnico e tecnológico (CHEVALLARD, 1999) anteriormente, mas o tratamento de conteúdo de potenciação seja um assunto opcional.

É no campo de estudo de potenciação de complexos na forma polar que se chega, a partir de justificativas teóricas, na fórmula ou relação que chamamos de primeira fórmula de Moivre. Neste LD não são apresentadas tais justificativas teóricas, há o cálculo do quadrado de um complexo z na forma polar e é dito que "De forma análoga (não provaremos aqui), calculamos z^3, z^4, z^5 etc. Para todo n $\in N$, podemos escrever: $z^n = |z|^n[cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta)]$" (SMOLE & DINIZ, 2018, p. 199)

Ao passo que a partir do fornecimento da técnica para calcular a potência de z na forma polar, serão apresentados dois exercícios resolvidos, doze atividades propostas para se resolver, e então o assunto de potenciação é encerrado.

A radiciação de números complexos na forma polar também se faz presente neste LD, porém, há também um *card* no manual do professor que orienta que este conteúdo é opcional. Assim como a potenciação fornece a relação que chamamos de primeira fórmula de Moivre, a radiciação fornece como resultado o que conhecemos como segunda fórmula de Moivre.

Para explorar o conteúdo de radiciação entendemos que são necessárias diversas ferramentas matemáticas, principalmente no campo da trigonometria. Talvez por esse motivo, existam mais justificativas teóricas e demonstrações neste conteúdo quando comparamos com o conteúdo de potência de complexos na forma polar. O que observamos foi um tratamento matemático mais rigoroso para se chegar à segunda fórmula de Moivre, o que pode ser justificado epistemologicamente; a segunda fórmula de Moivre fornece a resposta para o teorema fundamental da álgebra, por exemplo, um dos grandes avanços que os números complexos possibilitaram.

A partir das discussões e argumentações teóricas, chega-se a relação:

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\frac{\theta + k.2\pi}{n} + i.sin\frac{\theta + k.2\pi}{n}\right]$$

Smole e Diniz (2018) apontam para esta resposta como segunda fórmula de Moivre e a partir do fato de que θ é o argumento principal de z é possível encontrar os valores w_k de modo que k varie como $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$ (p. 201). Ocorre então a resposta institucionalizada do teorema fundamental da álgebra pelas autoras:

Figura 31 - Segunda fórmula de Moivre

Todo número complexo $z = |z|(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$ não nulo tem **n** raízes n-ésimas distintas entre si, que são dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right],$$

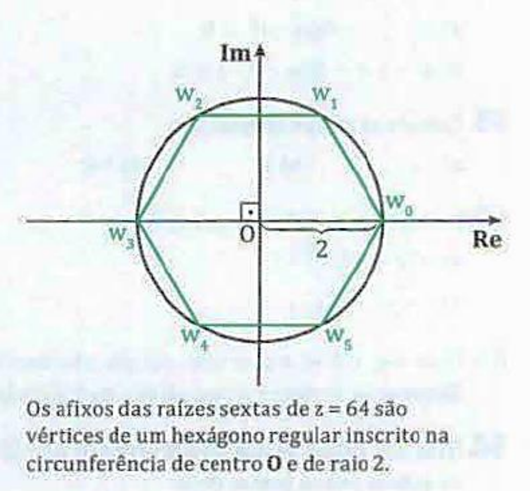
com $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 202

O LD em questão ainda se preocupa em trazer algumas propriedades das raízes enésimas de z, como por exemplo o fato de que os valores w_k representam pontos, afixos, da circunferência no plano complexo de raio igual a $\sqrt[n]{|z|}$. Além disso os ângulos formados por estes pontos na circunferência são congruentes como mostra a figura 31.

Por mais que estes conteúdos estão sendo encaradas pelas autoras como opcionais, fato é que houve a preocupação em explorar justificativas teóricas além de fazer ponte com outros campos da educação. Por fim, serão trazidos 2 exercícios resolvidos e 10 exercícios para resolução. A última tarefa respeito do conteúdo consta no campo "palavras-chave" onde se pede para que os alunos escrevam sobre as ideias destacando o que foi significativo para eles: Números complexos; Forma algébrica; Plano de Argand-Gauss; Módulo; Forma trigonométrica. A partir daqui ocorrerá o tratamento de equações polinomiais.

Figura 32 - Representação geométrica das raízes enésimas de um complexo no plano



Fonte: Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 203

Vamos organizar o quantitativo de tipos de tarefas e as técnicas mobilizadas neste LD assim como colocamos os dados em forma de tabela para o LD1 Posteriormente vamos elaborar um comentário sobre os resultados que encontramos e seguir para a descrição detalhada dos tipos de tarefas Ti classificadas neste trabalho.

Tabela 3: Quantitativo dos tipos de Tarefas e técnicas analisadas no LD4:

Tipo de Tarefas Ti	**Quantitativo total**	**Técnica explorada**	**Quantitativo total**
T_1	2	τ_1	4
T_2	3	τ_2	5
T_3	6	τ_3	10
T_4	7	τ_4	7
T_5	44	τ_5	38
T_6	3	τ_6	18
T_7	19	τ_7	23
T_8	4	τ_8	9
T_9	7	τ_9	9
T_{10}	8	τ_{10}	26
T_{11}	31	τ_{11}	48
T_{12}	13	τ_{12}	17
T_{13}	10	τ_{13}	81
T_{14}	30	τ_{14}	26
T_{15}	10	τ_{15}	33
T_{16}	1	τ_{16}	2
T_{17}	2	τ_{17}	6
T_{18}	12	τ_{18}	9
T_{19}	30	τ_{19}	21
T_{20}	0	τ_{20}	3
T_{21}	8	τ_{21}	13
T_{22}	10	τ_{22}	58
Total	**260**	-	-

Fonte: própria

Como observamos, a técnica mais explorada neste LD é a mesma mais valorizada no LD1. Aparentemente, calcular o módulo de complexos é a técnica de maior uso pois a resolução dos tipos de tarefas que incluem as discussões acerca da trigonometria, soluções de equações de grau n e a prova do Teorema Fundamental da Álgebra passam por [13].

Destacamos também que por mais que não ocorram o tipo de tarefas de T_{20}, ocorre o estudo da técnica a partir de uma propriedade da multiplicação – lembrando que esse tipo de tarefas é a de rotação no plano complexo. Porém tanto nas seções de Exercício Resolvidos ou de Exercícios, não são exploradas esse tipo de tarefas.

Pontuamos também que neste LD, a ocorrência de T_{22} se deu separada pois as autoras deste livro fazem o uso do argumento principal de z de maneira conjunta às transformações trigonométrica bem como de forma separada. Assim, achamos por bem classificar este tipo de tarefas com um índice próprio.

4.3 Tipos de tarefas T

A partir da organização do conteúdo de cada obra destacada no item anterior, agora iremos apresentar a análise dos tipos de tarefa T e das técnicas τ que pudemos observar durante o estudo. Nosso objetivo neste ponto é observar o bloco prático-técnico proposto por CHEVALLARD (1999), para então identificarmos o que as obras deste PNLD estão valorizando para o conteúdo de números complexos.

Também poderemos observar como a organização do conteúdo, ou organização didática implica no surgimento tarefas e técnicas diferentes (a depender desta organização) e verificarmos se, mesmo que apresentado em ordens diferentes, o conteúdo caminha para a mesma razão de ser.

Cabe destacar que no PNLD 2018, as obras aprovadas tratam o conteúdo de números complexos no 3º ano do Ensino Médio, ao final do ciclo, sempre próximo ao conteúdo de polinômios e equações polinomiais. Outro ponto, que não estamos abordando neste trabalho como critério de análise, mas que vale a pena pontuar, é que ao final do ciclo do 3º ano do Ensino Médio os alunos estão se preparando para o Exame Nacional do Ensino Médio, prova que permite o acesso à maior parte das Universidades Públicas brasileiras, além de algumas instituições privadas de ensino superior.

A fim de descrever o bloco prático-técnico analisamos as oito obras aprovadas no PNLD 2018. Descrevemos as principais tarefas propostas nestas obras em relação ao estudo dos números complexos, e também as técnicas de resolução usadas em cada tipo de tarefa.

Alguns tipos de tarefas Ti apresentam subtipos, que estaremos identificando como Tij. Nesta análise optamos por aproximar as tarefas Tij de acordo com a semelhança com Ti, o que difere o subtipo do tipo principal são algumas variações na técnica de resolução.

4.4 Resultados

Durante nosso estudo praxeológico, modelamos as praxeologias de todas as sete obras aprovadas em que este conteúdo aparece. Os tipos e subtipos descritos na tabela a seguir foram organizados e classificados a partir de um estudo apurado, pautado na Teoria Antropológica do Didático sobre o conteúdo de números complexos nas coleções de Livros Didáticos apresentados no item 4.2 deste trabalho. Foram encontradas um mil duzentos e setenta e nove tarefas relativas ao conteúdo de números complexos.

A classificação dos tipos de tarefas T foi complicada, isto porque o conteúdo analisado neste trabalho tem muitas aplicações e representações diversas, e geralmente é apresentado como um complemento de conteúdos estudados em outros momentos, como geometria, equações de segundo grau, trigonometria, entre outros. Classificamos vinte e dois tipos de tarefas Ti, dentre os sete LD que possuem o conteúdo de números complexos como proposta a ser ensinado, e estão apresentamos na tabela a seguir, juntamente com seus subtipos de tarefas Tij, quando ocorrem.

Estes dados da Tabela 4 são os dados finais, referente às sete obras aprovadas no PNLD/2018 que trazem o conteúdo de números complexos em seus cursos.

Tabela 4: Classificação dos tipos de tarefas T e seus subtipos.

Tarefas	Descrição	Subtipos de Tarefas	Total
T_1	Somar com números complexos	$T_{1.1}$: Efetue a soma de complexos na forma algébrica. $T_{1.2}$: Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos.	49
T_2:	Subtrair com números complexos	$T_{2.1}$: Efetue a subtração entre complexos na forma algébrica $T_{2.2}$: Efetue algébrica e geometricamente a subtração dos números complexos. $T_{2.3}$: Calcular o oposto de z.	35
T_3:	Multiplicar dois números complexos, z_1 x z_2 na forma algébrica.	-	60

T_4:	Calcular a potência de um número complexos, z_1^n na forma algébrica.	-	26
T_5:	Encontrar a incógnita que satisfaça a igualdade.	$T_{5.1}$: Resolver a equação para que o complexo seja um imaginário puro; $T_{5.2:}$ Resolver a equação para que o complexo seja real; $T_{5.3}$: Determinar os complexos que satisfaçam as condições; $T_{5.4}$: Determine as incógnitas para que $z_1 = z_2$ $T_{5.5}$: Encontre a equação da reta para qual P (x, y) pertença tal que o produto z_1 x z_2 com incógnitas x e y é um número real. $T_{5.6}$: Resolver a equação para que o complexo seja um imaginário $T_{5.5}$: Determinar as incógnitas que satisfaçam a equação	189
T_6:	Calcular o valor das unidades imaginárias.	$T_{6.1}$: reduzir os expoentes das unidades imaginárias; $T_{6.2}$: Resolver as expressões reduzindo i; $T_{6.2}$: Simplifique as expressões;	73
T_7	Resolva a equação	$T_{7.1}$: Resolva a equação em C. $T_{7.2}$: Resolva a equação em R $T_{7.3}$: encontre em C os zeros da função $T_{7.4}$: Dado z, expresse f(z)	64
T_8	Escreva o complexo dado na forma fracionária na forma canônica a + bi.	-	30
T_9	Efetue a divisão entre complexos.	$T_{9.1}$: Divida complexos na forma algébrica $T_{9.2}$: Determine o inverso multiplicativo de z.	50
T_{10}	Determine o conjugado de um complexo z ou da expressão de z..	-	69
T_{11}	Represente o complexo z = a + bi no plano complexo.	$T_{11.1}$: Localizar o afixo de z; $T_{11.2}$: Localizar o inverso aditivo de z no plano complexo; $T_{11.3}$: Interprete o complexo geometricamente; $T_{11.4}$: Classifique o polígono formado pelos pontos dos afixos dos complexos; $T_{11.5}$: Determine a área da figura formada pela imagem dos complexos dados. $T_{11.6}$: Determinar o ponto médio entre AB, imagens de complexos no plano. $T_{11.7}$: Determinar o perímetro do polígono formado pela imagem dos complexos dados.	145
T_{12}	Represente um complexo P (a, b) na forma algébrica.	-	66
T_{13}	Calcule os módulos dos complexos.	$T_{13.1}$: Determine o módulo de z; $T_{13.2}$: Determine o módulo da expressão de complexos $T_{13.3}$: Determine a distância entre dois complexos representados no plano complexo	125
T_{14}	Determine a representação	$T_{14.1}$: Representar um complexo na forma	124

	geométrica e/ou a forma trigonométrica do número complexo.	trigonométrica; $T_{14.2}$: Fazer a representação trigonométrica a partir da geométrica e/ou fornecimento do módulo; $T_{14.3}$: Interprete geometricamente os subconjuntos de C $T_{14.4}$: Determine o conjunto solução da equação a partir da forma polar de z	
T_{15}	Determine a forma algébrica dos complexos apresentados na forma trigonométrica.	-	50
T_{16}	Multiplique dois complexos na forma trigonométrica.	-	26
T_{17}	Divida dois complexos na forma trigonométrica.	-	25
T_{18}	Efetue a potência de um complexo.	$T_{18.1}$: Calcule a potência de um complexo. $T_{18.2}$: Determine o expoente n de z, para que z satisfaça as condições dadas.	51
T_{19}	Determine as raízes enésimas de um complexo.	$T_{19.1}$: Determine as raízes quadradas $T_{19.2}$: Represente as raízes enésimas no plano complexo. $T_{19.3}$: Determine as raízes cúbicas de um complexo $T_{19.4}$: Determine as raízes quartas de um complexo $T_{19.5}$: Determine as outras raízes enésimas de z e o complexo z a partir de uma das raízes dadas.	51
T_{20}	Determine as novas coordenadas de z no plano complexo após uma rotação de θ graus.	-	7
T_{21}	Classifique a parte real e a parte imaginária de um complexo.	-	53
T_{22}	Determine o argumento de z.	$T_{22.1}$: Determine o argumento principal de z $T_{22.2}$: Determinar o argumento principal a partir da representação geométrica $T_{22.3}$: Determine a representação de um complexo a partir do seu argumento e/ ou módulo	46
Total	**1.414**		

Fonte: própria

Esta organização de apresentação proposto por Freitas (2015) foi a organização que melhor conseguimos fazer acerca das tarefas e subtipos de tarefas. A organização em índice não condiz necessariamente a organização que o tipo de tarefa T ou subtipo aparece na obra analisada – fato que as obras possuem organizações matemática e didáticas próprias, apesar de caminhar para um mesmo fim.

