

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

VITÓRIA LOURENÇO LUGES DA SILVA

**LIMITE DE FUNÇÃO EM UM PONTO: UMA ANÁLISE DAS DEFINIÇÕES
PROPOSTAS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS**

Campo Grande, MS

2021

VITÓRIA LOURENÇO LUGES DA SILVA

**LIMITE DE FUNÇÃO EM UM PONTO: UMA ANÁLISE DAS DEFINIÇÕES
PROPOSTAS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS**

Monografia apresentada ao Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul no curso de Matemática - Licenciatura, sob a orientação da Professora Dra. Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato.

Campo Grande, MS

2021

**LIMITE DE FUNÇÃO EM UM PONTO: UMA ANÁLISE DAS DEFINIÇÕES
PROPOSTAS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS**

DATA DE APROVAÇÃO DO TRABALHO: 01/12/2021.

COMISSÃO EXAMINADORA

EXAMINADOR (A): Dra. Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato (Orientadora)

EXAMINADOR (A): Dra. Cíntia Melo dos Santos (UFGD)

EXAMINADOR (A): Ma. Danise Rodrigues Regina da Silva (SEMED)

Com muito amor, dedico este trabalho aos meus pais, Edilmar e Claudenice, por sempre estarem comigo e por me darem força para concluir mais esta etapa!

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Edilmar e Claudenice, por sempre me motivarem a enfrentar meus medos e minha timidez.

Agradeço aos meus irmãos, Giovanny e Giovanna, pelo encorajamento.

Agradeço às minhas amigas, Priscila e Gabriela, por sempre me apoiarem.

Agradeço à minha orientadora, Sonia Maria, pela calma, confiança e pela oportunidade de escrever este trabalho.

Agradeço às minhas companhias nesses anos de curso, Leonardo, Thays, Gabriela Sandim, Pamela, Lara e Luiza, pela ajuda, pelos estudos e pelo suporte.

Agradeço à Larissa, pela motivação e pelo incentivo constante.

Agradeço ao Marcos e Celso, pela experiência de ter sido aluna de vocês em Cálculo I, pela calma quando íamos em suas salas tirar dúvidas e pelo tempo quando fazíamos vocês pararem de trabalhar para jogar conversa fora. Aliás, um agradecimento especial ao Marcos, pois foi com ele que consegui a tão esperada aprovação na disciplina (perdão, Celso).

Agradeço a todos meus tios e primos, pelo apoio e à minha vó Maria, por me distrair no cafezinho da tarde sempre que eu precisava!

Agradeço, acima de tudo, a *Jeová Deus*, por colocar pessoas tão extraordinárias em minha vida e por sempre estar comigo.

Muito obrigada!

RESUMO

Esta monografia tem como objetivo analisar como alguns livros didáticos introduzem o conceito de limite de função em um ponto, por meio do estudo das definições utilizadas por esses autores. Esta investigação foi desenvolvida, por um lado, por algumas inquietações que surgiram na minha experiência na disciplina Cálculo I, em que tive dificuldade em compreender essas definições. Por outro lado, notamos que este é um problema comum em estudantes dessa disciplina apontados por diversas pesquisas. Os alunos têm muita dificuldade em compreender essas definições e, além disso, eles não conseguem relacionar a definição formal com o que é apresentado na definição intuitiva. Para este estudo selecionamos os três livros didáticos mais indicados nas ementas da disciplina de Cálculo I dos Cursos de Matemática - Licenciatura e de Matemática - Bacharelado oferecidos pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), em seis cidades do estado. A partir disso, identificamos e analisamos as situações utilizadas para as apresentações das definições, por meio da teoria dos campos conceituais, buscando identificar os conceitos e representações utilizadas nas definições e as relações existentes entre elas. Vimos em nossos estudos que os livros didáticos apresentam diferentes situações, em que as definições exigem dos estudantes o conhecimento de conceitos diversos. É um aspecto importante para o professor considerar, ele precisa estar atento, pois conforme a situação escolhida para apresentar essas definições, os alunos podem ter de lidar com conceitos que não favorecem relacionar as noções envolvidas na definição intuitiva com o que é apresentado na definição formal.

Palavras - chave: Limite de função em um ponto; Cálculo I; Aprendizagem; Teoria dos Campos Conceituais.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representações gráficas quando $f(x)$ tende a $f(p)$ e quando $f(x)$ tende a L	16
Figura 2 – Representações gráficas do limite das curvas no ponto p	17
Figura 3 – Representações gráficas do limite em p	18
Figura 4 - Gráfico da função $f(x)$ e tabela com valores de x próximos a 2.....	21
Figura 5 – Representações gráficas em que $f(a)$ se encontra.....	22
Figura 6 - Exemplo representado graficamente.....	23
Figura 7 - Diagrama de flechas de Stewart (2013).....	24
Figura 8 – Representações gráficas da definição formal de limite de Stewart (2013)	24
Figura 9 - Valores atribuídos menores que 1	27
Figura 10 - Valores atribuídos maiores que 1.....	27
Figura 11 - Interpretação geométrica dos quantificadores	29
Figura 12 - Interpretação geométrica da definição formal de limite de Leithold (1994)	29

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. O QUE ALGUMAS PESQUISAS DIZEM?	11
3. REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO	13
4. OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	13
5. OS LIVROS DIDÁTICOS	14
5.1 DESCRIÇÃO DE <i>UM CURSO DE CÁLCULO</i> VOLUME 1	15
5.1.1 Análise do Livro de Guidorizzi	18
5.2 DESCRIÇÃO DE <i>CÁLCULO</i> VOLUME 1	21
5.2.1 Análise do Livro de Stewart	24
5.3 DESCRIÇÃO DE <i>O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA</i> VOLUME 1	27
5.3.1 Análise do Livro de Leithold	30
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	35

1. INTRODUÇÃO

Entrei no Curso de Licenciatura em Matemática oferecido pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) no ano de 2017. Tinha recém me formado no Ensino Médio e, durante o ano de 2016, me questioneei bastante sobre se queria, de fato, ingressar na universidade. Porém, cá estou escrevendo minha monografia.

No começo do curso, eu não falava com quase ninguém, não fiz nenhuma amizade. Tive um contato mais próximo com meus colegas no final do segundo semestre de 2017. Como eu não tinha nenhum contato com os outros alunos, encarei a disciplina de Cálculo I praticamente sozinha. Apesar de não ter ninguém para estudar junto e compartilhar dúvidas, tentava ao máximo entender o conteúdo das aulas. Mesmo que eu não tenha sido aprovada na disciplina, me esforcei bastante. Inclusive, o professor lembra, até hoje, que faltei apenas um dia de aula.

Nas aulas de Cálculo I, pelo fato de eu ser uma pessoa organizada, antes de fazer as anotações das aulas, registrava as respectivas datas. E na aula de introdução ao conceito de limite não foi diferente. Presumo que, a maior parte das anotações feitas por mim, é o que o professor escreveu no quadro. Como não tive coragem de jogar meu caderno fora, o tenho comigo até os dias de hoje. Assim, na primeira aula sobre o conteúdo de limite, foi escrito o seguinte:

Def. Seja I um intervalo aberto e $p \in I$. Seja $D \supset I \setminus \{p\}$. Seja $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que um número real L é um limite de $f(x)$ quando x tende a p se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in D$ e $0 < |x - p| < \delta$ implica em $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$.
 Observação: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in D \wedge 0 < |x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$. (Notas de aula).

Ao me deparar com esta definição em meu caderno, parei um momento para refletir sobre o contexto em que eu estava inserida: era a primeira vez que eu estava cursando a disciplina de Cálculo I que, naquele ano, pertencia à grade de disciplinas do segundo semestre do curso. Isso se confirma pela data registrada, 13 de setembro de 2017. As aulas ocorriam às segundas, quartas e sextas-feiras. Lembro-me perfeitamente da pontualidade do professor, sete horas da manhã ele passava pela porta da sala, cumprimentando os poucos alunos que havia ali, inclusive eu. Imagino o que se passava na minha cabeça quando o professor escreveu aquilo no quadro, logo no início da aula: “o senhor poderia voltar na parte em que entra na sala e deseja bom dia?” ou “tem como o senhor esperar eu acordar?”. No decorrer das aulas, o professor seguiu com os seguintes temas: unicidade do limite, propriedades dos limites, limites laterais, funções contínuas e limite de função composta.

Todos os meus colegas do curso que fizeram essa disciplina com este mesmo professor, se recordam da lista de exercícios nº 4. Aquela lista que parecia não ter fim de tanto limite para calcular, mais de cento e dez limites. Como eu estava presente na aula sobre cálculo de limite, aprendi superficialmente alguns procedimentos: avaliar a função no ponto em que x tende ou fazer manipulações algébricas. Porém, resolvi os exercícios desta lista no piloto automático, então não posso dizer que, de fato, aprendi o conceito de limite. Como não aprendi este conteúdo e, conseqüentemente, os posteriores, não fui aprovada na disciplina.

