UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL INSTITUTO DE MATEMÁTICA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LIANA KRAKECKER

VALIDAÇÕES MATEMÁTICAS PRODUZIDAS POR ALUNOS DO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: DESAFIOS E POSSIBILIDADES

Campo Grande – MS

2022

LIANA KRAKECKER

VALIDAÇÕES MATEMÁTICAS PRODUZIDAS POR ALUNOS DO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: DESAFIOS E POSSIBILIDADES

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção de título de Doutora em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

Campo Grande – MS

2022

LIANA KRAKECKER

VALIDAÇÕES MATEMÁTICAS PRODUZIDAS POR ALUNOS DO NONO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL: DESAFIOS E POSSIBILIDADES

Tese apresentada ao Curso de Doutorado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção de título de Doutora em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____
Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____
Dra. Marta Maria Pontin Darsie
Universidade Federal de Mato Grosso

____
Dr. Saddo Ag Almouloud
Universidade Federal do Pará

____
Dra. Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campo Grande, março de 2022

RESUMO

Nesta pesquisa tivemos o objetivo geral de investigar processos de validação matemática desenvolvidos por alunos de uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual de Mato Grosso, no decorrer do ano letivo de 2020. Especificamente, buscamos identificar como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas para suas afirmações e/ou conjecturas, classificar provas matemáticas que foram produzidas por eles, assim como, identificar elementos relacionados às atividades desenvolvidas que pudessem favorecer a produção de validações. Para tanto, desenvolvemos uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, cuja parte experimental foi implementada em uma escola pública da rede estadual de Mato Grosso e foi dividida em três Fases, que descrevemos a seguir: a Fase I, que ocorreu quando os alunos analisados ainda estavam no oitavo ano - nessa ocasião, desenvolvemos e aplicamos presencialmente atividades de validação matemática, relacionadas aos temas conjuntos numéricos e expressões algébricas. Essa experiência nos serviu como uma pré-experimentação e subsidiou a (re)elaboração da proposta a ser aplicada nas Fases II e III. A Fase II se refere aos meses de maio, junho e julho do ano de 2020, quando as escolas estaduais estavam com atividades letivas paralisadas em decorrência da pandemia causada pelo novo coronavírus. Dessa forma, o contato se deu de forma não presencial, em que desenvolvemos e aplicamos atividades relativas aos temas potências e raízes. A Fase III ocorreu durante o período letivo de aulas não presenciais da referida rede de ensino, nos meses de setembro, outubro, novembro e dezembro, em que discutimos validações matemáticas relacionadas aos temas potências e raízes, equações do segundo grau, funções e razão e proporção. Nessas duas últimas Fases, nossa interação junto aos estudantes ocorreu de forma individual, considerando suas particularidades e possibilidades, como também o cenário pandêmico, de modo que os dados foram obtidos por meio do WhatsApp e de material impresso. Assim sendo, analisamos a interação que tivemos com dois estudantes, considerando nossos diálogos, falas, escritos, e as resoluções apresentadas por eles para cada atividade, buscando atender aos nossos objetivos de pesquisa. Para elaboração, aplicação e análise das situações, nos subsidiamos principalmente no Modelo de Tipologia de Provas de Balacheff, na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, possíveis funções da prova matemática sinalizadas por De Villiers e outros autores, assim como em pesquisas que trataram do tema. Ao final desse processo, foi possível identificar que os alunos passaram a considerar a realização de diversos testes e elementos de generalização em suas provas. Apesar das interações, um dos estudantes pareceu permanecer em uma perspectiva pragmática, apresentando e se satisfazendo com provas desse nível, o que pode indicar que, mesmo diante de situações de validação diversas, parte da ação de produzir provas, diz respeito ao aluno e sua compreensão sobre essa forma específica de justificar afirmações. Outra aluna, cujos dados analisamos, passou a apresentar com maior frequência provas de nível intelectual.

Palavras-chave: Educação Matemática; Validações matemáticas; Ensino Fundamental; Tipologia de Provas; Prova.

ABSTRACT

In this research, we had the general objective of investigating mathematical validation processes developed by students from a 9th grade class of Elementary School of a state public school in Mato Grosso, during the academic year of 2020. Specifically, we sought to identify how the students analyzed formulated and presented mathematical validations for their statements and/or conjectures, classifying mathematical proofs that were produced by them, as well as to identify elements related to the activities developed by the students that could favor the production of validations. Therefore, we developed a qualitative research, of the case study type, whose experimental part was implemented in a public school in the state of Mato Grosso and was divided into three phases, namely: Phase I, which occurred when the analyzed students were still they were in eighth grade. On this occasion, we developed and applied face-to-face mathematical validation activities related to numerical sets and algebraic expressions. This experience served as a pre – experimentation and supported the (re)elaboration of the proposal to be applied in phases II and III. Phase II refers to the months of May, June and July of the year 2020, when state schools were with school activities paralyzed due to the pandemic caused by the new coronavirus. In this way, the contact took place in a non-face-to-face manner, in which we developed and applied activities related to potential and root themes. Phase III, in turn, took place during the teaching period of non-face-to-face classes of the aforementioned public school, in the months of September, October, November and December, in which we discussed mathematical validations related to the themes potential and roots, quadratic equations, functions and ratio and proportion. In these last two Phases, our interaction with students took place individually, considering their particularities and possibilities, as well as the pandemic scenario, so that data were obtained through WhatsApp and printed material. Therefore, we analyzed the interaction we had with two students, considering our dialogues, speeches, writings and the resolutions presented by them for each activity, seeking to meet our research objectives. For the elaboration, application and analysis of situations, we rely mainly on Balacheff's Proof Typology Model, on Brousseau's Theory of Didactic Situations, possible functions of the mathematical proof signaled by De Villiers and other authors, as well as on research that dealt with the theme. At the end of this process, it was possible to identify that the students started to consider performing several tests and generalization elements in their tests. Despite the interactions, one of the students seemed to remain in a pragmatic perspective, presenting and being satisfied with tests of this level, which may indicate that, even in the face of different validation situations, part of the action of producing tests concerns the student and his understanding of this particular way of justifying claims. Another student, whose data we analyzed, started to present more frequently tests of intellectual level.

Keywords: Mathematics Education; Mathematical validations; Elementary School; Typology of Proof.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

À minha família, especialmente ao meu pai, que certa vez me confessou: *nem sabia que se poderia estudar tanto. Nem sabia que existia esse tal de doutorado*!

AGRADECIMENTOS

Respirando fundo ...   Agradecer é preciso...

Eu agradeço enormemente à minha família, meu pai Dimas, minha mãe Neide, meu irmão Natan, e meus avós, que desde sempre soube o papel transformador da educação. Que desde sempre esteve comigo e apoiou minhas decisões. Que lutou para que eu pudesse me dedicar à escola, mesmo diante de tantas adversidades. Para mim, muito me orgulha ser filha de agricultores! A conclusão desta etapa significa, também, um ato de resistência! Fica aqui minha homenagem!

Eu sou grata àqueles que não permitiram que eu desistisse...

Agradeço aos amigos do peito Ivanete, Florisval e Relicler porque em nenhum momento permitiram que eu seguisse sozinha. Tenho vocês em meu coração!

Agradeço aos meus colegas de turma, Ana, Cris, Day, Gresi, Marizete, Ricardo e Rosane porque não mediram esforços para que conseguisse superar as adversidades do primeiro ano do curso e sempre estiveram à disposição para ouvir meus desabafos.

Agradeço a todos os professores do PPGEduMat, especialmente aqueles que estiveram comigo durante o doutorado e que dispensaram seus olhares de compreensão sobre as condições que eu não conseguia mudar. Não há como deixar de mencionar a professor Luzia, coordenadora à época, que teve a sensibilidade de me ligar e de conversar comigo em um momento difícil.

Eu agradeço aos gestores da escola em que trabalho, que contribuíram para que fosse possível a logística e o desenvolvimento desta investigação junto aos estudantes.

Eu sou grata àqueles que foram o coração desta pesquisa...

Eu agradeço ao Juca e à Lili, por terem estado comigo, firmes, desde o momento em que estivemos juntos, na sala de aula.

Eu sou grata àqueles que me ajudaram a compor este relato...

Agradeço aos professores José Luiz, Maria Marta, Marilena, Saddo e Sonia por cada olhar atento, pela sensibilidade e contribuição nesta pesquisa. Sou grata pelas palavras e sugestões, tanto no momento da qualificação quanto da defesa.

Eu sou grata àqueles que foram meus professores...

É possível que não lembre de todos, mas vou correr o risco! Agradeço à Odila, à Salete, à Natalina, à Karina, ao Emerson, à Justina, ao Ildo, à Lia, à Lúcia, à Sandra, ao Darci, à Rejane, à Jane, à Josânia, à Lourdes, à Luciane, ao Nestor, ao Ivanir, à Vanete, à Flaviane, à Deise, à Carise, à Andriceli, à Neusa, ao Professor Zé, à Marilena, à Luzia, ao Viola, ao Luiz Carlos, ao Thiago, à Edilene, à Patrícia, à Sueli, e claro, agradeço à Clarice!

Por fim, eu sou grata àquele que tinha que ser meu orientador...

Agradeço a ti, professor José Luiz, por ter aceitado o desafio de ser meu orientador. Eu digo com toda a certeza: Tinha que ser você (como gosta de ser chamado)! Gratidão por todos os momentos de conversa, compreensão e orientação! Não foi fácil seguir, mas em cada mensagem de incentivo, eu encontrava forças para continuar porque sabia que o senhor estaria ao meu lado e, sinceramente, às vezes isso era só o que importava para mim.

Em verdade, eu sinto muito orgulho de ter estado junto de ti no decorrer do mestrado e agora do doutorado. Espero ter correspondido, ao menos um pouco, às suas expectativas e deixo registrado aqui minha admiração!

INTRODUÇÃO

ESPERANÇA

Quando alguém se torna doutor? Por vários momentos ao longo desta jornada me vi refletindo sobre essa pergunta. Acredito que não exista um dia, uma hora ou um momento no qual nós nos tornamos aquilo que somos. Um constante devir, talvez.

Por isso, eu prefiro sempre falar do *meu processo de doutoramento*. *Meu*, porque ele é único e ainda que dele façam parte muitas pessoas, coube somente a mim percorrer este caminho por vezes tão solitário. *Processo*, pois as datas que marcaram o início do curso e o dia da defesa, respectivamente, parecem ser mais uma burocracia do que uma representação fiel destes eventos. Tudo que vivi antes e durante esses quase quatro anos me ajuda a compor o que ora se apresenta. Esse cenário foi possível por meio de minhas vivências enquanto aluna do Ensino Básico ou professora, além das aprendizagens da Graduação, do Mestrado, das disciplinas do Doutorado, dos imprevistos do percurso metodológico dessa investigação, assim como outras experiências que pouco ou nada tem a ver com pesquisa ou com educação, mas que me constituíram e me constituem.

Este texto configura-se, portanto, como um relato organizado – ou uma tentativa – do *meu processo de doutoramento*, em que realizamos uma investigação em tempos de pandemia. Não temos como objetivo analisar especificamente impactos e mudanças relativas às novas formas de ensinar e de aprender, que inevitavelmente vieram à tona durante esse período. Porém, como não se pode fechar frente aos acontecimentos que afetam determinado contexto, o cenário pandêmico atravessou o percurso desta tese e não há como negar sua existência. É verdade que se poderia omiti-lo e, por conta disso, apresentar-se de forma objetiva o referencial teórico, as atividades desenvolvidas e as respectivas análises. No entanto, isso não refletiria nossa concepção de que o contexto e de que as pessoas envolvidas nesta investigação importam.

Ao tentar explicitar minhas motivações para esta pesquisa, pratiquei o exercício de fechar os olhos e de voltar no tempo em busca de lembranças atreladas à Matemática e à profissão docente. Algumas delas são bastante significativas para mim, ao passo que considero importante o registro: ainda quando estudante do Ensino Fundamental, recordo-me de ministrar aulas imaginárias, escrevendo em quadros também imaginários, com pedacinhos de giz que sobravam de cada dia de aula na escola. Desse período, resgato memórias das feiras de Matemática que participei, com projetos relacionados à Geometria e a dobraduras de papel. Ainda hoje quando eu converso com minha professora, que se tornou minha amiga, lembramo-nos carinhosamente e de forma emocionada, daqueles momentos que certamente contribuíram para que eu chegasse nesta etapa de minha formação.

Um pouco mais tarde, já no Ensino Médio, me vem à memória os dias que eu passava esperando pelas aulas de Matemática que, embora pudessem ser consideradas “tradicionais”, igualmente me encantavam. À época, o contrato didático[1] era claro. Primeiramente, havia uma explicação sobre um método ou sobre uma fórmula, depois atividades e, por último, algum tipo de avaliação. Confesso que no fundo, eu gostava da sensação de segurança ao saber o que faríamos aula após aula. Ainda assim e, talvez, por conta disso, quando foi necessário optar por um curso de Graduação, não havia dúvidas: eu escolhi ser professora de Matemática.

Antes mesmo de iniciar a Licenciatura eu já tinha pretensões de pleitear uma Pós-Graduação em nível de Mestrado, devido ao incentivo e à influência dos meus próprios professores que, ao tomarem ciência da minha escolha, indicaram tal possibilidade. Nesse sentido, desde o início do curso superior sempre busquei envolver-me com o que pude, como, por exemplo, Congressos, Encontros, Simpósios, Semanas Acadêmicas, Mostras, Projetos de pesquisa, PIBID e Comissões Organizadoras. Tudo para que, posteriormente, eu pudesse optar por uma área específica, que acabou sendo a Educação Matemática.

Durante a Licenciatura, uma das grandes mudanças em relação às formas de se fazer matemática, que eu havia experienciado até então, foi o trabalho com provas e demonstrações. Sempre tive um pouco de dificuldade em realizá-las e, na maioria das vezes, decorava parte ou quase todo o processo de resolução desse tipo de atividade, para reproduzi-lo nas avaliações ou exercícios. Obviamente eu nunca estive satisfeita com isso, mas me sentia impotente para modificar tais circunstâncias, porque já não era mais suficiente aplicar fórmulas ou seguir algum algoritmo. A matemática parecia muito diferente daquela das feiras, daquela das aulas. É provável que as tímidas experiências

[1] Conceito utilizado por Brousseau (1997) para explicitar as relações entre aluno, professor e saber, caracterizado pelo conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelo aluno e o conjunto dos comportamentos do aluno que são esperados pelo professor.

com provas que tive na condição de aluna, até aquele momento, contribuíram para essas dificuldades.

Essa é uma das razões pelas quais, desde 2015 tenho estudado este tema: a produção de validações matemáticas que venham a ser desenvolvidas por estudantes do Ensino Fundamental. Como professora que atua nesse nível de ensino, gostaria que meus alunos tivessem experiências diferentes das minhas quanto à produção de provas. Acredito na importância de proporcionar a eles diversas atividades que envolvam elementos como: a identificação de regularidades, a realização de testes, a elaboração de conjecturas e de justificativas.

Tenho clareza da fundamentalidade de um trabalho com provas que seja contínuo, desenvolvido a longo prazo, desde os primeiros anos de escolaridade e que permeie os mais diversos temas discutidos com alunos. Sendo assim, acredito que essa seja uma premissa para que eles possam ampliar seus conhecimentos sobre validações e apresentar justificativas cada vez mais elaboradas para suas conjecturas, para que, aos poucos, possam criar suas próprias regras de decisão e compreendam a singularidade das provas em Matemática. Por isso, sempre me pergunto: como os estudantes poderiam apresentar uma prova, cheia de formalidades e de deduções se nunca tiveram qualquer contato ou experiência com esta atividade específica? Como esperar que os alunos *simplesmente* provem se não compreendem o que é, de fato, provar?

Agora, durante o Doutorado, eu teria a oportunidade de refletir mais profundamente acerca destas questões. Nesse processo, um dos pressupostos que assumi foi o de envolver a realidade em que estou inserida, a escola em que trabalho, a sala de aula e meus próprios alunos. Então, foi preciso pensar em como colocar isso em prática, em como aliar estes ideais à sala de aula, à minha escola e aos meus alunos.

Em nosso projeto inicial, tínhamos a hipótese de que algumas atividades elaboradas de maneira estratégica, pudessem favorecer a produção de provas matemáticas. Nossa intenção era a de desenvolver uma sequência didática, aplicá-la junto a um grupo de estudantes de Ensino Fundamental em algumas sessões e, posteriormente, analisar como ou de que forma as atividades influenciaram na produção de validações.

Todavia, como se sabe, muitas das ideias iniciais de qualquer projeto se modificam e o mesmo aconteceu conosco. Certo dia, durante a apresentação de um seminário em uma das disciplinas do Doutorado, pensamos na possibilidade de desenvolvermos um trabalho com meus próprios alunos, com todos eles, durante o período regular de aulas. Rapidamente essa proposta passou a fazer todo sentido para mim, para nós. A partir daí a única certeza que tínhamos foi a de que assim seria: uma proposta a ser aplicada com todos os meus alunos, durante as aulas de Matemática, por um longo período, discutindo validações sempre que possível, independentemente dos conteúdos.

É necessário esclarecer então, que a partir desses ideais, nosso foco se direcionou para uma abordagem de provas matemáticas de forma gradual, propondo aos estudantes uma evolução conforme suas possibilidades. Diante disso, não trabalhamos com um conteúdo em específico. Houve uma predominância de atividades relacionadas à Potências e Raízes, devido às restrições impostas pelo momento pandêmico, conforme explicitamos no capítulo 4. Contudo, também foram desenvolvidas atividades de validação relacionadas aos temas Equações do segundo grau; Funções e Razão e Proporção.

Durante nosso estudo teórico, entretanto, e antes de muitos dos nossos movimentos, nos preocupamos em saber em que medida estaríamos desenvolvendo uma pesquisa diferente das demais. Nesse sentido, buscamos por investigações já realizadas que tivessem relação com nosso objeto de estudo, qual seja, validações matemáticas.

No âmbito da formação de professores, encontramos as produções de Pietropaolo (2005), Grinkraut (2009), Leandro (2012) e Trevisan (2016). Outras estão direcionadas para futuros professores, nas quais os autores desenvolveram suas experimentações com estudantes de Licenciatura, como é o caso de Dias (2009), Sales (2010), Mateus (2015), Ordem (2015), Ferreira (2016) e Guerato (2016). Em relação à Educação Básica, identificamos as pesquisas de Mello (1999), Leandro (2006), Araújo, (2007), Oliveira (2009), Souza (2009), Picelli (2010), Nunes (2011), Carvalho (2014), Lima (2015), Santos (2015) e Krakecker (2016), que investigaram estudantes do Ensino Fundamental e/ou do Ensino Médio.

Uma discussão mais detalhada envolvendo essas pesquisas é realizada no capítulo 3, uma vez que nos ajudaram a compor o contexto do qual fazemos parte, além de nos levar a pensar nas atividades de nossa proposta. Dentre as pesquisas identificadas, que se relacionam à Educação Básica, na maioria em nível de Mestrado, sentimos falta de intervenções que analisassem dados desenvolvidos por um longo período de tempo, como a que pretendíamos fazer. Poucas envolveram todos os alunos de uma sala, durante o período regular de aulas de Matemática, e igualmente poucas foram aquelas que relacionaram provas e outros tópicos para além da Geometria, envolvendo temas como Probabilidade, Funções, Radiciação ou Expressões algébricas. Estes, são parte dos aspectos que nos distanciam das produções citadas anteriormente, e nos colocam em reflexão e em movimento no desenvolvimento de nossa proposta.

Era claro para nós o que gostaríamos de colocar em prática. E foi o que tentamos fazer ao longo dos anos letivos de 2019 e de 2020, em uma escola da rede pública do Estado de Mato Grosso, em nossa sala de aula de Matemática. Dessa maneira, o percurso metodológico de nossa pesquisa fez com que vivenciássemos três Fases, quais sejam:

Fase I: Iniciamos nossa produção de dados com estudantes de duas turmas de 8° ano de uma escola pública do estado de Mato Grosso, ainda no ano de 2019. Por razões adversas, o trabalho precisou ser interrompido. Consideramos esta experiência como uma pré-experimentação que, outrora, amparou a reflexão e a (re)elaboração da proposta para a segunda e a terceira Fase.

Fase II: Nossa interação junto aos estudantes se deu de forma não presencial, em um período em que as aulas estavam totalmente paralisadas, com estudantes voluntários, que coincidentemente haviam participado da Fase I. Isso porque em decorrência da pandemia causada pelo novo Coronavírus – COVID 19[2], não foi mais possível desenvolver nossa experimentação durante as aulas presenciais, no período regular de aulas de Matemática com os estudantes que agora estariam no 9° ano do Ensino Fundamental.

Fase III: Nessa Fase, nossas atividades foram desenvolvidas e direcionadas para todos os estudantes das quatro turmas de 9° ano ao longo do retorno das aulas regulares não presenciais, que estavam sob minha regência. Isso ocorreu porque ainda não havíamos abandonado a premissa de discutir validações com todos os alunos, durante o máximo de tempo possível, envolvendo diversos conteúdos.

De acordo com Araújo e Borba (2013) um questionamento de pesquisa não pode ser observado em separado de seu processo de constituição. Passamos por modificações em nosso projeto e por três diferentes Fases e todas estas vivências contribuíram para o

[2] "Os coronavírus são uma grande família de vírus comuns em muitas espécies diferentes de animais, incluindo camelos, gado, gatos e morcegos. Raramente, os coronavírus que infectam animais podem infectar pessoas, como exemplo do MERS-CoV e SARS-CoV. Recentemente, em dezembro de 2019, houve a transmissão de um novo coronavírus (SARS-CoV-2), o qual foi identificado em Wuhan na China e causou a COVID-19, sendo em seguida disseminada e transmitida pessoa a pessoa." (Ministério da Saúde, 2021)

estabelecimento da questão norteadora que apresentamos agora. Buscamos responder: Como estudantes de uma turma de 9°ano de Ensino Fundamental de uma escola pública do Estado de Mato Grosso desenvolvem e apresentam validações matemáticas?

Para tanto, desenvolvemos um estudo de caso a partir de uma abordagem qualitativa de investigação em que buscamos priorizar o significado, o contexto e a descrição dos acontecimentos (BODGAN E BIKLEN, 1994), com o objetivo geral de investigar processos de validação matemática desenvolvidos por alunos de uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Mato Grosso, no decorrer do ano letivo de 2020. Sendo assim, temos os objetivos específicos de identificar como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas para suas afirmações e/ou conjecturas; classificar provas matemáticas que foram produzidas pelos alunos e identificar elementos relacionados às atividades desenvolvidas pelos estudantes, que pudessem favorecer à produção de validações.

Deixamos nosso convite à leitura dos cinco capítulos que compõem este relato de nossa investigação que foi constituído em meio aos desafios da realidade da escola, da realidade da sala de aula, em um período pandêmico. Como dissemos anteriormente, o contexto e as pessoas importam e, por este motivo, mesmo que de forma resumida, foi necessário registrar todas as etapas, até mesmo aquelas que não ocorreram como gostaríamos, conforme a seguinte organização:

No capítulo 1, "Validações matemáticas: reflexões sobre uma abordagem possível para a Educação Básica", apresentamos o referencial teórico adotado para discutir validações matemáticas, constituído com base em leituras como Balacheff (1998; 2000; 2004; 2019), De Villiers (2001), Zaslavsky *et al.* (2012), Brasil (1997; 1998; 2000; 2018). Além disso, indicamos o que entendemos por prova e possíveis funções que ela pode assumir, processo de validação, atividade de validação, entre outros conceitos. Antes disso, fizemos uma breve reflexão sobre como este tema está presente em documentos como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e referenciais curriculares do Estado de Mato Grosso.

No capítulo 2, "Teoria das Situações Didáticas: uma visão sobre a aprendizagem" discutimos nossa compreensão acerca dos processos de ensino e de aprendizagem, o papel do professor, o papel do aluno e a relação didática entre os estudantes e o saber, fundamentados principalmente em Brousseau (1996; 1997; 2008);

No capítulo 3, “Construindo pontes: um diálogo com outras pesquisas relacionadas ao tema validações matemáticas”, apresentamos os resultados de pesquisas que, de alguma forma, aproximam-se do objeto de estudo, ampliando a discussão com pesquisadores que investigaram os mais diversos contextos.

No capítulo 4, “Percurso metodológico da pesquisa: história e contexto” assumimos um estilo de escrita descritivo e relatamos nosso percurso e como as Fases se impuseram frente ao desejo de aliar esta pesquisa à nossa sala de aula de matemática. Nessa parte, também apresentamos os dois alunos que compuseram nosso estudo de caso e, portanto, nossas análises, os instrumentos utilizados e a forma pela qual nossos dados serão apresentados no capítulo posterior.

No capítulo 5, Um olhar sobre as produções de Juca e Lili”, trazemos a análise das atividades desenvolvidas e aplicadas ao longo das Fases II e III e, em seguida, nossas considerações em relação a elas.

Esperamos que, para além do objetivo estabelecido, possam ser provocadas reflexões mais amplas sobre o professor que se torna pesquisador de sua sala de aula, sobre os modos de se fazer educação em tempos de pandemia e sobre a reinvenção do espaço e do tempo da escola.

1. VALIDAÇÕES MATEMÁTICAS: REFLEXÕES SOBRE UMA ABORDAGEM POSSÍVEL PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Lá bem no alto do décimo segundo andar [...]
Vive uma louca chamada Esperança
[...]

Quando defendemos a utilização de provas nas salas de aula da Educação Básica, não estamos nos referindo àquelas justificativas rigorosas, comumente abordadas em disciplinas dos cursos de Licenciatura em Matemática. Em outra direção, adotamos um conceito relativo de prova, que se relaciona com o público e com o contexto em que está sendo desenvolvida.

Neste capítulo, dialogamos com documentos tais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), na tentativa de investigar e de compreender a existência de orientações quanto à abordagem de provas e demonstrações no que se refere ao trabalho com alunos do Ensino Fundamental. Apresentamos e discutimos os conceitos de explicação, prova e demonstração que estamos considerando, a partir da perspectiva de Balacheff, (1987; 2000; 2019), como também, possibilidades para a utilização de atividades de validação em sala de aula sugeridas por De Villiers (2001) e Zaslavsky *et.al.* (2012).