4.5 Bloco prático técnico [T, τ]

A seguir vamos detalhar cada tipo de tarefas Ti e as técnicas τi e destacar os pontos relevantes que encontramos, abordando exemplos, nas obras analisadas, afim de fornecer uma maior compreensão destes conceitos. Como neste texto trazemos a análise praxeológica de duas obras (LD1 e LD4) vamos apresentar exemplos apenas nestas duas obras, quando aparecem.

T_1: Somar com números complexos

Este tipo de tarefa está presente em todas as obras que apresentam o estudo de números complexos. Classificamos esse tipo de tarefa observando que a operação de adição é quase sempre a primeira manipulação algébrica do conjunto dos complexos. Em termos de quantitativo ela aparece em 3,1% de todas os vinte e dois tipos de Tarefas analisadas.

Para este tipo de tarefa T_1 podemos separar dois subtipos de tarefas. O primeiro será a soma na forma algébrica, e o segundo explorará a soma na forma algébrica e a interpretação geométrica desta operação.

Figura 33 - Exemplo de $T_{1.1}$

Adição

Sendo $z = a + bi$ e $w = c + di$, com **a, b, c** e **d** reais, chama-se soma de **z** com **w** o número complexo: $(a + c) + (b + d)i$.

Escrevemos: $z + w = (a + c) + (b + d)i$.

Exemplo:

Sendo $z = 7 + 5i$ e $w = 3 + 2i$, temos $z + w = (7 + 3) + (5 + 2)i = 10 + 7i$.

Fonte: Smole & Diniz (2018, p.185)

Podemos observar neste exemplo de T_1 o *segundo momento didático*, descrito por Chevallard (1999). Neste momento ocorre a exploração do tipo de tarefas Ti e da elaboração de uma técnica. A técnica elaborada pelo LD é operar os complexos, na forma algébrica, somando os coeficientes reais e os coeficientes com unidades imaginárias separadamente.

O *terceiro momento*, que é a exploração do bloco tecnológico teórico ainda é pouco trabalhado, pelo menos neste tipo de tarefas T_1.

Sendo menos recorrente, a $T_{1.2}$ ocorre bem menos que o primeiro subtipo. Podemos observar um exemplo na figura 34 a seguir:

Figura 34 - Exemplo de $T_{1.2}$

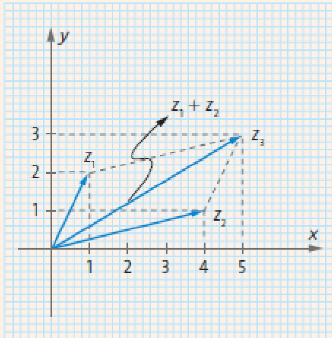
16. Efetue algébrica e geometricamente a adição dos números complexos $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 4 + i$.

Resolução:

Algebricamente, temos:

$z_1 + z_2 = (1 + 2i) + (4 + i) = 5 + 3i = z_3$

Geometricamente, vem:



Fonte: DANTE, 2018, p. 152

Neste subtipo de tarefa é necessário realizar a operação de adição algebricamente e a representação geométrica, tanto de z_1 quanto z_2, e a representação geométrica do resultado da adição. Podemos dizer que a técnica$\tau_{1.2}$ intui, $\tau_{1.1}$ e a representação geométrica: seja $z = a + bi$, a representação geométrica é dada pelo ponto $P(a, b)$ ou vetor OP.

T_2: Subtrair com números complexos

A operação de subtração ocorre também na maior parte dos LD quando não de forma explícita, como uma consequência da adição de números negativos. A elaboração ou apresentação da técnica pode ser observada como ocorreu na operação de adição, trabalhando a álgebra:

Figura 35 - Exemplo da técnica para resolução de tarefas de tipo $T_{2.2}$

Subtração

Sendo z = a + bi e w = c + di, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, chama-se diferença entre **z** e **w** o número complexo: (a − c) + (b − d)i.

Escrevemos: z − w = (a − c) + (b − d)i.

Fonte: SMOLE & DINIZ (2018, p.185)

O bloco tecnológico-teórico é também pouco explorado para estes tipos de tarefas. A justificativa tecnológica para que exista uma técnica de resolução de T_2 se pauta na exploração da álgebra comum, sem necessariamente objetos de C.

Observou-se também que em 4 das obras o termo “oposto de z” foi explorado, algebricamente e geometricamente, embora que pouco, mas classificamos esta tarefa como sendo o terceiro subtipo de T_2.

T_3: Multiplicar dois números complexos, z_1 x z_2 na forma algébrica

A operação de multiplicação na forma algébrica também é recorrente no tratamento da manipulação algébrica do conjunto dos Números Complexos. O nos parece ser uma vulgata[17] é que a exploração da manipulação algébrica ocorre em todos os LDs, sempre trazendo os elementos das operações no conjunto dos complexos, alguns operadores depois o que acontece é a passagem para representação geométrica para então evoluir para a representação trigonométrica onde se faz o uso das fórmulas de Moivre.

O tratamento deste tipo de tarefas é feito de modo a encarar a unidade imaginária como se fosse uma incógnita qualquer, fazendo o uso de propriedades algébricas anteriores ao estudo de Números Complexos (técnicas auxiliares) para sua resolução. Vemos um exemplo deste tipo de Tarefa na figura 36.

Tarefas do tipo T_3 ocorre com uma frequência de 3,2% nas obras deste PNLD. O que podemos tirar desta análise é que a operação de multiplicação, talvez por já ser um conceito conhecido (ou deveria, pelo menos) pelos anos desta etapa de ensino não careceria de tanto tratamento teórico. Logo não faria muito sentido estender o tratamento de uma operação que já está estabelecida nesta etapa. O fato é que a exploração deste tipo de tarefa ocorre em todos os LD analisados.

Figura 36 - Exemplo de T_3

Exemplo:

Sendo $z = 2 + 3i$ e $w = 3 + 5i$, temos:

$$z \cdot w = (2 + 3i)(3 + 5i) = 6 + 10i + 9i + 15i^2 = 6 - 15 + 19i = -9 + 19i$$

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2016 p. 186

Podemos perceber que para esta operação o trabalho da justificativa da técnica ocorre mais detalhadamente, levando em conta objetos do conjunto dos complexos:

[17] Vulgata é a versão mais difundida ou mais aceita como autêntica de um texto. (Oxford Languages)

Figura 37 - Exemplo de exploração do bloco do saber relativos a T_3

Observe que essa relação aparece se usarmos as propriedades que conhecemos em $\mathbb{R}$.

$$z \cdot w = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2$$

Considerando que $i^2 = -1$ (porque $i^2 = (\sqrt{-1})^2$), temos:

$$z \cdot w = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo:

Sendo $z = 2 + 3i$ e $w = 3 + 5i$, temos:

$$z \cdot w = (2 + 3i)(3 + 5i) = 6 + 10i + 9i + 15i^2 = 6 - 15 + 19i = -9 + 19i$$

No caso de **z** e **w** serem números reais, o seu produto como números complexos coincide com o produto em $\mathbb{R}$.

Fonte: Fonte: SMOLE & DINIZ, 2016 p. 187

Esta justificativa – exploração do bloco do saber – se dá partindo da propriedade distributiva da multiplicação (grifo em azul). A partir da aplicação desta propriedade o resultado contará com uma unidade imaginária “reduzível”, destacado pelo autor (grifo vermelho). Por fim, a técnica para exploração deste tipo de tarefa e o *quarto momento didático*, definido como trabalho da técnica; que lida com a aplicabilidade e *alcance da técnica* (Chevallard, 1999) em um exemplo (grifo verde).

T_4: Calcular a potência de um número complexos, z_1^n na forma algébrica

Para classificar este tipo de tarefa pegamos todos os tipos de atividades do LD que solicitavam a potência de um complexo, na forma algébrica, ainda sem os estudos da representação trigonométrica. Portanto poderíamos dizer que para este tipo de tarefa, os valores de *n*, relevantes estariam entre o intervalo]0, 3[ou reduzíveis à esses expoentes (figura 38) . Ou quando ocorreu de ser um n superior, as técnicas de resolução usadas eram as técnicas auxiliares das propriedades de potenciação, já estudadas desde o ensino fundamental, a fim de reduzir o termo dentro dos parênteses até se obter um valor para a expressão z^n. Podemos ver um exemplo deste tipo de operação abaixo:

Figura 38 - Exemplo de T_4

5. ATIVIDADE EM DUPLA Sendo $z = 2 - 2i$, calculem:

a) z^2 b) z^8 c) z^9

Fonte: DANTE, 2018, p. 148

As técnicas sugeridas neste ponto do estudo neste LD é fazer a redução em pares e usar a técnica de multiplicação, da seguinte maneira: $z^2 = z \cdot z$; da mesma forma que $z^8 = [(z^2)^2]^2$; seguindo o raciocínio $z^9 = (z^3)^3$.

Neste exemplo (fig. 38) a exploração deste tipo de tarefa que classificamos como T_4. Sabe-se que com a evolução das praxeologias e o surgimento de novas técnicas, esta tarefa voltará a ocorrer, mas com expoentes maiores que três, portanto a potenciação na forma algébrica foi separada da potenciação, que faz o uso da técnica da primeira fórmula de Moivre.

T_5: Encontrar a incógnita que satisfaça a igualdade

O tipo de tarefa que classificamos como T_5 representa 12,5% de todas as tarefas classificadas nesta pesquisa.

Trataremos dos tipos de tarefas mais frequentes no PNLD/2018 mais adiante, porém o que podemos dizer por hora é que como orienta os PCNEM, o tratamento de números complexos deve ser realizado de maneira a se constituir com outros campos da matemática, de maneira interdisciplinar. (BRASIL, 2006)

Dito isto, esse tipo de tarefa que classificamos como “encontrar a incógnita que satisfaça a igualdade” engloba principalmente a resolução de equações de primeiro grau onde se deve encontrar uma incógnita para que, por exemplo o complexo na forma $z = a + bi$ seja imaginário puro ($T_{5.1}$) ou então para que seja real ($T_{5.2}$). A exploração deste tipo de tarefa ocorre no tratamento algébrico e manipulações dos operadores no conjunto complexo.

Figura 39 - Exemplo de T_5.

7. ATIVIDADE EM DUPLA Determinem o valor de x, real, para que o número complexo:

a) $(x^2 - x) + 3i$ seja um número imaginário puro;

b) $x + (x^2 - 4)i$ seja um número real;

c) $x + xi$ seja o número real 0.

Fonte: DANTE, 2018 p. 148

Na figura 39 e 40, os conceitos mobilizados a respeito dos complexos serão a propriedade de igualdade entre complexos – técnica fornecida por todos os livros juntamente com as operações algébricas de adição subtração e multiplicação – e uma técnica auxiliar de resolução de um sistema, que envolve o produto dos complexos, e o conceito de imaginário puro na forma canônica e vastamente o conceito de equação.

Figura 40 - Exemplo de $T_{5.5}$

R3. Determine $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$ para que:

a) $(x + yi)(1 - 3i) = -13 - i$.

b) $(x + yi)^2 = 8i$.

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 189

Esse tipo de tarefa explorou muito o eixo algébrico e conteúdos auxiliares, usando técnicas de resolução de sistemas e até mesmo de matrizes. Este tipo de tratamento é o que orientava os PCNEM, documento pelo qual este PNLD foi avaliado.

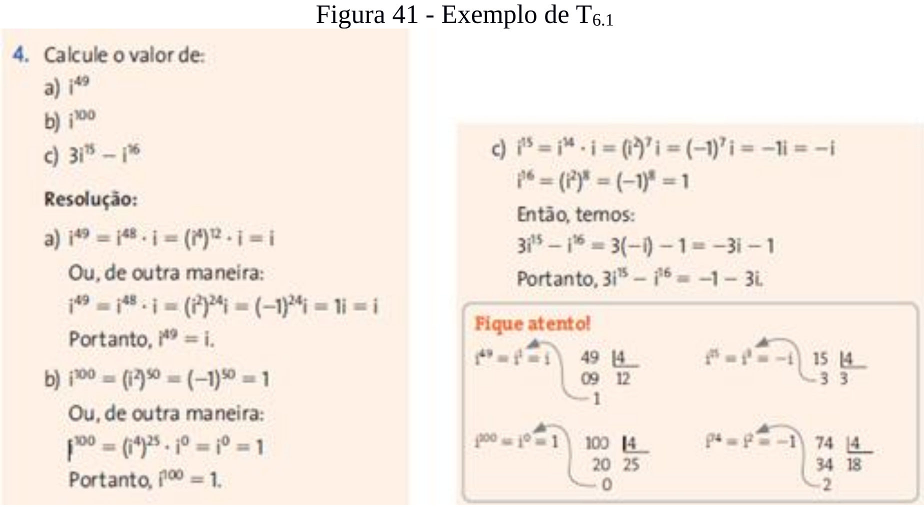
T_6: Calcular o valor das unidades imaginárias.