No primeiro semestre de 2018, me matriculei novamente em Cálculo I e, desta vez, era com outro professor. Nesse momento do curso eu já estava mais enturmada com meus colegas, então nós estudávamos todos juntos. As aulas aconteciam às segundas, quartas e sextas-feiras, assim como antes. Porém, às 13 horas, logo depois do almoço, ele entrava na sala e iniciava a aula. De acordo com meus registros, no dia 4 de abril de 2018, a aula começou com a seguinte definição escrita no quadro:

Def. Seja f uma função definida em uma vizinhança V contendo a , exceto possivelmente em a . Então, dizemos que o limite de $f(x)$ quando x tende a a é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, se à medida que x se aproxima de a , $f(x)$ se aproxima de L , isto é, se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $|x - a| < \delta$. (Notas de aula).

E lá vamos nós, mais uma vez.

Não me surpreendeu o fato de eu ler esta definição no quadro e não entender muito bem, provavelmente o que me passou pela cabeça, diante desta abstração, foi pedir ao professor para recomeçar a aula. Nas aulas posteriores, o professor abordou limites laterais, propriedades dos limites, funções contínuas, limite fundamental, reta tangente e velocidade instantânea.

Este professor sugeriu que fizéssemos uma lista de exercícios que estava no site de sua página pessoal. Quando percebo, é a mesma lista de exercícios nº 4 do semestre anterior. Refiz ela inteira, mesmo com o pensamento de que eu já havia resolvido todos os limites que havia nela. Não fui muito bem nas avaliações, mas, mesmo assim, consegui as notas que precisava para ser aprovada na disciplina. Será que aprendi o conceito de limite desta vez?

Observando essas duas definições apresentadas a mim, é notável que, para compreendê-las, os alunos precisam ter conhecimento de diversos conceitos imbricados nas definições. É interessante notar também que, ambas as situações apresentam um conjunto de representações de conceitos que os estudantes precisam ter conhecimento para compreender a situação como: representações de valor absoluto, intervalos, quantificadores épsilon e delta, conceito de domínio de função e número real. Porém, é perceptível que a primeira definição

apresentada exige mais dos alunos, visto que, além dessas, utiliza representações que fazem parte da lógica matemática como, por exemplo, notações de conjunção lógica, condicional, se e somente se, complementar e quantificador universal e existencial.

Diante disso, pude perceber que, para a aprendizagem do conceito de limite de função em um ponto¹, há a necessidade do conhecimento de diversos conceitos imbricados. Assim, o objetivo deste trabalho é um estudo das definições de limite de função apresentadas em livros didáticos. Antes, discutiremos o que algumas pesquisas dizem sobre a aprendizagem do conceito de limite. A partir disso, discutiremos sobre quais definições são trabalhadas para o estudo do conceito nos livros didáticos e como elas são apresentadas. Serão apresentados o referencial teórico e os livros selecionados para nossa pesquisa. Por conseguinte, será realizada a análise de como os autores dos livros didáticos introduzem o conceito de limite e a investigação das situações propostas pelos livros para o estudo das definições apresentadas.

2. O QUE ALGUMAS PESQUISAS DIZEM?

O conceito de limite é muito importante para o ensino do cálculo. Apesar disso, muitos alunos apresentam bastante dificuldade no processo de aprendizagem do cálculo, mais especificamente, do limite de função. Por essa razão, encontramos muitas pesquisas que têm sido desenvolvidas para entender quais são essas dificuldades e auxiliar na aprendizagem do conteúdo.

Amorim (2015) desenvolveu uma pesquisa com alunos do curso de Licenciatura em Matemática para investigar o processo de construção do conceito de limite, da disciplina de Cálculo à Análise. Quando esse tema é discutido, é perceptível que, não identificamos desconforto somente por parte dos alunos, mas também por parte dos professores (WAIDEMAN; TREVISAN; CARGNIN, 2017), como afirma Cornu (1991 apud AMORIM, 2015, p. 1594), “o conceito de limite é de difícil apreensão e, conseqüentemente, traz dificuldades também para quem o ensina”. Ainda, ela afirma que, em geral, os alunos têm a capacidade de fazer longas listas de exercícios, mas “acabam não se apropriando do conceito de limite” (AMORIM, 2015, p. 1594). Sua pesquisa mostrou que é importante que os professores trabalhem com as definições conceituais, dando oportunidade para que eles falem sobre os conceitos.

¹ A partir de agora, usaremos o termo “limite” para nos referir ao limite de função em um ponto.

Mota e Jucá (2015) também investigaram sobre as dificuldades dos alunos na disciplina de Cálculo I. Elas questionaram os alunos sobre o alto índice de reprovação e desistência dos alunos na disciplina de cálculo. A maioria deles disseram que, pelo alto grau de abstração, os estudantes não compreendem o conteúdo e a má formação na educação básica também resulta na dificuldade no aprendizado do conceito. Além disso, a reprovação/desistência dos acadêmicos pode se dar por conta da metodologia que o professor utiliza, não tendo eficácia no ensino.

Em seu trabalho, Zuchi (2005) afirma que uma das grandes dificuldades dos alunos ao aprender o conceito de limite, é quando o introduz de forma intuitiva e, após, o apresenta formalmente, com os quantificadores épsilon e delta. Desse modo, a autora desenvolveu um estudo das dificuldades de ensino e aprendizagem do conceito de limite e, nessa pesquisa, propôs alternativas que possibilitam a diminuição dessas dificuldades. Ela elaborou uma sequência didática, primeiramente, no ambiente lápis e papel, em que introduziu o conceito por meio de uma situação-problema e, em seguida, utilizou duas situações para introduzir os quantificadores para, então, abordar a definição formal. Seguidamente, no ambiente computacional, Zuchi (2005) apresentou o conceito de limite pelo ponto de vista cinemático, utilizando animação para explorar a visualização gráfica do limite. Seu estudo contribuiu para compreender as dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem do conceito de limite.

Outra pesquisa importante relacionada a esse tema é a tese de Burigato (2019), que elaborou uma sequência didática para estudar o processo de aprendizagem do conceito de limite de função com alunos do Brasil e da França. Ela buscou investigar a apresentação do conceito de limite abordando situações que favorecessem a aproximação de um ponto e a noção de número arbitrariamente pequeno e o estudo de funções, sendo esses considerados de difícil compreensão para os alunos. Além disso, as atividades desenvolvidas pelos estudantes contribuíram para entender quais conhecimentos matemáticos os alunos mobilizavam na introdução do conceito. A autora concluiu que é importante trabalhar com uma variedade de situações com os alunos, buscando fazer a aproximação entre a definição intuitiva e a definição formal, “considerando os conceitos e suas representações que estão imbricados, tanto na adaptação dos esquemas dos alunos, como também na associação das imagens do seu conceito imagem” (BURIGATO, 2019, p. 235).

Desse modo, podemos notar que o ensino e aprendizagem do conceito de limite de função é objeto de investigação de vários trabalhos, mostrando ser um tema relevante a ser discutido. Essas pesquisas também ajudaram em nosso trabalho possibilitando uma reflexão

sobre o tema. Agora, falaremos sobre o referencial teórico escolhido para seguirmos com as análises dos livros didáticos.

3. REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Para nossa análise da introdução do conceito de limite nos livros didáticos nos embasaremos na teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud. Essa teoria nos ajuda a entender como os alunos constroem seus conhecimentos matemáticos e, conseqüentemente, a compreender quais são as formas mais eficientes de ensinar um conceito. Para Vergnaud (2009), um conceito é definido como uma terna com três conjuntos distintos:

S conjunto de situações que dão sentido ao conceito.
 I conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações.
 L conjunto das representações linguísticas e simbólicas (algébrica, gráficas...) que permitem representar os conceitos e suas relações, e, conseqüentemente, as situações e os esquemas que elas evocam. (VERGNAUD, 2009, p. 27).

Assim, Vergnaud (2009) acredita que, para o estudante aprender um conceito, ele precisa ter de saber lidar com uma variedade de outros conceitos imbricados e se adaptar as diversas situações envolvendo esses conceitos com a construção do conceito, objeto de ensino. Ainda, esse processo de aprendizagem demanda de um longo período de investimento, um longo prazo: para o estudante compreender um conceito novo, são necessários vários anos de escola e de experiência.

Nesse processo de compreensão de um novo conceito, o aluno precisa lidar com dois conjuntos: o conjunto de situações e o de conceitos. Esses dois conjuntos compõem o que Vergnaud (2009) denomina de campos conceituais:

Definição: um campo conceitual é ao mesmo tempo conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (VERGNAUD, 2009, p. 27).

Essa teoria nos dá ferramentas teóricas para estudarmos o processo de aprendizagem de um conceito, considerando o campo conceitual envolvido. Neste trabalho, estamos interessadas em analisar as situações propostas por alguns livros didáticos para apresentar a definição intuitiva e a formal de limite, identificando as representações utilizadas e os conceitos envolvidos, no caso, os invariantes operatórios.

4. OBJETIVOS E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O nosso trabalho é uma estudo bibliográfico, isto é, uma pesquisa relacionada à

leitura, análise e interpretação de livros, monografias, teses, etc, feita de maneira minuciosa e sistematizada (MAZUCATO, 2018).

Para escolha do material bibliográfico a ser utilizado, decidimos olhar para os livros utilizados pela nossa universidade, nos Cursos de Matemática – Licenciatura e de Matemática – Bacharelado oferecidos pela UFMS nos vários municípios do nosso estado. Primeiramente, investigamos, por meio do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) desses cursos, as ementas da disciplina de Cálculo I oferecidas nos seguintes campus: Instituto de Matemática (Campo Grande), Aquidauana, Corumbá, Paranaíba, Ponta Porã e Três Lagoas. Como a bibliografia destes cursos, tanto a básica quanto a complementar, contém os mais variados autores, escolhemos os três livros didáticos mais indicados para nossa análise: *Cálculo Volume 1* de James Stewart (2013), *Um Curso de Cálculo Volume 1* de Guidorizzi (2015) e *O Cálculo com Geometria Analítica Volume 1* de Louis Leithold (1994).