1.1 Conjecturas, provas, demonstrações, documentos curriculares e algumas pesquisas

Diversos estudos desenvolvidos no âmbito da Educação Matemática têm sinalizado para a importância de se discutir junto aos alunos atividades que proporcionem a eles experiências com explicações, justificativas, explorações para a compreensão dos motivos pelos quais determinados resultados ou fórmulas são verdadeiros, bem como, a produção de conjecturas e respectivas provas (BALACHEFF, 1987; 2000; 2010; DE VILLIERS, 2001; NASSER; TINOCCO, 2003; BOAVIDA, 2001).

Além desses estudos, há pelo menos 20 anos, documentos nacionais referentes ao ensino de Matemática possuem indicações para que sejam exploradas provas e demonstrações com estudantes do Ensino Fundamental. Dentre os objetivos gerais para esse nível de ensino, por exemplo, encontramos elementos voltados para a comunicação matemática, a apresentação de resultados e a argumentação de conjecturas, a validação de estratégias e as diferentes formas de raciocínio (BRASIL, 1997; 1998). Para que isso seja possível, as orientações curriculares nacionais são para que se inicie um trabalho desde os primeiros anos de escolaridade, tendo em vista o desenvolvimento e o aprimoramento ao longo do tempo. De acordo com os PCNs direcionados às séries iniciais, é importante que os alunos sejam convidados às práticas de investigação, à justificativa e à validação de suas respostas já no primeiro ciclo, equivalente ao 1°e 2° anos do Ensino Fundamental (BRASIL, 1997). As orientações desse último documento indicam uma abordagem no sentido de possibilitar aos alunos desenvolver atitudes de investigação, justificativa e validação de suas respostas.

Igualmente importante é a criação de um ambiente de debates, onde o pensamento de um aluno seja confrontado com o de outros colegas, pois esta ação pressupõe “[...] a necessidade de formulação de argumentos (dizendo, descrevendo, expressando) e a de comprová-los (convencendo, questionando).” (BRASIL, 1997, p. 31).

Em relação aos anos finais do Ensino Fundamental, na mesma perspectiva, sugere-se levar em consideração e aprimorar a produção de estratégias, de conjecturas, de argumentações e de justificativas. Para tanto, devem ser incentivadas produções empíricas, pois estas possibilitam produzir conjecturas e ampliar a compreensão de determinados conceitos e produções mais gerais. Contudo, apesar do forte convencimento decorrente delas, ou seja, de experimentações ou de medições, validações mais formais devem ser incentivadas para que os estudantes não se satisfaçam apenas com respostas simples (BRASIL, 1998).

Assim, habilidades que permitam aos alunos provar seus resultados, devem ser trabalhadas sempre, partindo-se do entendimento de que “[...] a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução.” (BRASIL, 1998, p. 42). Não se trata apenas da produção de uma prova, mas do processo que permitiu construí-la, que envolve uma postura crítica e autônoma dos estudantes que passarão a investigar, formular, testar, refutar, validar, entre outros. Essas ideias devem, segundo os PCNs para o Ensino Médio, ser aprofundadas ao longo dessa última etapa da Educação Básica, possibilitando a eles conhecer as especificidades de um sistema dedutivo e o significado de expressões como postulado, teorema e demonstração.

Ao trabalhar dessa forma, o

> [...] professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar; dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação de contradições; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e a [*sic*] questionar (BRASIL, 2000, p. 52).

Contribuindo, assim, para uma formação dos estudantes que ultrapasse as particularidades da realização de um cálculo ou da aplicação de um procedimento matemático para unicamente obter um resultado. Nos PCNs+, também direcionados ao Ensino Médio é esclarecido que:

> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é "verdade" em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma conseqüência lógica de outras proposições provadas previamente (BRASIL, 2002, p. 124).

Na BNCC, documento mais recente, encontramos sinalizações para que os alunos realizem atividades que envolvam processos de validação. Afirma-se que "a dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental." (BRASIL, 2018, p. 265). Uma das competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, elencadas pela BNCC, cita especificamente a demonstração, que deve gradualmente ser introduzida no ensino:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531).

Tendo em vista nossas tentativas de aproximação junto à sala de aula e à realidade de nossa escola e de nossos alunos, não poderíamos deixar de olhar para documentos de referência destinados às escolas públicas estaduais de Mato Grosso, uma vez que nosso estudo de caso viria a ser desenvolvido no contexto mato-grossense de educação. Nos textos relativos ao Ensino Fundamental encontramos direcionamentos semelhantes aos dos PCNs e, especificamente à BNCC, sendo indicado buscar por metodologias para o ensino de Matemática que favoreçam ao estudante uma participação mais ativa, na qual ele seja colocado diante de situações em que precise, por exemplo, pensar, estabelecer estratégias, investigar e justificar (MATO GROSSO, 2018a; 2018b). Na versão preliminar das referências para o Ensino Médio, isso fica mais evidente, pois se afirma ser "[...] preciso superar a visão de que o estudante aprende matemática por meio de memorização de fatos, acontecimentos, normas ou regras transmitidas pelo educador ou pela repetição enfadonha de exercícios." (MATO GROSSO, 2021, p. 332).

Ao longo dos anos e, sobretudo na etapa final da Educação Básica, aqueles documentos sinalizaram ser de fundamental importância que os alunos sejam autônomos, sendo capazes de utilizar suas próprias estratégias para refletir, analisar, argumentar, raciocinar e comunicar conceitos e procedimentos matemáticos (MATO GROSSO, 2021). Não é o caso de dar maior importância para a "[...] Matemática formal dedutiva, mas de permitir que os jovens percebam a diferença entre uma dedução originária da observação empírica e uma dedução formal." (ibidem, p. 353). Sendo assim,

> [...] é de suma importância que os estudantes utilizem suas próprias formas de reflexão, análise, argumentação, raciocínio, comunicação e, a partir da interação com o outro, que aprendam novas estratégias, conceitos e procedimentos, tornando o aprendizado mais significativo. Nessa perspectiva de aprendizagem, na defesa de seus pensamentos, considerando a capacidade de argumentação para utilização de um determinado procedimento, os estudantes são instigados a convencerem o outro e às vezes convencer a si mesmos de que seu raciocínio pode estar equivocado, essa troca de experiências contribui para seu aprendizado e crescimento intelectual (MATO GROSSO, 2021, p. 343).

Observamos, em todos os documentos, uma atenção ao papel do aluno, que deve estar em evidência e ser convidado às práticas do fazer matemático, que se relacionam com ações como: medir, verificar, buscar exemplos, observar, formular conjecturas, refutar, argumentar e realizar provas.

Poderíamos nos questionar, contudo, em que medida essas orientações têm se materializado nas salas de aulas ou de que forma elas vêm sendo realizadas?

Ao escrever sobre a situação do ensino no Brasil, Nasser e Tinoco (2003) sinalizam que a utilização de provas em Matemática tem estado distante da sala de aula. Segundo as autoras, a maioria dos alunos permanece sem o hábito de desenvolver um raciocínio argumentativo, além de não conseguir comunicar suas ideias, tampouco realizar validações. Acrescentam ainda que o raciocínio lógico e dedutivo, apesar de presentes em muitos dos discursos e dos planejamentos dos professores, não se traduzem em ações efetivas, pois "[...] na maioria das escolas, o aluno ainda é levado a resolver uma lista enorme de exercícios repetitivos, que para ele não tem significado algum." (NASSER; TINOCO, 2003, p. 21). Acreditamos que o grande problema dessa abordagem é o fato de ela ser quase que a única adotada, excluindo possibilidades outras, tais como investigações, resolução de problemas, uso de jogos, *softwares* e, especificamente, a produção de conjecturas e respectivas validações.

De forma semelhante, os resultados de algumas pesquisas apresentadas no Capítulo 3, também convergiram para a mesma situação, visto que as produções dos estudantes da Educação Básica e mesmo licenciandos e professores, que foram investigados, mostraram-se predominantemente empíricas. Embora após interversões alguns autores tenham identificado evoluções nas provas apresentadas, o cenário não refletiu àquele sugerido pelos documentos que discutimos anteriormente. Uma das consequências dessa escolha didática de não abordar provas e demonstrações, é a de que grande parte dos alunos conclui seus estudos na Educação Básica sem compreender o significado daquelas atividades (NASSER; TINOCO, 2003; AGUILAR; NASSER 2012; ZASLAVSKY *et al*, 2012).

No âmbito internacional, Healy e Hoyles (2000) desenvolveram pesquisas com mais de 2000 estudantes britânicos com idades entre 14 e 15 anos e encontraram resultados semelhantes. A maioria dos alunos, cujos dados foram analisados, apresentava dificuldade em seguir ou construir argumentos dedutivos, e de compreender em que medida eles se afastam de experimentações e exemplos. Além disso, não conseguiam utilizar esses mesmos argumentos dedutivos para obtenção de outros resultados. Ainda segundo as autoras, parte do desempenho insatisfatório, mesmo dos alunos com maior facilidade, em geral, pode ser explicado pela falta de familiaridade com o processo de prova.

Boavida (2001), por sua vez, relata que, até há pouco tempo, o ensino de demonstrações em Portugal esteve estritamente relacionado à Geometria, sendo iniciado geralmente no 3° ciclo da Educação Básica. Segundo a autora, quem fazia a maioria das demonstrações era

> [...] o professor provando, quase sempre com o recurso a um aparato estranho e misterioso aos olhos dos alunos, o que, frequentemente, era óbvio para eles. A veracidade dos enunciados a demonstrar não era posta em causa e raramente os alunos sentiam a necessidade de demonstrar as proposições que se enunciavam ou viam a demonstração como um meio de progredir na compreensão de um problema (BOAVIDA, 2001, p. 11).

Aos alunos, cabia a reprodução dessas demonstrações, como se não houvesse um processo que nela culminasse, "[...] como se de repente, por volta dos treze anos se revelasse aos alunos, que a demonstração em matemática é portadora de certezas e se obrigassem a entrar num novo jogo que tinham que aceitar as regras e onde os critérios de verdade e validade eram diferentes [...]" (BOAVIDA, 2001, p. 12). A autora sinaliza que no ensino atual ainda existem resquícios desse entendimento.

Segundo Zaslavsky *et al* (2012), estudos que envolveram a produção de provas realizados no Japão e no Canadá também indicaram que a maioria dos alunos que cursavam o Ensino Médio, mesmo com bom desempenho em Matemática, não compreendia qual a necessidade de uma prova, especialmente quando a afirmação era considerada óbvia para eles. Outros alunos evidenciaram dificuldades em relação ao conceito de provar propriamente.

Essas pontuações decorrem, em parte, das particularidades que o processo de validação exige, uma vez que envolve competências que não são simples, tais como: identificar suposições, propriedades, estruturas e a organização de argumentos (HEALY; HOYLES, 2000). Uma possibilidade apontada pela literatura, e pelos próprios documentos apresentados anteriormente para superar esses desafios, é a de que discussões envolvendo provas se iniciem desde os primeiros anos de escolaridade. Dessa forma, os estudantes seriam incentivados a apresentarem justificativas para suas respostas e a defender seus pontos de vista, seja em uma conversa cotidiana, seja em uma atividade matemática (NASSER; TINOCO, 2003; BRASIL, 2018). Poderiam ampliar e aprimorar aos poucos, seus conhecimentos sobre provas matemáticas e sobre como elas podem ser apresentadas envolvendo aspectos gerais.

Nessa direção,

> O que importa, no que se prende com o ensino da demonstração não é, pois, submeter os alunos a uma racionalidade nova – numa etapa do seu percurso escolar que se considera adequada para o efeito – mas, antes ir criando, ao longo dos vários anos de escolaridade, condições para que a racionalidade própria de cada um vá evoluindo no sentido de haver a apropriação cada vez maior, de um sistema de validação particular característico da matemática (BOAVIDA, 2001, p. 15)

Essas premissas possibilitam colocar o aluno em uma posição central nos processos de ensino e de aprendizagem porque ele passa a ter a possibilidade de compreender que as provas matemáticas são, antes de qualquer coisa, uma organização específica desta disciplina, produto da atividade humana da qual ele também participa (HAREL; SOWDER, 1998).

1.2 Validações matemáticas: algumas possibilidades para a sala de aula

A maioria dos matemáticos não faz distinção entre os termos “prova”, “demonstração”, “prova rigorosa” ou, por exemplo, “prova formal”, porque no contexto matemático, geralmente todas essas expressões remetem a uma atividade que visa garantir ou comunicar a validade de uma conjectura ou de uma proposição, por meio de deduções, sendo o rigor e a formalidade, imprescindíveis. Quaisquer validações que não atendam a este critério, relacionado à formalidade, e que não tomem por base definições ou teoremas anteriormente provados, não são admitidas.

Na Educação Matemática, por outro lado, é comum que sejam atribuídos significados diferentes às expressões mencionadas, conforme escolhas e posturas teóricas que são adotadas por cada pesquisador. Consideramos que, do ponto de vista didático, uma “prova rigorosa” não deve ser a única aceitável e, por isso, assumimos um conceito de prova abrangente e que contempla aspectos relacionados ao esforço do aluno, por exemplo, em tentativas de defender seu ponto de vista em uma atividade matemática. Partilhamos do entendimento de que “[...] a prova deve ocupar seu lugar de direito na atividade matemática e ao mesmo tempo coexistir com outras formas de validação necessariamente decorrentes da argumentação ou mesmo da persuasão.” (BALACHEFF, 2019, p. 3). Essa postura possibilita considerar e validar justificativas produzidas por estudantes na especificidade de suas salas de aula, o nível de escolaridade em que se encontram, o conhecimento sobre o objeto matemático e a familiarização com validações.

Acrescentamos a esses pressupostos a ideia de que “[...] a melhor prova é aquela que também ajuda a compreender o significado do teorema que está sendo provado: para ver não apenas que é verdade, mas também para que é verdade.” (HANNA, 2000, p. 8). Em conformidade com estes ideias, a proposta desta investigação não é a de que os alunos demonstrem teoremas, nem que façam a diferenciação entre hipótese ou tese, por exemplo, tampouco que eles utilizem técnicas de demonstrações para realizar as atividades. É evidente a importância desses elementos, mas partimos do pressuposto de que, antes de serem introduzidas atividades dessa natureza, é muito importante que o aluno seja convidado à prática das justificações, em que validações, das mais simples até as mais complexas, façam parte do jogo no qual está inserido. A aprendizagem da demonstração seria um trabalho mais aprofundado e, nesse sentido, pode ser uma etapa posterior àquela que nós buscamos desenvolver, quando o aluno já reconhece a relevância e a necessidade de não se satisfazer com simples afirmações ou com fórmulas prontas. Compartilhamos do entendimento de Sales e Pais (2010), de que se deve priorizar uma abordagem na qual demonstrações sejam a culminância de um processo, pois

> Há, no nosso entender, alguns procedimentos que devem preceder a demonstração, procedimentos esses que são insuficientes em si mesmos para se constituírem em um final de processo e, por essa razão, possuem a flexibilidade necessária para conduzir à percepção da necessidade de um procedimento mais completo, que é a demonstração. Esses procedimentos pré-demonstrativos ao mesmo tempo que contribuem para o desenvolvimento da habilidade de demonstrar também contribuem para convencer da necessidade da demonstração (SALES, PAIS, 2010, p. 119).

Pensar em um trabalho com provas como um processo sempre em constituição, implica rever e considerar aspectos mais específicos dos alunos e do contexto. Por exemplo, não seria adequado impor demonstrações de forma prematura, sem estabelecer interlocuções com exemplos ou com significados relacionados às funções que ela pode assumir. Igualmente não seria adequado ignorar as dúvidas ou incertezas que um grupo de estudantes possa vir a ter em relação à necessidade de se produzir demonstrações para afirmações cuja validade já se tem certeza. Sendo assim, é importante que, para além de convencer, a prova seja utilizada em sala de aula com o intuito de explicar, compreender ou avançar em relação a uma ideia, problema ou resultado matemático (BOAVIDA, 2001). Considerando esse ponto de vista, o mais importante não é a demonstração em si ou sua escrita, mas o processo que essa construção envolve, ou seja, “[...] a atividade de produzir, é a sensibilidade ao seu interesse e necessidade, é a comunicação clara e correta das ideias matemáticas que estão em jogo." (BOAVIDA, 2001, p. 14).

Quando provas são apresentadas logo no início, restando ao aluno somente a ressignificação do conhecimento provado para resolver problemas ou exercícios, corre-se o risco de atribuir a ela um caráter impositivo, podendo encerrar a possibilidade de um debate sobre o objeto matemático em questão. Em outra direção, debater provas em si mesmas, como uma validação matemática possível para determinadas conjecturas, também é um movimento importante. Nesse caso, a participação dos alunos, suas considerações, apontamentos, sugestões ou avaliação são elementos fundamentais para uma construção mais significativa dos processos de validação.

Essas ações podem contribuir para a superação das demonstrações como obstáculos didáticos e sobre esse conceito, faremos uma breve reflexão: um obstáculo, especificamente, se relaciona com conhecimentos dos quais os alunos dispõem que podem dificultar de alguma forma a aprendizagem de outros. Trata-se de um conhecimento que é utilizado para lidar com um conjunto de situações, pois fornece resultados corretos ou vantagens em certo domínio. Em outros, mostra-se inadequado ou falso (BROUSSEAU, 1997), como é o caso da utilização de palavras para justificar afirmações, que é válido e adequado às séries iniciais do Ensino Fundamental, mas parece não ser suficiente conforme o nível de escolaridade avança.

Então, um erro, por exemplo, nem sempre é causado por simples desconhecimento ou incerteza, mas como um efeito de um conhecimento anterior que atendeu de forma satisfatória interesses momentâneos. Outro exemplo relacionado ao conceito de obstáculo é a não resolução de uma raiz quadrada de um número negativo por parte de um estudante que sempre ouviu que ela "não existe". Esses erros ou equívocos são constituídos por obstáculos. Os obstáculos de origem didática, especificamente, são aqueles que dependem de uma escolha ou de um projeto educativo (BROUSSEAU, 1986).

Outros exemplos de obstáculos relacionados à demonstração matemática e à Geometria, especificamente, foram identificados por Almouloud e Mello (2000) a partir da análise de algumas investigações. Dentre eles, pode-se citar a incompreensão da necessidade de provar o que parece óbvio, de origem epistemológica, a apresentação de demonstrações por analogia, em que o aluno repete procedimentos em situações semelhantes tendo dificuldades de compreensão, de origem didática e questões relativas à escrita de uma prova, de origem linguística.

Para evitá-los, é importante privilegiar a compreensão quando se trata de provas e demonstrações, mesmo que isso implique em rever, reorganizar ou reestruturar atividades de validação matemática, com base nos estudantes, no contexto e em seus conhecimentos prévios. De acordo com Hanna (2000), o principal papel da prova na sala de aula deve ser a promoção do entendimento e da aprendizagem, de maneira que uma validação rigorosa seja secundária à compreensão. Isso não quer dizer que elas não devam ser exploradas, porque se assim o fosse, não haveria consistência alguma em nosso propósito. Nosso desafio, enquanto professores e pesquisadores, direciona-se a encontrar maneiras convenientes de propor e de trabalhar com atividades visando à produção de provas, proporcionando experiências que favoreçam à compreensão por parte do aluno (HANNA, 2000).

Outra pontuação que pode ser relacionada ao entendimento da utilização de provas enquanto processo é a admissão de diferentes formas de validação que possam ser produzidas pelos estudantes. Não se pode, por exemplo, exigir que as demonstrações realizadas em sala de aula sejam da forma como determina a matemática acadêmica[3]. Na matemática escolar[4], embora exista a necessidade de validar conjecturas e de explicar o motivo pelo qual são verdadeiras, as produções e seus papéis em cada um dos contextos são muito diferentes. Isso porque,

> [...] o contexto da sala de aula, lugar de atuação do professor de matemática, evidencia a necessidade de uma visão da matemática fundamentalmente diferente em que [...] definições mais descritivas, formas alternativas (mais acessíveis ao aluno em cada um dos estágios escolares) **para demonstrações**, argumentações ou apresentação de conceitos e resultados, a reflexão profunda sobre as origens dos erros dos alunos, etc. se tornam valores fundamentais associados ao saber matemático escolar (MOREIRA; DAVID, 2016, p. 22. grifos dos autores).

Garnica (2002, p. 8), por sua vez, aponta que a prova rigorosa é aquela que estabelece a política geral do que é aceito como válido, sendo que “a comunidade dos profissionais responsáveis pela produção social que denominamos ‘Matemática’ produz

[3] Um corpo de conhecimentos segundo o que matemáticos compreendem (MOREIRA; DAVID, 2016).
[4] Associada ao conjunto de saberes produzidos e validados no âmbito da educação básica (MOREIRA; DAVID, 2016).

os discursos que veicula e aceita como válidos.”. Segundo o autor, o mesmo não acontece no âmbito da Educação Matemática, em que

> Constitui-se, portanto, um outro regime de verdade, o da Educação Matemática, no qual as concepções acerca das demonstrações (tidas, nesse regime, como etnoargumentações) são relativizadas e tomadas de modo muito mais amplo que na política geral de verdade da Matemática profissional (idem).

Assim, mesmo sendo a demonstração a ferramenta canônica de validação em Matemática, ela possui uma espécie de custo que a impede de ser a única forma de validação aceita em sala de aula. Na prática, os teoremas, por exemplo, são tidos como verdadeiros diante de atividades ou discursos que podem ser mais facilmente aceitos pelos estudantes em um momento específico e em um contexto também específico (BALACHEFF, 2019). Se tomarmos, então, a atividade de provar como uma atividade social e humana, em que a relação entre o aluno, o saber e o contexto em que ele se encontra, inter-relacionam-se de forma dinâmica, precisamos esclarecer este conceito. É o que faremos no tópico seguinte.

1.3 Raciocínio, processo e atividade de validação

Entendemos que um *raciocínio* seja uma atividade intelectual, nem sempre explícita, que trata da manipulação de uma informação dada ou adquirida com vistas à produção de uma nova informação ou relação (BALACHEFF, 2000). Assim, ações como resolver, argumentar, provar, demonstrar, comunicar e convencer oralmente ou por escrito fazem parte da habilidade de raciocinar (BALACHEFF, 2019). Quando utilizamos a expressão *raciocínio genérico*, estamos nos referindo a todo o tipo de raciocínio que contempla uma ou mais tentativas de caracterizar um elemento particular como representante de uma dada classe, utilizando-se de uma linguagem específica. *Raciocínio dedutivo*, por sua vez, está relacionado à apresentação de uma sequência de informações, organizada de maneira sequencial e coerente. Consideramos importante tratar do raciocínio porque, segundo Balacheff (2019), fazem parte dele atividades como: resolver, argumentar, provar, demonstrar, comunicar, convencer, seja oralmente ou por escrito – ações essas, que idealizamos nesta investigação.

Todo raciocínio realizado com a intenção de assegurar a validade de uma afirmação, proposição e/ou conjectura, caracteriza o que denominamos por *processo de validação*. Em outras palavras, um processo de validação é realizado quando um interlocutor busca evidenciar os motivos pelos quais acredita estar correto, podendo sua validação contemplar explicações teóricas ou não. Esse processo é fundamentalmente dialético, pois se baseia na análise das vantagens e das desvantagens de uma situação dada, bem como em suas possíveis contradições. Em um contexto de debates acerca da validade ou não de uma conjectura ou em um jogo de provas e refutações, por exemplo, essa dialética acaba sendo mais evidente (BALACHEFF, 2019). Desse modo,

> *Processo de validação* é um processo e, portanto, constituído por uma sucessão de ações, que tem o objetivo de dar aceitabilidade à validade ou à verdade de um enunciado, com o objetivo de dar uma prova ou uma demonstração; esse processo é complexo e torna-se dialético, no sentido de que o ator do mesmo deve se esforçar para encontrar preventivamente respostas a eventuais impugnações, respostas aceitáveis e convincentes (D'AMORE, 2007, p. 346, grifo do autor).

Então, para nós, a validação consiste em um processo abrangente, que contempla diferentes atividades dentre as quais estão a realização de testes, exploração e formulação de conjecturas, verificações, experimentações e generalizações. Todas essas ações, podem ser incentivadas pelo professor tendo em vista o desenvolvimento, a autonomia e a aprendizagem dos alunos em relação ao conhecimento matemático.

De forma semelhante, as *atividades de validação matemática* são entendidas nesta pesquisa como aquelas cujo intuito é o de que estudantes se engajem na busca por validar uma conjectura dada ou que venha a ser formulada por eles. Nesse caso, a palavra *conjectura* pode ser entendida como uma afirmação que ainda não foi provada, nem refutada do ponto de vista dos alunos. As atividades de validação podem ser mais abertas, como em: "Investigue a paridade do quadrado de um número", ou mais direcionadas, como é o caso do questionamento: "É verdade que o quadrado de um número ímpar é sempre ímpar?". Essas atividades podem ainda envolver a análise de uma prova já produzida, a generalização de padrões ou, simplesmente, uma investigação sobre a validade, ou não, de uma resposta obtida para um problema.

Dadas essas características, e com base na tipologia de provas de Balacheff (1987), apresentamos ao menos três diferentes formas de validação possíveis de serem apresentadas pelos alunos, conforme nossa perspectiva teórica, cada uma com suas especificidades: *explicação, prova e demonstração*, conforme descrevemos na sequência.

Explicação: discurso que permanece ao nível do sujeito que o profere, realizado na tentativa de convencer ou de tornar compreensível a um outro, a validade da afirmação dada. Uma explicação possui forte relação com o conhecimento do sujeito que constitui sua racionalidade, ou seja, suas próprias regras de decisão da verdade que podem ter origem em suas opiniões, crenças ou saberes, mas que, em todo caso, organizam-se a partir de uma estrutura, da qual possibilita a tomada de decisão (BALACHEFF, 2000). Aquele que explica já está convencido sobre a veracidade do que afirma, ainda que não seja de fato verdade, visto que a informação pode ser discutida, aceita, refutada ou adaptada.