O cálculo, ou redução das potências das unidades imaginárias ocorrem em todas as obras. Sendo um dos itens principais do conteúdo analisado, isso se justifica. O que difere de uma obra para outra é o tipo de tratamento que cada um dá.

Alguns autores dos LD, por explorar a parte histórica fornecem logo no início a definição, ou técnica, para trabalhar com as unidades imaginárias. Porém, o que ocorre em todas as obras é o fato de que a justificativa tecnológica para redução das potências de i, decorrem das propriedades da potenciação, e leva à uma generalização do “bloco do saber fazer” (Chevallard, 1999). Esta técnica é justificada como mostra a figura 41 a seguir:

Este tipo de tarefa foi explorado com 4,6% de frequência. Também consideramos importante separar outros dois subtipos de tarefas que envolve simplificar expressões com unidades imaginárias ou resolver as expressões algébricas com unidades imaginárias. A técnica é sempre a mesma, o que difere de um subtipo para outro é o uso de técnicas auxiliares de resolução que variam de acordo com a tarefa a ser resolvida. Além da técnica para reduzir as unidades imaginárias nas expressões, será necessário o uso de técnicas auxiliares do conteúdo de potenciação para se chegar ao resultado desejado.

Figura 41 - Exemplo de $T_{6.1}$



4. Calcule o valor de:
a) i^{49}
b) i^{100}
c) $3i^{15} - i^{16}$

Resolução:

a) $i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^4)^{12} \cdot i = i$
Ou, de outra maneira:
$i^{49} = i^{48} \cdot i = (i^2)^{24} i = (-1)^{24} i = 1i = i$
Portanto, $i^{49} = i$.

b) $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$
Ou, de outra maneira:
$i^{100} = (i^4)^{25} \cdot i^0 = i^0 = 1$
Portanto, $i^{100} = 1$.

c) $i^{15} = i^{14} \cdot i = (i^2)^7 i = (-1)^7 i = -1i = -i$
$i^{16} = (i^2)^8 = (-1)^8 = 1$
Então, temos:
$3i^{15} - i^{16} = 3(-i) - 1 = -3i - 1$
Portanto, $3i^{15} - i^{16} = -1 - 3i$.

Fique atento!

$i^{49} = i^1 = i$ 49 | 4; 09 12; 1

$i^{15} = i^3 = -i$ 15 | 4; 3 3

$i^{100} = i^0 = 1$ 100 | 4; 20 25; 0

$i^{74} = i^2 = -1$ 74 | 4; 34 18; 2

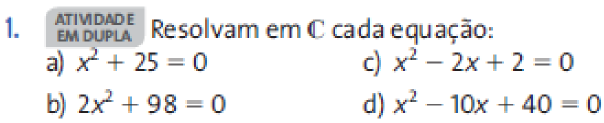
Fonte: DANTE, 2018, p. 147 e 148

T_7: Resolva a equação em C.

Resolver as equações no conjunto dos complexos, é um tipo de tarefa muito importante neste trabalho. Uma de nossas hipóteses de pesquisa é que de algum modo a razão de ser deste saber em LD se aproximaria da razão de ser na matemática. De acordo com os estudos históricos e epistemológicos deste trabalho a razão de ser de complexos tem relação direta com resolver o Teorema Fundamental da Álgebra, embora tenha sido desenvolvido nos séculos 16, 17 e 18 como ferramenta para resolução de alguns tipos de equações. O que podemos concluir, por enquanto é que a razão de ser deste saber na matemática não é a mesma razão de ser deste conteúdo neste nível de Ensino e nem na I_{PNLD}.

Este tipo de tarefa engloba equações de segundo ou terceiro grau, além de fazer links com outros conteúdos da matemática. Isso implica o uso das técnicas de resolução em R, técnicas auxiliares. Porém, a mais utilizada será essencialmente a fórmula de Bhaskara e a τ_6 que lida com a redução das potências das unidades imaginárias para conseguir resposta para raízes negativas quando houver.

Figura 42 - Exemplo de $T_{7.1}$



1. ATIVIDADE EM DUPLA Resolvam em $\mathbb{C}$ cada equação:

a) $x^2 + 25 = 0$
b) $2x^2 + 98 = 0$
c) $x^2 - 2x + 2 = 0$
d) $x^2 - 10x + 40 = 0$

Fonte: DANTE, 2018, p. 148

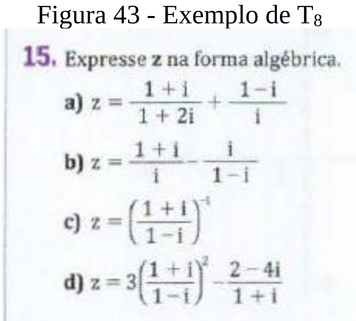
Em uma das obras observamos um subtipo de tarefa para resolver a equação, primeiramente nos Reais, e depois nos Complexos. Também em uma das obras constatamos outra ramificação deste conteúdo com o conteúdo de funções: encontrar os zeros da função com termos complexos.

Como o conjunto dos complexos resolve o problema das raízes quadradas de números negativos, então esta tarefa de resolver as equações (principalmente de grau 2) no conjunto do complexo ocorre em todas as obras analisadas. Tanto no LD1 quanto no LD2 esse tipo de tarefas está presente. Ocorre por vezes ramificações, como resolver as equações no conjunto dos reais para depois do fornecimento da técnica para manipular unidades imaginárias haver o retorno à essas atividades e então resolver no conjunto complexo. Essa praxeologia é importante e configura um importante ponto do trabalho dos complexos, mostrar que toda equação possui solução dentro dos complexos.

T_8: Escreva o complexo dado na forma fracionária na forma canônica a + bi

Este tipo de tarefa, com este comando: escrever/expressar as frações na forma de *a + bi* explora técnicas ligadas ao conceito de conjugado de números complexos. Decidimos não colocar este tipo como um subtipo de tarefa do conjugado ou mesmo da divisão, pois o verbo "escreva" de acordo com Chevallard (1999) denota o comando para o tipo de tarefa que irá ser realizada, assim sendo seria diferente de "divida" ou "determine (o conjugado)" de z. Podemos ver um exemplo deste tipo de tarefa na figura 43, a seguir:

Figura 43 - Exemplo de T_8



15. Expresse **z** na forma algébrica.

a) $z = \dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{i}$

b) $z = \dfrac{1+i}{i} - \dfrac{i}{1-i}$

c) $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{-1}$

d) $z = 3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2} - \dfrac{2-4i}{1+i}$

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 190

Para resolver este tipo de tarefa, os termos com unidades imaginárias nos denominadores devem ser transformados em reais. Isto pode ser feito com o uso da técnica de multiplicar o denominador pelo seu conjugado, isto pois o resultado desta multiplicação é um número real. Esta técnica já foi posta, anteriormente, e envolve também o assunto de quociente de complexos.

T_9: Efetue a divisão entre dois complexos.

Efetuar a divisão entre complexos se constitui como uma das operações principais do bloco algébrico. Aqui cabe um comentário analítico sobre a organização didática do conteúdo; alguns dos LD discute a divisão por meio de um sistema, isto é, dados dois complexos, *z* e *w*, dividir *z* por *w* significa encontrar um terceiro complexo, u, tal que $z = w \,.\, u$. Esta é uma das técnicas possíveis para esta tarefa. As outras obras variam no tratamento das justificativas ou fornecimento da técnica de divisão entre complexos, porém de forma a utilizar a técnica do conjugado para esta operação.

Associamos a este tipo de tarefa também a obtenção do inverso multiplicativo, por se tratar da divisão de 1 por z.

Figura 44 - Exemplo de $T_{9.1}$

12. Efetue $\frac{z_1}{z_2}$ sabendo que $z_1 = 1 + 2i$ e $z_2 = 2 + 5i$.

Resolução:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{2 + 5i} = \frac{(1 + 2i)(2 - 5i)}{(2 + 5i)(2 - 5i)} = \frac{2 - 5i + 4i - 10i^2}{2^2 + 5^2} = \frac{12 - i}{29} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$$

Logo, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{12}{29} - \frac{1}{29}i$.

Fonte: DANTE, 2018, p. 148

Ressaltamos a importância de se trabalhar também com os exercícios resolvidos, uma vês que nestes exercícios podemos constatar quais técnicas o autor de LD está pondo em vista, além da possibilidade de haver justificativas – relativas ao bloco do saber – nestes exercícios resolvidos. Porém observamos, em nossas análises que o bloco do saber é explorado mais comumente na parte de exemplos, onde são trabalhadas algumas justificativas tecnológicas sobre o assunto.

Este tipo de tarefas, T_9, ocorreu com uma frequência de 4,6% de todas as tarefas analisadas nas 8 obras. Temos uma hipótese de que as quatro operações no conjunto Complexo estarão equilibradas no quantitativo, o que pode ser pelo mesmo fato que comentamos na Tarefa T_3.

T_{10}: Determine o conjugado de um complexo z

Determinar o conjugado de números complexos é o concito que permite o surgimento de técnicas para o cálculo de T_8 e T_9. Esta tarefa aparece mais do que a própria divisão entre complexos. Para exemplificar temos a figura 45 a seguir:

Figura 45 - Exemplo de T_{10}

13. Determine o conjugado de cada número complexo.

a) $z = 8 + 5i$ **c)** $z = -6i$

b) $z = -62 + 7i$ **d)** $z = -4$

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 191

Como apontamos, o estudo do conjugado fornece ferramentas para operar as tarefas relativas a divisão entre complexos, e na representação canônica de complexos apresentados na forma fracionária. Esta técnica está associada a uma propriedade específica do conjugado em que, qualquer complexo, multiplicado pelo seu conjugado é um número real. Desta forma havendo um complexo no denominador, usa-se essa propriedade do conjugado para multiplicar por um (conjugado no numerador e denominador) para "tornar" o denominador um número real.

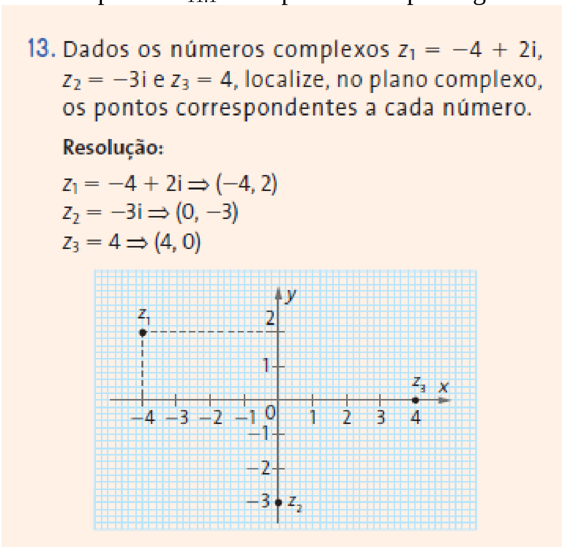
T_{11}: Represente o complexo $z = a + bi$ no plano complexo

Este tipo de tarefa é bastante frequente nos LD. Há ocorrência de cento e quarenta e quatro tarefas deste tipo, se levarmos em consideração todas as obras analisadas. Isto se justifica, principalmente pelo PCNEM de matemática orientar que se faça esse trabalho de representação algébrica e geométrica (mesma justificativa pelos qual justificaremos a representação trigonométrica).

Ocorre uma variação deste tipo de tarefa, explorando, por vezes, outros conteúdos já estudados, como a representação do produto no plano, a representação da multiplicação no plano, a representação das raízes no plano, entre outros. A representação de um complexo no plano é chamada de afixo de z.

O afixo de um complexo é o ponto no plano P (a, b) do complexo $z = a + bi$. Este também pode ser representado no plano como um vetor, da Origem ao ponto P. O tratamento vetorial é adotado por três dos livros analisados. Alguns ainda trabalham com polígonos formados pelas representações geométricas dos complexos dados na forma algébrica ($T_{11.5}$: Determine a área da figura formada pela imagem dos complexos dados).

Figura 46 - Exemplo de $T_{11.1}$: Interprete o complexo geometricamente



13. Dados os números complexos $z_1 = -4 + 2i$, $z_2 = -3i$ e $z_3 = 4$, localize, no plano complexo, os pontos correspondentes a cada número.

Resolução:

$z_1 = -4 + 2i \Rightarrow (-4, 2)$
$z_2 = -3i \Rightarrow (0, -3)$
$z_3 = 4 \Rightarrow (4, 0)$

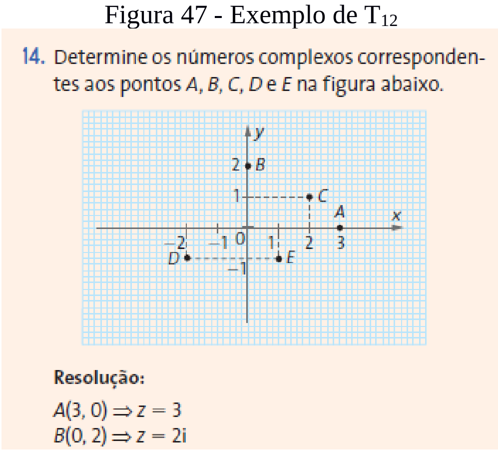
Fonte: DANTE, 2018, p. 152

Este subtipo tarefa mostrado na figura 46, exemplifica o que consideramos que seja representar geometricamente um complexo. Além das técnicas de resolução para representar um complexo como um afixo de z ou um vetor no plano, serão exploradas as técnicas para interpretação de inequações no plano cartesiano, entre outras representações, que são os subtipos que atribuímos a este tipo de tarefa.

T_{12}: Represente um complexo P (a, b) na forma algébrica.