A partir dessa seleção, fizemos um estudo de como os autores introduzem o conceito de limite de função em um ponto por meio de suas definições. Para isso neste estudo, identificamos quais situações são utilizadas para apresentação dessas definições, no caso a definição intuitiva e a formal. E também quais os conceitos e as representações utilizadas nessas definições. A partir disso, analisamos os conceitos utilizados em cada uma dessas definições e também investigamos se o autor busca relacionar a definição intuitiva com a formal. As situações serão analisadas com base na teoria dos campos conceituais, investigando as representações e os conceitos imbricados necessários para que os estudantes compreendam essas definições, que fazem parte da construção do conceito de limite de função.

A seguir apresentamos o desenvolvimento deste estudo. Primeiramente, fizemos uma descrição de cada obra e, em seguida, uma análise dos conceitos e representações utilizadas pelos autores nas situações propostas para as definições de limite de função em um ponto.

5. OS LIVROS DIDÁTICOS

Como dito anteriormente, escolhemos três livros didáticos para nosso estudo. O livro *Cálculo Volume 1* (STEWART, 2013) está na bibliografia básica no Projeto Pedagógico do Curso (PPC) dos seis cursos analisados. *Um Curso de Cálculo Volume 1* (GUIDORIZZI, 2015) aparece na bibliografia básica de cinco deles. No campus de Três Lagoas, faz parte tanto da bibliografia básica quanto da complementar e, no campus de Ponta Porã, ocorre

somente na complementar. *O Cálculo com Geometria Analítica Volume 1* (LEITHOLD, 1994) aparece na bibliografia básica de quatro dos seis cursos. No campus de Ponta Porã, este livro pertence tanto à bibliografia básica quanto à complementar. No campus de Paranaíba, faz parte da complementar. Já em Campo Grande, esse livro não pertence à bibliografia.

A seguir apresentamos a descrição, seguida da análise dos materiais investigados. Primeiramente o livro *Um Curso de Cálculo Volume 1* (GUIDORIZZI, 2015), em seguida o livro *Cálculo Volume 1* (STEWART, 2013) e por último o livro *O Cálculo com Geometria Analítica Volume 1* (LEITHOLD, 1994).

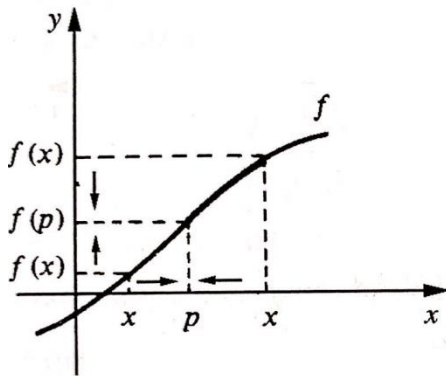
5.1 DESCRIÇÃO DE UM CURSO DE CÁLCULO VOLUME 1

Em *Um Curso de Cálculo Volume 1* (2015), o capítulo 3 intitulado *Limite e continuidade*, o autor introduz a noção de continuidade em um ponto, porém, há alguns comentários em que identificamos a noção de limite como, por exemplo: “à medida que x se aproxima de p , [...], os valores de $f(x)$ se aproximam de $f(p)$ ” e “quanto mais próximo x estiver de p , mais próximo estará $f(x)$ de $f(p)$ ” (GUIDORIZZI, 2015). Observando a estrutura do capítulo, vemos que o autor escolhe iniciá-lo por meio do estudo sobre a continuidade de funções, que também faz parte do processo de aprendizagem do conceito de limite. Desse modo, ele inicialmente apresenta intuitivamente, a continuidade de uma função e, em seguida, a definição intuitiva de limite da seguinte forma:

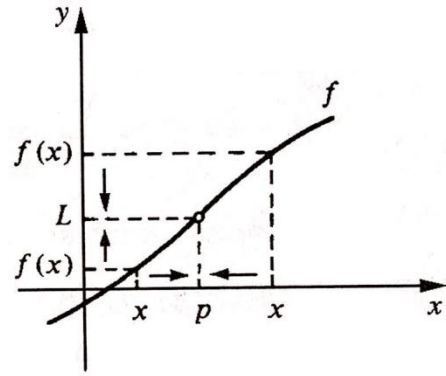
Intuitivamente, dizer que o *limite de $f(x)$, quando x tende a p , é igual a L* que, simbolicamente, se escreve $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$, significa que quando x tende a p , $f(x)$ tende a L . (GUIDORIZZI, 2015, p. 55).

O livro dispõe dessa apresentação para a definição intuitiva, e para introduzir a notação de limite, utiliza expressões na forma algébrica e em linguagem natural, juntamente com algumas representações gráficas para auxiliar na compreensão da noção intuitiva de limite:

Figura 1 - Representações gráficas quando $f(x)$ tende a $f(p)$ e quando $f(x)$ tende a L



Quando x tende a p , $f(x)$
tende a $f(p)$: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$



Quando x tende a p , $f(x)$ tende
a L : $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$

Fonte: Guidorizzi, 2015, p. 55.

Na Figura 1, consideram-se dois casos, respectivamente: quando x tende a um ponto p que está no domínio da função $f(x)$, sendo seu gráfico representado pela curva f , e quando x tende a um ponto p que não está no domínio da função.

Logo depois, o livro apresenta brevemente a derivada de f em p , e resolve alguns exemplos que propõem o cálculo da derivada utilizando a ideia intuitiva de limite. Na seção seguinte, a atenção se volta à definição formal de continuidade de função. Como o foco do trabalho é a apresentação do conceito de limite de função em um ponto, não faremos uma análise desses tópicos.

Antes de introduzir a situação para o estudo da definição de limite formalmente, o livro considera quatro casos em que f é uma função e p um ponto do domínio de f :

- (a) f não está definida em p ;
- (b) f está definida em p , mas não é contínua em p ;
- (c) f é contínua em p ; e
- (d) f não é contínua.

Nos casos (a), (b) e (c) existe L que satisfaz a seguinte propriedade:

Para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, $p - \delta < x < p + \delta$, $x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$. (GUIDORIZZI, 2015, p. 71).

No caso (d), essa propriedade não é satisfeita. Após, o livro discute, utilizando representações simbólicas, que se existe L , este é único. A partir disso, ele nos apresenta a definição formal de limite:

Definição. Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em p , se, para todo $\epsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$,
 $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$.
 Tal número L , que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$.

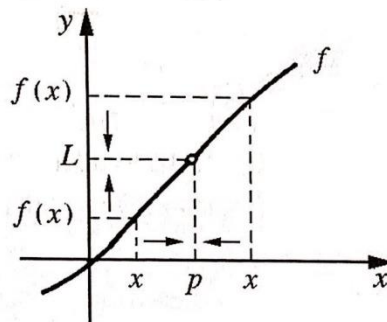
Assim

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \end{array} \right.$$

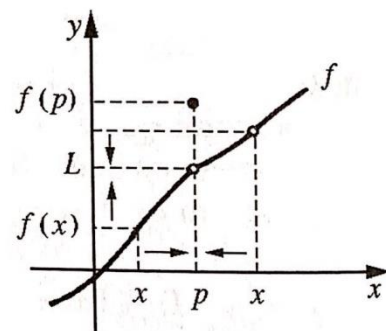
(GUIDORIZZI, 2015, p. 72).

Desse modo, o livro retorna àqueles quatro casos sobre continuidade de função em um ponto p que considerou no início, porém, agora, as representações gráficas abordarão o limite destas curvas nesse ponto. Os seguintes casos são representados graficamente: $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ ($L \neq f(p)$) na Figura 2 e $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ e quando f não tem limite em p , na Figura 3.

Figura 2 – Representações gráficas do limite das curvas no ponto p

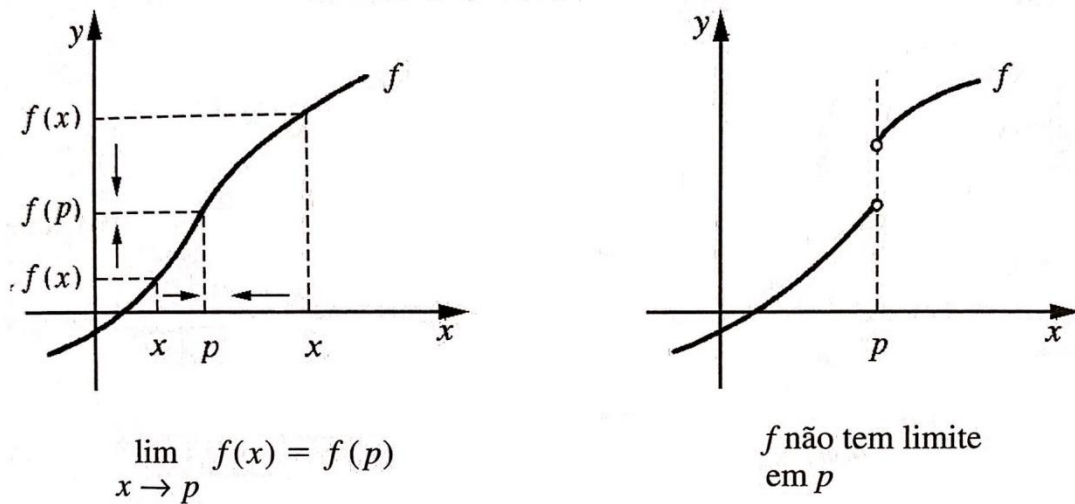


$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \quad (L \neq f(p))$$

Fonte: Guidorizzi, 2015, p. 72.