Prova: discurso de caráter social aceito por um grupo específico ou por uma comunidade em determinado momento, também específico. A validade do que está em jogo pode ser objeto de discussão em que se pretenda determinar um sistema comum de validação, aceito por todos, passando o conhecimento a ser aceito por outros além daquele que apresenta a prova. Dado esse valor relativo, o que pode ser considerado como sendo uma prova para um grupo, pode não o ser para outro. Além disso, com o tempo, a prova e o sistema de validação comum acordado podem evoluir de acordo com o avanço do conhecimento sobre os quais esses processos se apoiam.

A relação entre a argumentação e a produção de provas matemáticas tem sido estudada por pesquisadores como Duval (2006) e Pedemonte (2000). Esta última autora, considera, por exemplo, a ideia de uma unidade, um processo entre a argumentação e a prova. Nesse caso, existiria um sistema de referência comum entre ambos os tipos de validação, do qual fazem parte uma linguagem, como, por exemplo, textos, desenhos ou gestos que dizem respeito a um sistema de referência comum.

Por outra perspectiva, Duval (2006) defende que essas validações são discursos que operam com lógicas diferentes e que se afastam um do outro, dada organização dedutiva, características sociais e linguísticas específicas de cada um deles. Segundo o autor, admitir uma passagem linear entre argumentações e demonstrações implicaria admitir que estas últimas seriam elaboradas a partir de raciocínios semelhantes àqueles utilizados em uma linguagem natural.

Sobre a relação existente entre argumentação e provas, Balacheff discute que

> [...] a partir da perspectiva de ensino e de aprendizagem, eu não chego a defender nem a ideia de continuidade nem de ruptura entre argumentação e prova matemática (ou prova em matemática), mas a proposição do reconhecimento da existência de uma relação que é complexa e é parte do significado de ambas: argumentação constitui um obstáculo epistemológico para aprendizagem da prova matemática e mais geralmente da prova em matemática" (BALACHEFF, 1999, s/p).

Dessa maneira, portanto, defendemos que não se trata apenas de continuidade ou apenas de ruptura, mas sim, de um processo que envolve ao mesmo tempo continuidades e rupturas, levando-se em conta o entendimento dos estudantes, seu grau de convencimento, o raciocínio, a linguagem e a situação na qual eles se encontram.

Nesse processo de continuidades e de rupturas, diferentes tipos de provas podem ser apresentados pelos alunos considerando o status do conhecimento envolvido e a natureza do raciocínio subjacente. Balacheff (1987) destaca o *empirismo ingênuo*, a *experiência crucial*, o *exemplo genérico* e a *experiência mental* como uma classificação possível para provas que possam surgir.

Esta tipologia proposta pelo autor, portanto, permite considerar diferentes provas, desde aquelas em que instrumentos de medida ou representantes particulares são utilizados pelos alunos como forma de garantir a veracidade de uma afirmação, até as demonstrações com rigor matemático. Além disso, como dissemos, a relativização do conceito de prova parece ser ainda mais razoável quando se trata da Educação Básica, porque possibilita aos alunos a discussão de conjecturas a partir dos conhecimentos e recursos que eles mesmos possuem.

Os dois primeiros tipos de prova (empirismo ingênuo e experiência crucial) pertencem ao nível pragmático, cuja característica geral é a produção de validações fundamentadas em eventos singulares. Em outras palavras, são aquelas provas apoiadas em exemplos, casos particulares e observações. Do ponto de vista da Matemática Acadêmica, elas não nos permitem garantir a validade de uma afirmação, pois sua condição de prova é reconhecida apenas por aqueles que assim a consideram.

Os dois outros tipos de prova (exemplo genérico e a experiência mental) compõem o nível intelectual em que é possível identificar a presença de generalizações, mesmo que em seu estado embrionário. Nesse caso, as conclusões se apoiam em propriedades, relações, além da tomada de consciência do caráter genérico das situações consideradas.

A linguagem utilizada e sua evolução – da linguagem natural à utilização de símbolos matemáticos –, também caracteriza a passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais. Destaca-se que

> [...] há uma ruptura fundamental entre os dois primeiros tipos de prova e os dois restantes. De fato, não se trata de 'mostrar' que a proposição em questão é verdadeira porque 'funciona' para o exemplo genérico e para a experiência mental, mas para estabelecer o caráter necessário de sua validade, apresentando as razões que a justificam. Isso constitui uma mudança radical na racionalidade dos estudantes que defendem estas provas (BALACHEFF, 2000, p. 26).

A ruptura à qual o autor se refere, relaciona-se com uma mudança na maneira como se observa e se formula a validade de uma conjectura e caracteriza-se pela passagem de um discurso fundamentado em verificações (nível de provas pragmático), para um discurso pautado pela "razão", pela teoria que envolve o objeto matemático (nível de provas intelectuais). Nesse sentido, a natureza das concepções que os estudantes possuem em relação ao conhecimento matemático e os meios de linguagem, dos quais dispõem, podem ser obstáculos frente à essa mudança (BALACHEFF, 2000).

Embora os tipos de prova possam ser classificados em dois níveis com características predominantes, conforme descrevemos, cada um deles possui características específicas, quais sejam:

- Empirismo ingênuo: validação produzida a partir da observação de um pequeno e restrito número de casos e/ou exemplos particulares. Para exemplificar, podemos citar um aluno que conclui que as raízes de uma equação polinomial do 2° grau sempre serão iguais quando o valor do discriminante for zero, apenas porque encontrou esse resultado em poucos exercícios que resolveu.

- Experiência crucial: validação produzida a partir da observação e da análise de algum caso em particular. A diferença entre este tipo de prova e o empirismo ingênuo é o não convencimento por parte do sujeito somente com o teste e com a verificação de alguns exemplos particulares. Ele considera, portanto, o que Balacheff (1987) denomina como problema da generalização, uma vez que sente a necessidade de incluir um caso que não reconhece como provável em suas explorações. Tomemos, como exemplo, o caso do estudante que desenha vários triângulos e encontra resultados muito próximos de 180° para a soma das medidas de seus ângulos internos. Ele elabora uma conjectura possível sobre o conhecimento em jogo, mas ainda está com dúvidas sobre a validade. Nesse momento, o aluno se vê diante de um problema diretamente relacionado às formas possíveis de se generalizar a situação dada e concluir a veracidade ou não da afirmação. A partir daí a necessidade de verificar as medidas dos ângulos internos de um ou mais triângulos muito diferentes dos demais para ter certeza de sua resposta, por exemplo, verificando um triângulo obtusângulo cujos ângulos têm medidas bem pequenas.

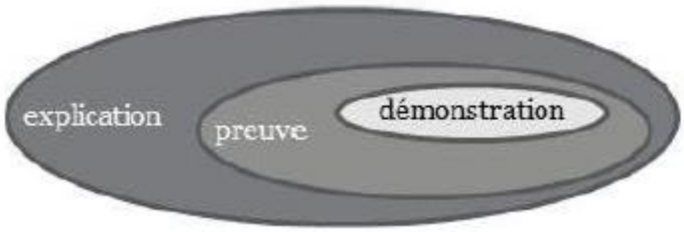
- Exemplo genérico: validações cujo raciocínio ocorre a partir de um exemplo ou de um caso específico em que o indivíduo o reconhece como representante de uma dada classe de objetos. A partir dele, podem-se produzir relações, transformações ou operações, contudo, sem se desprender completamente desse representante. Seria este o tipo de prova caso um aluno que tentasse resolver o problema: "A soma de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 3?", e apresentasse a justificativa da validade raciocinando sobre um caso particular, por exemplo, "se somarmos 50+51+52 o resultado é igual a 153 que é 3x51, ou seja, o resultado será sempre igual a três vezes o número médio". A questão crucial é que essa generalização tem no(s) exemplo(s) seu apoio.

- Experiência mental: validações em que ocorre uma interiorização no que se refere a propriedades, ou relações, sendo este modo de conhecimento utilizado pelo indivíduo para formular os motivos pelos quais uma dada afirmação é válida sem a necessidade de apoiar suas convicções sobre um representante específico. Um exemplo desse tipo de prova seria o caso do aluno que busca compreender se a soma de dois números pares será sempre par. Percebendo que todos eles são múltiplos de dois, de forma direta e sem alusão a exemplos, ele apresenta uma escrita na forma literal geral de um número par, representando esses dois números pares por $2a$ e $2b$ $(a, b \in \mathbb{N})$ e realiza o cálculo literal da soma deles, evidenciado que o 2 é fator comum e concluindo que essa soma será sempre um número par.

Demonstração: são determinados tipos de prova aceitos pela comunidade de matemáticos e que seguem uma estrutura específica, uma sequência de deduções e regras de encadeamento institucionalizadas. Trata-se de um tipo particular de prova em que um enunciado é reconhecido como verdadeiro se deduzido a partir daqueles que o precedem, obedecendo procedimentos lógicos aceitos pelos matemáticos.

Da mesma forma que a demonstração pode ser considerada como uma prova específica, no Modelo de provas de Balacheff, a prova também é um discurso explicativo que passa a ser socialmente acordado. Então, poderíamos representar essas validações de forma inclusiva, conforme figura 1.

Figura 1 – Diagrama envolvendo conceitos de explicação, prova e demonstração



Fonte: Balacheff (2019, p. 8)

É importante pontuar que “[...] essas relações entre explicação, prova e demonstração foram esclarecidas da perspectiva do indivíduo envolvido na solução de um problema e na validação de sua solução.” (BALACHEFF, 2019, p. 8), pois outro esquema é proposto pelo autor, em referência à esfera pública, considerando o debate.

Apesar de existir uma hierarquia entre os tipos de provas no modelo proposto por Balacheff, com base no conhecimento e na generalidade possível de ser observada, cabe ressaltar que apenas a escrita de uma prova não é suficiente para determinar em que nível ou tipo ela se encontra, sendo muito importante uma investigação acerca do processo em que se deu sua produção. Por exemplo, a escrita final de uma prova que é aparentemente classificada como empirismo ingênuo, pode contemplar um pensamento divergente, em que o aluno realizou um cálculo mentalmente ou em um rascunho e verificou a validade da conjectura para um caso específico para, só então, ter certeza de sua resposta. Dadas essas condições, não teríamos um empirismo ingênuo, mas sim, uma experiência crucial. Certos de que diversos fatores podem escapar à análise das produções dos estudantes, consideramos importante que seja tomado como referência o máximo de informações possível.

Na esteira desse pensamento, Balacheff (2000) pontua que essa dificuldade em relação à classificação do nível de prova se acentua quando se trata de uma experiência mental, pois se pode recorrer a uma linguagem familiar, utilizando-se de nomes ou de palavras que remetem a objetos específicos, que são características presentes em um exemplo genérico. Então, "[...] o conhecimento do processo de produção de provas é o que permite tomar uma decisão sobre sua validade e nível. Esse também é o caso da distinção entre empirismo ingênuo e o uso do exemplo particular." (BALACHEFF, 2000, p. 173). Nesse último caso, quando se utiliza de um teste em específico para provar a validade de uma conjectura, é importante observar seu papel. Ou seja, se o exemplo utilizado foi um meio para tomar uma decisão ou uma forma de resolver um conflito entre os envolvidos, por que o significado da experiência crucial pode ser diferente nestas situações.

Assim, uma prova no sentido em que a consideramos, pode contemplar exemplos, testes ou um discurso em linguagem natural, em que o aluno escreve com suas palavras como se estivesse contando para alguém sua justificativa. Este último aspecto é bastante comum de se encontrar em validações produzidas por alunos do Ensino Fundamental e até mesmo do Ensino Médio, como nos mostraram algumas investigações (ARAÚJO, 2007; MELLO, 1999), devido às experiências que eles possuem em relação às práticas argumentativas, considerando a forma como eles validam seus conhecimentos no dia a dia e, também, em outras disciplinas. Além desse, podem estar presentes: números, símbolos, figuras, gráficos, enfim, todo e qualquer recurso que o aluno consiga ressignificar e apresentar em sua resposta.

Além do papel do exemplo que venha a ser utilizado pelos estudantes, outra forma de observar se o tipo de prova pertence ao nível intelectual, mesmo que se tenha feito uso de elementos característicos de provas pragmáticas, é a observação da linguagem, que deixa de ser apenas uma maneira de realizar uma comunicação, e passa a incluir uma forma de expressar um raciocínio teórico (BALACHEFF, 1987; 2000). Assim, pode-se observar uma descontextualização, ou seja, uma renúncia ao objeto em questão, para se acessar uma categoria; uma despersonalização em que a ação realizada pode ser independente do autor e, então, o resultado não depende exatamente de quem o produz, e uma destemporalização, em que as ações estão isentas das datas e do período de duração.

Como já pontuado, não há uma ordem ou uma evolução linear do sujeito no que se refere aos tipos e níveis de provas. Também é possível que sejam apresentados mais de um tipo de prova para um mesmo problema (BALACHEFF, 2019). Sendo assim, e considerando o entendimento de que o processo de produção de provas pode ser constituído por continuidades e rupturas, é possível que um aluno apresente uma prova do tipo experiência crucial para responder determinada atividade e que, logo em seguida, apresente uma validação classificada como empirismo ingênuo. Essa questão é subjetiva ao mesmo tempo que depende de outros estímulos, tendo-se que considerar a situação como um todo e a análise que o aluno faz dela (BALACHEFF, 1988). Por exemplo, ele pode estar tão convencido da veracidade de uma conjectura, que realiza um ou dois testes apenas para complementar a resposta, ou pode engajar-se e apresentar um discurso elaborado em decorrência do incentivo de um professor ou por se tratar de uma atividade avaliativa.

Dessa maneira, a presença ou não de um processo de validação pode depender de uma série de fatores relacionados à situação, na qual os indivíduos, especificamente os alunos, encontram-se. Em outras palavras,

> A ausência de todo o processo e validação ou a colocação em prática de um processo solidamente fundamentado na teoria está relacionado com a análise que o indivíduo faz da situação. Sua avaliação do **risco** e da decisão que deve tomar possui um papel central neste processo. O processo de validação está assim ligado a finalidades práticas: proporciona as garantias necessárias para uma ação, ou seja, a ação de decidir sobre a veracidade de uma afirmação. Quanto ao uso de diferentes níveis de validação, o processo responde a uma **economia da lógica** [...] (BALACHEFF, 1987, p. 6, grifos do autor).

As distinções entre explicação, prova e demonstração evidenciam uma dimensão social do processo de validação, que resulta de processos particulares. Apesar do exposto, o contexto de uma situação em si não é condição necessária para que o aluno, por exemplo, produza validações. Isso porque pode acontecer que, diante do risco de uma indefinição ou incerteza, o estudante produza e estabeleça determinadas condições para a validade do que está em jogo – ações essas, análogas a um processo de produção de provas. Por outro lado, não é condição suficiente porque não leva em consideração a “[...] possibilidade de alguns estudantes se recusarem a participar de atividades que envolvem debate." (BALACHEFF, 1987, p. 9). Pode-se acrescentar ainda que a evolução dos conhecimentos dos alunos ocorre segundo processos complexos e que, portanto, seria um equívoco explicar essas evoluções somente por meio de interações sociais tidas com o meio. Nesse sentido, os alunos podem interiorizar rapidamente situações que lhes interessam e atuar com suas representações internas (BROUSSEAU, 1986).

Esses aspectos são considerados por Balacheff (2019) que sugere uma análise do processo de validação sob, ao menos, quatro dimensões: os conceitos mobilizados pelos estudantes; a linguagem e como ocorre sua operacionalização; a situação (no sentido de Brousseau, 1996), em que situações de validação regularão uma lógica da economia e o risco de convencimento; e o contrato didático.

Então, nem aumentar a ocorrência de situações que exigem validação, nem forçar os alunos, seriam suficientes para garantir a produção de provas (BALACHEFF, 1987). Em resumo, o fato de cotidianamente cobrar dos estudantes justificativas para todas as suas resoluções, ou de exigir esta ação em atividades avaliativas, pode contribuir para a criação e aperfeiçoamento de um hábito. Porém, isso não garante que provas sempre sejam produzidas, porque essa é uma ação que depende em parte do estudante, de modo que ele pode se recusar a participar desse "jogo", não se engajando em um processo de validação. Isso significa que nós, como professores, podemos, por exemplo, investir em situações que acreditamos serem potencialmente favoráveis à produção de validações, mas a necessidade de produzi-las somente faz sentido em relação ao indivíduo. Ademais,

> [...] a interação social apresenta uma complexidade particular, notadamente, porque é o lugar do confronto de universos linguísticos a priori diferentes, de sistemas de conhecimento não unificados: por natureza, a comunicação implica a interpretação mútua dos sistemas cognitivos presentes. Em particular, a produção de provas exige levar em consideração os interlocutores para finalmente construir um sistema de validação comum, pelo menos localmente, com referência às proposições debatidas. (BALACHEFF, 1997, p. 9).

Reforçando essa ideia, Brousseau (1996) considera que as atividades sociais e culturais, que condicionam tanto a criação, quanto o exercício e a comunicação do conhecimento, especialmente do conhecimento matemático, são acentuadas em uma situação de aprendizagem. Desse modo, antes de propor uma evolução, é importante que o nível de validação proposto tenha relação com o que já é conhecido do estudante, isto é, com um contexto em que sua atuação seja possível (BALACHEFF, 1987). Esse nível possui relação direta com a natureza do conhecimento matemático que o aluno possui a fim de que, a partir dele, se possa produzir outras relações. A racionalidade, cuja ação está relacionada ao emprego do raciocínio e da própria razão, é fundamental em todo processo de prova, porque possui em si mesma a prerrogativa da decisão. O emprego da validação, como já mencionamos, não é independente do contexto, podendo assumir diferentes características a depender do que se trata e do campo de atuação, como o político, econômico, filosófico ou até mesmo no sentido cotidiano (BALACHEFF, 2004). Na disciplina de Matemática, alguns autores têm discutido possíveis significados que uma prova pode assumir no contexto de sua realização, as quais são apresentadas no tópico seguinte.

1.4 Possíveis respostas para os questionamentos do porquê e do para que validar

Para Zaslavsky *et al.* (2012), uma das razões pelas quais devemos ensinar provas aos alunos é a expectativa de que eles possam vivenciar experiências que se assemelhem às dos matemáticos, de forma que tenham acesso ao conhecimento e aos motivos pelos quais informações relativas a ele são válidas. Hanna (2000) acrescenta que, ao tentar estabelecer o papel das provas em sala de aula, seja explorada uma gama de funções que ela desempenha na prática da Matemática. Entretanto, uma das principais questões que nós, educadores, enfrentamos ao desenvolver um trabalho com validações em sala de aula é a incompreensão de estudantes em relação à necessidade de se apresentar provas para as conjecturas discutidas (DE VILLIERS, 2001; ZASLAVSKY *et al*. 2012).

Inevitavelmente, os alunos possuem noções sobre Matemática e sobre o que seja o “fazer matemática”. Da mesma forma, possuem experiências que envolvem argumentações sobre a veracidade ou falsidade de afirmações que, geralmente, contemplam poucos aspectos teóricos. Até determinado momento, por exemplo, o uso de palavras e/ou exemplos se mostra suficiente para justificar conclusões. Entretanto, quando se passa a trabalhar em uma evolução nesse sentido, tendo o aluno que apresentar provas de nível intelectual, parece haver uma mudança de uma posição orientada por um tipo de lógica da prática, para uma posição orientada por uma especificidade de uma teoria (BALACHEFF, 2010). Em meio a esse processo,

> [...] os alunos muitas vezes (a) não veem nenhuma razão real para desenvolver uma prova no contexto de atividades específicas que exigem uma prova (de um ponto de vista matemático) ou (b) têm alguns equívocos profundamente enraizados sobre o que significa validar afirmações matemáticas (por exemplo, generalizações). O primeiro reflete uma falta de apreciação pela necessidade de prova em nível local, ao passo que o último reflete uma falta de apreciação pela necessidade mais ampla de prova como uma construção matemática (ZASLAVSKY *et al*. 2012, p. 223).

Parte dessas razões são propostas por De Villiers (2001), à medida que o autor apresenta possíveis funções que a prova pode assumir nos processos de ensino e de aprendizagem. Uma delas é a de *verificação* em relação à veracidade de uma conjectura, isto é, produz-se uma prova para verificar, ou para convencer a si mesmo, ou a outrem, que a afirmação dada é, de fato, verdadeira. Outra função que a prova pode assumir é a de *explicação,* pois, mesmo diante de construções, medições rigorosas ou de experimentos convincentes – como aquele em que se pinta os ângulos internos de um triângulo qualquer, recontando-os em seguida para juntá-los em torno de um único vértice – essas ações não fornecem uma explicação sobre o porquê são verdadeiras (De VILLIERS, 2001).

O autor destaca ainda a função de *sistematização* que engloba ideias como: organizar resultados, unir e simplificar teorias ou fornecer uma perspectiva geral sobre o tópico estudado. Uma prova também pode estar relacionada à *descoberta*, ou seja, à invenção de novos resultados a um *desafio intelectual* em que os alunos realizam provas como uma forma de realização pessoal, pois o que está em jogo não é a validade em si, mas a capacidade de realizá-la. Além disso, há a possibilidade da *comunicação* em que se estabelece um discurso comum entre os sujeitos envolvidos.

> A tônica é colocada, portanto, no processo social de comunicar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade. A demonstração, como forma de interacção social, também envolve, portanto, uma negociação subjectiva não apenas dos significados dos conceitos em jogo, mas também implicitamente dos critérios relativos ao que é um argumento aceitável. Por sua vez, a filtragem social de uma demonstração através destas várias comunicações contribui para o seu refinamento e a identificação de erros, bem como por vezes para a sua rejeição devido à descoberta de um contraexemplo (De VILLIERS, 2001, p. 35).

Há, além disso, outras respostas possíveis ao questionamento “por que validamos?”, como a necessidade de *compreender* um conhecimento (REID, 1995), a *necessidade de definições melhores,* ou *produzir algum algoritmo útil* (HANNA, 2000).

No entanto, mesmo com tais possibilidades, a necessidade de se realizar validações deve, ou pelo menos deveria, ser intrínseca ao aluno. Nós professores, podemos pensar e tentar proporcionar condições e situações potencialmente favoráveis à produção de provas, mas isso não garantirá que elas sejam elaboradas. Questões relacionadas ao contrato didático estabelecido em sala de aula, às variáveis didáticas da situação, ao conhecimento do aluno sobre o conteúdo ou sobre o significado de provar podem influenciar na produção de provas dos estudantes. Conforme Balacheff (2019),

> Em geral, e, portanto, para o aluno, reconhecer a necessidade de provar depende de avaliar os desafios do contexto da atividade. Pode ser a resposta a uma liminar, a uma declaração do problema apresentado durante um exame, ou atestar o endosso da responsabilidade por uma tomada de decisão, resolução de um problema ou conclusão de uma tarefa. As duas questões são indissociáveis em sala de aula pela própria natureza da relação entre os alunos e o professor, mas o respetivo peso da liminar e sua necessidade podem ser ajustados agindo sobre as características da situação (BALACHEFF, 2019, p. 21).

Então, a título de ilustração, quando um aluno está diante de uma atividade que exige uma justificativa, e responde objetivamente “sim” ou “não”, não se preocupando em validá-la, nosso direcionamento pode se voltar em torno dos motivos pelos quais isso ocorreu. O aluno já está tão convencido de que sua resposta está correta que dispensou a validação? Fez a suposição de que o professor não iria cobrar uma justificativa e por isso não a apresentou? Identificou que a atividade em questão não tem tanta importância ou não é tão interessante quanto outras? O professor fez um questionamento ou interferência que o fez desistir? Não está em um bom dia e pretende terminar suas atividades o quanto antes? Ele não justificou por que não sabe o que precisa fazer? Ele não conhece todos os conceitos envolvidos na situação e respondeu aleatoriamente? O horário da aula estava acabando e ele não teve tempo de se dedicar à construção de uma prova? Todos estes questionamentos podem auxiliar na compreensão do porquê não houve, de forma explícita, a apresentação de uma validação matemática.

Outros autores que se dedicaram ao estudo de possíveis funções ou motivações para provas que venham a ser produzidas por estudantes foram Harel e Sowder (1998;

2014). Ao analisar diferentes validações, discutem o que chamam de *esquema de prova*. De acordo com eles, "[...] o trabalho com provas e esquemas de provas é usado em um sentido psicológico, mais amplo de justificações e não no sentido restrito de provas matemáticas. (HAREL; SOWDER, 2014, p. 670). Um esquema de prova, portanto, é composto por aquilo que representa provar ou convencer para uma pessoa ou para um aluno.

Um *esquema de prova baseado em elementos externos*, é aquele em que o estudante se utiliza de recursos tais como o livro didático, o professor ou algum colega, tanto para se convencer, quanto para convencer outrem. Quando um aluno afirma que a conjectura é verdadeira por conta de o professor ter confirmado sua validade, pode-se dizer que o esquema em questão foi mobilizado. Outro exemplo da mobilização desse esquema é a crença de que uma prova é válida por conter "letras", como se elas fossem independentes de qualquer sentido.

Harel e Sowder (2007) apresentam, também, o *esquema de prova empírico*, que é aquele em que validações são fundamentadas em exemplos ou desenhos e o *esquema de prova analítico*, o qual se relaciona com argumentos dedutivos, formais, que envolvem raciocínios abstratos. Devido a possibilidade desses dois último esquemas se relacionarem com os níveis de prova pragmático e intelectual de Balacheff (1987)[5], respectivamente, em nossas análises, consideraremos eventualmente o esquema de prova baseado em elementos externos, porque apresenta uma possibilidade diferente de os alunos apresentarem suas explicações, isto é, fundamentados em elementos que não necessariamente se relacionem ao objeto matemático em discussão.

Da mesma maneira que os estudantes podem se utilizar de elementos externos para validarem suas conjecturas, é importante considerar a possibilidade de o próprio processo de produção de validações ocorrer em atendimento a uma demanda externa. Este é o caso quando os estudantes produzem provas apenas porque o professor pediu e não porque reconhecem que ela é necessária em sua prática. A esse respeito, poderíamos nos perguntar: no âmbito da sala de aula não seriam então, todas as provas produzidas em decorrência de um pedido do professor?