A tarefa que consideramos como sendo T_{12}, seria o caminho oposto de T_{11}, a partir da representação no plano complexo, de um complexo z qualquer, determinar sua representação algébrica. Vemos um exemplo na figura 47 a seguir:

Figura 47 - Exemplo de T_{12}



14. Determine os números complexos correspondentes aos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* na figura abaixo.

Resolução:

$A(3, 0) \Rightarrow z = 3$
$B(0, 2) \Rightarrow z = 2i$

Fonte: DANTE, 2018, p. 152

Este tipo de tarefa representa 3,7% de todas as tarefas classificadas neste trabalho. Como a técnica para resolução é decorrente da técnica utilizada para a resolução de T_{11}, faz sentido não se estender muito na exploração de um mesmo conceito.

A técnica utilizada foi descrita na análise praxeológica do LD1 e conta principalmente com a definição de afixo de um complexo qualquer.

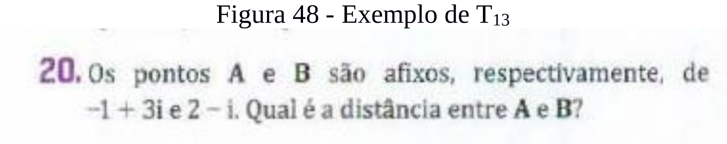
Estes dois tipos de tarefas, T_{11} e T_{12} propiciam o estudo geométrico do conjunto complexo. Isto ocorre para que seja introduzido o assunto de módulo, e então a representação trigonométrica de complexos. As passagens da representação na forma geométrica para a trigonométrica, em todas as obras analisadas, passam pelo estudo de módulo.

T_{13}: Determine o módulo de um complexo.

O módulo de um complexo é um conceito bastante importante para operar algebricamente e geometricamente no conjunto. Todos os livros analisados trarão a exploração deste tipo de tarefa, optando por uma posição mais tradicional ou mais interdisciplinar para o tratamento.

Consideramos que este tipo de tarefa, bem como todo o quarteto praxeológico (Chevallard, 1999, 2018) que envolve o módulo de um complexo é uma transição para a representação trigonométrica de um complexo. Apoiados nas técnicas e justificativas do bloco tecnológico teórico a respeito do Teorema de Pitágoras, em geometria analítica, o módulo de um complexo z é a distância em unidades de medida da origem ao afixo de z (ponto P), ou seja, o vetor de origem em O e extremidade em P.

Figura 48 - Exemplo de T_{13}



20. Os pontos **A** e **B** são afixos, respectivamente, de $-1 + 3i$ e $2 - i$. Qual é a distância entre **A** e **B**?

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 193

Por definição de módulo, visto tanto no LD1 quando no LD4, a distância entre dois complexos no plano complexo é o próprio módulo. Este exemplo da figura 45 é uma das ramificações do conceito de módulo observadas em nossa análise.

Este tipo da tarefa também engloba o módulo das operações algébricas no conjunto complexo, por exemplo, a soma em módulo, ou a multiplicação em módulo. Também colocamos neste mesmo tipo, como apontamos no parágrafo anterior, a tarefa de calcular a distância entre dois pontos, visto que por definição, o módulo é a distância entre dois pontos.

Para este tipo de tarefa técnicas auxiliares são necessárias as o conceito mobilizado é o mesmo.

Este tipo de tarefa foi uma das quais consideramos destaque, pois constata-se que a frequência deste tipo de Tarefa é de 109, isto é, 8,5% de todas as tarefas analisadas.

Começamos a perceber uma valorização da instrumentalização para se operar geometricamente no conjunto dos complexos. Talvez isso esteja ocorrendo por estarmos nos aproximando da razão de ser deste conteúdo na matemática.

T_{14}: Determine a representação geométrica e/ou a forma trigonométrica do número complexo.

Como dito anteriormente, a T_{13} será introdutória para o as tarefas do tipo T_{14}. Por meio de justificativas relativas às relações trigonométricas na representação geométrica do módulo de um complexo ocorre o fornecimento da técnica para determinar a representação trigonométrica de um complexo, como mostra a figura 49:

Figura 49 - Exemplo de $T_{14.1}$

25. Dê a representação geométrica e a forma trigonométrica dos seguintes números complexos:

a) $\sqrt{3} + i$

b) $-\sqrt{3} + i$

c) $\sqrt{3} - i$

d) $-\sqrt{3} - i$

Fonte: DANTE, 2018, p. 156

Colamos este exemplo da figura 49 para fazermos um comentário a respeito de nossa classificação. Este exercício configura o que consideramos como contendo duas tarefas: T_{11} e T_{14}.

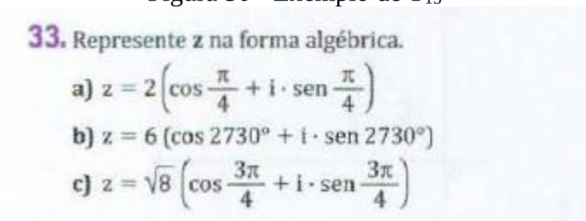
Constatamos algumas variações nesta tarefa, mas todas explorando o mesmo conceito, com uma ou outra variação na técnica ou a utilização de técnicas auxiliares.

Observamos também que há um certo destaque no conceito de representação trigonométrica e suas variações, nos LD analisados. É importante destacar que a razão de ser dos complexos na Matemática seria principalmente expandir o conjunto numérico e fornecer a resposta para o T.F.A. Isto pode ser a justificativa para que as representações trigonométricas sejam valorizadas – porque as fórmulas de Moivre usam essa representação para serem aplicadas. A frequência de T_{14} é de 10,1%, de todas analisadas.

T_{15}: Determine a forma algébrica dos complexos apresentados na forma trigonométrica.

Assim como acontece em T_{12}, a T_{15} terá menos presença que a tarefa que utiliza a técnica imediatamente semelhante, porém que faz o caminho inverso de T_{14}.

Figura 50 - Exemplo de T_{15}


33. Represente **z** na forma algébrica.

a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = 6\,(\cos 2730° + i \cdot \text{sen}\,2730°)$

c) $z = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot \text{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right)$

Fonte: SMOLE & DINIZ, 2018, p. 196

Da mesma maneira em que T_{15} será o inverso de T_{14}, o mesmo ocorre com a técnica. A técnica τ_{15} será o caminho inverso de τ_{14}. Em relação às técnicas auxiliares relativas a resolução deste tipo tarefa, pode-se dizer levando em consideração o LD1 e o LD4 que ocorrem mais variações em LD4. Isso se mostra deste o surgimento de técnicas relativas aos polinômios, como o triângulo de Pascal, como neste ponto das relações trigonométricas; ocorre a exploração do saber de duas representações dos arcos trigonométricos, além da exploração de arcos congruentes, como mostra o item b, na figura 50.

T_{16}: Multiplique dois complexos na forma trigonométrica.

As operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação dos complexos na forma trigonométrica já aparecem com a característica opcional em alguns LDs; em algumas obras não há exploração do conteúdo. Observamos também que o bloco tecnológico-teórico é diferente de uma obra para outra.

Os LD1 e LD4, postos em foco na discussão dos dados deste trabalho, apresentam ambos a exploração destes saberes e convergem para um fim semelhante.

Multiplicar na forma trigonométrica exige a manipulação do conjunto na forma trigonométrica e muitas técnicas operatórias do conteúdo de trigonometria – o que pode justificar o extensivo tratamento das técnicas e principalmente do bloco do saber das representações trigonométricas. Vejamos um exemplo deste tipo de tarefa:

Figura 51 - Exemplo de T_{16}

41. Sejam $z_1 = 10(co$ $z_2 = 5(\cos 30° + i \cdot \text{sen } 30°)$. Calcule:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $\frac{z_1}{z_2}$ c) $z_2 : z_1$ d) $\frac{1}{z_2}$

Fonte: SMOLE & DINIZ 2016 p. 200; grifo nosso.

A figura 51 é um exemplo da exploração deste tipo de tarefa. A frequência de T_{16} é 1,7% dos tipos de tarefas analisados.

T_{17}: *Divida dois complexos na forma trigonométrica.*

A exploração do conceito de divisão de complexos na forma trigonométrica ocorre de forma muito semelhante ao que foi a multiplicação deste mesmo tipo de complexos.

Podemos dizer que ocorre o fornecimento de técnicas por meio de definições, e um tratamento no bloco do saber mais elaborado do que ocorreu no tratamento da divisão na forma algébrica. A frequência deste tipo de tarefa em todas as obras analisadas é de 1,8% .

T_{18}: Efetue a potência de um complexo.

A operação de potência na forma algébrica utiliza da mesma técnica para multiplicação ou técnicas auxiliares das propriedades de potenciação. Já neste pondo, é fornecida a técnica para elevar um complexo z à um expoente n (n > 0) qualquer.

A técnica referida é conhecida como primeira fórmula de Moivre. Este tipo de tarefa, bem como as técnicas e justificativas tecnológicas ou teóricas para tal, não é explorada em todas as obras analisadas, como comentado anteriormente se trata de algo opcional.

Figura 52 - Exemplo de $T_{18.1}$

30. ATIVIDADE EM DUPLA Calculem os valores das potências z^2, z^3 e z^9, sabendo que $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{3}\right)$.

Fonte: DANTE, 2018, p. 160

Encontramos outra ramificação neste tipo de tarefa, $T_{18.2}$: “Determine o expoente *n* de z, para que z satisfaça as condições dadas. ” Este subtipo de tarefa ocorre somente sete vezes, como mostra a tabela 2 e classificamos aqui pois tratará diretamente dos operadores relativos à potenciação de complexos.

Da mesma maneira como nos tipos de tarefas de T_{18} houve o surgimento da primeira fórmula de Moivre, uma técnica que expandiu sua utilidade no bloco do saber-fazer, o tratamento da operação de radiciação também propiciará o surgimento de novas técnicas para operar no conjunto.

T_{19}: Determine as raízes enésimas de um complexo.

Este tipo de tarefas ocorre com certa frequência nas obras estudadas – considerando os LDs que trazem a exploração deste tipo de tarefas. As justificativas tecnológicas e teóricas presentes na parte curso do LD fornecem a técnica para extrair as raízes de uma equação de grau *n*, e mostra que que são *n* as raízes, isto é, a demonstração do TFA A técnica estudada é conhecida como a segunda fórmula de Moivre.

Figura 53 - Exemplo de $T_{19.1}$

55. Calcule as raízes cúbicas de:

a) $-i$ **b)** i **c)** -8 **d)** 1

Fonte: SMOLE & DINIZ 2016 p. 204

Como mostra a figura 53, determinar as raízes cúbicas de um complexo é um tipo de T_{19}, também constatamos os subtipos que solicitam raízes quadradas e quartas. Colocamos neste tipo de tarefa as representações geométricas das raízes enésimas, isto porque a representação geométrica deste conceito tem características únicas, as raízes representam pontos na circunferência de raio igual ao módulo de z.

Figura 54 - Exemplo de representação geométrica das raízes cúbicas de z.

24. Determine as raízes cúbicas de $-i$ e interprete-as geometricamente.

Resolução:

Escrevendo *z* na forma trigonométrica, temos:

$z = -i$

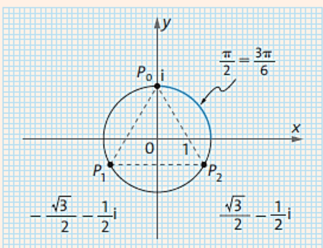
$a = 0$

$b = -1$

$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{0}{1} = 0 \\ \text{sen}\ \theta = \frac{-1}{1} = -1 \\ 0 \leqslant \theta < 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \arg(z) = \frac{3\pi}{2}$$

Fique atento!
Números complexos da forma $z = ai$ têm argumento $\frac{\pi}{2}$ para $a > 0$ e $\frac{3\pi}{2}$ para $a < 0$.



Fonte: DANTE, 2018, p. 162; grifo nosso

A figura 54 exemplifica a representação geométrica. A seta em vermelho indica as técnicas principais; a seta azul representa uma técnica auxiliar. Como o solicitado neste exemplo são as raízes cúbicas de z, a representação geométrica se tratará do triângulo mostrado na figura.

T_{20}: Determine as novas coordenadas de z no plano complexo após uma rotação de θ graus.

Esta tarefa poderia ser encarada como um subtipo da tarefa de multiplicação com complexos na forma trigonométrica, porém como esta é pautada principalmente da interpretação geométrica da operação do que qualquer outra coisa, decidimos classifica-la separadamente.

Este tipo de tarefa ocorreu em duas obras, apenas, representando 0,5% das tarefas analisadas. Conceitos diversos são mobilizados neste tipo de tarefa, como a multiplicação com complexos, forma algébrica e interpretação geométrica.

T_{21}: Classifique a parte real e a parte imaginária de um complexo na forma $z = a + bi$.

Notamos a importância de separar este tipo de tarefa, pois vimos que por mais que não seja um tipo presente em todas as obras analisadas, ela está presente, de forma consistente em algumas obras, onde só o que se quer é que o estudante saiba identificar o que é parte real e o que é parte imaginária de um complexo.

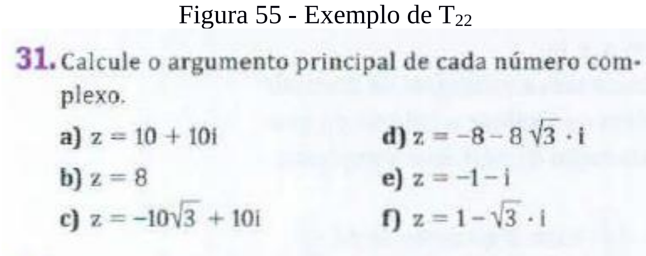
Por vezes este estudo é somente conceituado como inerente ao estudo de números complexos. Porém há obras em que aparecem tarefas relativas a este comando, de classificar a parte real e a parte imaginária do complexo dado. Levando em consideração o LD1 não trata especificamente como uma tarefa, já o LD4 possui algumas atividades solicitando o uso deste conceito.