Figura 3 – Representações gráficas do limite em p 

Fonte: Guidorizzi, 2015, p. 73.

Apresentada a definição formal, o autor resolve diversos limites por meio de exemplos e dispõe ao aluno uma variedade de exercícios sobre limite de função nos quais é indicado o uso da definição formal e das propriedades de limite para resolvê-los.

5.1.1 Análise do Livro de Guidorizzi

Conforme a descrição, vemos que o livro de Guidorizzi (2015) é objetivo em apresentar, tanto a definição intuitiva, quanto a formal. Ao observarmos a definição intuitiva, notamos que o autor já nos apresenta a representação simbólica, ou notação, de limite. Como é a primeira ocorrência desta representação no capítulo, o livro busca auxiliar na sua compreensão, trazendo o uso da linguagem natural, quando lemos “quando x tende a p ” e “quando $f(x)$ tende a L ”. Neste momento, o autor (2015) busca induzir o aluno a associar “ x tende a p ” com a notação $x \rightarrow p$ e relacionar a igualdade $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ com “ $f(x)$ tende a L ”. Isso nos remete ao estudo de Rosa e Costa (2013) para a noção de conceito imagem desenvolvida por Tall e Vinner (1981 apud ROSA; COSTA, 2013). Momento quando o aluno se depara com alguma representação de um conceito, e o conceito imagem é acionado em sua memória e isso é associado de modo não verbal. Por exemplo, quando o aluno lê “limite de uma função real de uma variável quando x tende a um número qualquer a ”, pode vir a sua mente a imagem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ e ainda, $f(x) \rightarrow c$ quando $x \rightarrow a$ (ROSA; COSTA, 2013). São as imagens mentais disponíveis para lidar com determinada atividade envolvendo o conceito. O que para Vergnaud (2009), são as representações utilizadas nas situações para representar os conhecimentos envolvidos, e que estão imbricadas de diversos conceitos. São aspectos

fundamentais para a aprendizagem do conceito, pois a cada representação são exigidos conhecimentos distintos dos alunos.

Para dar suporte à definição intuitiva, o livro traz representações gráficas de uma curva f , indicadas pela Figura 1, que consideram os casos:

- ✓ Quando x tende a um ponto p , $f(x)$ tende a $f(p)$;
- ✓ Quando x tende a um ponto p , $f(x)$ tende a L .

A diferença entre essas representações é que, uma considera que a função f é contínua no ponto p e a outra considera que a função f não é contínua nesse ponto.

Apesar dos gráficos ajudarem o estudante a interpretar o limite geometricamente, para a plena compreensão dessas representações gráficas, é importante observar que o aluno precisa mobilizar conhecimentos relacionados ao conceito de: domínio de função, imagem de uma função, entre outros, além de continuidade em um ponto, que acabou de ser apresentada intuitivamente no início do capítulo. Isso vai ao encontro com os pensamentos de Vergnaud (2009), que diz que, em uma dada situação, o aluno se depara com uma variedade de conhecimentos, os invariantes operatórios, que não são necessariamente explícitos, mas que o estudante precisará mobilizar para lidar, e compreender o que está sendo apresentado. Após, o autor desenvolve uma seção para definir formalmente o conceito de função contínua.

Antes de apresentar a definição formal de limite, o livro analisa quatro casos, representados graficamente em que uma função f se encontra. Essa análise é feita observando se os gráficos satisfazem a propriedade (apresentada na seção anterior do livro) em que, “para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, $p - \delta < x < p + \delta$, $x \neq p \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ ”. (GUIDORIZZI, 2015, p. 71). Pelo fato do livro apresentar essa propriedade antes da definição formal, o estudante precisa compreendê-la para então seguir adiante. Porém, o livro não faz nenhuma relação com a definição intuitiva, muito menos explica sobre as representações presentes nesta propriedade. O livro poderia fazer algumas relações entre os aspectos dessa propriedade e da definição formal como, por exemplo, relacionar $p - \delta < x < p + \delta$, $x \neq p$ com $0 < |x - p| < \delta$ e também $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$ com $|f(x) - L| < \epsilon$, contudo, não notamos essas relações. Isso pode ser um aspecto que dificulte a compreensão do limite, fazendo com que os estudantes não se apropriem do conceito formal de limite: “Lembrar a definição de limite é uma coisa, adquirir a concepção fundamental é outra” (CORNU, 1991 apud AMORIM, 2015, p. 3).

A definição formal é apresentada utilizando pouca linguagem natural, mas o que predomina são as representações algébricas, principalmente quando o livro reescreve a definição utilizando apenas símbolos. Pelo perceptível grau de formalidade da definição, é

exigido que o aluno mobilize conhecimentos dos mais variados conceitos e representações, entre eles estão os quantificadores épsilon e delta, o conceito de função e domínio de função e intervalos. É interessante notar que os símbolos mais recorrentes na lógica matemática como, por exemplo, \in (pertinência), \forall (para todo), \exists (existência), bem como os conectivos lógicos \Rightarrow (condicional) e \Leftrightarrow (bicondicional), também estão presentes na definição.

No trabalho de Mota e Jucá (2015), foram coletados dados que revelam que uma das dificuldades dos alunos se dá por conta do alto grau de abstração do conteúdo, e esse problema não é amenizado, pois as aulas são expositivas e os conteúdos são abordados pelo professor de forma rápida, sem aprofundamento, pouca aplicação e contextualização e de modo muito formal (MOTA; JUCÁ, 2015), que é o que vemos na obra de Guidorizzi (2015). O livro não relaciona as representações presentes na definição formal com as que estão presentes na definição intuitiva. Além disso, é o momento de introdução do conceito e vemos que Guidorizzi (2015) não discute sobre os conceitos imbricados nas representações que estão nas definições e isso pode fazer com que haja cada vez mais dificuldades no processo de compreensão do conceito de limite por parte dos alunos.

Quando o livro retoma as situações citadas no início do capítulo, ele utiliza representações gráficas, junto à notação algébrica de limite para ilustrar a definição em quatro casos específicos de continuidade de função.

De modo geral, o livro não se preocupa em analisar cada aspecto da definição, explicando em detalhes, por isso, traz o conceito apenas em sua formalidade e esse é um dos problemas no ensino do limite. De fato, Waideman, Trevisan e Cargnin (2017) trazem Rezende (2003 apud WAIDEMAN; TREVISAN; CARGNIN, 2017) em seu trabalho, afirmando que

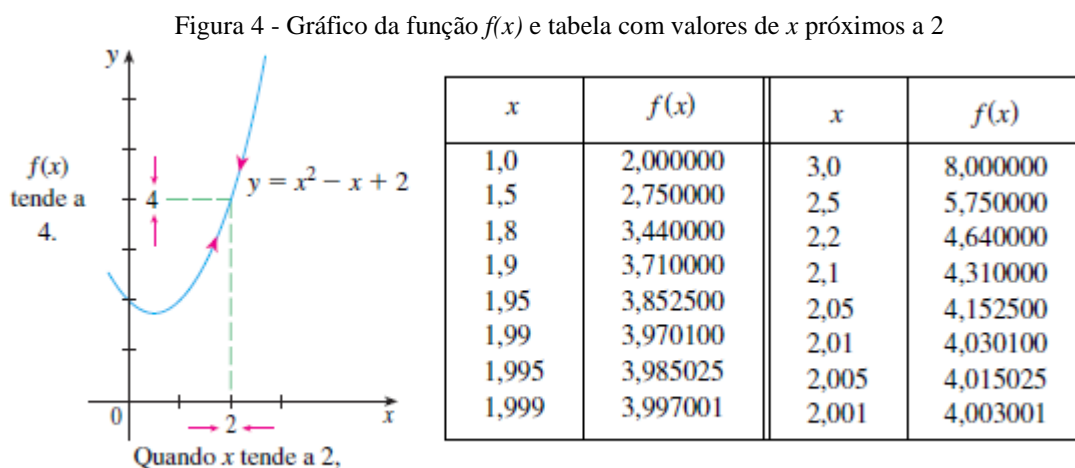
O maior problema está na manipulação algébrica rigorosa e formal do que na apropriação do conceito em si. Isso demonstra que há uma preocupação geral com o resultado do cálculo do limite e não com o significado. (REZENDE, 2003 apud WAIDEMAN; TREVISAN; CARGNIN, 2017, p. 6).

Dessa forma, para o estudante compreender a definição intuitiva e a formal que Guidorizzi (2015) apresenta, ele precisa ter diversos conhecimentos matemáticos, representados de modos variados, visto que o autor é direto e objetivo quando se tratam das situações para a introdução do conceito de limite, no caso, as apresentações das definições. Além disso, há uma distância considerável entre o que aparece na definição intuitiva com o que é proposto na definição formal, (CORNU, 1983 apud BURIGATO, 2019). O que poderá dificultar o aprendizado do conceito de limite por parte do aluno, fazendo com que ele precise

buscar materiais complementares para auxiliar nesse processo, caso o professor siga a introdução proposta neste livro.