Zaslavsky *et al.* (2012) analisam cinco categorias em que a necessidade está mais relacionada ao nível individual do estudante, discutindo possibilidades de resposta para o

[5] Como pode ser observado com melhor clareza em ORDEM (2015).

questionamento acima. A primeira delas é a necessidade da *certeza* quando ele busca verificar se uma afirmação é verdadeira ou falsa. Para os autores,

> A primeira necessidade, com certeza, é o desejo humano de verificar uma afirmação. Embora a verificação seja um dos papéis centrais da prova, os alunos não veem necessidade de prova matemática, porque sua necessidade de certeza é pessoal, no sentido de exigir um convencimento "pessoal" em vez de 'matemático'. Para muitos alunos, o trabalho empírico é pessoalmente convincente. (ZASLAVSKY *et al.*, 2012, p. 220).

Esse aspecto é importante porque, para os alunos em geral, exemplos parecem ser mais convincentes do que provas intelectuais. Tanto que, em muitas situações, "[...] a demonstração não é um requisito necessário para a convicção – pelo contrário, a convicção é mais frequentemente um pré-requisito para a procura de uma demonstração." (DE VILLIERS, 2001, p. 32). Isso pode fazer com que eles permaneçam sem produzir validações genéricas pois são mais complexas e porque nem sempre a forma pela qual elas devem ser produzidas está clara. Nesse caso, é inegável a centralidade do papel do professor que, aos poucos, pode desconstituir essa narrativa, por meio de questionamentos que coloquem em evidência certezas dos alunos. A necessidade de certeza também é evidenciada por Balacheff (2000) ao discutir diferenças entre os níveis de prova. Segundo o autor, a passagem entre os níveis tem relação com "[...] uma verdadeira mudança de problemática. Ou seja, da mesma maneira que se vê e se formula o problema da validade de uma afirmação. A fonte dessa mudança pode estar no desejo de eliminar uma incerteza." (BALACHEFF, 2000, p. 174). Dessa forma, trabalhar com a incerteza, e com o que Zaslavsky *et al*. (2012) denominam de conflito cognitivo, pode motivar uma mudança de pensamento sobre o conceito em jogo, podendo contribuir para a necessidade da realização de validações.

A segunda categoria sinalizada é a necessidade por *causalidade*, é muito próxima da função da prova para explicação. Nesse caso, o aluno está convencido sobre a validade de seus resultados, e seu foco se volta para a obtenção de explicações sobre o porquê. Esse tipo de necessidade pode variar de pessoa para pessoa, assim como de contexto para contexto (ZASLAVSKY *et al.*, 2012).

As demais categorias apontam a necessidade de *cálculo*, *comunicação* e *estruturação*. Elas geralmente se relacionam e ocorrem de forma simultânea. Para comunicar ideias, é necessária uma estrutura organizada a fim de que o outro compreenda o raciocínio utilizado. Quando se trabalha com provas matemáticas como uma maneira de conhecer, essa comunicação se relaciona com a necessidade de calcular e de estruturar.

Retomando o questionamento que realizamos anteriormente, as produções dos estudantes geralmente se relacionam com alguma situação proposta pelo professor em que a validação está presente de forma explícita ou não. Na relação didática entre professor, aluno e saber, é importante ter consciência de que as discussões em sala de aula não são aleatórias, pois possuem uma finalidade de aprendizagem da qual ambos precisam estar dispostos a aceitarem e a participarem. Esses aspectos serão mais bem explorados nas seções 2.2 e 2.3 ao discutirmos os papéis do professor, do aluno e o contrato didático, na perspectiva de Brousseau (1996; 1997; 2008).

1.5 Considerações

As ideias explicitadas neste capítulo nos mostram que existem orientações para um trabalho com provas matemáticas, podendo ser utilizadas desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Aos poucos, elas devem envolver aspectos gerais e as limitações de uma prova empírica podem e devem ser exploradas.

A partir de Balacheff (1987; 2000; 2019) apresentamos o entendimento de prova assumido nesta pesquisa, que, por sua vez, é relativo e contempla desde validações mais simples, baseadas em exemplos, até demonstrações. Essa concepção permite validarmos e classificarmos produções que venham a ser desenvolvidas por estudantes de qualquer nível de ensino.

As discussões apresentadas nos ajudam a pensar e a considerar possibilidades das provas matemáticas junto aos estudantes, como a explicação de propriedades ou a verificação de conjecturas. Embora elas possam assumir esses papéis, a necessidade de apresentar uma prova é, em partes, do aluno, podendo ser incentivada pelo professor ou pela situação em si mesma. Essa ideia pode ser construída junto dele, ao longo das interações e das propostas realizadas.

Este capítulo subsidia tanto a elaboração de nossas atividades, em que buscamos contemplar funções da prova, quanto as nossas análises, pois, a partir do Modelo de Tipologia de Provas de Balacheff, podemos estabelecer parâmetros para classificação das validações produzidas pelos alunos de 9° ano com os quais trabalhamos, conforme nosso objetivo específico de classificar provas matemáticas que foram produzidas por eles.

2. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: UMA VISÃO SOBRE A APRENDIZAGEM

[...]
E ela pensa que quando todas as sirenas
Todas as buzinas
Todos os reco-recos tocarem
[...]

Acreditamos ser fundamental que o aluno desenvolva atividades que coloquem em evidência especificidades do processo de produção matemática, quais sejam: investigar, formular, testar, medir, observar, conjecturar, verificar, repensar, analisar, validar, refutar, entre outras. A Teoria das Situações Didáticas (TSD) nos ampara nesse sentido, pois nos ajuda a compreender e a explicitar nosso entendimento sobre os processos de ensino e de aprendizagem e sobre a organização de situações didáticas, como também, as relações que se estabelecem entre aluno, professor e saber.

Com este capítulo, intencionamos apresentar os conceitos da Teoria utilizados ao longo da constituição desta pesquisa, os papéis do aluno e do professor e como Brousseau (1986; 1997; 2008) compreende relações entre esses papéis. Eventualmente, chamamos para o diálogo outros autores que possam contribuir com os conceitos em questão.

2.1 Meio, Situações didáticas, Situações adidáticas: conceitos fundamentais

Brousseau (1986; 1997; 2008) considera a aprendizagem como um processo que contempla uma adaptação e uma aculturação por parte do sujeito. A primeira se refere a um *meio*, que é fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios, e a segunda, às propostas de uma instituição – no sentido de apropriar-se de uma nova cultura. Nessa perspectiva, um processo de aprendizagem pode ser caracterizado por um conjunto de situações que frequentemente conduzem à modificação de comportamentos apresentados pelos alunos (BROUSSEAU, 1986; 1997). Essa modificação pode representar a aquisição da aprendizagem, pois se entende que

> O aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como acontece com a sociedade humana. Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem (BROUSSEAU, 1986, p. 49).

No meio, ocorrem as interações do sujeito com o saber matemático e, por isso, ele deve ser antagônico, contraditório, autônomo, causador de desequilíbrios e de desestabilizações, sendo necessário adaptar-se. A organização do meio, portanto, tem fundamental importância na medida em que ele deve ser pensado para gerar novas possibilidades de aprendizagens. A forma de interação de um sujeito com o meio não é única, assim como o próprio meio também não o é. Conforme as relações e as interações ocorrem, também ocorrem modificações. É o caso quando um professor ou um aluno toma decisões conforme conhecimentos, regras ou informações que recebe e a maneira pela qual interpreta (BROUSSEAU, 2008). Dessa maneira, o meio não é estável, ao contrário, modifica-se conforme as ações e decisões daqueles que o compõem.

A TSD se ocupa do estudo das situações didáticas nas quais ocorrem interações entre o professor, o aluno e o saber em jogo, e uma de suas prerrogativas é a de que o aluno aprende por meio da adaptação e da regulação ao meio em que se encontra (BROUSSEAU, 1998). O conceito de *situação*, por conseguinte, pode ser descrito como um modelo de interação do sujeito com o meio no qual está inserido. Essa interação implicará um conhecimento que servirá como recurso do qual o sujeito irá dispor para atingir um novo estado de conforto. Quando ocorre, por parte do estudante, a tomada de consciência da própria capacidade de controlar uma situação ou meio, podemos nos referir a esta tomada de consciência como conhecimento do aluno (BROUSSEAU, 1997; 2008).

Uma *situação* se torna *didática*, quando há a intenção, por parte de um dos interlocutores de modificar, de alguma forma, o que o outro conhece. De forma mais específica, é aquela na qual há uma intenção por parte do professor, em proporcionar a aprendizagem de determinado conteúdo para um ou mais alunos. A situação didática está, portanto, relacionada com o "entorno do aluno" e com aquilo que contribui com sua formação matemática. Por isso, aquele que possui a intenção de ensinar está envolvido em um jogo de interações com aquele que está a aprender e com os problemas que lhe são propostos. Nas palavras de Brousseau (1986),

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre o aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 1986, p. 8).

Uma situação particular em relação à situação didática é o que Brousseau (1996) chama de *situação adidática*. As situações adidáticas têm o objetivo de provocar no aluno uma interação mais independente e mais produtiva quanto for possível, devendo a própria dinâmica envolvida possibilitar sua atuação, reflexão e evolução (BROUSSEAU, 2008). Sendo assim, "[...] do momento em que o aluno aceita o problema como sendo seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que visa surgir." (idem, p. 35). Nesse caso, a intervenção que o professor realiza cria de forma fictícia ou não um meio adidático, no qual o estudante age de forma mais autônoma (BROUSSEAU, 1997).

Com a intenção de que os alunos possam envolver-se em situações adidáticas, o professor fornece, ou não, informações, problemas, questionamentos, modos de resolução, dicas, sugestões, desafios, provocações ou incentiva dúvidas. Ao mesmo tempo, não se pode antecipar exatamente qual é a resposta esperada, pois é importante que o aluno tome a responsabilidade dos problemas ou exercícios e trabalhe em busca de uma solução (BROUSSEAU, 1997). Esse jogo se relaciona com outro conceito explorado na Teoria das Situações Didáticas que é o de *devolução*. Dizemos que a devolução ocorre quando o aluno aceita a responsabilidade de resolver um problema porque realmente está interessado e não somente porque o professor solicitou.

Dessa maneira, a devolução não pode ocorrer quando o aluno não tem interesse pela atividade proposta ou quando o problema é muito fácil a ponto de ser resolvido rapidamente ou, ao contrário, quando é muito difícil, não tendo o aluno conhecimento ou condições de explorá-lo. Por isso, de acordo com Brousseau (1997; 2008), a devolução não diz respeito ao objeto de ensino em si, mas sim, ao conjunto de situações que o caracterizam. A partir do momento em que ocorre a devolução, pode-se dizer que os alunos se encontram em situações adidáticas.

Nessa perspectiva, entende-se que "[...] na didática moderna, o ensino é a devolução ao aluno de uma situação adidática, e a aprendizagem é uma adaptação a esta situação.” (BROUSSEAU, 1996, p.51). Para melhor analisar o processo da aprendizagem, uma situação adidática pode ser fragmentada em quatro fases: *situação adidática de ação, situação adidática de formulação, situação adidática de validação e situação didática de institucionalização*. Elas ocorrem de modo imbricado, isto é, são fortemente entrelaçadas e nem sempre é possível distingui-las.

> Situação adidática de ação: ocorre quando, diante de um problema ou de uma atividade, o aluno encontra-se empenhado e realiza ações mais imediatas, operacionais. Na maioria dos casos não há presença de argumentações ou de justificativas mais elaboradas, ´[...] há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento´ (FREITAS, 2012, p. 96).

Dessa forma, quando o aluno passa a explorar de forma reflexiva sua atividade, buscando justificativas, mesmo que de forma interiorizada, ele estará em uma condição-limite, muito próximo de uma situação de formulação (FREITAS, 2012).

Situação adidática de formulação: trata-se de um momento posterior à situação adidática de ação, em que o aluno já faz determinadas afirmações com base em sua experiência e interação com o problema, sem a intenção de validá-la. Neste caso, há a explicitação, oralmente ou por escrito, de “como” e do “quê” o aluno utilizou para resolver o problema. Em resumo, há um trabalho com modelos ou esquemas que passam a ser observados/identificados.

Situação adidática de validação: aquela em que os alunos já fazem uso de provas ou verificações para convencer ou validar suas respostas e afirmações. A atividade de validação está diretamente relacionada à atividade de formulação, uma vez que a produção de provas pressupõe um sistema comum de validação e seu objetivo principal é a argumentação sobre a certeza das conclusões obtidas com base na vivência das fases anteriores. Em uma situação de validação que envolve explicitamente provas, deve-se levar em consideração a necessidade de um pacto coletivo entre os componentes do meio sobre estrutura e sobre critérios de aceitação. Não apenas o debate da prova, mas também a sua natureza e legitimidade devem ser consideradas (BALACHEFF, 2019).

Situação didática de institucionalização: o professor passa a explicitar e atestar a validade de determinados resultados, obtidos por meio de explorações anteriores. Em algumas situações, o novo conhecimento torna-se “oficial” e os estudantes poderão incorporá-lo às novas atividades como sendo verdadeiro, sem a necessidade de duvidar ou de colocá-lo em xeque. Além da validação de resultados e de conhecimentos, esse processo pode contemplar a validação de estratégias, as quais passarão a fazer parte dos recursos que os estudantes podem utilizar em atividades semelhantes.

Para Brousseau (1997), situações adidáticas de ação, formulação, validação a institucionalização parecem consistir em uma possibilidade – não necessariamente linear – de se abordar conteúdos matemáticos. Essa proposição se opõe às situações nas quais o conhecimento é enunciado primeiro para, só então, ser aplicado ou reinvestido em decisões. Então, as modificações do meio nesse sentido, podem suscitar produções relacionadas à tomada de decisão em se produzir uma prova e sobre sua especificidade. Em situações de formulação, por exemplo, requer-se uma linguagem comum entre os interlocutores ou em situações de validação, exige-se um acordo sobre os critérios de decisão acerca da validade ou não do conhecimento em jogo.

2.2 O papel do professor e o papel do aluno frente às situações didáticas

Na perspectiva da TSD, o aluno deve ter papel ativo nos processos de ensino e de aprendizagem, devendo ele, de forma "ideal", comportar-se como um "pequeno matemático" na busca pelo conhecimento,

> O trabalho intelectual do aluno deve ser, por momentos, comparável a esta atividade científica. Saber matemática não é apenas aprender definições e teoremas, a fim de reconhecer as ocasiões em que eles podem ser utilizados e aplicados; sabemos perfeitamente que fazer matemática implica resolver problemas. Não se faz matemática simplesmente resolvendo problemas, mas por vezes esquece-se que resolver um problema é apenas uma parte do trabalho; encontrar boas questões é tão importante como encontrar soluções para elas. *Uma boa reprodução pelo aluno de uma atividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que são conformes à cultura, retire aqueles que lhe são úteis etc.* (BROUSSEAU, 1986, p. 37-38, grifos nossos).

Almouloud (2007) nos aponta que, apesar de o aluno nem sempre distinguir o que é de origem didática e o que é de origem adidática em uma dada situação, há certa transferência de responsabilidade, na qual ele passa a ser o protagonista e deve ter para si o compromisso para com a aprendizagem. O aluno, então, não sabe exatamente como ou de que forma a situação será finalizada. Segundo Brousseau (1997), ele precisa estar disposto a ignorar este fato e a participar do jogo proposto. Então se pressupõe que o estudante verifique, explore, faça testes, formule, analise, refute, prove suas afirmações, empenhe seus conhecimentos na resolução de atividades, utilize uma linguagem comum, tome decisões, comunique suas ideias, saiba reinvestir o novo conhecimento, dentre outros.

A fim de que a realização dessas ações seja possível, o professor tem um importante e fundamental lugar na Teoria. Para Brousseau (1997; 2008), um meio que não seja munido de intenções didáticas é insuficiente para que possa ocorrer aprendizagem, sendo imprescindível a presença de uma intencionalidade que, neste caso, parte do professor. Cabe a ele imaginar, elaborar e propor situações nas quais a solução "ótima" seja o conhecimento pretendido. Em uma situação voltada para a produção de validações matemáticas, é importante que, a partir de um conhecimento matemático de referência, se possibilite ao aluno o reconhecimento da natureza contraditória de uma situação (BALACHEFF, 2000), e que provas sejam discutidas como uma forma de superá-las.

Então, o professor pode permitir que os alunos vivenciem um processo de produção matemática de modo que o conhecimento e a linguagem sejam utilizados para questionar e superar contradições, resolver problemas e para apresentar provas. Isso pressupõe, por exemplo, que o docente conheça seus alunos, suas dificuldades, suas familiaridades, seus modos de ser e de fazer matemática. Com base nessas informações, poderá estabelecer situações particulares e indispensáveis para que os alunos atribuam significado ao conhecimento em jogo, pois este deve ser fruto de uma adaptação do sujeito. Assim, podemos dizer que:

> A ação do professor possui um forte componente de regulação dos processos de aquisição do aluno. O próprio aluno aprende pela regulação de suas relações com o *meio*. As regulações cognitivas têm a ver com um *meio adidático* em que parte da estrutura é determinada pela organização definida pelo professor (BROUSSEAU, 2008, p. 56, grifos do autor).

A ideia é que, após a proposição de uma situação didática, o professor a gerencie de maneira a favorecer a devolução e as situações adidáticas, sem, contudo, fornecer as respostas das atividades. Eventualmente, não há problema em se fornecer informações ou dicas, tais como: "desenhe uma figura" ou "substitua o valor da incógnita", pois trata-se de hábitos a serem adquiridos, relacionados ao contrato didático estabelecido, imersos nos processos de ensino e de aprendizagem (BROUSSEAU, 1986). Nesse sentido,

> O professor, mesmo que devolva uma situação didática ao aluno, continua sendo o fiador da relação didática adequada. A necessária inclusão da situação adidática em uma situação didática, portanto, causa a priori uma tensão entre os dois processos de devolução e institucionalização, e uma incerteza importante para o professor (MARGOLINAS, 2004, p. 19).

Logo, ao assumir, principalmente o papel de observador, é importante que o professor confie na relação aluno-meio para que ocorram as modificações ou aprendizagens pretendidas (MARGOLINAS, 2004). Mas, diante de uma recusa do aluno em resolver o problema estabelecido, ele possui "[...] a obrigação social de ajudá-lo, e mesmo, por vezes, de se justificar por ter colocado uma questão demasiadamente difícil." (BROUSSEAU, 1986, p. 51). Situações que envolvem validações matemáticas intelectuais, especificamente, por vezes, são consideradas difíceis pelos estudantes, porém é importante que sejam exploradas justamente para que, aos poucos, eles se familiarizem com elas. Ainda sobre essas situações, o professor se depara, segundo Balacheff (2019), com um problema duplo: de um lado, fazer com que os estudantes compreendam o significado de uma demonstração e seu papel na Matemática; de outro, ficar aquém desse objetivo, trabalhando a coexistência entre diversos níveis de provas.

Assim, o professor, os alunos e o próprio saber estão envolvidos em um jogo no qual interações são fundamentais. Ao aluno, cabe-lhe ações como: pensar, analisar, discutir, formular questões, hipóteses, verificar, testar, validar, entre outros. Ao professor, cabe-lhe: propor problemas, atividades, mediar discussões, favorecer a devolução e a vivência de situações adidáticas bem como a institucionalização, necessária para que o conhecimento em questão possa ser compartilhado e legitimado naquela instituição (BESSOT, 2014).

Por fim, é preciso que o aluno leve em conta "oficialmente" o objeto matemático em questão e que o professor considere a aprendizagem do estudante, pois trata-se de um fenômeno social importante do processo didático e, nesse sentido, "[...] o papel do professor também é institucionalizar." (BROUSSEAU, 2008, p. 102). Por isso, ainda que a concepção de situações nas quais os estudantes consigam desenvolver boa parte dos conhecimentos sem uma intervenção direta continue a ser essencial, é preciso que em algum momento se garanta a validade de todos os procedimentos ou resultados (BROUSSEAU, 1997). Sendo assim, situações didáticas de institucionalização requerem atenção especial, porque, além de ser o momento em que o professor reassume o controle e fixa explicitamente o saber em jogo, se for realizada cedo demais pode interromper a construção da aprendizagem. Se for realizada tardiamente, pode reforçar interpretações equivocadas.

2.3 O contrato didático e as relações que se estabelecem

Sob olhar da TSD, professor, aluno e saber compõem o chamado "triângulo didático"[6] e a relação entre esses três elementos – professor, aluno e saber – é regida por uma série de comportamentos ou regras, nem sempre explícitas. Por essa perspectiva, imaginemos um estudante que espera do professor respostas imediatas, mas no lugar delas recebe um questionamento. A atitude inesperada quebra a regra implícita "Se o aluno pergunta, o professor responde".

Dessa maneira, o conjunto de compromissos recíprocos ou de regras implícitas e explícitas estabelecidas entre professor e alunos, em relação a determinado saber é chamado de *contrato didático* (BROUSSEAU, 1986; 1997). Os comportamentos que o professor espera de seus alunos e os comportamentos que os alunos esperam do professor fazem parte do contrato estabelecido, como no exemplo acima. Um contrato didático não reflete uma realidade estável, única e que se determina de uma vez por todas. Ao contrário, é dinâmico e está em constante evolução, ao passo de podermos dizer que "[...] o conceito teórico em didática não é, pois, o contrato (o contrato adequado, desadequado, verdadeiro ou falso), mas o *processo de busca de um contrato* hipotético. É este processo que representa as observações e deve modelizá-las e explicá-las." (BROUSSEAU, 1986 p. 53, grifos do autor). Então, o contrato didático precisa ser incerto, pois se houvesse a certeza de que todos os estudantes resolveriam sem erros ou dificuldades as situações apresentadas, elas perderiam seu conteúdo didático e seu sentido (BROUSSEAU, 1997).

Para além disso, Brousseau (1986; 1997) discute que um contrato pode ser observado mais amplamente, sendo possível de serem consideradas demandas ou intervenções de outras Instituições. Esse aspecto pode contribuir, por exemplo, para uma

[6] Triângulo didático: Relação entre aluno, professor e saber que contempla epistemologia do professor, a relação pedagógica e a relação entre o aluno e o saber.

reflexão sobre a existência de um programa de ensino ao qual alunos, professores e demais componentes estão submetidos. Nesse caso, algumas determinações não são possíveis de serem modificadas, como é o caso de alguns conteúdos ou temas, ou de orientações de cunho mais operacional. Assim, um contrato didático está sujeito

> A instituição (M), à qual o que recebe a instrução deve submeter-se ao fim do processo de ensino, uma vez que não o podia fazer antes; com efeito, a sujeição futura determina a matéria a ser ensinada (conhecimentos e saberes);
> A instituição (D), que decide que o professor deve preparar quem recebe o ensino para práticas da instituição (M); delega sua missão ao professor e lhe confere certa legitimidade para modificar aquilo que é ensinado ou para ‘decidir’ seu futuro (BROUSSEAU, 1997, p. 32).

Dessa forma, apesar da autonomia conferida ao professor para discussão dos conteúdos em sala de aula, por exemplo, o contrato didático sujeita-se às demandas externas e aos programas de ensino, que por vezes influenciam nas decisões relativas aos conhecimentos em pauta. Acrescenta-se a esses elementos, determinações, portarias e demais orientações que regem o ensino, como é o caso daquelas consideradas no primeiro capítulo deste texto.

Ainda conforme Brousseau (1997), quando se pretende que ocorra a aprendizagem, no contrato estabelecido, o professor deve alterar as formas de decisão dos estudantes diante de um “[...] *determinado conjunto de situações típicas de M* (em um sentido que ele considera favorável para a adaptação em questão e/ou de acordo com um saber constituído). (BROUSSEAU, 1997, p. 33, grifos do autor). Esse conjunto de situações poderia ser, por exemplo, aquele propiciado pelo conjunto de atividades que desenvolvemos ao longo de nossa experimentação com as quais intencionamos uma mudança no comportamento dos alunos diante de situações de validação. O contrato didático se coloca, portanto, como uma restrição[7] ao processo de produção de provas, pois, em uma dada situação, determina as responsabilidades, riscos e vantagens da validação em questão (BALACHEFF, 2019).

Certas vezes, suas cláusulas, que se estabelecem na relação didática, podem ser determinadas explicitamente por intermédio de um combinado com a turma. Em outras situações, são ocasionadas implicitamente pela rotina, pelo hábito e pelo costume. Então, as atividades que são propostas com certa frequência, as quais são típicas, passam a fazer

[7] Na perspectiva de Chevallard (2009), em que restrições são condições não modificáveis.

parte do ambiente da sala de aula, porque os alunos já esperam por elas, como também, já dispõem de certo conhecimento, ao menos estratégico, para resolvê-las. Certos comportamentos, tanto por parte do professor quanto por parte dos alunos, podem revelar regras vigentes internalizadas que podem conduzir ambos a equívocos. Então, por exemplo, em determinadas situações os estudantes podem obter uma resposta "[...] através de uma leitura das indicações didáticas e não de um investimento no problema." BROUSSEAU (1986, p. 45). Esse pode ser o caso quando situações análogas são propostas, nas quais conhecimentos ou estratégias semelhantes podem ser reinvestidas.

O contrato didático também está relacionado com a estratégia de ensino adotada, de maneira que pode adaptar-se às escolhas pedagógicas, ao tipo de tarefa proposta aos alunos, aos objetivos, ao modo como se propõe a avaliação, entre outras. O conjunto de regras implícitas e explícitas que regem uma relação didática e contempla aulas expositivas nas quais se predomina definição, exemplo e exercícios, é diferente daquele em que se valoriza a produção matemática do aluno, o trabalho em equipe e a posterior institucionalização por parte do professor. Então, podemos dizer que o encontro repetido com fases de validação, como é de nosso intuito, pode "[...] conduzir a um contrato didático diferente, porque os índices que permitem ao aluno identificar a expectativas do professor são modificados. (MARGOLINAS, 2004, p. 29).