A frequência de T_{21} é de aproximadamente 4% de todas as tarefas classificadas nesta pesquisa. Esta frequência é próxima das tarefas das operações algébricas de adição, subtração, multiplicação e divisão.

T_{22}: Determine o argumento de z.

Esta tarefa ocorre em algum momento entre o módulo e a representação trigonométrica de um complexo. O comando de determinar o argumento (ângulo da reta representada geometricamente pelo módulo com o eixo real) é diferente de determinar o módulo ou determinar a forma trigonométrica do complexo, por mais que para o segundo, uma das técnicas necessárias é justamente o cálculo do argumento principal.

Figura 55 - Exemplo de T_{22}



31. Calcule o argumento principal de cada número complexo.

a) $z = 10 + 10i$

b) $z = 8$

c) $z = -10\sqrt{3} + 10i$

d) $z = -8 - 8\sqrt{3} \cdot i$

e) $z = -1 - i$

f) $z = 1 - \sqrt{3} \cdot i$

Fonte: Fonte: Fonte: SMOLE & DINIZ 2016 p. 196

Encontramos quarenta e cinco tarefas deste tipo, isto é 3,5% de todas as tarefas classificadas.

A seguir vamos apresentar algumas reflexões e constatações dos dados extraídos até o momento, seguindo para a análise de um melhor desenho do bloco do saber.

4.6 Comentários e discussões acerca do LD1 e do LD4

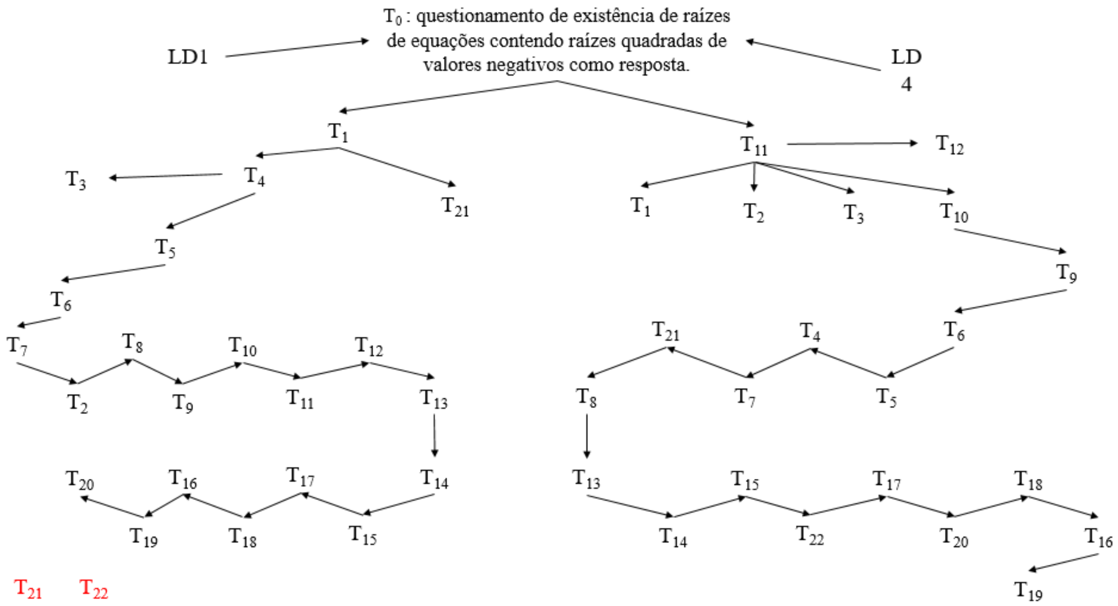
Ao analisarmos as estruturas dos dois Livros Didáticos que apresentam uma distinção da organização do conteúdo já no sumário, nossa hipótese era constatar o surgimento e exploração de técnicas diferentes ao decorrer da evolução das praxeologias.

Fizemos a escolha de trazer uma análise descritiva das duas obras de I_{PNLD} por serem obras que evoluem da mesma praxeologia que classificamos inicialmente como sendo $\wp_0$. Esta praxeologia é caracterizada principalmente pelo questionamento de existência de raízes de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, que contêm raízes quadradas de quantidades negativas. Desta forma pensamos da análise de duas obras que partiam da mesma praxeologia, mas cuja organização didática era diferente. Nossa hipótese era que essa OD influenciaria na razão de ser de cada obra, ou que poderíamos perceber que o surgimento de técnica diferentes não implicaria a exploração delas.

Como resultado dessa comparação direta constatamos que o LD4, que apresenta o tratamento de complexos depois do tratamento de polinômios, há a ocorrência de uma técnica que não aparece em outras obras, a técnica do triângulo de Pascal. Porém, esta técnica é trabalhada em segundo plano, e tem relação com a potenciação de um complexo na forma algébrica. Ela surge como técnica auxiliar, enquanto não ocorre a exploração da primeira fórmula de Moivre. Essa escolha didática realizada pelas autoras do LD4 pode ser justificada, uma vez que a primeira fórmula de Moivre só pode ser explorada como técnica depois que ocorre o tratamento trigonométrico de complexos. Dessa forma, ao contrário do que ocorre no LD1, esse assunto pode ser mais explorado, uma vez que o LD1 segue o caminho “tradicional” na apresentação do conteúdo, deixando para explorar a técnica auxiliar, classificada como primeira fórmula de Moivre ao final do tratamento trigonométrico do conjunto.

Vamos explorar os caminhos que estas duas obras realizaram no tratamento de números complexos a partir de uma arvore hierarquizada. Para elaborar o modelo dessa hierarquização, usamos como inspiração o T4TEL[18] (T4 faz referência ao quarteto praxeológico tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria e TEL é o aprendizado aprimorado da tecnologia)[19] proposto por Chaachoua e Bessot (2018). Este modelo lida com noções que não exploramos neste trabalho, porém usaremos os modelos hierárquicos de evolução das tarefas de tipo Ti, nas duas obras, tomando como exemplo como os autores esboçam uma árvore hierárquica neste modelo como podemos observar na figura 56.

Figura 56 - Árvore dos caminhos de LD1 e LD4 pelos tipos de tarefas Ti



Fonte: própria

[18] O T4TEL faz parte da Teoria Antropológica do Didático, especificamente da abordagem praxeológica, fazendo referência principalmente ao conceito de variável da TSD. (CHAACHOUA & BESSOT, 2018, p. 121)

[19] T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL à Technology Enhanced Learning.

Pensando no desenho desta “árvore” de caminhos que o LD1 e o LD4 percorrem, vamos nos atentar a alguns detalhes. Primeiramente, ambas as obras partem do mesmo princípio de questionamento de existência, isto é, ambos os livros partem do questionamento do alcance das técnicas conhecidas no conjunto dos reais para resolver um tipo específico de equações, como comentado anteriormente.

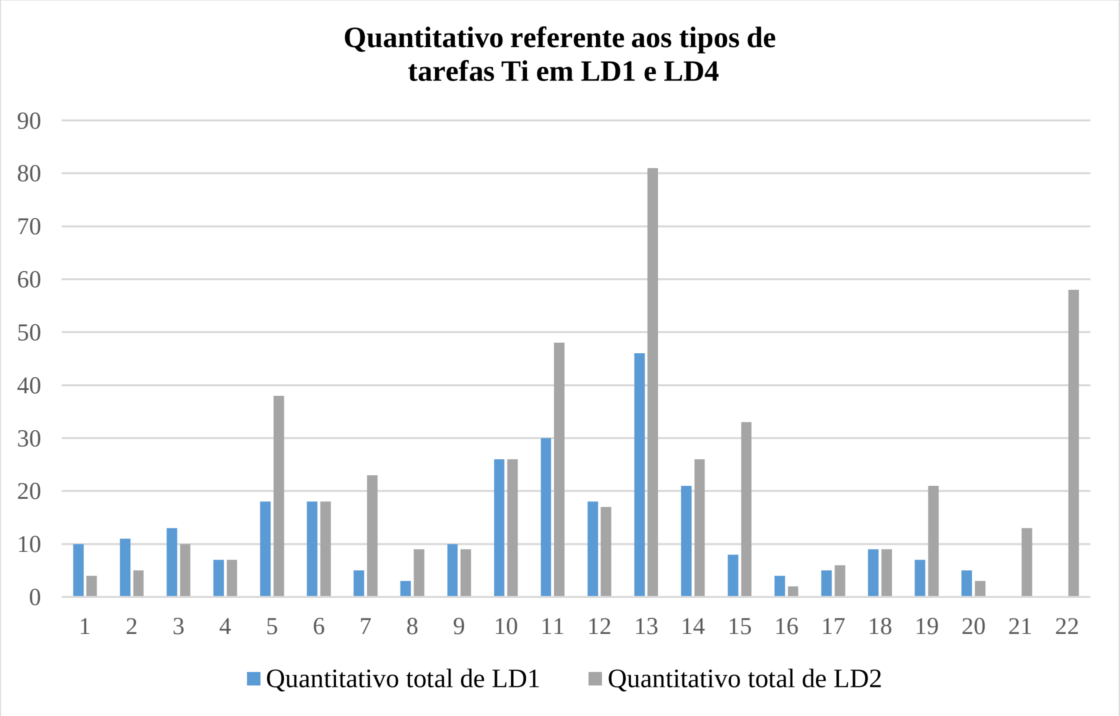
Enquanto o caminho vai sendo realizado podemos constatar que no LD1 ocorre primeiramente um tratamento algébrico do conteúdo de complexos, enquanto no LD2 ocorre a exploração da definição de complexos como par ordenado, sendo um dos primeiros contatos com o conteúdo.

As tarefas do tipo T_{21} e T_{22} não aparecem no LD1, por isso as destacamos em vermelho. Não necessariamente elas estão intimamente ligadas com a razão de ser dos complexos nessas obras, um dos objetivos deste trabalho. Porém, podemos retirar algumas conclusões da última linha deste esquema conforme podemos ver na figura 56.

Analisando como evoluem os caminhos dos tipos de tarefas em cada livro, podemos concluir que as praxeologias matemáticas em torno dos números complexos, nestas obras, convergem para que o aluno seja capaz de operar as operações aritméticas básicas em sua representação algébrica e geométrica e seja capaz de manipular a representação algébrica e aplicar as técnicas da primeira fórmula e da segunda de Moivre. Estas tarefas, por mais que não sejam maioria das tarefas em termos quantitativos, constituem a maior quantidade de exploração do bloco do saber, isto é, nesse assunto é quando o LD se dedica a dar mais justificativas tecnológicas e teóricas a respeito das tarefas que vão surgindo com o decorrer da evolução das praxeologias.

Vamos colocar os dados quantitativos referentes aos tipos de Tarefas Ti explorados em LD1 e LD4:

Figura 57: Gráfico referente ao quantitativo dos tipos de tarefas Ti em cada obra analisada



Fonte: Própria

Observando a figura 57 podemos tirar algumas conclusões acerca do que cada obra "prioriza" em termos de tipos de tarefas. Por exemplo, analisando o tipos de tarefas de T5: "Encontrar a incógnita que satisfaça a igualdade" – que engloba os subtipos: $T_{5.1}$: Resolver a equação para que o complexo seja um imaginário puro; $T_{5.2:}$ Resolver a equação para que o complexo seja real; $T_{5.3}$: Determinar os complexos que satisfaçam as condições; $T_{5.4}$: Determine as incógnitas para que $z_1 = z_2$; $T_{5.5}$: Encontre a equação da reta para qual P (x, y) pertença tal que o produto z_1 x z_2 com incógnitas x e y é um número real; $T_{5.6}$: Resolver a equação para que o complexo seja um imaginário – podemos ver que o LD4 opta por explorar em maior quantidade (em cinza na figura 59) a T_5 em comparação com o LD1. Podemos entender que este tipo de tarefas possibilita o *link* com outros conteúdos da matemática e sendo assim, é um tipo de tarefas que engloba diferentes técnicas e permite a manipulação algébrica do conteúdo. Entendemos que em especial o LD4 faz o uso deste tipo de tarefas para possibilitar a manipulação algébrica do novo conjunto numérico a ser aprendido.

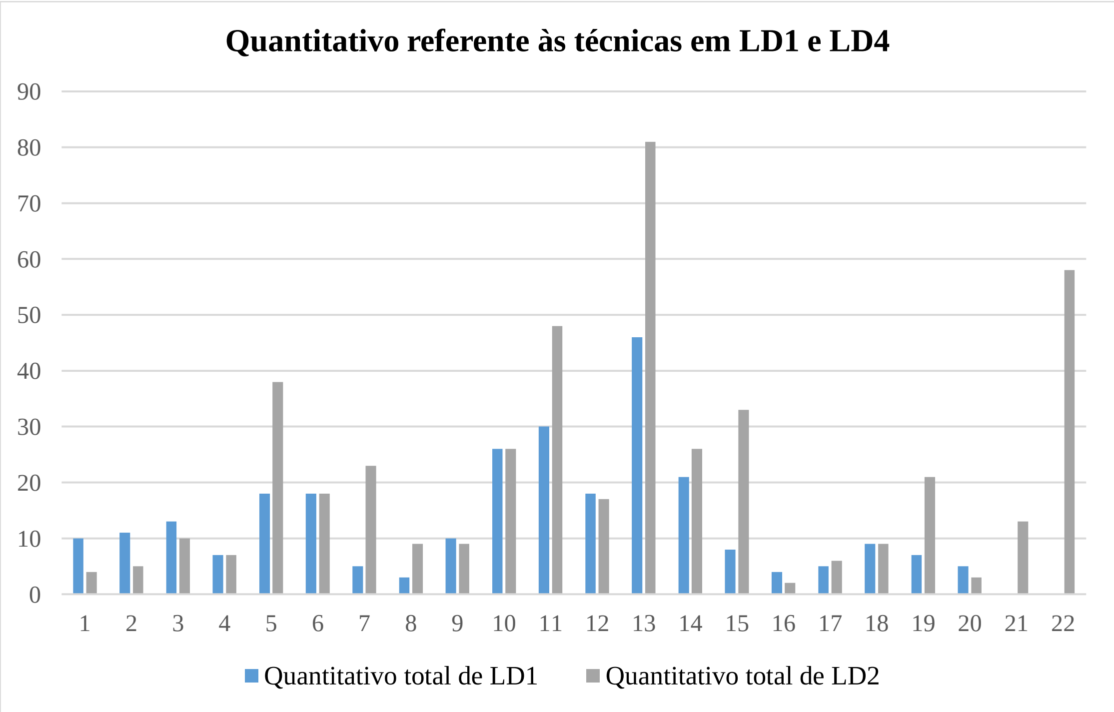
Como podemos observar, em números gerais, o LD4 possui um quantitativo maior de tipo de tarefas. Há somente dois casos em que o LD1 supera o LD4 em termos de quantidade, são os tipos de tarefas T_{13} e T_{20} (T_{20} ausentes de LD4). T13 faz referência ao módulo de complexos – ferramenta pelo qual se tornam possíveis as tarefas do tipo T16,17,18 e 19; já a T20 em relação com a propriedade da multiplicação de complexos na forma trigonométrica da rotação no plano de Argand-Gauss. Esta última se configura mais como uma propriedade, e é pouco trabalhada, ocorrendo apenas 5 vezes no LD1.