5.2 DESCRIÇÃO DE CÁLCULO VOLUME 1

Antes de falar sobre o conceito de limite, de fato, Stewart (2013) começa discutindo como surgem os limites no estudo da reta tangente a uma curva e na velocidade de um objeto em um determinado intervalo de tempo. O autor faz isso por meio de exemplos com contextualizações, utilizando representações numéricas, algébricas e gráficas. Para apresentar o limite, o livro analisa o comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 2$, por meio de uma tabela contendo valores de x próximos de 2 e do gráfico da função $f(x)$, como observamos a seguir.



Fonte: Stewart, 2013, p. 80.

É interessante olhar o modo escolhido para apresentar o conceito de limite de função, pois percebemos que há pouca representação algébrica. Isso também ocorre na definição intuitiva:

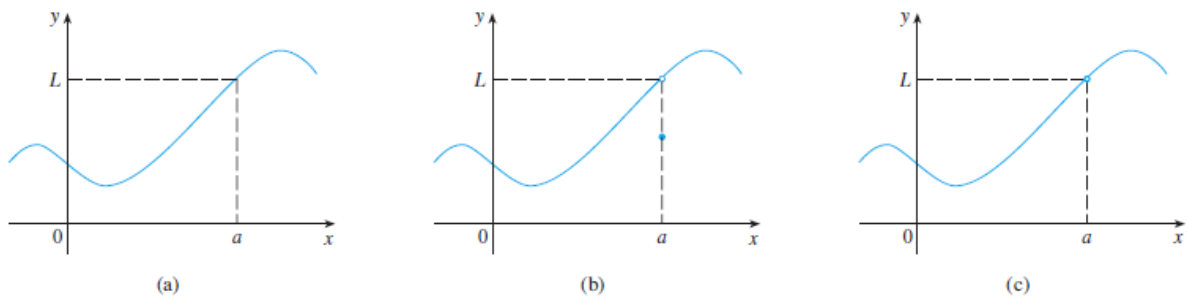
Suponha que $f(x)$ seja definido quando está próximo ao número a . (Isso significa que f é definido em algum intervalo aberto que contenha a , exceto possivelmente no próprio a .) Então escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e dizemos “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L ” se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a (por ambos os lados de a), mas não igual a a . (STEWART, 2013, p. 81).

Na definição, identificamos algumas representações algébricas, que são utilizadas para apresentar as notações de função e limite. Mas, ainda notamos a presença da linguagem natural. Além disso, utilizando a linguagem natural, ele resume, a grosso modo, a definição de limite.

Grosso modo, isso significa que os valores de $f(x)$ tendem a L quando x tende a a . Em outras palavras, os valores de $f(x)$ tendem a ficar cada vez mais próximos do número L à medida que x tende ao número a (por qualquer lado de a), mas $x \neq a$. (STEWART, 2013, p. 81).

Como apoio a definição, o livro traz três representações gráficas (Figura 5) que representam três casos em que: $f(a)$ está definida, $f(a)$ é diferente de L e quando $f(a)$ não está definida:

Figura 5 – Representações gráficas em que $f(a)$ se encontra



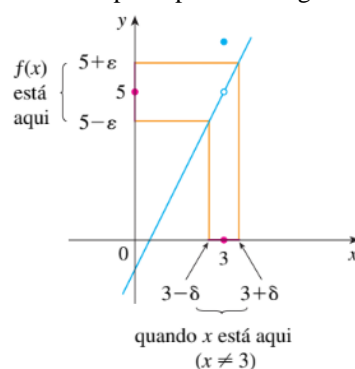
Fonte: Stewart, 2013, p. 81.

A figura é utilizada para enfatizar que, apesar das situações diferentes em que o valor de $f(a)$ se encontra, o limite sempre será L , isto é, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. A partir disso, o livro apresenta alguns exemplos resolvidos e aborda outros temas intuitivamente, como limites laterais e limites infinitos; também define assíntota vertical, e mostra as propriedades dos limites e de alguns teoremas importantes. A definição formal de limite só é apresentada na seção 2.4 intitulada: *A Definição Precisa de um Limite*.

Agora a intenção do autor é chegar à definição precisa de limite. Para isso, estuda a função $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \neq 3 \\ 6, & \text{se } x = 3 \end{cases}$ fazendo, primeiramente, uma análise intuitiva, mostrando que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$. A partir disso, a análise é feita de forma mais detalhada quando é feita a seguinte pergunta: “Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos de 0,1?” (STEWART, 2013) Para respondê-la, precisamos da definição formal de limite. Sendo assim, a pergunta é reescrita com representações algébricas, considerando que a distância de x a 3 é $|x - 3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$. Então, o problema é encontrar um número δ de modo que $|f(x) - 5| < 0,1$ se $|x - 3| < \delta$, mas $x \neq 3$, ou, equivalentemente, achar um δ tal que $|f(x) - 5| < 0,1$ se $0 < |x - 3| < \delta$. Assim, se considerarmos $0 < |x - 3| < (0,1)/2 = 0,05$, então $|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2(0,05) = 0,1$. Com essa manipulação algébrica, conclui-se que, se a distância de x a 3 for, no máximo, 0,05, então a distância de $f(x)$ a 5 é, no máximo, 0,1, ou seja, $\delta = 0,05$. O mesmo

procedimento é utilizado para encontrar $\delta = 0,005$, se $f(x)$ diferir de 5 por menos de 0,01, e assim por diante. Essas representações numéricas são associadas às tolerâncias de erro do método adotado anteriormente, isto é, os números 0,1 e 0,01. O livro enfatiza que, se utilizarmos o ε , um número positivo arbitrário, conseguiremos tornar a diferença entre $f(x)$ e 5 menor que qualquer número positivo. Podemos escrever isso por representações algébricas do seguinte modo: $|f(x) - 5| < \varepsilon$ se $0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$, pois podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem dentro de uma distância arbitrária ε de 5 tomando valores de x dentro de uma distância $\frac{\varepsilon}{2}$ de 3, mas $x \neq 3$ (STEWART, 2013). Podemos reescrever de modo diferente, como ilustra a Figura 6:

Figura 6 - Exemplo representado graficamente



Fonte: Stewart, 2013, p. 101.

Nesta figura, observamos que, se $3 - \delta < x < 3 + \delta$ ($x \neq 3$) então $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$. Dessa forma, se escolhermos valores para x diferente de 3 no intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, obteremos valores para $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$. Com essa explicação detalhada, utilizando diversas representações, o livro define, formalmente, o conceito de limite.

Seja f uma função definida em algum intervalo aberto que contenha o número a , exceto possivelmente no próprio a . Então dizemos que o limite de quando x tende a a é L , e escrevemos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se para todo número $\varepsilon > 0$ houver um número $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. (STEWART, 2013, p. 101).

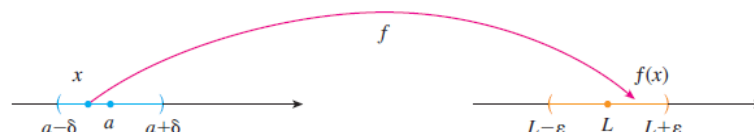
O capítulo utiliza a linguagem natural, apresentando duas formas para escrever a definição formal e, além disso, reformula a definição, escrevendo-a em termos de intervalos:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ (não importa quão pequeno ε for) podemos achar $\delta > 0$ tal que, se x estiver no intervalo aberto $(a - \delta, a + \delta)$ e $x \neq a$, então $f(x)$ estará no intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ (STEWART, 2013).

Essa definição é representada geometricamente por diagrama de flechas ou por gráficos da função. A Figura 7 mostra que, dado um intervalo pequeno $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$,

encontramos um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ tal que a função, representada pela flecha, leva os pontos do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, exceto possivelmente a , até o intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

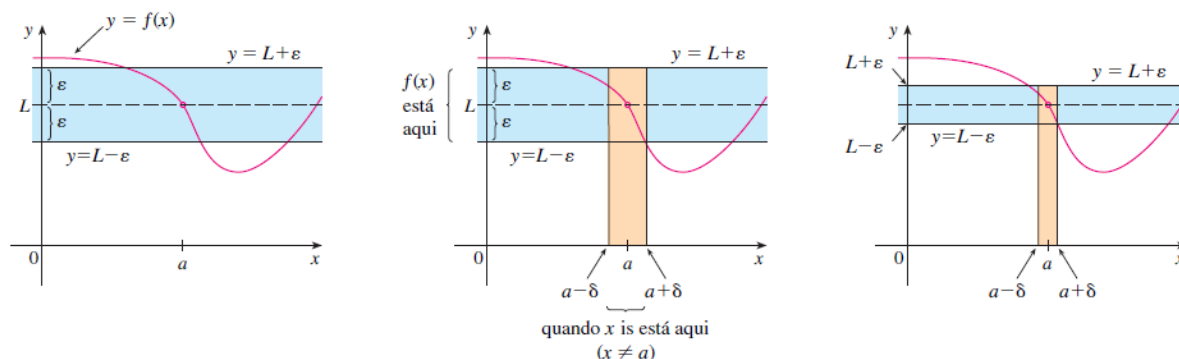
Figura 7 - Diagrama de flechas de Stewart (2013)



Fonte: Stewart, 2013, p. 102.