Em muitos casos, há necessidade de ruptura e de renegociação para que ocorra um avanço da aprendizagem. Silva (2012), ao exemplificar, relata um episódio comum quando os alunos não estão acostumados a trabalharem sozinhos. Questões como "não entendi", "não sei como se faz" e "me explica" aparecem justamente por conta da quebra de uma cláusula do contrato didático, isto é, a de que o professor sempre explica e exemplifica o que é necessário ser feito. Quando ocorre essa quebra, o aluno precisa assumi-la e esta nova posição "[...] contrasta com todas as suas expectativas, com todos os seus hábitos, com todas as cláusulas colocadas em campo nas situações didáticas, até o momento." (D'AMORE, 2007, p. 104). Assim, uma quebra de contrato pode gerar "[...] revolta, negociação, procura de um novo contrato, que depende de um novo 'estado', dos saberes... adquiridos e visados." (BROUSSEAU, 1986, p. 53). Almouloud (2007) cita o início da realização de operações que envolvam números e letras como um exemplo na quebra de um contrato didático e afirma que tal ruptura pode provocar fatores positivos e negativos para a aprendizagem. A inserção de atividades de validação com os alunos também pode se caracterizar como uma ruptura de contrato, especialmente quando não há um histórico em relação ao trabalho com este tipo de atividade porque, nesse caso, os estudantes precisariam se preocupar com uma estrutura específica de prova. Nas palavras de Balacheff,

> Essa ruptura é unilateral: é um feito do sistema didático e constitui uma mudança no contrato didático, cuja consequência é uma mudança de posição do aluno, uma mudança de função. O aluno muda seu papel na prática, para aquele que lhe dá maior acesso à teoria, permitindo-lhe 'conhecer' mais. É em virtude do conhecimento e não da prática que a evidência permite rejeitar algo para estabelecer uma verdade. Esta mudança implica a passagem de uma esfera cujo critério é a eficácia para outra cujo critério é o rigor (BALACHEFF, 2000, p. 25).

Ainda segundo o autor, as intervenções e a gestão do contrato didático que são realizadas pelo professor são elementos determinantes para que ocorram questionamentos relacionados ao conhecimento e às conjecturas. Entretanto, e de maneira geral, é comum que alunos apresentem dificuldades em relação à mudança de contrato. Fatores como a renovação, renegociação e, até mesmo a transgressão relacionam-se diretamente com a prática pedagógica e com o tipo de trabalho que se propõe. Por isso, igualmente comum seria a existência de períodos de adaptação e renegociação, pois o bom funcionamento do contrato didático depende, também, dos contextos de ensino e de aprendizagem.

2.4 Considerações

Com este capítulo discutimos nossa compreensão sobre os processos de ensino e de aprendizagem. Ao longo do desenvolvimento desta pesquisa, buscamos seguir os pressupostos apresentados na elaboração, no desenvolvimento e na finalização das atividades aplicadas. Tentamos interagir com os estudantes de tal forma que assumissem parte da responsabilidade, agindo da forma mais autônoma possível, realizando testes, verificações, identificação de padrões, formulação de conjecturas e validações.

Trabalhamos em busca de um contrato didático em que validações matemáticas estivessem sempre presentes e fossem aprimoradas com o passar do tempo. As situações adidáticas de ação, de formulação e de validação, mesmo difíceis de serem observadas em separado, ajudam-nos a explicitar o processo de resolução das atividades dos estudantes. Nesse sentido, ao longo de nossas análises, tentamos identificar indícios de que a devolução ocorreu, da vivência de situações adidáticas, como também elementos relativos ao contrato didático, em busca de identificar como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas. Ação esta, que está relacionada aos nossos objetivos específicos.

A Teoria das Situações Didáticas nos ajuda a pensar na institucionalização das atividades propostas, em que tentamos apresentar possíveis validações para as atividades, oportunizando, desta forma, que vivenciassem experiências diversas relativas à produção de provas matemáticas. Ao longo da experimentação, por exemplo, para além de uma institucionalização local, identificamos a necessidade de fazer uma institucionalização de forma geral, mesmo em um contexto de aulas não presenciais, em uma tentativa de abranger todos os alunos das turmas.

3. CONSTRUINDO PONTES: UM DIÁLOGO COM OUTRAS PESQUISAS RELACIONADAS AO TEMA VALIDAÇÕES MATEMÁTICAS

[...]
Atira-se
E
[...]

Com este capítulo, temos a intenção de construir um diálogo com pesquisas relacionadas ao nosso objeto de estudo, desenvolvidas nos mais diversos espaços, como na formação inicial de professores/licenciatura, na formação continuada e na Educação Básica. Não é nossa intenção realizar um estado da arte dessas investigações, mas sim, discutir junto delas um cenário possível para o ensino e a aprendizagem de validações matemáticas, bem como identificar elementos a serem considerados no decorrer da elaboração e da implementação de nossa proposta.

Para além disso, possibilitam situar nossa pesquisa frente àquelas que já realizaram discussões sobre o tema em questão, e a evidenciar nossas principais diferenças.

3.1 Critérios utilizados para seleção das pesquisas

Buscamos discutir elementos decorrentes de pesquisas que se aproximam de nosso objeto de estudo: o processo de produção de validações matemáticas. Com base nisso, realizamos uma busca tanto no catálogo de teses e dissertações da CAPES[8], bem como em sites de programas de pós-graduação brasileiros[9], selecionados com base em uma busca na plataforma Sucupira[10], utilizando a expressão "educação matemática". Para fazer uma primeira seleção dos trabalhos, indicamos para as ferramentas de busca, as palavras "prova", "argumentação", "validações", "conjectura", "demonstração" e "demonstrações". À medida que observamos tais produções, selecionamos aquelas que

[8] http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/
[9] Consultar apêndice C.
[10] https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/index.xhtml

nos possibilitaram discutir sobre validações matemáticas, indicando possibilidades de trabalho, possíveis dificuldades ou ações a serem desenvolvidas.

3.2 Pesquisas realizadas no âmbito da licenciatura

Todas as pesquisas que problematizam, de alguma forma, a abordagem de validações matemáticas em sala de aula, nos ajudam a discutir nosso problema de pesquisa. Não somos e não estamos isolados de outros pesquisadores que investigaram documentos, produções ou concepções de alunos, futuros professores ou professores em formação.

Ao identificarmos que mesmo alunos de licenciatura não conseguiram desenvolver ou organizar uma justificativa formal para determinadas afirmações/propriedades, como na pesquisa de Guerato (2016), podemos tentar compreender, por exemplo, porque isso ocorreu. Se foi um fato isolado, se há sugestões sobre como atenuar dificuldades e como podemos pensar em uma intervenção na Educação Básica.

Guerato (2016) investigou 9 alunos que estavam iniciando o curso de Licenciatura de uma universidade pública de São Paulo, discutindo a passagem do que chamou de geometria de observação para geometria de demonstração. Foram elaboradas atividades a serem desenvolvidas com utilização do *software* Geogebra relativas ao tema “lugares geométricos planos”, durante 6 encontros.

Três dos participantes mostraram saber o que é uma demonstração ou quando ela se faz necessária. Ressaltando sua concepção de que a produção de provas se trata de um processo a ser desenvolvido de forma gradual e contínua, após a análise dos dados, a autora evidencia que, de forma geral, os alunos não estão acostumados com o desenvolvimento dos passos deste tipo de validação matemática. Ela identificou indícios de que os licenciandos não sabiam o significado da palavra “conjectura”, indicando que investigações futuras deveriam se atentar a este aspecto. Em várias situações, eles pareciam ter compreendido ou percebido determinada propriedade, mas esbarravam na comunicação e na simbologia, pois

> Ao serem solicitados, tiveram muita dificuldade com erros conceituais, frases sem sentido ou com sentido duplo ou, ainda, com muitos erros gramaticais,

> que geram dúvidas no texto em Matemática e também mostram falha ou ausência de aspectos formais lógicos (GUERATO, 2016, p. 184).

Em relação às atividades, a pesquisadora percebeu que elas foram muito direcionadas, contendo, às vezes, o passo a passo do que gostaria que fosse desenvolvido, sendo, segundo a autora, “[...] interessante elaborar atividades mais livres, nas quais o participante não fique tão preso aos passos propostos.” (ibidem, p. 190). E, em relação ao número de encontros, ela escreveu que os seis encontros que realizou se mostraram insuficientes para que tivessem mais contato e mais discussões sobre o tema em questão, e sugere que sejam realizadas mais sessões. Apesar disso, seus resultados indicam que é possível que os estudantes evoluam em suas produções, pois, ao final, cinco deles chegaram próximo do propósito de pesquisa.

Citamos também o trabalho de Mateus (2015), que investigou conhecimentos necessários ao professor de Matemática para discutir provas e demonstrações na Educação Básica. Sua pesquisa envolveu 10 estudantes de Licenciatura de uma Universidade Federal com os quais aplicou instrumentos diagnósticos e desenvolveu uma intervenção durante a disciplina Tópicos Especiais em Ensino de Matemática, do curso de Graduação. Mesmo considerando o tema importante, os estudantes acreditavam que seu ensino não deveria ser para todos, já que seu conceito de prova era restrito. Os licenciandos relataram que suas experiências enquanto alunos da Educação Básica, as quais envolveram elaboração de conjecturas e provas, foram poucas e não satisfatórias. Após a intervenção realizada, em que a pesquisadora discutiu um conceito de prova relativo e possibilidades de abordá-las em sala de aula, permaneceu a ideia inicial dos graduandos de que nem todos os alunos seriam capazes de desenvolver provas, fazendo uso de linguagem formal. Contudo, passaram a defender um trabalho com validações mais simples e que tenha função explicativa.

Ao defender a tese de que tanto disciplinas pedagógicas quanto àquelas de conteúdo matemático devem discutir possibilidades de abordagem de provas e demonstrações na Educação Básica, Mateus (2015) coloca em evidência a formação de professores, que nem sempre se preocupa com esta problemática.

Ferreira (2016) também realizou uma intervenção com estudantes de Licenciatura, considerando a perspectiva do aluno, que possui dificuldade para demonstrar, e do futuro professor, que poderá trabalhar com provas em sala de aula. Antes, analisou as respostas de 45 questionários feitos para estudantes que já haviam cursado a disciplina de Geometria Plana. Os resultados não foram muito diferentes daqueles encontrados por Mateus (2015), uma vez que, a maioria respondeu que em algum momento de sua vida escolar, havia estudado Geometria, mas não demonstrações e, por isso, relataram dificuldades. Além disso, houve relatos de insegurança quanto ao trabalho com provas na Educação Básica e confusões entre uma demonstração e uma prova empírica.

Ferreira (2016) defende a necessidade de que validações matemáticas sejam exploradas em diferentes disciplinas da licenciatura para que os estudantes tomem conhecimento das diferentes funções e tipos de prova. Os dados também indicaram que eles tendem a se apoiar em livros didáticos para reproduzirem validações que neles estão presentes. Semelhante a Guerato (2016), após sua intervenção, na qual se discutiram validações matemáticas relativas ao tema "quadriláteros", a autora percebeu haver evoluções tanto nas provas apresentadas quanto na escrita matemática.

Outra pesquisa cujos dados indicam associações entre validações produzidas por estudantes de licenciatura e livros didáticos do Ensino Fundamental, encontra-se em Ordem (2015). O autor analisou concepções sobre prova e demonstração destes alunos da Universidade Pedagógica de Moçambique que estavam no 4° ano da licenciatura para séries finais, utilizando-se de questionários e de entrevistas. Um apontamento bastante expressivo é o de que eles lidavam com validações como um tópico, como uma espécie de conteúdo, e não como uma maneira de se comunicar, de se validar ou explicar específica da Matemática. Ordem (2015) constatou que prevalece a concepção de que métodos empíricos validam propriedades, mesmo que não sejam demonstrações. As produções dos estudantes revelam o que Mateus (2015) e Ferreira (2016) também apontaram, isto é, insegurança e dificuldades relativas às especificidades das demonstrações.

Além disso, no âmbito da licenciatura, trazemos para o diálogo a pesquisa de Sales (2010) que, apesar de ser realizada naquele nível de ensino, tem algumas semelhanças com a nossa. O autor buscou analisar o processo de argumentação durante resoluções de atividades de uma disciplina de Geometria Euclidiana. Alguns aspectos se aproximam de nossa investigação: houve um momento de pré-experimentação que se mostrou útil para ajustar algumas atividades; o autor era, ao mesmo tempo, professor da turma e pesquisador, sendo necessário articular a demanda curricular e a produção de validações. No contexto da sala de aula, os dados foram obtidos por meio de fotografias, filmagens, entrevistas e diário de bordo. Ao longo das sessões, foram realizadas tentativas de formalização, sendo identificadas tentativas de se ultrapassar os limites do nível de provas pragmático.

Um dos grandes problemas encontrados pelo autor ao longo da experimentação foi a necessidade de demonstrar o óbvio ou ao contrário, demonstrar uma propriedade não percebida pelos alunos. Ao final, percebeu-se que os registros de linguagem, os recursos de comunicação e a lógica da argumentação permaneceram mesclados: ora predominava o gestual e a comunicação oral, ora o registro algébrico e o escrito em linguagem materna, havendo, então, uma dinamicidade no processo de produções de validações,

> Às vezes o processo revelava um avanço nas articulações entre a teoria e a técnica e um recuo nos registros. Outras vezes revelava um avanço nos registros, mas o discurso justificatório era 'folclórico'. Houve uma dinamicidade entre processo e produto [...] (SALES, 2010, p. 228).

Por fim, Sales (2010) reitera que o trabalho em grupos favoreceu o debate e argumentação, aspecto esse, que também foi identificado por Guerato (2016). Embora em algumas atividades iniciais houvesse a ausência de formalidade, Sales aponta que, em geral, parecia haver compreensão. Com o passar do tempo, devido ao que foi realizado, os discursos se aproximaram do que ele denominou de racional lógico-dedutivo. Indícios de que a intervenção realizada ocasionou modificações e avanços no processo de produção de validações dos alunos de Licenciatura em questão.

Considerando as pesquisas citadas até o momento, podemos dizer que indicam possíveis dificuldades dos estudantes em relação à construção de demonstrações e ao uso da linguagem (ORDEM, 2015; GUERATO, 2016). Em algumas situações, a linguagem natural se sobrepôs aos elementos formais de uma demonstração (GUERATO, 2016).

Alguns dos licenciandos participantes não tinham clareza sobre o significado de uma conjectura (GUERATO, 2016), ou sobre o próprio significado de uma demonstração, ocasionando confusões entre provas empíricas e formais e compressões de provas em um sentido mais restrito (MATEUS, 2015; FERREIRA, 2016). Identificou-se, também, um entendimento de que as provas seriam um conteúdo a ser abordado (MATEUS, 2015; ORDEM, 2015) e uma recorrência ao livro didático para a realização de validações (ORDEM, 2015; FERREIRA, 2016).

Essas considerações sugerem que é importante esclarecer aos alunos o significado de expressões como conjectura ou provas, de forma que compreendam esta atividade como uma maneira específica de justificar afirmações ou conclusões matemáticas. Desenvolver um trabalho contínuo parece ser importante (GUERATO, 2016), pois, quando a intervenção ocorreu ao longo de um tempo maior, foi possível identificar evoluções (SALES, 2010; FERREIRA, 2016). Da mesma forma, realizar uma pré-experimentação pode contribuir para se conheça os estudantes e suas realidades (SALES, 2010).

Ademais, essas investigações sinalizam que parte das lacunas existentes em relação às validações matemáticas que alunos do Ensino Fundamental possuem, estão relacionadas à formação de professores, que nem sempre consegue abarcar o tema de forma satisfatória. Como poderíamos ensinar algo que é desconhecido ou cujas experiências foram poucas e não satisfatórias? Concordamos com Ferreira (2016), quando afirma que

> [...] a aprendizagem de provas e demonstrações nas escolas e universidades brasileiras estão em um círculo vicioso em que os cursos de licenciatura não dão conta de formar professores com autonomia para desenvolver com seus alunos atividades que preparem para o domínio do processo dedutivo. Esses alunos chegam à universidade com limitações que os levam a praticar a demonstração sob abordagem técnica, desmotivando-os a estudar esse recurso matemático e muito menos ensiná-lo a seus futuros alunos (FERREIRA, 2016, p. 50).

Ainda em relação a isso, consideramos importante o que defende Mateus (2015), ou seja, uma maior integração entre disciplinas Didáticas e Matemáticas, pois estas últimas "[...] não estariam isentas da utilização da prova como meio para a aprendizagem dos futuros professores, reforçando assim a ideia que os licenciandos devam vivenciar, no período da sua formação, experiências próximas daquelas que irão utilizar em sua prática docente." (MATEUS, 2015, p. 174-175).

Sendo assim, uma das formas pelas quais podemos enfrentar estes desafios pode ser o investimento em políticas públicas para a formação continuada de professores e para a criação de espaços de discussão, onde os mais diversos temas, dúvidas, inseguranças e possibilidades de se trabalhar a Matemática na Educação Básica sejam exploradas. Dentre esses temas, poderia estar a abordagem de conjecturas, provas e demonstrações. Na sequência do texto, traremos pesquisas que foram desenvolvidas nesse contexto de formação, que se preocuparam de alguma forma com a produção de validações matemáticas.

3.3 Pesquisas realizadas no âmbito da formação continuada de professores

Se, investigar conhecimentos e concepções alusivas às provas matemáticas na licenciatura é importante, igualmente se faz necessário saber como pensam e o que conhecem professores que atuam nos diferentes níveis de ensino. O ensino e a aprendizagem da Matemática têm relações com o que concebe o docente que, embora não tenha clareza, transpõem suas crenças para o fazer matemático. Poderíamos dizer que "[...] toda atividade didática implicará uma reorganização do conjunto de conhecimentos a serem transmitidos. Por este motivo, toda apresentação de uma teoria matemática possui propriedades didáticas 'intrínsecas'." (BROUSSEAU, 2008, p. 63).

Então, dada nossa intenção de desenvolver uma pesquisa junto a estudantes da Educação Básica, além de conhecer como pensam outros professores que atuam nesse nível de ensino, elas podem contribuir para compreendermos um cenário possível de ser encontrado. Elas podem indicar, também, sugestões ou elementos a serem considerados em nossa experimentação.

Em sua pesquisa, Pietropaolo (2005), por exemplo, realizou entrevistas com pesquisadores em Educação Matemática e com professores da Educação Básica com a intenção de compreender sobre a necessidade e a possibilidade de implementação de provas nos currículos deste nível de ensino.

Segundo o autor, houve consenso de que a prova seria, não somente um recurso, mas também um conteúdo bastante interessante de se trabalhar em sala de aula, desde que ocorra uma relativização do conceito em questão. Dessa forma, poderia se admitir argumentações ou verificações, por exemplo. As respostas dos pesquisadores matemáticos, assim denominados por Pietropaolo (2005), indicaram uma necessidade de se desenvolver mais investigações sobre até onde, de fato, pode-se chegar em termos de formalização de uma prova neste nível de ensino, pois houve divergências por parte dos entrevistados nesse aspecto. Alguns deles sinalizaram a viabilidade de generalizações no Ensino Médio, enquanto outros, defenderam uma abordagem que valorizasse fundamentalmente verificações empíricas. Para além disso, uma preocupação em específico, foi colocada em pauta: seria preciso observar com cuidado a ênfase às provas formais no Ensino Fundamental e Médio para não incorrer em uma volta ao formalismo, devido a distorções do que se sugere como possibilidades de trabalho com demonstrações. Ao longo da elaboração de nossas atividades e de nosso trabalho em sala de aula, buscamos refletir sobre este aspecto, no sentido de evitar ao máximo uma abordagem em que as provas fossem colocadas de forma impositiva, sem nenhuma participação por parte dos alunos participantes.

Quanto aos professores da Educação Básica, em seus relatos, citam dificuldades de aceitação ou de compreensão por parte dos alunos quanto às provas para justificar sua pouca utilização em sala de aula. Suas falas indicam que "[...] percebem o trabalho com provas, mesmo as informais, muito mais como um 'novo' tópico a ser incluído no programa do que uma ferramenta para estudar Matemática." (PIETROPAOLO, 2005, p. 145). Por atuar em escolas, este grupo não só foi entrevistado, mas analisou possíveis validações matemáticas de estudantes. Parte dos docentes elogiaram a criatividade e, ao mesmo tempo, disseram que não poderiam avaliar de forma positiva, visto não se tratar de provas do ponto de vista matemático.

> Segundo esses professores, ao aceitar essas experimentações, correr-se-ia o risco de favorecer a formação de uma idéia [*sic*] errônea sobre o significado de provar em Matemática. Mas como não aceitar e elogiar a iniciativa e a atitude do aluno? O estudante que experimentou, porém não chegou a um certo grau de formalização, desenvolveu menos o raciocínio dedutivo do que o outro que concluiu a tarefa corretamente? Como saber se este último não teria apenas memorizado uma prova formal vista, por exemplo, em um livro? (PIETROPAOLO, 2005, p. 172-173).

Como professores, também nos colocamos esses mesmos questionamentos. Sendo assim, partimos do pressuposto de que diferentes níveis de validação possam coexistir, a partir de uma estrutura comum de reflexão que poderia se estabelecer em uma sala de aula ou junto a um grupo de alunos, por exemplo.

Em suas considerações, Pietropaolo (2005) indica que parece haver uma crença de que mesmo sendo importantes, as provas se destinariam àqueles alunos com melhor desempenho e de que seria importante pensar em situações que colocassem em evidência a necessidade de validações. Sinaliza, ainda, que há muito a se explorar e sugere estudos cujo objetivo se relacione com as evoluções dos alunos da Educação Básica no desenvolvimento de validações.

Em sua tese de doutorado, Leandro (2012) investigou saberes mobilizados por cinco professores da rede municipal de São Paulo, em relação às provas matemáticas. Dados obtidos com observações diretas, anotações, entrevistas e atividades indicam que os professores compreendem a elaboração de provas como sendo um processo. Quando foram questionados sobre a importância de se realizar demonstrações com os seus estudantes, os docentes associaram ao desenvolvimento do raciocínio lógico, dedução de fórmulas, compreensão, explicação e verificação de propriedades. Apesar de não se ter investigado a prática destes professores, eles relataram que provas pragmáticas são aquelas que mais aparecem em suas salas de aula.

Um dos professores participantes da pesquisa de Leandro (2012) relatou bastante empolgação de sua parte ao discutir uma demonstração relativa à fórmula resolutiva de uma equação de 2° grau com seus alunos. Sentimento este que logo se transformou em decepção, ao constatar que ninguém havia compreendido. Ao longo dos encontros, percebeu-se a defesa dos participantes por provas de nível intelectual apenas no Ensino Médio quando, em tese, os estudantes já teriam conhecimentos matemáticos suficientes, em uma direção contrária do que estamos defendendo. A esse respeito, em suas considerações, o autor sinaliza a necessidade de se ampliar o significado de provas matemáticas, tanto na formação inicial, quanto continuada, pois essa visão restrita da prova enquanto técnica formal pode impedir a exploração deste tema no Ensino Fundamental.

Nesse ponto, poderíamos acrescentar que, para além de dificultar a abordagem de validações matemáticas, poder-se-ia privar os estudantes de vivenciarem este processo que envolve a elaboração de conjecturas, explicações, debate, convencimento, análise e o conhecimento das especificidades de se provar uma afirmação neste campo do conhecimento. Se os estudantes forem colocados diante de atividades de validação matemática apenas no Ensino Médio, não teriam eles ainda mais dificuldades de compreender esse processo por vezes tão específico?

Grinkraut (2009) acompanhou por dois anos e investigou o desenvolvimento profissional de dois professores que participaram de um projeto de pesquisa direcionado ao trabalho com validações matemáticas na Matemática escolar. Eles eram estudantes do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática e elaboraram, aplicaram e analisaram situações de aprendizagem relativas ao tema com alunos da Educação Básica. A autora buscava saber como a participação desses docentes no curso de Pós-Graduação promoveu transformações em suas concepções e práticas.

Observou-se que uma das professoras, que teve a possibilidade de participar ativamente de todas as ações propostas, foi modificando sua concepção de prova. Anteriormente, ela relatou incorporar em sua prática docente ações de seus próprios professores que a ensinaram a reproduzir demonstrações. Acompanhando sua trajetória, Grinkraut (2009) identificou seu esforço em tentar proporcionar atividades que favorecessem o envolvimento dos estudantes, como também uma passagem de provas pragmáticas para intelectuais. Mesmo com histórias diferentes, o outro participante da pesquisa relatou que, quando era aluno, pouco ou nada ouviu falar sobre provas ou demonstrações. Na Graduação, elas foram exploradas de forma técnica, mecânica. Sua participação no projeto fez com que ele repensasse a visão de que provas seriam inacessíveis aos alunos.

Trevisan (2016), por sua vez, analisou propostas de intervenções didáticas elaboradas por professores para se trabalhar com validações matemáticas referentes à Geometria. Para sua análise, o autor selecionou atividades exploradas em um curso de extensão que envolveu 12 professores da rede pública de Mato Grosso. Para cada atividade, ele incentivou os docentes a produzirem dois tipos de validações, sendo uma delas empírica e outra que considerassem como sendo formal. Em seguida, eram realizadas duas outras questões do ponto de vista de uma abordagem possível, ou seja, se eles considerariam trabalhar com a atividade em sala de aula, e como se poderia propor uma evolução da solução empírica à formal, e dos pontos de vista didático e matemático, e quais elementos julgariam importantes para discussão em sala de aula.

Os dados produzidos pelos docentes sugerem pouca valorização de validações intelectuais, sendo a maioria provas do tipo empirismo ingênuo, isto é, baseadas em poucos exemplos, testes ou observações. Parte das poucas provas teóricas produzidas apresentaram equívocos. Nas palavras do autor, “[...] tendeu-se a valorizar mais o emprego do registro em linguagem natural, como se esperava para este tipo de prova. Algumas delas ficaram mais próximas de uma descrição do que de uma dedução matemática, em especial as primeiras produzidas [...]” (TREVISAN, 2016, p. 159).

Percebeu-se que as produções empíricas e teóricas não foram discutidas pelos professores de forma complementar, mas como formas distintas e sem articulação. Não foram identificadas propostas explícitas para se trabalhar com validações teóricas, porém, foram apresentados encaminhamentos sequenciais e descritivos para exploração de validações empíricas. Neste último caso, solicitando, por exemplo, construção de figuras, comparações ou explicações:

> Nas provas teóricas, o que tivemos foi a elaboração (ou tentativa de elaboração) de uma prova por parte dos participantes, e não de uma proposta de trabalho. A prova elaborada era tida pelos professores, muitas vezes, como sendo a forma a ser trabalhada pelo professor na sala de aula, e não de forma efetiva pelos alunos. Aos alunos, caberia a contemplação da elaboração da prova teórica realizada pelo professor (TREVISAN, 2016, p. 168).