Podemos dizer em termos gerais que o tipo de tarefas relativas à manipulação algébrica do conjunto numérico dos complexos (T_5), o tipo de tarefas relativas à representação e interpretação geométrica (T_{11}) e o tipo de tarefas relativas a representação trigonométrica (T_{14}) configuram, de acordo com a tabela 2, tabela 3 e figura 59 deste trabalho as que mais aparecem, pelos menos em relação à estes dois livros didáticos estudados.

Já a respeito das técnicas, vamos identificar aquelas mais exploradas pelos autores deste LD1 trazidos nesta análise (observe o gráfico da figura 58).

Em termos de técnica entendemos que houve uma valorização da τ_{10}, τ_{11} e τ_{13}, que fazem parte, respectivamente, da exploração do conjugado de um complexo; da exploração da representação geométrica de complexos na forma algébrica; e da exploração do módulo de números complexos.

Figura 58: Gráfico referente ao quantitativo dos tipos de técnicas em cada obra analisada



Fonte: Própria

O que ocorre é que existe a valorização de técnicas de forma a fornecer instrumentos para tipo de tarefas futuros, isto, pois, tanto τ_{10}, quanto τ_{13}, são técnicas exploradas que aparecem como auxiliares para outros tipos de tarefas referentes ao conteúdo de números complexos. Concluímos, que dentre as técnicas mais valorizadas estão aquelas que servem como auxiliares para resolução de outros tipos de tarefas, na manipulação do conjunto dos números complexos.

Entendemos então, ao colocarmos em contraste estas duas obras, que a razão de ser dos complexos parece convergir para fornecer instrumentalização para que se opere no conjunto dos números complexos, sem necessariamente justificar o Teorema Fundamental da Álgebra, que é a razão de ser deste conjunto, motivo de existência e estudo acerca dos complexos na $I_{\text{Matemática}}$.

Não apresentamos resultados acerca da análise praxeológica da OM e OD nas outras cinco obras aprovadas no $\mathrm{I}_{\text{PNLD/2018}}$, mas temos alguns dados e algumas reflexões iniciais, cujos resultados trazemos no próximo item.

4.7 Comentários a respeito das outras obras: LD2, LD3, LD5, LD6 e LD8

Em nossa análise pudemos verificar que em seis – das oito obras estudadas – existe o tratamento do assunto de números complexos a partir do questionamento de existência de soluções dentro dos reais para equações de grau dois. Uma vez que parte das tarefas não podem ser respondidas com as técnicas conhecidas se institucionaliza o conjunto os complexos. O momento de institucionalização é um momento didático em que algumas ferramentas são mobilizadas, as primeiras técnicas para resolução de tipos de tarefa.

Esta abordagem, nestas seis obras, é prevista na TAD, a partir do questionamento de existência de objetos que os sujeitos dessa instituição ainda não se relacionam; também é prevista na dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1986).

Durante a vida escolar o estudante vai se deparando com situações e problemas dos quais ele sabe resolver parte, ou praticamente nada; para tal, ele vai se apropriando de ferramentas e adaptando-as para servir ao seu propósito. O mesmo acontece com os números complexos: quando os usamos para resolver o TFA, por exemplo, ele é uma ferramenta. Porém quando estudamos sua definição, suas propriedades, como realizar operações neste novo conjunto, estamos trabalhando com o aspecto objeto do conceito.

4.7.1 LD2

No LD2 – Quadrante Matemática, de Eduardo Chavante e Diego Prestes – o capítulo destinado aos números complexos é o de número 7, que precede o tratamento de polinômios e equações polinomiais.

Na tabela a seguir colocamos os tipos de tarefas e técnicas utilizadas para resolver tipos de tarefas identificadas neste LD:

Tabela 5: Quantitativo dos tipos de Tarefas e técnicas analisadas no LD2

Tipo de Tarefas Ti	**Quantitativo total**	**Técnica explorada**	**Quantitativo total**
T_1	6	τ_1	10
T_2	3	τ_2	5
T_3	5	τ_3	7
T_4	1	τ_4	3
T_5	17	τ_5	19
T_6	17	τ_6	30
T_7	10	τ_7	8
T_8	2	τ_8	6
T_9	7	τ_9	7
T_{10}	5	τ_{10}	15
T_{11}	4	τ_{11}	15
T_{12}	11	τ_{12}	17
T_{13}	11	τ_{13}	9
T_{14}	9	τ_{14}	11
T_{15}	7	τ_{15}	6
T_{16}	4	τ_{16}	2
T_{17}	2	τ_{17}	2
T_{18}	2	τ_{18}	2
T_{19}	0	τ_{19}	0
T_{20}	0	τ_{20}	0
T_{21}	6	τ_{21}	10
T_{22}	0	τ_{22}	0
Total	**129**	**-**	**-**

Fonte: própria

O tratamento dos números complexos neste LD ocorre de maneira um pouco diferente dos LD1 e LD4, que discorremos durante nossa análise a respeito da OD e OM destes dois. A praxeologia inicial $\wp_0 \Rightarrow T_0 \colon x^2 + k = 0, k > 0$, que por sua vez usa a técnica de resolução $\tau_0 \colon x^2 + k = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-k}$, não aparece nessa obra; os autores optaram por fazer um comentário histórico a respeito de como os complexos foram estruturados como conceito na matemática, porém, as primeiras técnicas giram em torno da técnica relativa ao tipo de tarefas T_6, que irá agrupar tarefas relativas às unidades imaginárias. Isto quer dizer que o caminho que este LD faz a respeito dos complexos, segue com a necessidade de se resolver raízes quadradas de números negativos, embora pontue na página 188 que “a importância dos números complexos foi percebida pela primeira vez para se resolver equações de 3° grau, no século XVI”. Desta forma a evolução da árvore de tarefas, que apresentamos anteriormente, pensando da proposta do T4TEL, será um tanto diferente, como apresentaremos mais adiante.

Outro ponto importante, levando em consideração a DFO, este manual didático opta por estudar os complexos como objeto, o aspecto ferramenta não é abordado no capítulo de números complexos – podemos perceber, de fato, que as tarefas de tipos: T_{19}, T_{20}, e T_{22} não são abordadas nesta seção do livro.

Os complexos voltam a aparecer no capítulo de equações polinomiais, nos assuntos de equações polinomiais, multiplicidade de uma raiz, relações de Girard para equações do *2º* grau, para equações do *3º* grau, para equações de grau *n;* raízes complexas de equações polinomiais com coeficientes reais; raízes racionais de equações polinomiais com coeficientes inteiros. As técnicas mais valorizadas são as relativas à manipulação das unidades imaginárias, do bloco geométrico e de representação trigonométrica. Isto ocorre pois, nessa obra, o conjunto complexo é usado primeiramente como objeto e posteriormente como ferramenta para equações polinomiais.

4.7.2 LD3

Este LD é o "Matemática: ciência e aplicações", dos autores David Degenszajn; Gelson Iezzi; Nilze de Almeida; Osvaldo Dolce; Roberto Périgo.

Nesta obra o conteúdo de números complexos é apresentado antes do tratamento de polinômios e equações polinomiais. Esta opção didática faz com que, semelhantemente ao que ocorre no LD2, no capítulo destinado ao estudo do conceito de complexos, o conceito seja abordado como objeto (DOUDY, 1986), isso acaba descontextualizando a a proposta pedagógica em torno deste conteúdo – isto porque a proposta pedagógica gira em torno de aplicações e exemplos reais, e quando ocorre o estudo do conceito como objeto, o mesmo ocorre descontextualizado.

A seguir, consta o quantitativo, relativo ao bloco prático-técnico do LD3:

Tabela 6: Quantitativo dos tipos de Tarefas e técnicas analisadas no LD3

Tipo de Tarefas Ti	Quantitativo total	Técnica explorada	Quantitativo total
T_1	6	τ_1	10
T_2	3	τ_2	7
T_3	14	τ_3	15
T_4	8	τ_4	16
T_5	27	τ_5	20
T_6	17	τ_6	31
T_7	10	τ_7	10
T_8	12	τ_8	12
T_9	4	τ_9	2

T_{10}	5	τ_{10}	32
T_{11}	3	τ_{11}	3
T_{12}	7	τ_{12}	9
T_{13}	26	τ_{13}	24
T_{14}	26	τ_{14}	29
T_{15}	2	τ_{15}	20
T_{16}	0	τ_{16}	0
T_{17}	0	τ_{17}	0
T_{18}	0	τ_{18}	0
T_{19}	4	τ_{19}	4
T_{20}	0	τ_{20}	0
T_{21}	9	T_{21}	23
T_{22}	20	T_{22}	41
Total	**203**	**-**	**-**

Fonte: própria

Esta escolha didática de organizar os conteúdos desta forma, faz com que ocorra um vácuo, no sentido de contexto – também observado no LD2. Isto ocorre porque neste caso o conteúdo é apresentado de forma a instrumentalizar os alunos, para que o conceito sirva como ferramenta no conteúdo de polinômios, apresentado mais adiante.

A praxeologia inicial que irá apresentar o conteúdo é o questionamento de existência de raízes quadradas negativas, embora possa induzir a uma confusão epistemológica ao sugerir que “Os números complexos são usualmente apresentados a partir de uma equação do 2º grau” o que pode culminar em um obstáculo epistemológico pontual, a respeito da utilidade deste conceito matemático. Sendo justos com este livro, ocorre no mesmo o discurso de cunho epistemológico, e histórico, mas isso posterior a induzir o leitor de que na realidade os complexos servem para outra coisa. Além do mais, neste livro didático ocorre algo que consideramos deveras peculiar. A praxeologia inicial e as primeiras tarefas relativas ao conceito são do campo geométrico, e isto foi inédito em nossa análise. O tratamento do conjunto parte da representação geométrica para depois introduzir a representação algébrica, inclusive sugere operadoras no plano complexo.

Neste LD, existe uma ausência entre os tipos de tarefas T_{16} à T_{18} e em T_{20}; o que se justifica quando olhamos para o capítulo de polinômios, e de fato, ocorre algo muito semelhante ao LD2.

4.7.3 LD5

No LD5 – "Matemática: interação e tecnologia" de Rodrigo Balestri – são dedicadas vinte e uma páginas para o estudo dos números complexos que também ocorre antes do tratamento de polinômios e equações polinomiais.

Na tabela a seguir trazemos o quantitativo relativo ao bloco prático-técnico, ou bloco do saber-fazer (Chevallard, 1999) para, em seguida, fazermos algumas inferências.

Tabela 7: Quantitativo dos tipos de Tarefas e técnicas analisadas no LD5

Tipo de Tarefas Ti	**Quantitativo total**	**Técnica explorada**	**Quantitativo total**
T_1	6	τ_1	17
T_2	9	τ_2	13
T_3	14	τ_3	16
T_4	2	τ_4	6
T_5	28	τ_5	37
T_6	17	τ_6	29
T_7	7	τ_7	11
T_8	3	τ_8	5
T_9	6	τ_9	3
T_{10}	15	τ_{10}	35
T_{11}	34	τ_{11}	42
T_{12}	12	τ_{12}	24
T_{13}	26	τ_{13}	23
T_{14}	17	τ_{14}	28
T_{15}	1	τ_{15}	5
T_{16}	9	τ_{16}	14
T_{17}	11	τ_{17}	14
T_{18}	16	τ_{18}	19
T_{19}	0	τ_{19}	0
T_{20}	0	τ_{20}	0
T_{21}	12	τ_{21}	18
T_{22}	1	τ_{22}	6
Total	**246**	**-**	**-**

Fonte: própria

Apesar de o tratamento de complexos preceder o tratamento das equações polinomiais e o tratamento do teorema fundamental da álgebra, neste livro ocorre alguma instrumentalização dos complexos que irá dar ao conceito os aspectos apontados por Douady (1986) de ferramenta-objeto, com ressalvas no vácuo em torno das tarefas de tipo T_{19} e T_{20}.

Neste LD a praxeologia inicial é modelada a partir da apresentação epistemológica dos complexos abordando uma situação problema, que tem solução nos reais, porém os métodos de resolução sugerem operadores de raízes quadradas negativas. Essa problemática é a mesma que fez com que surgisse a formalização do conjunto, e esta é uma escolha didática. Porém, o que percebemos é que a passagem do primeiro encontro, momento didático, em que ocorre o primeiro contato com o conteúdo, é abrupta. (CHEVALLARD, 1999) Depois de apresentar a situação problema a partir do exemplo e da apresentação histórica e epistemológica, os conceitos de formalização algébrica, parte real e parte imaginária, e representação no plano complexo já são institucionalizados.