Já a Figura 8 mostra as retas $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$, e o gráfico de $f(x)$ com a representação dos intervalos. Essa figura mostra que, se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, conseguimos achar $\delta > 0$ de forma que, se considerarmos x (diferente de a) dentro do intervalo $(a - \delta, a + \delta)$, o gráfico da função ficará entre as retas $y = L + \varepsilon$ e $y = L - \varepsilon$. Ainda, ilustra que se for escolhido um ε pequeno, δ também será pequeno.

Figura 8 – Representações gráficas da definição formal de limite de Stewart (2013)



Fonte: Stewart, 2013, p. 102.

Anteriormente, o livro optou por introduzir definições intuitivas, como de limite, limites laterais e limites infinitos. No decorrer do capítulo, apresenta definições formais de limites à esquerda, à direita, limites infinitos, e se aprofunda no conceito de continuidade de função, porém, não é o foco deste trabalho.

5.2.1 Análise do Livro de Stewart

As contextualizações que Stewart (2013) faz no início do capítulo são coerentes com a proposta do livro, transmitindo ao estudante uma noção da aplicabilidade do cálculo. O objetivo do livro é “concentrar-se na compreensão de conceitos” e, para atingi-lo, o autor estabelece quatro abordagens essenciais para a compreensão conceitual: visualização, experimentação numérica, experimentação gráfica e um ponto de vista mais descritivo, verbal. (STEWART, 2013). De fato, notamos a presença dessas abordagens no decorrer do

capítulo de limite e de derivada. O capítulo inicia com problematizações que, para Rosa e Costa (2013):

No caso de limites de funções de uma variável real, a problematização pode estar relacionada à história da matemática, quando são levantadas questões sobre o surgimento do conceito de limite; ao contexto geométrico, quando são abordadas a ideia de reta tangente e também aos problemas mais aplicados, como aqueles que discutem, por exemplo, a ideia de velocidade. (ROSA; COSTA, 2013, p. 10).

Desse modo, as problematizações sobre a reta tangente e a velocidade feitas pelo autor são elementos motivadores para a construção do conceito.

Quando a seção sobre limite de uma função inicia com a análise do comportamento de uma função particular, o autor utiliza representações numéricas e a representação gráfica da função, indicadas na Figura 4, explorando o fato de que, quando x se aproxima de 2, o valor de $f(x)$ tende a 4. Notamos a presença da linguagem natural neste momento quando lemos “podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 4 quanto quisermos, ao tornar x suficientemente próximo de 2” e o livro introduz a notação de limite, reescrevendo essa afirmação utilizando representações algébricas (STEWART, 2013, p. 80). O autor traz a definição intuitiva com a linguagem natural, associando a notação de limite com a expressão “se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a , mas não igual a a .” (STEWART, 2013, p. 81).

Como na apresentação da definição intuitiva, Stewart (2013) traz uma explicação detalhada sobre ela, utilizando mais a linguagem natural do que as representações simbólicas, pode ser que o estudante, aos poucos, vá compreendendo o conceito. Além disso, o autor usa representações gráficas, ilustrando as situações em que o limite de $f(x)$ tende a L , quando x tende a a . Isso acontece para que o aluno se familiarize com os vários aspectos envolvidos com o conceito, visto que pode, facilmente, apresentar dificuldades no processo de aprendizagem. Vergnaud (2009) considera o uso da linguagem natural importante, pois “o que seria da comunicação humana se não existisse a linguagem natural?” (VERGNAUD, 2009, p. 28). Porém, é preciso tomar cuidado, visto que:

A linguagem natural é o registro mais analítico da atividade humana, e igualmente o mais modular, no sentido que ele permite construir um conjunto infinito de enunciados, de diálogos e de textos com um número finito de elementos. (VERGNAUD, 2009, p. 28).

De fato, Cornu (1991 apud AMORIM, 2015) afirma que o ensino da maioria dos conceitos matemáticos não começa em um território virgem, isto é, o estudante já tem uma concepção espontânea ou noção daquele conceito (CORNU, 1991 apud AMORIM, 2015). No

caso do conceito de limite, o fato das expressões usadas em linguagem natural “tender a” e “limite” terem significados diferentes para os alunos e professores é um agravante para o ensino e aprendizagem (AMORIM, 2015, p. 3).

Para apresentar, de fato, a definição de limite de maneira mais precisa, o livro estuda outra função particular, analisando como $f(x)$ varia quando x está próximo de 3. Essa análise se inicia quando o autor representa as distâncias entre x e 3 e $f(x)$ e 5 algebricamente, como sendo $|x - 3|$ e $|f(x) - 5|$, respectivamente. É interessante perceber que, nesse primeiro momento, o aluno já precisa mobilizar noções de distância imbricadas aos valores absolutos representados. Além disso, o problema apresentado neste exemplo introduz o conceito dos quantificadores épsilon e delta, aspecto da definição formal que o aluno precisa ter conhecimento para entendê-la plenamente. E vimos que o autor, na Figura 6, faz a interpretação geométrica dos quantificadores para auxiliar o estudante neste processo de compreensão da definição.

Desse modo, quando a definição formal é apresentada, o estudante já terá conhecimento sobre alguns dos conceitos imbricados no conceito de limite. Mas mesmo assim, o livro faz a apresentação da definição utilizando linguagem natural, para que o estudante não tenha dificuldades ao se deparar com a formalidade do conceito. Notamos também a preocupação de Stewart (2013) no processo de aprendizagem do conceito de limite quando opta por reformular a definição formal em representações de intervalos utilizando as desigualdades, e por representá-la em diagrama (Figura 7) e em gráficos (Figura 8). De acordo com a pesquisa de Amorim (2015), sobre as dificuldades dos alunos relacionadas ao conceito de limite, precisa haver “uma (re) construção das imagens conceituais dos alunos, tornando-as coerentes, a partir de elementos intuitivos significativos, especialmente aqueles presentes nos aspectos gráficos” (AMORIM, 2015, p. 11). Vemos que Stewart (2013) faz isso, pois sempre que apresenta representações gráficas ele procura explicar os aspectos que aparecem nessas representações.

É perceptível a variedade de representações que o livro utiliza no desenvolvimento do capítulo, inclusive quando ele articula essas representações com a definição, sempre explicando detalhadamente. Essa articulação auxilia no processo de aprendizagem do conceito, visto que o aluno “é levado a interpretar a informação bem além dos observáveis de que dispõe.” (VERGNAUD, 2009, p. 22).

Stewart (2013) segue o que vimos no trabalho de Rosa e Costa (2013) em que uma das alternativas para diminuir as dificuldades dos alunos com relação à definição formal é fazer investimentos nas diferentes formas de representação (ROSA; COSTA, 2013). Além do

mais, é interessante observar o modo como o autor caminha em direção à definição precisa de limite, utilizando a linguagem natural sempre que pode, para deixar claro ao aluno, as relações entre os conceitos envolvidos em cada representação, como por exemplo, quando ele representa graficamente a expressão “quando x tende a 2, $f(x)$ tende a 4” e articula com a definição intuitiva, quando diz que “o limite de $f(x)$, quando x tende a a , é igual a L se pudermos tomar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L , tomando x suficientemente próximo de a , mas não igual a a ” (STEWART, 2013, p. 81) auxiliando na compreensão do conceito de limite.

A partir do momento em que a definição formal de limite é apresentada, Stewart (2013) já se apropria das representações algébricas presentes na formal, visto que já lidou bastante com a definição intuitiva, porém, a ideia intuitiva segue no decorrer da seção, agora não mais de forma explícita, representando, por exemplo, as noções de distância de forma algébrica, utilizando o valor absoluto da diferença e, os intervalos por meio de inequações.

5.3 DESCRIÇÃO DE O CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA VOLUME 1

Em sua obra, Leithold (1994) inicia o estudo de limite com uma função particular: $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$. Com esta função, ele faz a introdução da definição intuitiva de limite, discutindo o fato de que à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ se aproxima de 5. Essa discussão é feita quando o autor atribui valores próximos de 1, menores e maiores que 1, conforme as Figuras 9 e 10, respectivamente.

Figura 9 - Valores atribuídos menores que 1

Tabela 1

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
0	3
0,25	3,5
0,5	4
0,75	4,5
0,9	4,8
0,99	4,98
0,999	4,998
0,9999	4,9998
0,99999	4,99998

Fonte: Leithold, 1994, p. 56.

Figura 10 - Valores atribuídos maiores que 1

Tabela 2

x	$f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}$
2	7
1,75	6,5
1,5	6,0
1,25	5,5
1,1	5,2
1,01	5,02
1,001	5,002
1,0001	5,0002
1,00001	5,00002

Fonte: Leithold, 1994, p. 57.

Observando as tabelas, o autor analisa alguns valores atribuídos, por exemplo, quando x difere de 1 de $\pm 1,001$, $f(x)$ difere de 5 de $\pm 0,002$ ou quando x difere de 1 de $\pm 1,0001$, $f(x)$ difere de 5 de $\pm 0,0002$. Assim, conclui que, à medida que x se aproxima de 1,

$f(x)$ cada vez mais se aproxima de 5. Desse modo, apresenta a definição intuitiva:

Vemos que podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1. Outra maneira de dizer isto é que podemos tornar o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e 5 tão pequeno quanto desejarmos, tomando o valor absoluto da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno. Isto é, $|f(x) - 5|$ pode se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno. Mas tenha em mente que $f(x)$ nunca assume o valor de 5. (LEITHOLD, 1994, p. 57).