Encontrou-se evidências de que na maioria das vezes as dificuldades não estariam relacionadas à compreensão de conceitos ou conteúdos, mas ao aluno e à sala de aula, como a falta de interesse ou a falta do que os docentes chamaram de “base matemática”.

Ao final do curso de extensão e de forma semelhante aos resultados de outras pesquisas discutidas anteriormente, Trevisan (2016) identificou evoluções nas construções das validações matemáticas por parte dos professores. Para além disso, houve mudanças no tocante à possibilidade de trabalhar com alunos provas tanto empíricas quanto formais, apesar de tímidas.

As pesquisas que aqui apresentamos, no tocante à formação continuada de professores, reforçam a importância de se desenvolver e de se participar de formações em que sejam discutidas possibilidades de abordagens de validações matemáticas em sala de aula, tendo em vista a perspectiva de mudanças nas concepções dos docentes, como ocorreu com os participantes das pesquisas de Grinkraut (2009) e Trevisan (2016). Em maior ou menor medida, elas representam um avanço se comparadas com a crença de que seria inviável discutir com os estudantes provas matemáticas ou, em outra direção, de que apenas o professor pode repassar as demonstrações de maneira pronta, finalizada.

É evidente, também, que

> Há a necessidade de uma ampliação do significado das provas matemáticas na formação inicial e continuada de professores, pois verificamos, [...] que a visão única e exclusiva da prova de matemática enquanto técnica formal, age como uma barreira para a exploração das provas matemáticas no ensino fundamental (LEANDRO, 2012, p. 166).

3.4 Pesquisas realizadas no âmbito da Educação Básica

Em nosso objetivo, pretendemos analisar produções de estudantes de 9° do Ensino Fundamental. Desse modo, não poderíamos deixar de olhar para pesquisas que envolveram alunos da Educação Básica, suas considerações e seus apontamentos.

No Ensino Médio, temos a investigação de Santos (2015), que elaborou uma proposta didática com o intuito de privilegiar atividades envolvendo provas e demonstrações matemáticas de modo que, quando utilizada em sala de aula, possibilitasse aos alunos a compreensão do significado de uma atividade de validação – semelhante ao que pretendemos com a nossa pesquisa.

O enfoque foi o Teorema de Pitágoras e os participantes da pesquisa foram alunos do terceiro ano do Ensino Médio. Em suas considerações, o autor afirmou que os estudantes com os quais trabalhou, não tinham conhecimento da necessidade de provar o teorema de Pitágoras, e que, mesmo sendo um dos teoremas mais conhecidos e demonstrados de toda a Matemática, os alunos não tinham conhecimento de sua demonstração. Além disso, Santos (2015) destacou que eles tiveram dificuldades em relação ao tratamento algébrico, o que dificultou efetivamente a realização da prova do Teorema pretendido. Sempre que necessário generalizar uma situação dada, os estudantes apresentaram problemas em relação à compreensão do contexto da atividade. Nesse sentido, o conhecimento matemático dos alunos interferiu diretamente na produção da validação pretendida, ainda que a sequência de atividades tenha sido pensada considerando uma condução para uma prova do Teorema do referido teorema. Segundo o autor, essa questão desmotivou um pouco os participantes.

Assim como Santos (2015), outros realizaram investigações com alunos do Ensino Médio. Picelli (2010) aplicou dezessete atividades em seis sessões com duração de cinquenta minutos com o intuito de investigar validações e conjecturas produzidas por alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Então, os estudantes foram desafiados a conjecturar teoremas relativos à Geometria, tais como: Teorema de Tales, soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, a medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito no mesmo arco de uma circunferência, entre outros, que já foram provados e sobre os quais não há dúvidas de que sejam verdade naquele contexto.

A escolha dos alunos se deu porque, para o autor, era importante que eles já tivessem conhecimento sobre boa parte dos teoremas que iriam ser trabalhados. Segundo o autor, “[...] esta escolha daria a oportunidade de provocar nos alunos a necessidade de argumentar e provar teoremas já conhecidos, com exceção da última sessão.” (PICELLI, 2010, p. 28).

Dessa investigação, depreendemos a fundamentalidade do trabalho do professor para que os alunos alcancem provas intelectuais, pois, embora todos os alunos tenham conjecturado que a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo seja 180°, apenas cinco grupos, o equivalente à metade da turma, conseguiram justificar. Dessas justificativas, apenas uma foi classificada como exemplo genérico, de maneira que este só foi construído após o auxílio e a orientação do professor. Ainda segundo o autor, é importante, também, que se esclareça o significado de uma validação, pois é comum que os alunos não saibam exatamente o que precisam fazer, porque geralmente eles não são estimulados a apresentarem validações (PICELLI, 2010). Essa questão também foi apontada por Lima (2015) que, ao analisar dados referentes a três alunos do segundo ano do Ensino Médio, percebeu, mesmo neste nível de escolaridade, que ainda há uma confusão entre o conceito de prova, o qual foi confundido com o conceito de avaliação, corroborando com o fato de que os alunos pouco têm contato com provas e demonstrações.

Para além disso, Lima (2015) aplicou um questionário com 20 estudantes de uma turma de segundo ano do Ensino Médio, que trabalharam em duplas para respondê-lo. Essa escolha se deu porque, em tese, estudantes daquele nível de ensino já teriam conhecimentos sobre Geometria para discussão dos temas que seriam trabalhados: Teorema de Pitágoras, Teorema da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo e Teorema do Ângulo Externo. Por meio da análise dos dados, a pesquisadora buscou investigar tipos de provas matemáticas que pudessem ocorrer durante a aplicação da proposta didática implementada nos ambientes lápis e papel e no aplicativo de Geometria dinâmica Geogebra.

Lima (2015) pontuou dificuldades dos estudantes em relação à Álgebra para resolver ou generalizar as atividades propostas. Foi observado que várias questões permaneceram em branco porque eles não compreenderam ao certo o que precisavam fazer. Ademais, muitos conceitos como produtos notáveis, cálculo de áreas e potenciação, por exemplo, não foram retomados pelos alunos no decorrer das resoluções, do modo como era esperado. Nesse sentido, a autora afirma ser importante considerar os conhecimentos prévios necessários para o desenvolvimento da atividade. O trabalho com o aplicativo não interferiu muito nas respostas dadas, pois não havia uma familiarização com ele.

Algumas dessas preocupações foram observadas por Oliveira (2009), que desenvolveu uma investigação com estudantes discutindo a produção de validações produzidas por alunos do 8° ano do Ensino Fundamental referente ao tema construções geométricas. A autora constatou a preferência dos alunos pelas provas do tipo empirismo ingênuo, pois foram aquelas que proporcionaram maior segurança a eles. Ainda segundo ela, parte das dificuldades em relação à apresentação de justificativas foram proporcionadas pelo não trabalho com argumentações no decorrer da vida escolar dos alunos, porque a apresentação de resultados é, em geral, suficiente e aceita.

Em sua investigação, pudemos observar que não houve uma passagem linear das provas do tipo empirismo ingênuo à experiência mental. Ao contrário, houve oscilações dos resultados de modo que, em alguns momentos as respostas se aproximavam mais de um ou de outro tipo de validação. E, mesmo tendo realizado uma breve explanação sobre conceitos importantes, que os alunos já tenham visto de alguma forma, a maioria das validações apresentadas permaneceu no nível empírico.

Além disso, é expressa a necessidade de se ter preocupação com o enunciado das questões, pois sempre que este restringir o trabalho do aluno à construção de atividades ou representações, mesmo diante da exigência de uma justificativa, poderá ser difícil conduzi-lo à experiência mental. Assim, "[...] atividades que envolvem justificativas são importantes para o desenvolvimento não só do raciocínio lógico, mas também da construção da independência do aluno em relação ao professor ao observar que suas ideias também podem estar corretas." (OLIVEIRA, 2009, p. 166).

Oliveira (2009) acrescenta ainda que é possível que o aluno compreenda a importância de se validar conjecturas, porém este processo é longo e relaciona-se particularmente com os conhecimentos em jogo. Em alguns casos, a dificuldade de apresentar justificativas pode ter uma direta relação com o conhecimento dos alunos em relação ao conteúdo que se está trabalhando. Dessa maneira, quando não há o domínio dos conceitos ou conteúdos necessários, obviamente, haverá dificuldades em relação à apresentação de validações que se utilizam desses conceitos ou conteúdos.

Esse aspecto pode ser encontrado em nossa investigação de Mestrado (KRAKECKER, 2016), em que desenvolvemos um trabalho voltado para a produção de conjecturas e de provas matemáticas sobre o tema Ângulos e Polígonos. Após sete sessões com alunos de 8° ano, inferimos que os argumentos foram sendo modificados, conforme os estudantes foram adquirindo ferramentas para suas validações. Mesmo assim, em muitas delas, eles escreviam suas justificativas como se estivessem contando o como ou o porquê acreditavam que a resposta ou a conjectura estaria correta.

Os dados indicaram ainda que aspectos relacionados ao enunciado das questões podem interferir na atividade matemática dos estudantes. Quando se propõem questões mais abertas, como em: "Que relações existem entre dois segmentos de reta que se interceptam?", tendem a favorecer a elaboração de conjecturas. Se o questionamento estiver direcionado, como é o caso da pergunta: "É verdade que ângulos opostos pelo vértice possuem mesma medida?", outras relações podem ser feitas, mas o foco tende a ser a produção de provas matemáticas, pois a conjectura já está dada (KRAKECKER, 2016).

Araújo (2007), que investigou o ensino e a aprendizagem da prova com alunos da 7ª série (o atual 8° ano) envolvendo construções geométricas e o *software* Cabri Géomètre, identificou dificuldades relacionadas à língua materna – escrita e falada. Em suas considerações, destaca-se a possibilidade do professor auxiliar os alunos a proporem e organizarem seus raciocínios, no sentido de uma linguagem matemática cada vez mais adequada.

No que concerne às provas que foram produzidas, de modo geral, foi observado que os estudantes possuem dificuldades em organizar a escrita de uma validação, tendo preferência por palavras, em especial, que já conhecem. Além disso, nem sempre conseguem separar a descrição da justificativa e que, por isso, suas provas na maioria das vezes combinam estes dois elementos e argumentos empíricos com teóricos (ARAÚJO, 2007). Segundo o autor, a idade escolar e a falta de contato com atividades de validação matemáticas podem ter influenciado, neste caso,

> O tipo de raciocínio que se emprega em demonstrações matemáticas exige muito mais tempo para ser consolidado de alguma forma. Não se trata somente de entender como se faz uma determinada prova matemática, mas de entender as várias facetas que uma prova pode ter, bem como seu funcionamento (ARAÚJO, 2007, p. 195).

Essa questão da escrita é citada por Mello (1999), ao afirmar que o aluno pode até raciocinar corretamente ou obter a solução adequada de um problema, mas pode apresentar dificuldades relacionadas à escrita e à apresentação de uma explicação/justificativa. No Ensino Fundamental, principalmente até o segundo ciclo, a produção de validações ainda está muito relacionada à linguagem materna. Esse fato é corroborado por discursos de vários professores atuantes na Educação Básica que relatam perceber o entendimento e o convencimento por parte do aluno e, ao mesmo tempo, a dificuldade de se expressar de outra forma que não seja falando ou escrevendo com suas próprias palavras (LEANDRO, 2012). Sendo assim,

> Os resultados das sessões confirmam que a redação da demonstração constitui um obstáculo, o aluno pode raciocinar corretamente, enxergar a solução, mas ter dificuldades em formalizar seus argumentos de modo preciso. [...]. Assim, a redação da demonstração foi feita com inúmeras intervenções por parte do pesquisador (MELLO, 1999, p. 164).

Leandro (2012), acredita que, em partes, isso se deva ao costume que temos em nossas atividades cotidianas, pois é assim que nos comunicamos, por meio da linguagem natural. É preciso admitir, segundo o autor, que o sistema de validação em matemática é específico. Dessa forma, é importante que a escola o explore e o discuta junto aos estudantes.

Mello (1999) desenvolveu uma sequência didática considerando o ensino de Geometria da oitava série, o equivalente ao atual 9° ano, e investiu no estudo da demonstração em Geometria como técnica a fim de que os alunos pudessem melhor compreender os conceitos em jogo. A autora analisou mais de 160 respostas dadas por alunos, e constatou que a maioria deles não atribuía sentido a atividades que não continham números ou medidas nas figuras/enunciados. Parte deles chegou a responder que seria impossível resolver sem o auxílio de uma régua, o que evidencia um "*status*" prático do conhecimento, em que a observação e a experimentação têm maior importância do que outras relações que envolvam algum tipo de raciocínio genérico.

Fica evidente, segundo a autora, que alunos participantes da pesquisa, de modo geral, ansiavam pela apresentação de medidas, valores e números. Nos problemas propostos em que não há a presença desses elementos, as respostas empíricas são muitas, tais como aquelas acima citadas. Sobre este trabalho, fazemos duas reflexões. Uma tem relação com o enunciado, pois, como o teste foi aplicado unilateralmente, não há como saber em que medida houve, ou não, dúvidas a este respeito. Outra reflexão, relaciona-se à dificuldade apresentada pelos alunos ao se raciocinar de modo genérico, independente dos valores que são atribuídos às medidas.

Para superar possíveis lacunas entre a apresentação de provas empíricas e aquelas em que há a presença da generalidade, Mello (1999) acredita que seja necessário compreender as diferenças entre um discurso argumentativo que se utiliza da linguagem materna e uma articulação dedutiva; orientar os alunos em exercícios de demonstração, especificando hipótese-teorema-conclusão, bem como auxiliá-los a apresentarem justificativas partindo da hipótese. Salientamos que o trabalho de Mello (1999) estava inclinado à aprendizagem das demonstrações, diferentemente da nossa proposta, cuja intenção é a institucionalização e a normatização da apresentação de justificativas, de maneira orientada e gradual. O aparecimento de provas genéricas permanece no plano secundário à compreensão da necessidade da apresentação de validações, porque acreditamos ser importante que ocorra em primeiro este processo para posterior apresentação de demonstrações.

Mesmo com um enfoque direcionado à aprendizagem e à produção de demonstrações, a redação de algumas delas somente foi possível com intervenção do professor e no teste final aplicado, apenas dois alunos obtiveram êxito nesta tarefa. Nossa pesquisa se distancia um pouco da de Mello (1999), pelo fato de não focarmos tanto na redação de uma demonstração, mas sim, na produção de provas. Nosso objetivo se afasta na medida em que pretendemos, primeiro, suscitar a necessidade da apresentação de justificativas, no contexto das aulas de Matemática. De maneira paralela, também é nossa intenção discutir o emprego do raciocínio genérico em situações diversas, considerando que em situações de demonstração ele necessitará ser utilizado. Por exemplo, na afirmação de que todo triângulo isósceles possui dois ângulos congruentes, sua validação exigirá a compreensão de que a propriedade precisa ser válida para todos os casos possíveis – todos os triângulos isósceles possíveis. Outro exemplo é a prova de que a soma de dois números pares sempre resultará em um número par. Nesse caso, precisará se pensar em como representar todos os números pares possíveis de modo genérico. A autora não disponibilizou no corpo do texto, nem no anexo, as imagens das resoluções para que pudéssemos analisar a composição das (tentativas) de demonstrações realizadas.

Leandro (2006) realizou um amplo estudo em que codificou respostas de mais de 2000 alunos com idades entre 14 e 16 anos em um questionário que continha cinco perguntas relacionadas ao Fatorial, como parte do trabalho desenvolvido pelo projeto AProvaME[11]. De modo geral, o desempenho dos estudantes que compunham a amostra foi abaixo do esperado. Constatou, também, que nem sempre o desempenho de alunos de escolas particulares é melhor do que aqueles de escola pública. Outra pesquisadora que se dedicou à análise das respostas do questionário citado foi Souza (2009), mas de forma direcionada a uma questão de Geometria. Especificamente, em relação à soma da medida dos ângulos internos de um quadrilátero e verificou que apenas 49 alunos apresentaram uma resposta considerada adequada à questão, ou seja, que, além de corretas, estavam totalmente justificadas. Aliás, mais de 800 estudantes não apresentaram justificativas ou apenas repetiram o enunciado. Fica evidente, portanto, o predomínio do tipo de “[...] prova pragmática com o exercício preferencial de ações diretas sobre determinadas representações concretas dos objetos matemáticos.” (SOUZA, 2009, p. 54).

Ainda no âmbito da Educação Básica, mas em nível de Doutorado, acrescentamos ao diálogo as pesquisas de Carvalho (2014) e Nunes (2011). Em sua pesquisa, Carvalho (2014) descreve o desenvolvimento de um ambiente digital, chamado Consecutivo[12], com o qual teve a intenção de favorecer a formulação de conjecturas e provas, relativas ao tema “teoria dos números” na Educação Básica. Sendo assim, analisaram-se dados de alunos de 9° ano do Ensino Fundamental e de 2° ano do Ensino Médio. A aplicação do teste ocorreu em sessões, cujo tempo aproximado foi de duas horas.

Embora sua concepção de prova se assemelhe à nossa, o foco de sua pesquisa foi o ambiente digital Consecutivo e suas possibilidades de intervenção, quando o tema é validações matemáticas. No ambiente, foram propostas diversas atividades, cuja finalidade variava entre explorar, conjecturar, organizar e provar. Ao analisar os dados produzidos, Carvalho (2014) percebeu que atividades que envolveram conceitos já conhecidos dos estudantes, como no caso de par ou ímpar, parecem ter favorecido a formulação de conjecturas e de justificativas. O mesmo não aconteceu quando as formulações envolveram operações aritméticas, que demandaram conceitos que eles não

[11] Projeto que tinha como proposta investigar a concepção de alunos da oitava série do Ensino Fundamental e primeira série do Ensino Médio sobre a questão da argumentação e prova matemática. Em uma de suas fases foram aplicados questionários em 81 turmas em escolas públicas e provadas de São Paulo (SOUZA, 2009).
[12] Disponível em <https://linux.ime.usp.br/~vitorsrg/consecutivo/index.html> Acesso em 20 de ago. de 2021.

dominavam, pois, os argumentos geralmente foram baseados em exemplos ou casos específicos.

A presença de comandos do tipo “explique porque a regularidade ocorre” fez com que as duplas se engajassem na busca por justificativas, ainda que a maior parte delas tenha sido empírica. No mesmo sentido, atividades que exigiam convencimento impulsionaram os estudantes à procura por um argumento mais formal, porque precisavam atender a uma demanda do enunciado.

Quanto às produções, a autora identificou que, de forma geral, houve um envolvimento com o processo de validação matemática:

> Ao analisar os casos em que os participantes ofereceram justificativas escritas para as conjecturas propostas, notei que 78% das respostas poderiam ser classificadas como *provas*. Isto quer dizer que a maioria das justificativas escritas dos estudantes foram explicações logicamente conectadas as quais expressavam porque determinada conjectura seria ou não válida. Neste contexto, a língua materna foi utilizada para representar as ideias dos participantes em todas as produções. Nos casos em que os estudantes já estavam mais familiarizados com as representações algébricas, as provas escritas foram representadas com um misto de língua materna e álgebra (CARVALHO, 2014, p. 298, grifo da autora).

A autora atribuiu o domínio da linguagem materna às tentativas de tornar compreensível conhecimentos e descobertas. E, “[...] os estudantes afirmaram que argumentos algébricos eram mais difíceis de seguir e poderiam causar confusão se a pessoa não estivesse muito certa a respeito da validade de uma conjectura.” (CARVALHO, 2014, p. 302).

Por fim, Nunes (2011), em sua investigação, propôs uma sequência didática em que analisou a prática da argumentação como método de ensino com alunos do 5° ano do Ensino Fundamental. Desenvolveram-se 10 sessões de aproximadamente 1h30min na sala de aula e no laboratório de informática com seis alunos. O foco do autor foi a produção de argumentações relacionada aos conceitos de área e de perímetro. Ao final, constatou-se que a prática da argumentação favoreceu a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos, confirmando, segundo o autor, sua hipótese inicial de pesquisa. Em suas palavras: “[...] a prática da argumentação se revelou nessa pesquisa como um método que favoreceu a compreensão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas, confirmando nossa hipótese.” (NUNES, 2011, p. 196).

Nunes (2011) sinaliza que em muitos momentos, os alunos tiveram dificuldades para registrar de forma escrita seus argumentos. Então, alguns relatos e explicações foram tomadas apenas de forma oral. Como uma possibilidade de investigação, o autor sugere que sejam analisadas modificações quanto à implementação de argumentações nas aulas de Matemática. Em nossa proposta, buscamos abarcar tal ação, envolvendo alunos que se encontram no 9° ano do Ensino Fundamental. Distanciamo-nos um pouco dessa abordagem no que se refere às argumentações, uma vez que ele as trata como um método, uma alternativa metodológica. Em nosso caso, não nos preocupamos com este aspecto em específico, pois entendemos que a utilização de validações matemáticas em sala de aula deve ocorrer sempre que possível, independentemente do conteúdo, visto estar relacionada a um processo.

Diante dessas considerações, quanto às atividades e à produção de provas realizadas pelos alunos, observamos que, em algumas situações, não há compreensão sobre a necessidade, isto é, sobre o porquê de se apresentar validações (SANTOS, 2015; PICELLI, 2010) e, neste sentido, o trabalho do professor ficou evidente (PICELLI, 2010; OLIVEIRA, 2009; ARAÚJO, 2007). Além disso, depreendemos a importância do conhecimento matemático do aluno sobre os conteúdos em jogo na situação, bem como a compreensão do enunciado. Perguntas direcionadas (LIMA, 2015; KRAKECKER, 2016), a utilização de exemplos, números, figuras, entre outros (MELLO, 1999), ou a exigência de justificativas no enunciado (CARVALHO, 2014), podem contribuir neste sentido, a depender do que se pretende.

No que se refere às dificuldades, de maneira geral, as pesquisas indicam que a maioria das validações permanece no nível empírico (LEANDRO, 2006; SOUZA, 2009). Entretanto, ao analisar as produções dos alunos, foi possível identificar elementos mais específicos, como é o caso do conhecimento do conteúdo em si (OLIVEIRA, 2009; CARVALHO, 2014) e da utilização de conhecimentos algébricos necessários a algumas generalizações (SANTOS, 2015; LIMA, 2015). Essa última questão pode estar relacionada ao tratamento da Álgebra propriamente dita, como também à ressignificação/reinvestimento necessário em determinadas atividades. A compreensão do enunciado também pode influenciar no que se refere à apresentação de validações, visto que nem sempre há um entendimento claro do que é para ser realizado (SANTOS, 2015). Dentre as dificuldades identificadas, podemos citar também equívocos quanto ao significado da atividade de provar (LIMA, 2015), e ao estabelecimento de relações entre linguagem materna, linguagem matemática e a organização da escrita de uma validação (ARAÚJO, 2007; MELLO, 1999; CARVALHO, 2014; KRAKECKER, 2016).

Em quase todas essas investigações, podemos observar que, de modo geral, as produções dos estudantes são de nível pragmático, havendo evoluções quanto ao tipo de prova no decorrer da interação pesquisador/aluno. Para superar esse desafio, observamos indicações para um trabalho que seja desenvolvido a longo prazo (OLIVEIRA, 2009; NUNES, 2011; KRAKECKER, 2016) para que, aos poucos, as validações passem a fazer parte do trabalho dos alunos.

Próximo ao entendimento de Oliveira (2009), tomamos a atividade matemática de provar como sendo um processo, porque, quando apresentada por primeiro, o debate pode se encerrar antes mesmo de ter início, e a demonstração pode assumir uma caraterística impositiva. Quando se trabalha desta última forma, a validação não explica e nem justifica, pois ela já está pronta, acabada e não há praticamente nada que o aluno possa fazer. Isso não significa deixar de discutir e de incentivar um processo de validação que envolva elementos de generalidade, porque é a partir dele que o estudante poderá experienciar particularidades da atividade de provar.

Consideramos, porém, que a apresentação de provas deve respeitar a maturidade e as especificidades do público com o qual se está trabalhando e que a aprendizagem deve ser preocupação primária em relação à apresentação de demonstrações. Mais importante do que enunciar aos alunos as funções de uma prova, é a vivência destas mesmas funções, nos processos de ensino e de aprendizagem, de modo contínuo e processual, adequado ao nível da turma. Enunciar, é o que geralmente fazemos e poderíamos nos perguntar: o que disso *permanece* com nossos alunos? Por isso defendemos a importância de se proporcionar a eles diversas e diferentes experiências com as validações, desde o trabalho de elaboração de conjecturas até a discussão de uma prova mais complexa, independentemente do conteúdo, de forma adequada ao ano de estudo.

3.5 Considerações

Neste capítulo, contextualizamos pesquisas que se relacionam com o tema validações matemáticas. De forma geral, elas nos sugerem que é comum que estudantes, licenciandos e, até mesmo, professores apresentem dificuldades relativas ao processo de produção de provas e ao reconhecimento de suas limitações, pois independentemente do nível de ensino, a maioria das produções foram pragmáticas. Elas também sinalizaram a importância de se discutir e se proporcionar diferentes experiências que envolvam provas matemáticas aos alunos, visto que muitos relataram não terem tido contato ou não lembrarem desse tipo de atividade.

Assim, identificamos que são poucas as investigações que desenvolveram propostas para além da Geometria. Também sentimos falta de intervenções que sejam realizadas na sala de aula e por um período de tempo maior do que algumas sessões, como aquela desenvolvida por Oliveira (2009), na qual se observou que, apesar da grande dificuldade dos alunos relacionadas à produção de validações, eles foram percebendo, aos poucos, a necessidade de provar conjecturas. Esses são aspectos que nos distanciam das pesquisas citadas, tendo em vista que discutimos validações matemáticas que permearam diversos conteúdos no decorrer do ano letivo de 2020. Não somente isso, pensamos e desenvolvemos atividades para serem aplicadas durante as aulas de Matemática de turmas de 9° ano que estavam sob nossa regência.

Ao longo da elaboração de nossas atividades, além de elementos advindos do Modelo de Tipologia de Provas e da Teoria das Situações Didáticas, também levamos em consideração sugestões e apontamentos deste capítulo. Por exemplo, uma atenção ao enunciado e aos conhecimentos prévios dos estudantes, possíveis dificuldades com a utilização da álgebra e a utilização de atividades mais direcionadas ou não, conforme objetivo previamente estabelecido.

4. PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA: HISTÓRIA E CONTEXTO

[...]
— ó delicioso vôo!
Ela será encontrada miraculosamente incólume na calçada,
Outra vez criança...
[...]

Apresentamos neste capítulo o percurso metodológico de nossa investigação. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso e, nesse sentido, contamos, de maneira descritiva a “história”, não só de nosso processo de doutoramento, mas também, dos movimentos que fizemos em meio à produção de nossos dados. Dessa forma, buscamos caracterizar a pesquisa qualitativa, o contexto em que a experimentação ocorreu, assim como os alunos participantes. Em seguida, trazemos as atividades que desenvolvemos junto deles, ao logo das Fases II e II.

Para nós, relatar esse processo de constituição é também uma maneira de deixar claro o que pontuamos logo no início deste texto: o contexto e as pessoas envolvidas importam.

4.1 Caracterizando nossa pesquisa qualitativa

Nossa investigação é de cunho qualitativo. Em uma pesquisa qualitativa, aqueles que participam da investigação são constantemente questionados sobre como interpretam as experiências às quais são submetidos e sobre a forma segundo a qual estruturam aquilo que vivenciam (BODGAN; BIKLEN, 1994). Por isso, pode-se dizer que ela “[...] assume muitas formas e é conduzida em múltiplos contextos.” (ibidem, p. 16). Nesses quase quatro anos, perpassamos pelo estudo, preparação, idealização, (re)organização e (re)elaboração de nossa proposta, conforme o objetivo de investigarmos a produção de validações matemáticas de estudantes do 9° ano do Ensino Fundamental – mais especificamente, suas produções ao longo de, pelo menos, um ano letivo.

Diante dos dados que foram produzidos por meio de nossa interação junto aos estudantes, buscamos priorizar o significado, a compreensão e a discussão de ações tanto as nossas quanto as dos alunos, evidenciando dados e informações descritivas. Todas essas características estão relacionadas à pesquisa qualitativa, visto tratar-se de um "[...] caminho para escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, como também, procura fazer sentido de discursos e narrativas que estariam silenciosas." (D'AMBROSIO, 2013, p. 21).

Bodgan e Biklen (1994, p. 47) apresentaram cinco características fundamentais de uma pesquisa qualitativa, sendo que a primeira delas é a de que "[...] a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.". Em nosso caso, o ambiente pesquisado foi principalmente a sala de aula reconfigurada em conformidade com as aulas não presenciais. Nesse viés, estávamos inseridos neste espaço, sendo pesquisadora e, ao mesmo tempo, professora regente de quatro turmas de 9° anos atribuídas em uma escola pertencente à rede pública estadual de ensino no Estado de Mato Grosso.

A segunda característica apontada pelos autores é a de que os dados são principalmente descritivos, podendo ser obtidos por meio de entrevistas, notas de campo, fotografias, imagens, vídeos, entre outros:

> Não é raro passarem despercebidas coisas como os gestos, as piadas, quem participa numa conversa, a decoração de uma sala e aquelas palavras especiais que utilizamos e às quais os que nos rodeiam respondem. A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo. (BODGAN; BIKLEN, 1994, p. 49).

Desse modo, uma parte dos dados se constitui a partir da descrição de todas as ações que foram desenvolvidas com os estudantes. Além disso, acrescentam-se registros fotográficos, *prints*, conversas, e duas breves entrevistas ocorridas em duas Fases, conforme explicamos mais adiante. Então, procuramos relatar como nossa experimentação foi sendo conduzida, por entendermos que a descrição também funciona como uma maneira de produção de dados, especialmente "[...] quando se pretende que nenhum detalhe escape ao escrutínio." (idem). Ainda no que se refere à pesquisa qualitativa e à priorização de procedimentos descritivos, Borba (2004, p. 2) escreve que estas ações têm a ver com a visão do conhecimento que, neste caso, "[...] admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é considerado ‘verdadeiro’, dentro desta concepção, é sempre dinâmico e passível de ser mudado.”.

A terceira característica elencada é a de que os pesquisadores estão mais interessados no processo do que no produto em si. Intencionamos, justamente, investigar o processo de produção de validações, priorizando caminhos, escolhas e raciocínios empregados pelos estudantes. Para nós, muito mais importante do que a prova em si é o processo pelo qual ela foi constituída, dificuldades identificadas, compreensões e descobertas ocorridas durante o desenvolvimento da atividade matemática. Utilizamos essa ideia, tanto para explicitar como esta pesquisa foi sendo constituída, quanto em relação aos dados, ou seja, descrevendo e analisando o processo dos próprios alunos.

A quarta característica apontada por Bodgan e Biklen (1994) é a tendência de se analisar dados de forma indutiva, isto é, os construtos são elaborados à medida que as informações vão sendo obtidas e analisadas. Não se investiga com o intuito de confirmar ou informar hipóteses tidas a *priori*, ou seja, “[...] está-se a construir um quadro que vai ganhando forma à medida que se recolhem e examinam as partes.” (idem, p. 50). Então, com base em nosso referencial teórico, elaboramos, aplicamos e, de forma indutiva, analisamos as produções de dois alunos. Buscamos levar em conta o contexto em que elas foram desenvolvidas, possíveis funções, níveis e tipos de provas, como também as próprias atividades.

A quinta característica é a importância dada ao significado, em que se busca a compreensão de como diferentes pessoas atribuem sentido à vida e às situações que vivenciam. Tentamos analisar os dados que foram produzidos, buscando compreender como os alunos envolvidos atribuíram sentido às atividades de validação que lhes foram propostas, com vistas à análise deste processo. Sem deixar de lado o contexto maior em que eles e nós estávamos inseridos, qual seja, uma Fase de paralização total de aulas e, em seguida, uma Fase de aulas não presenciais.

Investigações qualitativas que buscam conhecer e compreender a especificidade de uma entidade, de uma pessoa, de uma instituição ou do próprio processo de produção de provas, como intencionamos, podem ser caracterizadas como um estudo de caso (PONTE, 2006; YIN, 2001). Nesse tipo de pesquisa qualitativa, debruça-se sobre uma situação específica que se acredita ser única, pelo menos em determinados aspectos, buscando saber seus elementos essenciais. Em nossa investigação, essa situação específica se caracteriza pela análise do processo de produção de validações matemáticas de dois alunos que cursam o 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Mato Grosso, durante o desenvolvimento de aulas não presenciais, em meio a um cenário pandêmico. De acordo com Ponte (2006),

> O que explica que o caso seja como é são sempre as *determinantes internas*, a sua história, a sua natureza, as suas propriedades próprias, bem como as *influências externas*, próximas e distantes, directas e indirectas que recebe do seu contexto. Por isso, no estudo de um caso, seja ele qual for, é sempre preciso dar atenção à sua *história* (o modo como se desenvolveu) e ao seu contexto (os elementos exteriores, quer da realidade local, quer de natureza social e sistémica que mais o influenciaram) (PONTE, 2006, p. 5, grifos do autor).

Em face do exposto, para além das especificidades dos estudantes e da sequência de atividades e das ações, tanto as nossas quanto as deles, por exemplo, não há como deixar de enfatizar a *história*, isto é, a realidade que se impôs conforme fomos constituindo nossa investigação. Nesse mesmo sentido, concordamos com D'Ambrósio (2013, p. 21), quando escreve "eu diria que é mais apropriado 'relatar sobre pesquisas'. [...]". Para o autor,

> Um grande problema que percebemos em diversas pesquisas é que, muitas vezes, esse caminho não é apresentado pelo autor. Talvez ele pense que aquele caminho percorrido até o estabelecimento da pergunta tenha sido cheio de enganos, não merecendo ser divulgado, e não perceba que a pergunta é a síntese desse caminho, ou seja, que todo processo de construção da pergunta faz parte da própria pergunta (D'AMBROSIO, 2013, p. 33).

Tomamos como princípio de que a descrição dos caminhos que percorremos seja importante de ser realizada, porque ela faz parte do processo de constituição de nossa questão de pesquisa. Mas não somente isso. Trata-se de um entendimento, segundo o qual "[...] o conhecimento não é isento de valores, de intenção e da história de vida do pesquisador, e muito menos das condições sócio-políticas [*sic*] do momento. (BORBA, 2004, p. 3). Além disso. segundo Ludke e André (1986, p. 30), "a parte descritiva compreende um registro detalhado do que ocorre 'no campo'.", o que envolve a descrição dos sujeitos, reconstrução de diálogos (palavras, gestos, observações), descrição de locais, descrição de eventos especiais, descrição das atividades e os próprios comportamentos do observador.

Buscando atender esses elementos, mesmo tentando evitar, em alguns trechos do tópico seguinte, poderá ser percebida uma interlocução entre a fala da pesquisadora e a fala da professora, pois não há como separar totalmente estes papéis. Essa composição foi acontecendo, porque muitas das decisões e dos rumos que seguimos se deram em função do que estava ocorrendo no ambiente da escola, uma vez que a parte experimental desta investigação havia sido organizada para ser realizada neste espaço.

4.2 Contexto, alunos participantes e procedimentos: uma história a ser contada

Inicialmente, tínhamos a hipótese de que algumas atividades, elaboradas de maneira estratégica, pudessem favorecer a produção de provas matemáticas. Então, pensamos em desenvolver, aplicar e analisar uma sequência didática com um grupo de estudantes do Ensino Fundamental, durante um período determinado de tempo. Após discussões realizadas nos mais diversos espaços, como, por exemplo, nas disciplinas do curso, nas reuniões de orientação ou nas conversas com colegas, o projeto foi sendo alterado.

Aos poucos, a possibilidade de desenvolver uma pesquisa no chão da sala de aula, com nossos próprios alunos, discutindo com eles validações matemáticas sempre que possível, independentemente dos temas abordados, foi ganhando forma. A ideia era a de que desenvolvêssemos nossa prática docente e, de forma paralela, nossa experimentação de tal forma que não fosse possível uma separação entre o que seria "atividade de matemática" e "atividade da pesquisa". De um ponto de vista mais amplo, essa separação nem sequer faz sentido, porque atividades de validação são, ou ao menos deveriam ser, uma atividade matemática.

Pensamos em turmas de 8° ano, pois, neste nível de ensino, identificamos alguns conteúdos/temas que poderiam ser mais favoráveis à elaboração de conjecturas e de validações. Por exemplo, nas unidades temáticas Número e Álgebra poderíamos incluir questões como: "É verdade que o resultado da soma de dois números pares será sempre par?", além de explorarmos a identificação de padrões, conforme orientações curriculares (BRASIL, 2018). No campo da Geometria, tínhamos a possibilidade de discutirmos validações referentes a ângulos, ângulos internos e externos de polígonos, número de diagonais de um polígono, como também propriedades de quadriláteros, polígonos de modo geral e relações envolvendo área, em conformidade com habilidades a serem desenvolvidas, segundo a Base Nacional Comum Curricular.

Assim, no ano de 2019, pudemos iniciar nossa produção de dados com estes alunos, em uma escola da rede pública estadual de Mato Grosso, durante as aulas presenciais de Matemática, trabalhando com os temas Conjuntos numéricos e Expressões algébricas. Por razões adversas[13], não foi possível continuar este trabalho e o consideramos como uma pré-experimentação, compondo o que mais tarde denominaríamos de *Fase I* da investigação.

Na Fase I, tivemos a oportunidade de vivenciar esse processo que envolve a organização e a aplicação de atividades de validação de forma presencial, discutindo com os estudantes suas principais dúvidas, dificuldades e inquietações. Para além disso, nossas angústias, enquanto professores e pesquisadores, também se evidenciaram, quando pensávamos, por exemplo, sobre os dados que obteríamos, os conteúdos que tínhamos que trabalhar, a produção de provas ou a gestão da sala de aula. Pudemos interagir e dialogar sobre suas formas de pensar, suas ideias e suas conjecturas. A expectativa que tínhamos era a de que desse *tudo certo* durante a experimentação que estava se iniciando, afinal estávamos colocando em prática o que defendíamos – e defendemos – teoricamente. Isto é, que conseguíssemos desenvolver nossas atividades junto aos estudantes, que pudéssemos discutir junto deles validações matemáticas possíveis, cada vez mais elaboradas. Hoje, buscamos refletir sobre o que exatamente significa dar *tudo certo.* Confiantes de que ainda poderíamos continuar o que já havíamos iniciado, passamos a reorganizar nossa proposta para que ela viesse a ser implementada com os mesmos estudantes, que agora estariam no 9° ano.

No entanto, antes disso, sentimos necessidade de ouvi-los sobre as atividades desenvolvidas ao longo da Fase I. Essa ação se justifica devido ao nosso objetivo geral consistir em investigar o processo de validação matemática desenvolvido pelos estudantes e, embora seja necessário estabelecer um recorte temporal, na prática, buscamos desenvolver um trabalho contínuo. Nesse sentido, o que os alunos tinham a nos dizer? Entrevistamos alguns deles, considerando as questões norteadoras: “Você notou ou lembra de algo diferente nas aulas de Matemática neste ano?”; “Dos exercícios e das atividades, o que você lembra e, o que achou?”; “Você se lembra da utilização dos

[13] Vivência de uma greve com duração de 75 dias e a realização de projetos de intervenção solicitados pela gestão escolar.

gravadores? Conte um pouco sobre isso!"; "O que você achava das atividades desses dias, lembra?"; "O que você achava das atividades, em que a gente precisava explicar, justificar...?". Esses foram os direcionamentos da *Entrevista 1*.

É importante esclarecer que, embora tenhamos tentado sempre manter atividades de validação presentes na sala de aula, durante a entrevista, não tínhamos grandes expectativas para além do objetivo explicitado anteriormente, qual seja: ouvi-los.

Relatamos essas ações porque elas fizeram parte do processo de constituição de nossa pesquisa, e porque elas nos ajudam a esclarecer que as atividades aplicadas aos alunos analisados no decorrer das demais Fases, não lhes eram totalmente estranhas. Portanto, quando nos referíamos à palavra conjectura, por exemplo, devido à Fase I, esperávamos que eles já tivessem noções sobre seu significado. Essa pré experimentação contribuiu para que seguíssemos planejando nossas intervenções, pois percebemos que seria importante inserir outras atividades de validação matemática em nossa prática docente, não se restringindo àquelas que gostaríamos de analisar neste relatório de tese. Assim, possibilitando que elas estivessem sempre presentes. Além disso, o uso dos gravadores precisaria de mais atenção, pois, na dinâmica da sala de aula, alguns registros ficaram incompreensíveis. Seria preciso mais cuidado em relação aos conhecimentos prévios dos alunos, porque percebemos que, em algumas situações, uma breve explicação anterior à atividade, sobre determinado conceito, foi insuficiente para que os estudantes obtivessem êxito.

No início do ano de 2020, estávamos nos organizando para o retorno dos alunos na mesma escola em que o trabalho já havia sido iniciado, para que pudéssemos dar continuidade à parte experimental do estudo de caso. Mas, como se sabe, aspectos sociais e políticos podem interferir na realização de uma pesquisa conduzindo pesquisadores a cenários que não foram previamente pensados e/ou a direções não planejadas (BORBA, 2004). Quando a investigação está atrelada à sala de aula de Matemática, essas interferências se acentuam porque muitos são os desafios da realidade que nela se impõe.

Em decorrência da Pandemia causada pelo novo Coronavírus, as aulas nas escolas da rede estadual de Mato Grosso foram suspensas conforme decreto Nº 407, de 16 de março de 2020. Com toda sensibilidade que a situação exigia (e ainda exige), convidamos[14] alguns estudantes com os quais tínhamos contato para que pudessem participar da nossa *Fase II*.

Nesse sentido, interagimos via WhatsApp e de forma informal com dois estudantes no período entre março e julho de 2020. Ao todo, aplicamos um total de seis atividades. Mesmo eles tendo participado da Fase I e de nossa Entrevista 1, salientamos que não houve critério de escolha a não ser o fato de terem sido os únicos a aceitarem nosso convite e a realizarem todas as atividades desta etapa da pesquisa.

Considerando a fundamentalidade das *influências externas*, da *história* e do contexto (PONTE, 2006), além da contribuição de detalhes como gestos ou atitudes, para melhor compreensão de nosso estudo de caso, não há como deixar de registrar a particularidade desta Fase II.

Em média, a cada duas semanas passamos a enviar atividades relativas aos temas Potências e Raízes separadamente para cada um dos estudantes, para que eles pudessem realizá-las conforme suas possibilidades e disponibilidade. A escolha por este tema se deu devido ao alinhamento com o material de estudos, disponibilizado pela Secretaria Estadual de Educação do estado de Mato Grosso que, embora não fosse obrigatório, estava sendo desenvolvido por eles. À medida que os estudantes nos enviavam suas resoluções, buscávamos compreender como pensaram e, quando possível, devolvemos outras perguntas, relacionadas ao que produziram, em conformidade com nosso referencial teórico.

Em nossas análises, será possível perceber que as primeiras interações foram tímidas, tanto por parte dos estudantes quanto nossas. Além de estarmos nos adaptando a esta nova forma de comunicação, tínhamos receio de fazer todas as perguntas que gostaríamos, porque eles estavam participando voluntariamente, e estávamos em um contexto delicado no que se refere à pandemia. Poderíamos nos perguntar, por exemplo, se estes estudantes tinham acesso às ferramentas tecnológicas adequadas para seus estudos ou se estavam passando por algum tipo de dificuldade. Embora sejam situações que não possamos controlar, não havia como desconsiderá-las. Esses elementos, relativos à comunicação e às interações entre pesquisador e alunos, via WhatsApp, também foram apontados por Rosa (2022), que desenvolveu uma intervenção em uma turma de 7° ano

[14] O convite foi enviado em um grupo de WhatsApp do qual faziam parte alguns estudantes de 9° ano. O grupo foi constituído para esclarecimentos e dúvidas sobre o ano letivo que estava se iniciando. Tínhamos o contato de alguns alunos que, por sua vez, foram inserindo outros colegas.

do Ensino Fundamental, considerando o tema "números inteiros". Em sua pesquisa, o autor sinaliza que, quando ocorreram discussões síncronas, a resolução das atividades propostas por parte dos alunos ocorreu um pouco melhor. E aqui adiantamos, o mesmo ocorreu conosco, ao longo da Fase II e Fase III, sobre a qual passamos a discorrer.

Tão logo soubemos do início do ano letivo de forma não presencial, a partir de agosto do ano em questão, decidimos levar adiante a intenção inicial de atrelar nossa pesquisa à sala de aula, desenvolvendo nossas atividades com todos os estudantes de 9° ano que estivessem sob nossa regência. Demos início à *Fase III*, em que desenvolvemos e aplicamos 14 atividades de validação matemática entre os meses de setembro e dezembro de 2020. Elas foram inseridas nas apostilas mensais que elaborávamos e que eram disponibilizadas para acompanhamento e cumprimento da carga horária letiva. Sendo assim, foram explorados os temas Potências e Raízes, que se repetiu, devido à intenção de trabalharmos com todos os alunos como parte da carga horária letiva; Equações polinomiais do segundo grau; Funções e Razão e Proporção. Em tempo, registra-se que os alunos não tinham conhecimento sobre quais eram as atividades que consideraríamos na análise dessa pesquisa, pois elas eram propostas como qualquer outra atividade de Matemática a ser realizada, em meio às apostilas que elaborávamos.

Nossa experimentação agora *daria certo?*

Tínhamos a expectativa de que, mesmo de forma não presencial, pudéssemos realizar discussões profícuas quanto às atividades propostas, pois, de forma geral, conhecíamos os estudantes, já que tínhamos estado junto deles presencialmente na Fase I, tínhamos um bom relacionamento e poderíamos interagir em tempo real, via plataforma Microsoft Teams[15].

No momento de preparação das apostilas e, portanto, das atividades de validação que proporíamos, foi necessário que permanecêssemos atentos ao contexto atípico, em que estaríamos distantes uns dos outros. Muito além disso, essa nova forma de ensinar e de aprender com a qual tivemos que nos adaptar, fez que com que pensássemos naqueles alunos que passariam a estudar sozinhos, sem a possibilidade de interagir conosco ou de utilizar os recursos da internet, por exemplo. Preocupamo-nos bastante com o enunciado, que deveria estar claro, com a inserção de mais exemplos, sugestões ou dicas, e com o

[15] Aplicativo que possibilita interações como vídeo chamadas, postagem de materiais ou devolutivas, criação de questionários, formulários, entre outros.

próprio conhecimento prévio para as atividades, o qual deveria fazer parte do repertório dos alunos. Por isso, (re)adaptamos algumas de nossas atividades, que passaram a ficar mais descritivas e direcionadas, assim como repensamos a pertinência de outras.

Com o passar do tempo, também identificamos a necessidade de inserirmos nas apostilas pequenos textos explicativos e exemplos sobre possíveis formas de se apresentar justificativas. Isso porque não tínhamos condições de discutir elementos de provas intelectuais com aqueles alunos que se dedicavam apenas ao ensino apostilado, sem interagir conosco de nenhuma outra forma. No contexto pandêmico, de aulas não presenciais, os tempos pareciam ser diferentes entre nós, os alunos e a escola. Sempre elaborávamos as apostilas com bastante antecedência, pois essa era uma demanda da instituição. Até o momento em que os estudantes recebiam este material, muitas situações já haviam sido repensadas, ou revistas por nós, mas já não podíamos mais fazer alterações. Por exemplo, a quantidade de atividades, que nos primeiros meses foi excessiva ou ainda, a inserção dos textos explicativos, que conseguimos contemplar somente nas últimas apostilas. Exemplos destes pequenos textos podem ser observados nos Apêndices A e B.

Confessamos que as escolhas ou as adaptações realizadas no decorrer da experimentação não foram tão simples de serem realizadas, pois muito além da distância física, estabeleceu-se um outro tipo de distância entre nós e a maioria de nossos alunos. Muito nos angustiava o não contato, a não presença, a não conversa, a não interação.

Aos poucos, percebemos que nossas expectativas iniciais não estavam se traduzindo em ações. Embora tivéssemos preocupações legítimas em relação à aprendizagem dos estudantes, a continuidade da produção de dados da pesquisa não estava ocorrendo como gostaríamos. Muitas apostilas estavam sendo devolvidas com pouca ou nenhuma atividade realizada. Poucos eram os estudantes que interagiam conosco no WhatsApp, e igualmente poucos eram aqueles que participavam das aulas na plataforma Microsoft Teams. Não foram poucos os momentos em que, por exemplo, nenhum aluno entrou em nossa aula online.

Segundo Ponte (2006), ao se realizar um estudo de caso, busca-se observar a essencialidade da situação, assim como suas características com o intuito de compreender globalmente o que é de interesse, não sendo possível controlar os acontecimentos ou comportamentos dos participantes. Sendo assim, julgamos fundamental esclarecer que, mesmo diante de nossa intenção de analisar interações na plataforma Microsoft Teams, nossas interações neste espaço foram tímidas, como também as participações dos alunos. Por isso, para a análise dos dados obtidos, foi possível considerar essencialmente dados obtidos por meio do WhatsApp, e documentos impressos contendo as resoluções dos alunos. A título de exemplo, houve uma vez que dedicamos um tempo para preparação e estudo sobre um determinado tema, visto que havíamos combinado de discuti-lo durante uma aula on-line. Porém, chegado o dia e horário estabelecido, percebemos que apenas um aluno iria participar. Tentamos ficar firmes, porque era um aluno que sempre se preocupava em participar de tudo que propúnhamos. Mas, ao final, nos escorreram lágrimas e os sentimentos de tristeza, de incompetência e de insegurança vieram à tona. Questionamo-nos sobre o que poderíamos fazer para modificar tais circunstâncias, sem conseguirmos soluções.

Ao final do ano letivo, estávamos finalizando nossa Fase III. Selecionamos, então, os estudantes utilizando o critério de que tivessem realizado todas as atividades de validação que propusemos, independentemente de suas formas de interação – somente na apostila ou conjuntamente via WhatsApp. Obtivemos um total de quatro alunos. Dois deles foram acompanhados somente na Fase III. Em relação aos outros dois, tivemos a oportunidade de estar junto deles desde a Fase I, pois foram os mesmos que já haviam sido nossos alunos no ano letivo de 2019 e os voluntários participantes da Fase II.

Mesmo em processo de finalização, ainda tínhamos a sensação de que era preciso investigar mais: o que ficou? O que marcou? Convidamos todos os quatro estudantes para uma segunda entrevista, doravante *Entrevista 2*, com a qual gostaríamos de compreender melhor suas impressões sobre as atividades de validação matemática desenvolvidas. Realizamos questionamentos como: "Percebemos que você procurou explicar suas respostas, poderia falar um pouco sobre isso?"; "Quando você não conseguia responder alguma questão, pesquisava na internet? Como você fazia?"; "Em várias atividades, pedia-se para realizar testes ou identificar regularidades. Você se lembra de ter ficado desconfiado, testado para outros valores ou respondia de forma direta?"; "Você tinha alguma dificuldade com essas questões?", além de questões sobre alguma atividade em específico.

Devido à quantidade de dados obtidos ao longo de nosso estudo, optamos pela análise das produções dos dois estudantes que estiveram conosco desde a primeira Fase, os quais denominamos pelos nomes fictícios de Juca e Lili. Essa escolha se deu em decorrência dos seguintes motivos: como dissemos, pela quantidade de dados/atividades a serem analisadas e pelo fato de termos acompanhado esses alunos ao longo das Fases I, II e III e Entrevistas. Acrescenta-se: essa opção nos possibilitaria uma análise mais aprofundada de seus processos de produção de validações matemáticas, que é o objetivo geral desta investigação. Outra escolha que fizemos foi a priorização das produções desses dois alunos relativamente às Fases II e III, porque, como adiantamos ao longo da escrita, a Fase I nos serviu como uma pré-experimentação.

Todos esses movimentos nos trouxeram até a seguinte questão de pesquisa: Como estudantes de uma turma de 9°ano de Ensino Fundamental de uma escola pública do estado de Mato Grosso desenvolvem e apresentam validações matemáticas?

Para responder tal questionamento, analisamos dados dos estudantes, tendo como objetivo geral investigar processos de validação matemática desenvolvidos por alunos de uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Mato Grosso, no decorrer do ano letivo de 2020.