De fato, há um vácuo nos tipos de tarefas de T_{19} e T_{20}, e isso ocorre devido a organização matemática do LD e suas escolhas didáticas. Como vemos, este converge para ser o modelo dominante: instrumentalizar o leitor com os operadores de complexos para depois usá-los como ferramenta no estudo de equações polinomiais. Embora prime por apresentar de forma contundente os operadores relativos às representações trigonométricas e as fórmulas de Moivre, que fazem parte, entre outras coisas, do bloco do saber.

4.7.4 LD6

O LD6 é o "#contato matemática" dos autores Jacqueline Garcia e Joamir Souza. Os autores irão introduzir ou "contextualizar" os complexos a partir de obras de arte do de Luiz Sacilotto. As obras de Sacilotto eram concretistas e tinham como característica fundamental o uso de formas geométricas. Em especial, em algumas obras desse artista, ele usava formas geométricas congruentes, mas que rotacionavam na tela, dando uma impressão de movimento. Como já vimos, rotacionar uma figura θ graus em torno de determinado eixo do plano complexo caracteriza o tipo de tarefas que classificamos como T_{20}.

Este LD segue o padrão dos outros livros que apresentam complexos antes de polinômios: são apresentados alguns aspectos históricos e epistemológicos, e as primeiras praxeologias começam surgir como operadores dos complexos. Neste caso, as primeiras praxeologias surgem da definição de complexo, como tendo uma parte real e uma imaginária, a parte imaginária é o número cuja raiz quadrada é uma unidade negativa, assim sendo, as primeiras tarefas são do tipo T_7, que são relativas a resolver elações em $\mathbb{C}$.

Resolver as equações que antes não eram possíveis no conjunto dos reais é algo que podemos definir como uma quebra de paradigma, tanto na matemática quanto deve ser para o estudante que está tendo pela primeira vez o contato com raízes que a vida toda ouvira que não eram possíveis. Neste LD, essa escolha didática de modelar as primeiras praxeologias em torno dos complexos parece ser uma tentativa de conceitualizar os complexos como ferramentas de resolução de equações que possuem raízes quadradas de números negativos em suas resoluções, mesmo que durante o tratamento deste conteúdo, os próximos passos serão institucionalizar o conceito como objeto, trabalhando todos seus operadores e suas mudanças de quadros.

A seguir, trazemos os quantitativos do bloco do saber-fazer relativos ao LD6:

Tabela 8: Quantitativo dos tipos de Tarefas e técnicas analisadas no LD6

Tipo de Tarefas Ti	**Quantitativo total**	**Técnica explorada**	**Quantitativo total**
T_1	13	τ_1	19
T_2	12	τ_2	13
T_3	4	τ_3	20
T_4	2	τ_4	4
T_5	41	τ_5	47
T_6	12	τ_6	22
T_7	9	τ_7	10
T_8	2	τ_8	6
T_9	10	τ_9	10
T_{10}	18	τ_{10}	29
T_{11}	28	τ_{11}	30
T_{12}	13	τ_{12}	20
T_{13}	17	τ_{13}	24
T_{14}	12	τ_{14}	29
T_{15}	21	τ_{15}	26
T_{16}	4	τ_{16}	4
T_{17}	5	τ_{17}	6
T_{18}	2	τ_{18}	13
T_{19}	0	τ_{19}	0
T_{20}	1	τ_{20}	2
T_{21}	7	τ_{21}	9
T_{22}	1	τ_{22}	6
Total	**234**	**-**	**-**

Fonte: própria

Um ponto a ser destacado neste LD é que nele, há primeiro a instrumentalização das Tarefas e técnicas relativas à representação algébrica e geométrica. As operações de adição, subtração, multiplicação, e soma serão exploradas posteriormente ao tratamento das representações geométricas. Além disso, no LD, essas operações são apresentadas junto com a interpretação geométrica da operação, o que parece ser um movimento de trabalhar diferentes quadros de representação a respeito de um mesmo conceito.

Neste manual didático ocorre valorização do quadro geométrico dos números complexos. Os autores deixam o caminho bem preparado para introduzir as fórmulas de Moivre e a demonstração do TFA, mas neste material o autor deixa esta parte para as equações polinomiais.

4.7.5 LD8

Neste livro didático, “Conexões com a matemática”, de Fábio Martins de Leonardo, como na maior parte dos LD analisados, o conteúdo de polinômios e equações polinomiais é posterior ao tratamento de complexos, apresentados no capítulo 8.

Como vemos, quando essa é a organização do LD, as tarefas e técnicas em torno do conceito tendem a ter uma falsa contextualização, isto pois ocorre o estudo dos operadores e a mudança de formas de representação dos complexos, e isto é estatuto de objeto do conceito, como aponta Douady (1986). Ressaltamos que não é excluído o aspecto de ferramenta do conceito, principalmente presente nos tipos de tarefas T_7 referentes às resoluções de equações em $\mathbb{C}$, de fato somente as quadráticas. Porém, não podemos negar que o aspecto objeto é mais trabalhado – quando ocorre a escolha matemática e didática de apresentar os complexos antes das equações polinomiais.

Os quantitativos do bloco prático-técnico do LD8 são organizados na tabela a seguir:

Tabela 9: Quantitativo dos tipos de Tarefas e técnicas analisadas no LD8

Tipo de Tarefas Ti	**Quantitativo total**	**Técnica explorada**	**Quantitativo total**
T_1	10	τ_1	9
T_2	3	τ_2	2
T_3	14	τ_3	10
T_4	0	τ_4	0
T_5	14	τ_5	14
T_6	3	τ_6	19
T_7	4	τ_7	3
T_8	4	τ_8	2
T_9	5	τ_9	4
T_{10}	7	τ_{10}	19
T_{11}	30	τ_{11}	16
T_{12}	8	τ_{12}	1
T_{13}	16	τ_{13}	19
T_{14}	15	τ_{14}	26
T_{15}	2	τ_{15}	5
T_{16}	5	τ_{16}	7
T_{17}	2	τ_{17}	6
T_{18}	9	τ_{18}	9
T_{19}	12	τ_{19}	14
T_{20}	1	τ_{20}	2
T_{21}	11	τ_{21}	12
T_{22}	14	τ_{22}	19
Total	**189**	**-**	**-**

Fonte: própria

Já no início das discussões, o autor aponta os objetivos do capítulo, que são:

> Compreender o conjunto dos números complexos do ponto de vista histórico; Ampliar o conhecimento adquirido sobre os conjuntos numéricos; Operar com números complexos; Compreender as representações geométricas de um número complexo. (p. 172)

Isso indica que um dos focos do LD será estender o conjunto dos reais e operar no mesmo. Esta abordagem se assemelha, de fato ao que Dante (autor do LD1) faz, inclusive trazendo uma organização matemática e didática parecida com a do LD1.

O tratamento de complexos nessa obra se assemelha muito ao LD1. Ele percorre o processo de instrumentalização dos operadores do conceito, e resolve o TFA antes de entrar em equações polinomiais. Dessa forma, os dois aspectos, apontados pela DFO, são observados.

Como todos os livros analisados neste trabalho, neste LD ocorrem a apresentação aspectos históricos e epistemológicos para justificar o estudo de complexos. Neste, os autores trazem uma régua histórica que coloca os principais contribuidores matemáticos para elaboração e estruturação do conceito, de Tartaglia à Gauss, passando por Girolamo, Bombelli e Euler.

Outro ponto é que a praxeologia inicial e as primeiras tarefas são relativas à T_6, relativas aos operadores das unidades imaginárias. Neste tipo de abordagem, o que ocorre é que logo as equações em $\mathbb{C}$ são colocadas em pauta, as tarefas do tipo T_7.

Observamos somente uma “ausência” nesta obra, que foi relativo à potenciação na forma algébrica, as tarefas do tipo T_4. Porém, como o conteúdo evolui, não consideramos que houve de fato um salto na organização matemática ou uma brecha na organização didática, que posteriormente o estudo do quadro trigonométrico será explorado de forma rigorosa – de fato, neste quadro é onde conseguimos observar mais aspectos do bloco do saber, proposto por Chevallard (1999).

5 CONCLUSÃO

Motivados pela nossa questão de pesquisa - “Como é o tratamento do conteúdo de números complexos em livros didáticos do ensino médio e por que esse saber é ensinado no Ensino Médio?” - pudemos nos aprofundar em como as obras abordam este conteúdo nesta etapa do ensino.

Percebemos que, em sua maioria, estas obras irão abordar o conceito de números complexos em seu status de objeto (DOUADY, 1986) em que o conteúdo é tirado de contexto e trabalhado de forma a explorar seus operadores e suas características.

Observou-se também que as obras aprovadas no PNLD/2018 se dedicam a muitos campos de contextualizações, boxes informativos, curiosidades, entre outros, porém o que vimos foi um tratamento mais técnico (em sua grande maioria) onde o objetivo era operar dentro deste novo conjunto numérico.

Todas as obras deste PNLD irão abordar a representação geométrica dos números complexos. E o tratamento da parte geométrica se calca para que seja possível algumas justificativas matemáticas do conteúdo. Muito do que percebemos envolvem justificativas tecnológicas para alguns conceitos que foram abordados, como conjugado e inverso multiplicativo, como também de alguns conceitos que aparecerão, como a própria representação trigonométrica de um número complexo qualquer ou a definição de módulo.

Seis das oito obras optaram por apresentar o conteúdo de complexos antes do conteúdo de polinômios. Destas seis obras, o LD2, o LD3 e o LD5 não se aprofundam nos estudos de complexos para resolução do Teorema Fundamental da Álgebra. Nestas obras, o aprofundamento do conteúdo de complexos vai ocorrer como ferramenta no tratamento das raízes de equações polinomiais, que estão adiante em sua organização. Isto é, em metade das obras, não ocorre o tratamento das raízes enésimas de complexos na forma trigonométrica, muito embora ocorra todo tratamento dos operadores do conjunto, o que, de fato, torna o conceito descontextualizado.

Durante todo este trabalho buscamos atingir nossos objetivos gerais e específicos em torno de nossa questão de pesquisa. Lembramos que um dos nossos objetivos é de entender a razão de ser deste conteúdo, o que implica em compreender “onde se quer chegar” com a evolução das praxeologias matemáticas e didáticas do conteúdo, isto é, responder à pergunta “para que estudamos isto?” E, sobretudo, o que se deseja fazer com este conceito: onde será usado, por exemplo?

Sabemos que o conjunto dos números complexos tem uma razão de ser na matemática, porém a razão de ser na educação básica não necessariamente será a mesma que na matemática. Este conjunto numérico foi desenvolvido por mais ou menos 3 séculos de estudo e sua razão de ser na matemática era encontrar um meio para se chegar à solução de equações do tipo $x^3 + px^2 = q$ e $x^3 + px = q$ (MOL, 2013), além de demonstrar, posteriormente, o teorema fundamental da álgebra. A solução de uma equação de grau n é resolvida pela 2ª fórmula de Moivre[20]:

Figura 59 - Segunda fórmula de Moivre

Assim, concluímos que:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \text{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad \text{segunda fórmula de De Moivre}$$

para $k = 0, 1, 2, ..., (n - 1))$

Após $k = n - 1$, os valores começam a se repetir. Então, de 0 a $n - 1$, temos n raízes distintas.

Observemos que essa fórmula também pode ser escrita assim:

$$\omega_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

Fonte: DANTE, 2018, p. 162

Trabalhar com esta fórmula exige destreza no campo da trigonometria. Todas as obras do PNLD/2018 se dedicaram a um trabalho matemático bastante rigoroso à despeito de trigonometria, mesmo quando não fossem explorar muito a fundo esta praxeologia.

Neste ponto, já podemos dizer que o fato de todos os LD se preocuparem em fornecer as técnicas de resolução para o tratamento da parte trigonométrica dos números complexos, é justificada a fim de que possam servir como ferramenta no estudo das equações polinomiais e relações de Girard.

Observa-se ainda que nas obras houve a dedicação, principalmente nos exercícios resolvidos, a apresentar contextualizações do conteúdo, na medida do que é possível dado o nível de abstração deste objeto matemático; as tarefas do tipo T_{22}: “Determine o argumento de z” são um bom exemplo de aplicabilidade deste conteúdo.

De fato, o tratamento algébrico é bastante trabalhado pelos autores que se dedicaram a resolver o TFA na obra, na parte das atividades propostas. Constata-se, porém, que na parte “curso” dos livros há uma dedicação para fornecer ao estudante técnicas voltadas à trigonometria, e as justificativas são dadas principalmente no bloco geométrico, a exploração do bloco $[\theta, \Theta]$ é um pouco tímida nas obras analisadas. Há algumas hipóteses que

[20] Abraham de Moivre (1667 – 1754), matemático francês.

poderíamos destacar neste movimento na parte curso, e uma delas está justamente ligada à razão de ser do conjunto dos números complexos na educação básica, que é ser usado como ferramenta para o conteúdo de equações polinomiais.

Podemos ainda concluir que há ferramentas que fornecem meios de se obter as raízes enésimas de uma equação de grau *n*, na parte “curso”, porém o que está sendo posto em destaque é a manipulação algébrica em suas várias representações e os vários quadros (DOUDY, 1986). No capítulo destinado ao estudo de complexos a sua razão de ser nestas obras parece convergir para a expansão do conjunto dos reais e a manipulação algébrica, geométrica e trigonométrica.