Em seguida, são introduzidos os quantificadores épsilon e delta quando Leithold (1994) enuncia o seguinte:

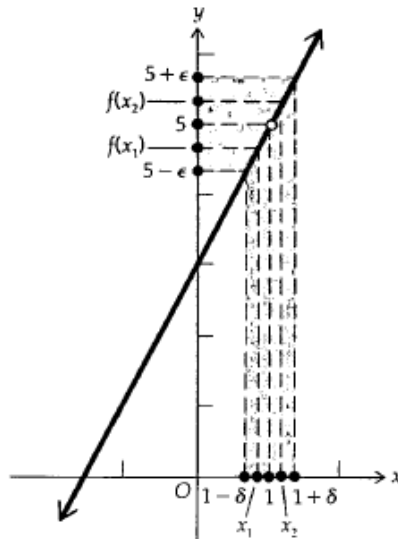
Para todo número ε dado positivo existe um número δ escolhido apropriadamente, tal que se $|x - 1|$ for menor do que δ e $|x - 1| \neq 0$ (isto é, $x \neq 1$), então $|f(x) - 5|$ será menor do que ε (LEITHOLD, 1994, 57).

Ele ainda expressa esse enunciado de outra maneira:

Dado um número ε positivo qualquer, podemos tornar $|f(x) - 5| < \varepsilon$ tomando $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, existe um número δ positivo suficientemente pequeno, tal que se $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 5| < \varepsilon$. (LEITHOLD, 1994, p. 57)

Levando em conta a função particular estudada desde o início do capítulo e as duas tabelas, o livro analisa alguns valores particulares para os quantificadores, como, por exemplo, se $|x - 1| < 0,1$ então $|f(x) - 5| < 0,2$, sendo assim, dado $\varepsilon = 0,2$, tomamos $\delta = 0,1$ e concluímos que se $0 < |x - 1| < 0,1$ então $0 < |f(x) - 5| < 0,2$. Seguindo o mesmo procedimento, se $|x - 1| < 0,001$ então $|f(x) - 5| < 0,002$, desse modo, dado $\varepsilon = 0,002$, tomamos $\delta = 0,001$ e concluímos que se $0 < |x - 1| < 0,001$ então $0 < |f(x) - 5| < 0,002$. E ainda, se $|x - 1| < 0,0001$ então $|f(x) - 5| < 0,0002$, sendo assim, dado $\varepsilon = 0,0002$, tomamos $\delta = 0,0001$ e concluímos que se $0 < |x - 1| < 0,0001$ então $0 < |f(x) - 5| < 0,0002$. Assim, chegamos à conclusão de que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$, pois dado qualquer ε positivo, encontramos um número δ positivo tal que se $0 < |x - 1| < \delta$ então $|f(x) - 5| < \varepsilon$. Na Figura 11, os quantificadores ε e δ são representados graficamente para que o aluno tenha uma melhor interpretação geométrica. A figura mostra que, se x estiver dentro do intervalo $(1 - \delta, 1 + \delta)$, $f(x)$ estará no intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Figura 11 - Interpretação geométrica dos quantificadores



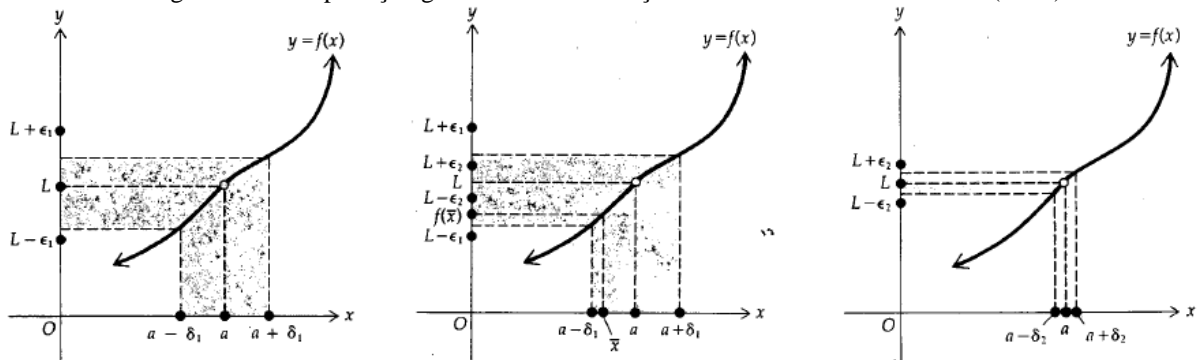
Fonte: Leithold, 1994, p. 58.

Por conseguinte, o livro relaciona os valores atribuídos no exemplo inicial com os quantificadores épsilons e deltas, introduzindo, então, a definição formal de limite:

Seja f uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no próprio número a . O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L , escrito como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$. (LEITHOLD, 1994, p. 58).

Para explorar as representações algébricas presentes nesta definição, o livro utiliza alguns gráficos, como vemos na figura a seguir.

Figura 12 - Interpretação geométrica da definição formal de limite de Leithold (1994)



Fonte: Leithold, 1994, p. 59.

A Figura 12 mostra um gráfico de $f(x)$ que não está definida quando $x = a$ e que, se x estiver no intervalo $(a - \delta_1, a + \delta_1)$, $f(x)$ estará em $(L - \epsilon_1, L + \epsilon_1)$. Podemos sistematizar por meio de representações algébricas: se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $0 < |f(x) - L| < \epsilon_1$. (LEITHOLD, 1994). Ainda, a figura nos ajuda a entender que, dependendo de um épsilon menor dado, precisamos escolher um delta menor de forma que satisfaça a relação

apresentada acima e, também, ilustra um δ_2 menor escolhido, tal que se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $0 < |f(x) - L| < \varepsilon_2$.

A partir disso, o livro segue o raciocínio com alguns exemplos que abordam a definição formal utilizando representações gráficas e numéricas e, deste modo, apresenta as propriedades e teoremas relacionados ao limite.

5.3.1 Análise do Livro de Leithold

Ao introduzir o conceito com um exemplo particular, notamos que Leithold (1994) faz uso de representações numéricas ao atribuir valores a x se aproximando de 1, por valores menores e maiores do que 1. O autor utiliza a linguagem natural para desenvolver em detalhes esses exemplos numéricos, discutindo que à medida que x fica cada vez mais próximo de 1, $f(x)$ torna-se cada vez mais próximo de 5 e quanto mais próximo x estiver de 1, mais próximo de 5 estará $f(x)$. A partir desse momento, o livro analisa esse exemplo de outra maneira, apresentando então, a definição intuitiva do limite.

Percebemos que, inicialmente, o autor utiliza a linguagem natural para apresentar a definição intuitiva, por exemplo, quando lemos “valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos” ou “ x suficientemente próximo de 1” (LEITHOLD, 1994). O livro também apresenta de outra maneira, já introduzindo, ainda em linguagem natural, o valor absoluto das diferenças entre $f(x)$ e 5, e x e 1, respectivamente. É interessante notar a forma que o autor utiliza essa linguagem, aos poucos introduzindo alguns conceitos presentes na definição formal que ele irá introduzir mais adiante, fazendo com que o aluno se familiarize com eles. O uso da linguagem natural auxilia o estudante a compreender alguns aspectos relacionados à definição formal, principalmente os relacionados aos intervalos, aos módulos e as inequações (BURIGATO, 2019). Essa articulação entre a linguagem natural e as representações algébricas para tratar do mesmo conhecimento matemático como, por exemplo, a expressão “suficientemente próximo” e o módulo da diferença, é fundamental para a aprendizagem, visto que o aluno necessita dos conhecimentos matemáticos imbricados nessas diferentes representações linguísticas para compreender o conceito trabalhado (VERGNAUD, 2009).

Todo esse trabalho vem para apresentação da definição intuitiva. Ela é introduzida utilizando as representações algébricas junto aos valores numéricos analisados no exemplo da função dada ao iniciar o estudo sobre o limite. Vemos que o autor já representa o valor absoluto das diferenças entre $f(x)$ e 5, e x e 1 utilizando os módulos e a subtração. Deste modo, é perceptível a preocupação em aproximar a noção intuitiva do limite com sua

definição formal visto que já são introduzidas, na intuitiva, estas representações algébricas. A definição intuitiva de limite é escrita de formas distintas para que o leitor associe as representações algébricas à linguagem natural que o livro utiliza. Isso auxilia o aluno quando se depara com a definição formal, repleta de representações, que será apresentada no decorrer do capítulo.

No processo de aprendizagem, Vergnaud (2009), considera que o aluno precisa lidar com situações que envolvem os diversos aspectos envolvidos na construção do conceito, isso acontece quando ele lida com a definição intuitiva e a formal de limite (VERGNAUD, 2009). Por exemplo, um conhecimento fundamental para a compreensão do conceito de limite é o de distância. Leithold (1994) aborda esse invariante operatório com uma variedade de representações desde o início do capítulo. Na definição intuitiva, ele apresenta noções de distância em linguagem natural, quando lemos “podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1” (LEITHOLD, 1994, p. 57). O autor associa essa representação em linguagem natural com a representação algébrica do valor absoluto da diferença e também a representa graficamente para introduzir a definição formal de limite.

É interessante notar que Leithold (1994) procura aproximar o estudante das noções de distância utilizando diferentes representações. Então, se o aluno compreender a relação entre essas, será mais fácil quando se deparar com a definição formal que, além de utilizar as expressões " $f(x)$ tende a L " e " x tende a p ", utiliza também de representações algébricas.

Além disso, Leithold (1994) introduz os quantificadores épsilon e delta para representar algebricamente as diferenças citadas de modo intuitivo de maneira mais precisa. Ele ainda retoma o trabalho com a função dada no início juntamente com alguns valores atribuídos e a definição formal do limite. Essa variedade de representações contribui também para compreensão da próxima representação utilizada pelo autor, a representação gráfica. Ela é apresentada, buscando dar um significado geométrico aos quantificadores, que é um dos aspectos da definição formal de difícil compreensão (CORNU, 1983 apud BURIGATO, 2019). É uma representação que permite evidenciar as relações entre as noções de distância, apresentadas com os módulos, com o domínio e a imagem da função representada graficamente.

Em cada tipo de representação, temos a possibilidade de evidenciar diversos aspectos desses conceitos, que estão presentes de modo imbricados. Fato importante se estamos interessados na aprendizagem de um conceito, objeto de ensino, na perspectiva proposta por Vergnaud (2009). Vale ressaltar que, apesar de o livro estar “caminhando” em direção à

formalidade, é notável a linguagem natural e de fácil entendimento utilizada por ele. Percebemos isso quando lemos “os valores de ε são escolhidos arbitrariamente e podem ser tão pequenos quanto desejarmos, e que o valor de δ depende do ε escolhido”. (LEITHOLD, 1994, p. 58).

Depois desse estudo, a definição formal do “limite de $f(x)$ quando x tende a a será L ” é apresentada sem exemplos numéricos, apenas representações algébricas. (LEITHOLD, 1994, p. 58). De acordo com Rosa e Costa (2013), “apenas a definição formal não dá garantias para a verdadeira compreensão do conceito” (ROSA; COSTA, 2013, p. 6). Vemos que o autor parece ter essa preocupação, pois desde o início do capítulo, ele busca explicar detalhadamente a noção de limite, utilizando diversas representações e, só após esse trabalho, ele apresenta a definição formal e explora as representações algébricas presentes. Isso acontece por meio da linguagem natural e também com algumas representações gráficas, como mostradas na Figura 12.

Da mesma forma que identificamos as representações, Waideman, Trevisan e Cargnin (2017) fizeram uma análise do livro de Leithold (1994) baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e eles identificaram algumas conversões e tratamentos. As conversões são as transformações que fazem “mudar a representação de um objeto em um registro para uma representação do mesmo objeto em outro registro” e tratamentos são transformações de “representação que ocorre dentro de um mesmo registro, é interna a ele” (WAIDEMAN; TREVISAN; CARGNIN, 2017, p. 7). Eles identificaram que, no decorrer do capítulo, o livro faz conversões da linguagem natural para a linguagem numérica, da linguagem numérica para a gráfica, voltando então para a linguagem natural. (WAIDEMAN; TREVISAN; CARGNIN, 2017, p. 13).

Ao articular diferentes representações para aproximar as situações utilizadas para o estudo das definições intuitiva e formal de limite, o autor busca contribuir com o aprendizado deste conceito. Cada representação utilizada mobiliza conceitos diversos que fazem parte da construção do conceito que está em processo de aprendizagem pelo aluno (VERGNAUD, 2009). Dando-lhe um sentido, uma vez que os estudantes demonstram bastante dificuldade em compreender o significado dos quantificadores e, conseqüentemente, relacionar essas duas definições (CORNU, 1983 apud BURIGATO, 2019).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa investigou como os autores introduzem o conceito de limite nos livros de cálculo de Guidorizzi (2015), Stewart (2013) e Leithold (1994). Ao analisar os livros didáticos, percebemos que cada autor organiza de formas distintas a apresentação do conceito de limite de função em um ponto.

Primeiramente, identificamos se os três livros apresentaram a definição intuitiva e a formal e também como esses autores faziam a introdução dessas definições. Ambas as definições apareceram nos livros didáticos. Guidorizzi (2015) é mais objetivo em apresentá-las já com representações algébricas, diferentemente de Leithold (1994), que estuda o comportamento de uma função particular utilizando representações numéricas, em que à medida que x se aproxima de certo valor, $f(x)$ se aproxima de outro, e Stewart (2013) que, antes de fazer este mesmo estudo, inicia o capítulo com duas problematizações para motivar o aluno no processo de construção do conceito.

Em seguida, identificamos quais conceitos e representações os autores utilizaram na apresentação das definições. Nossa escolha teórica foi a Teoria dos Campos Conceituais, que nos forneceu fundamentos para investigar os conceitos imbricados nas situações. As representações que identificamos incluem numéricas, algébricas, gráficas e a linguagem natural. Stewart (2013) e Leithold (1994) utilizam essas diferentes representações na introdução do conceito, principalmente a linguagem natural como, por exemplo, quando lemos “se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L (tão próximos de L quanto quisermos), tornando x suficientemente próximo de a ” (STEWART, 2013, p. 81) e “podemos tornar os valores de $f(x)$ tão próximos de 5 quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de 1” (LEITHOLD, 1994, p. 57), o que não vemos no livro de Guidorizzi (2015), onde as representações que mais aparecem são as algébricas e gráficas. A partir dessa identificação, entendemos que os livros didáticos necessitam de um equilíbrio entre a intuição e o rigor no processo de aprendizagem do conceito (WAIDEMAN; TREVISAN; CARGNIN, 2017, p. 16).

Por fim, analisamos como os livros relacionaram a definição intuitiva com a formal em que os livros didáticos apresentam diferentes situações. As definições exigem dos estudantes o conhecimento de conceitos diversos. Este é um aspecto importante para o professor considerar, ele precisa estar atento, pois conforme a situação escolhida para apresentar essas definições, os alunos podem ter de lidar com conceitos que não favorecem relacionar as noções envolvidas na definição intuitiva com o que é apresentado na formal.

Desse modo, é importante refletirmos sobre essas escolhas das situações para apresentar o conceito do limite. Esse trabalho buscou proporcionar esta reflexão, mostrando que é importante trabalhar com diversas situações (BURIGATO, 2019) e contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de limite.

Além disso, o livro didático é essencial no processo de ensino e aprendizagem, pois o professor o utiliza para organizar e orientar seu trabalho e o aluno para seus estudos (ZUCHI, 2005). Dessa forma, este trabalho mostrou que é importante escolher o livro didático mais adequado para este processo. Também, as escolhas didáticas do professor para relacionar a definição intuitiva com a formal, utilizando diferentes linguagens, à medida que conceitos imbricados vão surgindo, influenciam na aprendizagem do conceito. Assim, acredito que os professores podem abordar os aspectos da definição de limite tendo em mente que estes podem não ser bem compreendidos por parte dos alunos, adotando metodologias distintas do tradicional como, por exemplo, a integração de tecnologias em sala de aula (MOTA; JUCÁ, 2015).

Esse trabalho também nos deu oportunidade de darmos continuidade à pesquisa bibliográfica como, por exemplo, analisar quais definições que os livros abordam nos exemplos apresentados e quais atividades são propostas para os estudantes. Como também, investigar se os autores relacionam a definição intuitiva com a formal, considerando os exemplos e as atividades utilizadas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AMORIM, L. I. F. A (Re)Construção do Conceito de Limite do Cálculo para a Análise. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 4., 2015, Ilhéus. **Anais [...]**. Ilhéus, Bahia, 2015, p. 1592-1693.
- BURIGATO, S. M. M. S. **Um Estudo sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França**. 2019. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.
- GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed. vol. 1. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3 ed. vol. 1. São Paulo: HARBRA, 1994.
- MAZUCATO, T. (Org.). **Metodologia da pesquisa e do trabalho científico**. Penápolis: FUNEPE, 2018.
- MOTA, T. B.; JUCÁ, R. S. Uma Investigação das Dificuldades na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 4., 2015, Ilhéus. **Anais [...]**. Ilhéus, Bahia, 2015, p. 974-985.
- ROSA, H. A. D.; COSTA P. G. B. Conceito Imagem e Conceito Definição no Estudo de Limites de Funções Reais de uma Variável. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 11., 2013, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba, 2013.
- STEWART, J. **Cálculo**. 7 ed. vol. 1. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- VERGNAUD, G. O longo e o curto prazo na aprendizagem matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, n. Especial, p. 15-27, jan. 2011.
- VERGNAUD, G. O que é aprender? *In*: Bittar, M.; Muniz, C. A. (Org.). **A Aprendizagem Matemática na Perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. p. 11-32.
- WAIDEMAN, A. C.; TREVISAN, A. L.; CARGNIN, C. Limite de Funções Reais de uma Variável: uma Análise do Conceito e seu Ensino em Livros Textos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2017, Cascavel. **Anais [...]**. Cascavel, 2017. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/294/43. Acesso em: 13 out 2021.
- ZUCHI, I. **A Abordagem do Conceito de Limite via Sequência Didática: do ambiente papel e lápis ao ambiente computacional**. 2005. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.