Podemos, então, concluir que o modelo dominante para o ensino de Números Complexos no ensino médio segue o padrão de estudo do conceito “números complexos” como objeto, para depois justificar seu uso como ferramenta para se resolver o TFA. Isto é, desde a praxeologia inicial, que questiona o “alcance da técnica” (CHEVALLARD, 2001) para se resolver um tipo de equação quadrática que não tem solução no conjunto dos números reais – o que induz o estudante ao erro de pensar que é para isso que ele serve: resolver equações quadráticas específicas – evolui de modo a fornecer todo o aparato técnico (nos operadores) e tecnológicos com algumas demonstrações e mudanças de quadros – geométrico, algébrico, trigonométrico – para, então, ser usado como uma ferramenta do Teorema Fundamental da Álgebra.

Esse caminho é realizado pelos sete LD que trazem o conteúdo de complexos no sumário; seis deles irão percorrer esse modelo, descrito no parágrafo anterior. Apenas o LD4 irá abordar o caráter de objeto dos complexos, sem tratar o caráter de ferramenta.

O que podemos concluir disto?

Os complexos são, na maior parte do tempo, tratados de forma descontextualizada, pois a apresentação dos mesmos é o inverso do que propõe Douady (1986): primeiro ocorre a abordagem do estatuto “objeto” para depois ocorrer a abordagem do estatuto de ferramenta, isto levando em consideração as obras que tratarão do estatuto de ferramenta. E como o tratamento do caráter objeto é descontextualizada, ocorre de, mesmo que a proposta das obras seja de contextualizar o ensino – por esse motivo esmiuçamos nossa análise das obras – o que ocorre de fato é uma falsa contextualização, ou pelo menos, uma que não abrange de forma concreta o uso de números complexos – por mais que ferramentas implícitas surjam na necessidade de se expandir o conjunto dos reais.

Quanto ao nosso objetivo de compreender a razão de ser dos complexos no Ensino Médio foi parcialmente atingido. Isto porque a razão de ser de um conceito como este estar na Educação Básica, tem tudo a ver com os aspectos epistemológicos e históricos dos complexos. Ensina-se os complexos pela valorização técnica e tecnológica do conteúdo. E como vimos, houve duas épocas que consideramos cruciais para este conteúdo ter vindo parar neste nível de ensino.

Nas décadas de 1920 e 1930, no Estado Novo de Getúlio Vargas, os manuais didáticos ainda eram traduzidos da Europa, principalmente França. E o Brasil, nesta época estava em uma onda desenvolvimentista, e de valorização da força nacional, e das novas tecnologias – e como os complexos têm relações com o desenvolvimento tecnológico, talvez, essa fora a primeira vez que este conteúdo passou a ser ensinado na etapa de ensino que hoje é o Ensino Médio.

Já entre as décadas de 1960 a 1980, a mesma tendência nacionalista e desenvolvimentista tomou conta do poder com o Regime da Ditadura Militar. As tendências pedagógicas nacionais e o movimento da matemática moderna, já fracassada no exterior, dominavam os modelos de ensino no Brasil (SAVIANI, 2019).

Essas heranças históricas nos levam a crer que este conteúdo foi ficando no currículo, posto em segundo plano e jogado cada vez mais às margens do Ensino Médio até sair do currículo já em 2021 com a BNCC. E isto também é influência dos níveis superiores de co-determinação apontados por Chevallard (2002) – as esferas da sociedade que organizam o currículo do que deve ser ensinado e mesmo as políticas de educação pública, ou ainda a academia, são organizações na noosfera que conseguem delimitar onde esse saber deve ficar.

Antes, no final do século 19 e durante o século 20, o objetivo da educação era formar o estudante para o curso superior, ou mesmo formar os militares para os cursos superiores que começaram a surgir no Brasil, depois de a corte portuguesa ter vindo para cá; entre outras coisas os objetivos da educação dos Parâmetros curriculares nacionais apontavam alguns conteúdos como pré-requisitos para alguns cursos superiores. Já no Brasil do século 21, o objetivo é formar para a cidadania e o mercado de trabalho, o que pode ser lido, subliminarmente, como formar mão de obra técnica. Dessa forma, os currículos particulares de cada curso superior têm que dar conta do seu referencial, retirando o papel do Ensino Médio de formar para o curso superior, e sim, formar para "cidadania".

Este estudo foi realizado entre os anos de 2019 e 2021. Período da história brasileira em que a educação está passando por certas reformas, que foram implantadas sob a influência dos níveis superiores de co-determinação. Estas reformas mudam não só o currículo como também a estrutura do Ensino Médio brasileiro. As obras do PNLD/2018 foram elaboradas sob orientação do edital do PNLD que por sua vez tinha como documento regulamentador os Parâmetros Curriculares Nacionais. Este PNLD teve sua validade até o ano de 2021; a partir de 2022 a Base Nacional comum curricular irá reger o currículo educacional brasileiro, e como já foi apontado neste trabalho, este documento não indica como o ensino de números complexos será ensinado.

Na verdade, o que entendemos é que não há orientações para o ensino dos números complexos, a partir da BNCC. O ensino de complexos continuará sendo praticado na educação básica? Ou se tornou um objeto de estudo da educação superior, no Brasil? Isso é positivo? Negativo? Que implicações a ausência deste objeto – números complexos – na educação básica pode acarretar?

O que inferimos, dados nossa análise e estudo a respeito desse objeto da matemática nesse nível de ensino é que ele tende a desaparecer dos currículos locais (estaduais e municipais) e deixar de ser ensinado, ao menos, na educação básica.

Isto seria uma perda, do ponto de vista epistemológico – principalmente nas discussões acerca do estudo de polinômios e raízes de polinômios de grau n – e acarretaria um obstáculo para os estudos de raízes complexas de equações que já são trabalhadas neste nível de ensino, como as equações quadráticas ou cúbicas. A expansão do conjunto dos reais para a compreensão do conjunto dos complexos, que resolveram um obstáculo matemático muito importante – como já apontamos – desaparecerá dos manuais didáticos e do currículo real, que acontece em sala de aula, na prática do professor.

Além disso, podemos ainda afirmar que estes estudantes, egressos deste sistema de educação – puxando aqui uma discussão da ecologia dos saberes e das influências na noosfera – irão para os cursos superiores sem estes aportes teóricos matemáticos. Mas por que apontar isto? Bem, nos cursos de matemática, por exemplo, este é um assunto relevante, para abrir discussões principalmente nos campos da álgebra e geometria analítica. Seria papel então dos currículos universitários mudar a forma de abordagem, pois nessa conjuntura, o primeiro contato dos estudantes graduandos com este objeto da matemática estaria acontecendo no curso.

É importante ressaltar, por fim, que no Brasil já se estuda uma Base Nacional Comum de Formação de Professores – BNCFP – que deve estruturar os currículos nas universidades do país. Este é um assunto para outra pesquisa, mas, certamente as adaptações de um currículo na educação básica como está sendo feito, gera demandas de mudança no ensino superior, ou seja, nos níveis de co-determinação superiores.

Estas são algumas das questões que acreditamos serem importantes para serem investigadas já nesta próxima década deste capítulo da educação brasileira.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Salomão Pereira de et al. Números complexos para o ensino médio: uma abordagem com história, conceitos básicos e aplicações. 2013.

ARTIGUE, Michéle & DELEDICQ, André. **Quatre étapes dans I'histoire des nombres complexes:** "quelques commentaires épistémologiques et didactiques" – Institut de Recherche Pour L'enseignement des Mathématiques, Paris VII – 1992

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática: interação e tecnologia**, volume 3. Rodrigo Balestri. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016.

BITTAR, Marilena. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez. 2017, p.364-387.

BRASIL. **Guia de livros didáticos**. PNLD 2018: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2016.

BRASIL. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional**. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L9394.htm. Acesso em: 29 nov. 2020

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Base Nacional Comum Curricular: Matemática**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1998.

BROCKELD, Paloma et al. **Critérios de divisibilidade nos livros didáticos**: de 1918 a 2015. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Monografia), Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Matemática.

CÁCERES, Fábio. **O Ensino de Geometria Euclidiana: Possíveis Contribuições da História da Matemática e da resolução de Problemas de George Polya**. 2015. 137 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Dissertação). Universidade Federal de São Carlos – UFSCar. Sorocaba 2015.

CAIRE, Elaine. A história da origem da curva normal. 2012. 109 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP. Rio Claro, 2012.

CALDEIRA, Cláudia Rosana da Costa. **Números complexos: uma proposta geométrica**. 2013. 150 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Matemática - UFRGS. Porto Alegre, 2013.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, p. 107-152, 1951.

CHAACHOUA, Hamid ; BESSOT, Annie. A noção de variável no modelo praxeológico. In: ALMOULOUD, ; FARIAS, ; HENRIQUES. **A Teoria Antropológica do Didático**: Princípios e fundamentos. – 1 ed. – Curitiba., PR: CRV, 2018

CHAACHOUA, Hamid; BITTAR, Marilena. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas/la théorie anthropologique du didactique: paradigme, avancées et perspectives. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 9, n. 1, 2018.

CHACÓN, Andrea Maria Araya. **La gestion de la m´moire didactique par le pofesseur dans I'enseignement secondaire des mathématiques: Etude du micro-cadre institutionnel em France et au Costa Rica.** THÈSE Du Dictorat De L‟université De Toulouse Délivré par I‟Université Toulouse III – Paul Sabatier em *Didactique des Disciplines Scientifiques et Technologiques Spécialité*: Didactique Des Mathematiques. 2008.

CHAGAS, Juliana Santos Barcellos. A relevância do ensino de números complexos no ensino médio na opinião dos professores de matemática. 2013. Dissertação (mestrado) Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - Uenf Campos dos Goytacazes - Rj Agosto De 2013

CHAVANTE, Eduardo; PRESTES, Diego. **Quadrante Matemática 3**. 1ª edição, São Paulo. Editora SM, 2016

CHEVALLARD, Yves., BOSCH, Marianna., GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

CHEVALLARD, Yves. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique.** In Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999. Versão disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/.

________. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, **Recherches en Didactique des Mathématiques** – Grenoble : La Pensée Sauvage, p.73-111

________. Organiser l'étude. 3. Écologie&régulation. **Actes de la XI école d‟été de didactique.** Grenoble: La PenséeSauvage, p. 41-56, 2002.

COSTA, Felix Silva. Estudo dos Polígonos no plano de Argand-Gauss. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, p. 79-88, 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática, contexto e aplicações** – v.3, 3 ed. São Paulo. Editora Ática, 2016.

DOS SANTOS, Beatriz Boclin Marques. O currículo das escolas brasileiras na década de 1970: novas perspectivas historiográficas. **Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação**, v. 22, n. 82, p. 149-169, 2014.

DOUADY, Régine. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 7, n. 2, p. 5-31, 1986.

IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. A noção de “obstáculo epistemológico” ea educação matemática. **Educação Matemática: uma introdução**, p. 155-196, 1999.

KASPARY, Danielly Regina **Análise da Proposta de Ensino de uma Coleção de Livros Didáticos Para Operações de Adição e Subtração de Números Naturais**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. Campo Grande, MS, 2014.

LEONARDO, Fabio Martins De**. Conexões com a matemática, v.3,** 1. ed. São Paulo. MODERNA, 2016.

LOPES, Roberto Nogueira de Sousa. **Praxeologia do professor: uma investigação do conceito de fração sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático**. 2020. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

MIRANDA, Weverton. Erros e obstáculos: os conteúdos matemáticos do ensino fundamental no processo de avaliação. **Revista Margens Interdisciplinar**, v. 7, n. 8, p. 155-171, 2016.

MOL, Rogério Santos. **Introdução à História da matemática**/ Rogério S. Mol. – Belo Horizonte: CAED – UFMG, 2013.

MORETTI, Méricles Thadeu; THIEL, Afrânio Austregésilo. O ensino de matemática hermético: um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. **Práxis Educativa (Brasil)**, v. 7, n. 2, p. 379-396, 2012.

OLIVEIRA, Adriel Gonçalves; DE GOUVEIA NETO, Sérgio Candido. Números complexos na aritmética da Emília? Uma leitura conceitual do termo números complexos a partir do contexto Histórico da Educação Matemática. **Revista BoEM**, v. 6, n. 12, p. 94-109, 2018.

OLIVEIRA, Carlos Nelly Clementino de. **Números Complexos:** Um estudo de registro e de aspectos gráficos. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. São Paulo, SP, 2010.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Autêntica, 2016.

PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 3. ed. São Paulo. MODERNA. 2015

ROSA, Mário Servelli. **Números complexos**: uma abordagem histórica para aquisição do conceito. 1998. 170 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 1998

SANTOS, Marcelo Câmara; MENEZES, Marcus Bessa. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 2015.

SANTOS, Maria Tânia Souza; SOUZA, Denize Silva. Estudo dos triângulos sob a perspectiva da teoria antropológica do didático: uma analise do livro didático “a conquista da matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (On-line)**, v. 2, n. 1, 2014.

SAVIANI, Demerval. **Escola e democracia**. São Paulo: Cortez/Autores Associados, 2005.

SAVIANI, Dermeval. **História das ideias pedagógicas no Brasil**. Autores Associados, 2019.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **#Contato matemática**. 3. ano. 1. ed. São Paulo. FTD, 2016.

TERÊNCIO, José. **Um estudo praxeológico do conteúdo de congruência de triângulos em um livro didático**. 2018. Trabalho de Conclusão de curso Artigo (Especialização em Educação Matemática e Ensino de Ciências). Universidade Federal da Grande Dourados – UFGD. Dourados, MS, 2018.

NETO, José Terêncio; BITTAR, Marilena. Uma análise do conteúdo de números complexos em livros didáticos no ensino médio sob o olhar da teoria antropológica do didático. **Anais do Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 13, n. 1, 2019.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930**, São Paulo, Annablume, 2007.

VIEIRA, Lúcia Helena da Silva et al. Epistemologia dos números complexos**.** 1999.Trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Curso de Matemática - UFSC. Florianópolis, 1999.