De forma específica, nossos objetivos consistem em:

- Identificar como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas para suas afirmações e/ou conjecturas;
- Classificar provas matemáticas que foram produzidas pelos alunos;
- Identificar elementos relacionados às atividades desenvolvidas pelos estudantes, que pudessem favorecer a produção de validações.

Na sequência, tecemos algumas impressões sobre eles, pois embora tenham sido selecionados conforme critérios acima mencionados, esses alunos acabaram não sendo aleatórios. Eles estiveram conosco desde a Fase I e consideramos importante para nosso estudo de caso e para o nosso objetivo explicitar um pouco mais sobre suas características.

Sobre o Aluno Juca

Conhecemos Juca desde o ano de 2019, quando participou da Fase I da investigação. Dedicado, responsável, um pouco impulsivo, sempre tentando resolver as atividades rapidamente, mas com um ótimo desempenho. Em seu caderno, desde aquela época, percebíamos que todo e qualquer espaço poderia ser considerado como rascunho para algum cálculo. Em nossa Entrevista 1, quando o questionamos sobre atividades que solicitavam explicações, Juca afirmou que: "*Eu não acho dificuldade de explicar. Eu gosto de explicar, se eu sei eu explico... Eu aprendi desde o sexto ano que tudo que você colocar você tem que explicar...*".

Em relação à importância desta ação, Juca disse que ao explicar a resposta, o conteúdo fica mais "*especificado*", permitindo lembrar em caso de esquecimento, "*[...] tipo eu fiz um negócio no caderno aí eu fui olhar, não tinha nada, eu não tinha anotado nada e eu tinha... tinha esquecido como é que se fazia, tive que perguntar para a senhora*".

Na Entrevista 2, disse que passou por algumas dificuldades ao longo do período de aulas não presenciais, mas que com apoio de sua família, conseguiu se dedicar aos estudos e não deixou nenhuma atividade em branco. Ele contou, também, que às vezes se empolgava e respondia quase toda a apostila de uma só vez. Para respondê-la, Juca teve a possibilidade de acompanhar e interagir via WhatsApp em quase todas as aulas que tivemos. Dessa forma, é importante registrar que ao longo da Fase III, o aluno era um dos poucos que nos procurava no horário estabelecido para a aula de Matemática, e enviava o registro fotográfico da resolução das atividades que solicitávamos que fizessem naquele dia. Em quase todas as ocasiões, tivemos a oportunidade de interagir simultaneamente.

Sobre a Aluna Lili

Conhecemos Lili desde o ano de 2019, quando foi nossa aluna, participando da Fase I da investigação. Atenta, dedicada, participativa, responsável e com um ótimo desempenho nas atividades de Matemática. Em nossa Entrevista 1, disse que considera importante questões que solicitem explicações sobre a resposta dada, pois pode ser uma forma de mostrar sua opinião, o que acha sobre elas. Afirmou ainda que, em certas situações, acha um pouco difícil produzir explicações, pois tem que procurar as justificavas, mas que, ao mesmo tempo, elas podem ajudar na compreensão do assunto, "*[...] porque, tipo assim... Às vezes não ficou bem esclarecido né! Aí a gente vai explicar e pode tirar dúvidas também, enquanto a gente tenta explicar".*

Durante o período de paralização total de aulas presenciais e aulas não presenciais, a aluna disse, na Entrevista 2, que sua rotina de estudos era variada, conforme o horário das aulas e o tempo que tinha disponível. Durante a realização das apostilas, buscava interagir com os professores via WhatsApp apenas quando apresentava dúvidas. Relatou que teve facilidade, que respondeu rapidamente a apostila de tema Funções, e que gostou "*[...] do plano cartesiano, um dos meus conteúdos favoritos"*, referindo-se à apostila mensal de novembro.

4.3 Instrumentos utilizados para produção de dados

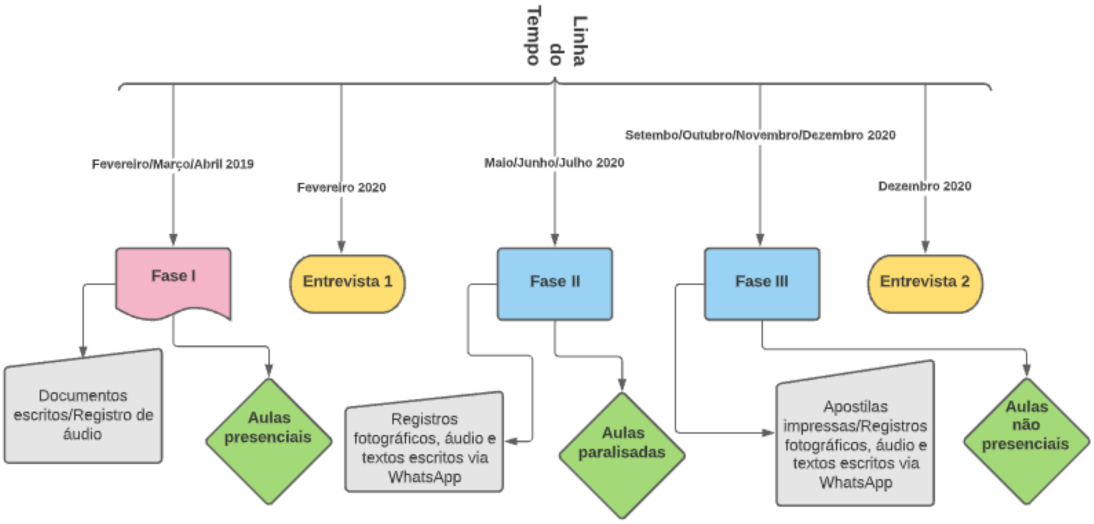
Dado o contexto de nossa investigação, conforme descrevemos na seção anterior, no decorrer das Fases II e III, foram utilizados os seguintes instrumentos, com vistas à produção de dados:

- Apostilas impressas: de acordo com Ludke e André (1986), a análise de documentos pode fornecer evidências e fundamentar considerações sobre o objeto de estudo. Os documentos podem contribuir para o entendimento do contexto analisado, podendo ser redações, cartas ou demais produções escritas, por exemplo. Todos podem ajudar na compreensão do problema, a partir da perspectiva do indivíduo analisado. Nesse sentido, foram consideradas as resoluções das atividades de validação matemática que aplicamos em meio às apostilas impressas, disponibilizadas aos alunos durante o período de aulas não presenciais.
- Registros fotográficos, áudios e textos escritos via WhatsApp: devido ao desenvolvimento de nossa parte experimental ter se dado em meio à pandemia, foi necessário nos adaptar a novas formas de comunicação. Sendo o WhatsApp um aplicativo de mensagens instantâneas, utilizamo-lo para dialogar com os alunos a respeito das atividades aplicadas. Por meio dele, foi possível enviar e receber *feedbacks*, dúvidas ou perguntas, além de registros fotográficos, áudios ou mensagens escritas, os quais consideramos na ocasião da análise.
- Entrevista: realizamos duas breves entrevistas com o intuito de saber o que os estudantes tinham a falar sobre a especificidade do processo de validação matemática. Segundo Manzini (1991), a entrevista se mostra adequada quando se busca conhecer informações relativas à memória ou ao pensamento dos participantes, como pretendíamos. Ainda, conforme

Ludke e André (1986), este procedimento permite que sejam feitos, por exemplo, correções ou esclarecimentos, e, por isso, na segunda entrevista que ocorreu ao término da Fase III, aproveitamos para fazer algumas perguntas específicas sobre algumas das produções dos alunos, tendo em vista nosso intuito de melhor compreender seus processos de produção de validações.

Uma síntese das Fases da pesquisa e da aplicação dos instrumentos acima mencionados pode ser representada por meio do esquema:

Figura 2 – Linha do tempo da investigação



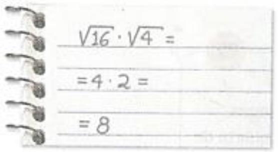
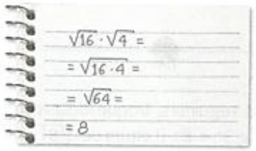
Fonte: Elaborado pelos autores

4.4 Atividades desenvolvidas

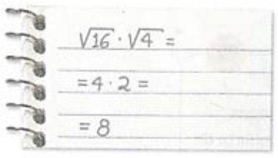
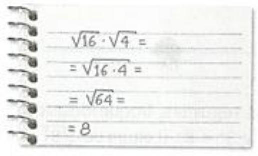
Buscando atender nossos objetivos, assim como o questionamento geral desta pesquisa, qual seja, como estudantes de uma turma de 9°ano de Ensino Fundamental de uma escola pública do estado de Mato Grosso produzem e apresentam validações matemáticas, desenvolvemos e aplicamos 6 atividades de validação matemática no decorrer da Fase II. Esta, compreendeu os meses de maio, junho e julho de 2020. Após o início oficial do ano letivo no mesmo ano, demos início à Fase III, em que foram desenvolvidas e aplicadas 14 atividades. Todas foram elaboradas por nós, considerando, principalmente:

- Adaptações, conforme o curso da investigação exigia. Por exemplo, o tema Potências e Raízes na Fase II foi escolhido porque estava em conformidade com um material de estudos disponibilizado aos alunos pela Secretaria Estadual de Educação. Ou ainda, devido à nossa experimentação ocorrer durante aulas não presenciais de Matemática, numa tentativa de envolver todos os estudantes, a inserção de sugestões ou pequenas dicas no enunciado de algumas atividades foi sendo cada vez mais necessária, devido à nossa percepção de que a maioria deles não estava conseguindo realizar as atividades de Matemática de forma geral, independentemente de fazer, ou não, parte de nossas análises.
- Pressupostos de nossos referenciais teóricos, em que buscamos propor atividades de validação com a intenção de que os estudantes se envolvessem em situações adidáticas. Nesse sentido, em várias situações eles poderiam testar, verificar, validar suas conjecturas, analisar possíveis provas, entre outras ações de seu fazer matemática. Algumas funções da prova também foram consideradas, mesmo havendo uma predominância das funções explicação e verificação.
- Indicações de pesquisas já realizadas sobre o tema, como as preocupações com os conhecimentos necessários ao desenvolvimento das atividades, a utilização de exemplos ou sugestões e uma atenção com o uso da Álgebra para realizar generalizações.

Em resumo, trazemos um quadro em que utilizamos a notação: FASE – NÚMERO DA ATIVIDADE. Por exemplo, em II – 1 é indicado que a atividade foi desenvolvida na Fase II, sendo a atividade de validação matemática de número 1. Na parte direita, descrevemos o objetivo pretendido, sendo necessário esclarecer que, devido às particularidades de nosso estudo de caso e à necessidade de se realizar adaptações constantes, a pertinência ou motivações para cada uma delas pode ser mais bem observada na análise.

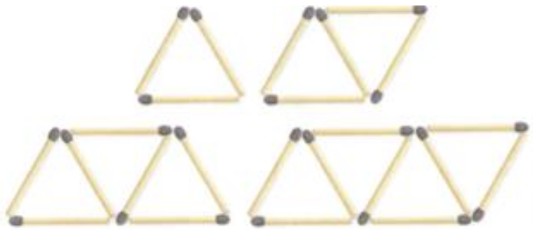
N°	ATIVIDADE DE VALIDAÇÃO MATEMÁTICA	OBJETIVO
II – 1	II – 1. Efetue os cálculos abaixo. a. $\frac{3^3}{3^3}=$ b. $\frac{9^2}{9^2}=$ c. $\frac{1^5}{1^5}=$ d. $\frac{(-2)^4}{(-2)^4}=$ ❖ Você notou alguma semelhança ou regularidade? ❖ Em caso positivo: Você acredita que a regularidade encontrada poderá ocorrer sempre? Como você poderia ter certeza?	Identificar regularidades, elaborar conjecturas que envolvem divisão de potências iguais e produzir respectivas validações matemáticas;
II – 2	II – 2. Observe como Henrique e Giovana efetuaram a multiplicação $\sqrt{16}\,.\sqrt{4}$:  Henrique  Giovana ❖ O que você acha? Foi uma coincidência, ou o resultado das duas continhas sempre será o mesmo, independentemente dos valores? Explique como você pensou, justificando sua resposta. Dica: Você pode testar com outros exemplos. Veja: $\sqrt{25}\,.\sqrt{4}=$ e $\sqrt{25}\,.\sqrt{4}=$ $5\ .\ 2=$ e $\sqrt{25\,.\,4}=$ O resultado será o mesmo para as duas expressões?	Elaborar conjecturas que envolvem multiplicação de duas raízes quadradas exatas e produzir respectivas validações matemáticas;
II – 3	II – 3. Joana conjecturou que "O dobro de um número quadrado perfeito continua sendo um número quadrado perfeito". Você concorda? A conjectura de Joana está correta? Explique como você pensou justificando sua resposta. III – 3.1 É verdade que os números que são quadrados perfeitos, sempre terminam em 0, 1, 4, 5, 6 e 9? Explique como você pensou justificando sua resposta.	Investigar a validade das conjecturas evidenciadas no enunciado, relacionadas aos números quadrados perfeitos e produzir respectivas validações matemáticas;
II – 4	II – 4. Encontre o valor das expressões da maneira que achar mais fácil (caso necessário, utilize calculadora): a. $\left(\sqrt{9}\right)^2=(\sqrt{9})\,.\,(\sqrt{9})=$ b. $\left(\sqrt{25}\right)^2=$ c. $\left(\sqrt{3}\right)^2=$ d. $\left(\sqrt{2}\right)^2=$ Podemos resolver de duas maneiras diferentes, lembra? Maneira 1: $\sqrt{9}\,.\sqrt{9}=$; $3\ .\ 3=$ Maneira 2: $\sqrt{9}\,.\sqrt{9}=$; $\sqrt{9\,.\,9}=$ A partir da análise dos resultados é possível identificar alguma regularidade? Em caso positivo: ❖ Elabore sua conjectura da maneira mais detalhada possível. ❖ Você conseguiria justificar porque a regularidade acontece?	Identificar regularidades, elaborar conjecturas que envolvem o resultado de raízes quadradas elevadas ao quadrado e produzir respectivas validações matemáticas;

II – 5	II – 5. É verdade que "A raiz quadrada exata de um número ímpar é sempre ímpar"? Explique como você pensou, justificando sua resposta.	Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, relacionada ao resultado de raízes quadradas ímpares e produzir respectivas validações matemáticas;
II – 6	II – 6. Em uma aula de Matemática, Joana, Clara e Pedro formularam a seguinte conjectura: "A raiz quadrada exata de um número par é sempre par". Para tentar justificar que a afirmação estava correta, cada um deles apresentou uma resposta diferente. Observe, analise e responda: *Resposta de Joana* $\sqrt{4} = 2$ $\sqrt{16} = 4$ $\sqrt{36} = 6$ $\sqrt{64} = 8$ $\sqrt{100} = 10$ Como podemos perceber, através destes exemplos, a afirmação é verdadeira. *Resposta de Clara* $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$ $\sqrt{16} = \sqrt{2^2.2^2} \rightarrow 2.2 = 4$ $\sqrt{36} = \sqrt{2^2.3^2} \rightarrow 2.3 = 6$ $\sqrt{64} = \sqrt{2^2.2^2.2^2} \rightarrow 2.2.2 = 8$ $\sqrt{100} = \sqrt{2^2.5^2} \rightarrow 2.5 = 10$ Podemos simplificar o número que está ao quadrado com a raiz. Como todos os resultados são múltiplos de dois, a afirmação é verdadeira. *Resposta de Pedro* Um número par pode ser escrito genericamente como um número múltiplo de 2, ou seja: 2.a (podendo ser "a" qualquer número inteiro). Então, um quadrado perfeito de um número par é dado por $(2.a)^2$. Se calcularmos a raiz quadrada deste número, teremos: $\sqrt{(2.a)^2} = 2.a$ Se simplificarmos, continuaremos com um número múltiplo de 2. Portanto, a raiz quadrada exata de um número par é sempre par. ❖ Qual ou quais respostas apresentadas pelo grupo você achou mais interessante? Por quê? ❖ Se você precisasse responder em uma prova, qual das três respostas você escolheria? Por quê? ❖ Caso você tenha pensado em alguma outra explicação diferente de Joana, Clara e Pedro, fique à vontade para apresentá-la.	Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, relacionada ao resultado de raízes quadradas pares e analisar possíveis validações para tal;
III – 1	III – 1. Efetue as potenciações da forma que achar melhor: a. $\frac{3^2}{3^2} =$ b. $\frac{(-5)^4}{(-5)^4} =$ c. $\frac{1^6}{1^6} =$ d. $\frac{(-2)^3}{(-2)^3} =$ ❖ Observando os resultados obtidos, você identifica alguma regularidade ou semelhança entre eles? Explique de maneira detalhada.	Identificar regularidades, elaborar conjecturas que envolvem divisão de potências iguais e produzir respectivas validações matemáticas;
III – 2	III – 2. Resolva as potenciações, seguindo os métodos indicados: *Resolva as potências. Depois, efetue a divisão* a. $\frac{2^3}{2^3} =$ *Utilize a propriedade dois, indicada acima* b. $\frac{2^3}{2^3} =$	Identificar regularidades, elaborar conjecturas que envolvem divisão de potências iguais, identificar o mesmo resultado independentemente da maneira de resolução e produzir respectivas validações matemáticas;

	❖ Compare os resultados. O que você observa?	
III – 3	III – 3. Observe como Henrique e Giovana efetuaram a multiplicação $\sqrt{16}\,.\,\sqrt{4}$:  Henrique  Giovana ❖ O que você acha? Será que o resultado das continhas sempre será o mesmo, independentemente dos valores? Será que funciona para os números 9 e 49? Será que funciona para os números 676 e 3721? Justifique cada uma de sua resposta.	Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, que envolvem multiplicação de duas raízes quadradas exatas e produzir respectivas validações matemáticas;
III – 4	III – 4. Seguindo a mesma lógica de Henrique e de Giovana, um aluno de outra turma de 9° ano conjecturou que o mesmo acontece com a operação de adição. Veja só: $\sqrt{16}+\sqrt{0}=$ $=4+0=$ $=4$ $\sqrt{16}+\sqrt{0}=$ $=\sqrt{16+0}=$ $=\sqrt{16}=$ $=4$ ❖ E agora? Foi coincidência ou o resultado destas continhas sempre será o mesmo, independentemente dos valores? Justifique sua resposta!	Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, que envolve a adição de raízes quadradas exatas, independentemente dos valores do radicando, e produzir respectivas validações matemáticas;
III – 5	III – 5. Encontre o valor das expressões, utilizando calculadora caso necessário: a. $\left(\sqrt{9}\right)^2=(\sqrt{9})\,.\,(\sqrt{9}\,)=$ $\left(\sqrt{36}\right)^2=$ b. $\left(\sqrt{5}\right)^2=$ c. $\left(\sqrt{7}\right)^2=$ Podemos resolver de duas maneiras diferentes, lembra? Maneira: $\sqrt{9}\,.\,\sqrt{9}=$ / $3\ .\ 3=$ Maneira 2: $\sqrt{9}\,.\,\sqrt{9}=$ / $\sqrt{9\,.\,9}\ =$ ❖ Observe os resultados. Investigue a regularidade e explique:	Identificar regularidades, elaborar conjecturas que envolvem o resultado de raízes quadradas elevadas ao quadrado e produzir respectivas validações matemáticas;
III – 6	III – 6. Veja só o que Laura descobriu brincando com os números 6 e 3: $6^2 - 3^2 = (6+3)\,.\,(6-3)$ $36 - 9 = 9\ .\ 3$ $27 = 27$ ❖ Será que isso sempre irá funcionar? O que você acha? ❖ Júlio estava bastante desconfiado e resolveu testar com os números 8 e 4: $8^2 - 4^2 = (8+4)\,.\,(8-4)$ $64 - 16 = 12\ .\ 4$ $48 = 48$ ❖ Um outro colega, o Matheus, ainda não se convenceu e resolveu testar para números bem altos: 150 e 75. O que você acha? O resultado também será igual? $150^2 - 75^2 = (150+75)\,.\,(150-75)$ III – 6.1 Seguindo a mesma ideia de Laura, Júlio e Matheus, um outro estudante de 9° ano, descobriu o seguinte:	Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, que envolvem operações matemáticas com números naturais e produzir respectivas validações matemáticas;

<table>
<tr><td></td><td>$(4+2).(4-2) = 4.3 \rightarrow$ Fixo
$6 \quad . \quad 2 \quad = 4.3$
$12 \quad = 12$

$(3+0).(3-0) = 3.3 \rightarrow$ Fixo
$3 \quad . \quad 3 \quad = 3.3$
$9 \quad = 9$

❖ E agora? Qual sua opinião? Foi coincidência ou sempre irá funcionar? Explique.</td><td></td></tr>
<tr><td>III – 7</td><td>III – 7. A igualdade $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y) . (x – y)$ é verdadeira ou falsa? Prove que sua resposta está correta.</td><td>Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, que envolvem produtos notáveis e produzir respectivas validações matemáticas;</td></tr>
<tr><td>III – 8</td><td>III – 8. Pense em um número. Adicione 5 a este número. Multiplique o resultado por 3. Subtraia 15. Qual foi o resultado obtido? Este resultado será sempre igual, independentemente do número escolhido? O que você acha? Existe alguma relação entre o número escolhido e a resposta? Explique.</td><td>Elaborar conjecturas que envolvam operações matemáticas com números naturais e produzir respectivas validações matemáticas;</td></tr>
<tr><td>III – 9</td><td>III – 9. Lauanda conjecturou que se o valor do discriminante (delta) for zero, então a equação polinomial do segundo grau possui duas raízes reais iguais. O que você acha? Concorda ou discorda? Explique.</td><td>Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, que envolve raízes de uma equação do segundo grau e produzir respectivas validações matemáticas;</td></tr>
<tr><td>III – 10</td><td>III – 10. Utilizando palitos de fósforo, canetas ou lápis, faça construções como as representadas abaixo:

<table><tr><th>Número de triângulos</th><th></th><th>Número de palitos</th></tr><tr><td>1</td><td>→</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>→</td><td></td></tr><tr><td>3</td><td>→</td><td></td></tr><tr><td>4</td><td>→</td><td></td></tr></table>
Conte o número de triângulos e o número de palitos em cada construção. Em seguida, complete o quadro.

❖ Observe o número de triângulos e o número de palitos necessários. Você consegue identificar alguma regularidade, ou seja, algum padrão? Explique.
❖ Encontre o número de palitos necessários para construir: 10 triângulos, 15 triângulos e 25 triângulos
❖ Como você encontrou as respostas exigidas na letra b? Explique.</td><td>Elaborar conjecturas, identificar padrões, generalizar e produzir respectivas validações matemáticas;</td></tr>
<tr><td>III – 11</td><td>III – 11. Analise a seguinte definição: “Função polinomial de segundo grau é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com a diferente de 0, e x pode ser qualquer número real.”. Porque o coeficiente a não pode ser nulo (zero)? Explique.</td><td>Investigar e produzir uma validação possível para a atividade, que envolve coeficientes de uma função polinomial do segundo grau</td></tr>
<tr><td>III – 12</td><td>III – 12. Um estudante de 9° notou a presença de algumas regularidades quando a atividade pedia para encontrar as raízes (ou zeros) de uma função polinomial de 1° grau. Em seguida, ele construiu a seguinte relação:

Podemos representar uma função polinomial de 1° grau da seguinte forma:
$y = ax + b$
Para encontrarmos a raiz dessa função, devemos encontrar o valor de x para o qual y = 0. Então:
$0 = ax + b$
$ax + b = 0$
$ax = 0 – b$</td><td>Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, que envolve a solução de uma função polinomial do primeiro grau e analisar uma validação possível;</td></tr>
</table>

	$ax = -b$ *$x = (-b)/a$* *Conclusão: o zero de uma função polinomial de 1° grau é sempre o valor de (-b)/a Por exemplo:* *A função y = 3x + 9 possui coeficientes a = 3 e b = 9. O zero da função é (-(9))/3 = – 3* ❖ Você concorda com o raciocínio apresentado pelo aluno? O que você achou? Explique. ❖ É verdade que a raiz (ou o zero) da função y = 3x + 9 é -3? Explique como você pensou.	
III – 13	III – 13. Brincando com algumas proporções, Marta encontrou alguns resultados interessantes. Ela escolheu as razões 12/3 e 8/2 porque formam uma proporção. Realizando cálculos de divisão e de multiplicação, ela obteve igualdades verdadeiras. Veja:  ❖ Será que isso sempre vai ocorrer, independentemente dos valores escolhidos? O que você acha? ❖ Faça o teste com as seguintes proporções (use calculadora se necessário). ● $\frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ ● 10 . 3 = 2 . 15 ■ $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$ ■ 4 . 6 = 8 . 3 ❖ Agora que você realizou os cálculos, o que aconteceu? As igualdades continuam sendo verdadeiras? Explique. ❖ Escolha duas razões que formam uma proporção, assim como Marta e verifique se a igualdade continuará sendo verdadeira. ❖ Comparando os cálculos de multiplicação e de divisão (coluna da direita e coluna da esquerda), você consegue identificar alguma regularidade? Algum padrão? Explique.	Identificar regularidades, elaborar conjecturas que envolvem proporções e produzir respectivas validações matemáticas;
III – 14	III – 14. Além da propriedade fundamental, existem outras propriedades relacionadas às proporções. Verifique se as duas propriedades apresentadas abaixo são verdadeiras a partir da proporção 9/6=3/2 a. $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ b. $\frac{a+b}{b} = \frac{d-c}{c}$ Mas como eu faço isso? Basta que você substitua o valor de a por 9, o valor de b por 6, e assim por diante. Depois é só verificar se a igualdade é verdadeira ou falsa 😊 ❖ As duas propriedades são verdadeiras? Explique. ❖ A realização deste teste é suficiente para garantir que a propriedade vale para todas as proporções existentes? O que você acha? Em sua opinião, o que poderia ser feito de diferente?	Investigar a validade da conjectura evidenciada no enunciado, que envolve a propriedade fundamental das proporções e refletir sobre a validade de possíveis validações.

4.5 Organização, apresentação e análise dos dados da pesquisa

Os dados produzidos nesta pesquisa serão apresentados de acordo com a ordem das atividades de validação matemática desenvolvidas. Após uma discussão sobre as especificidades de cada uma delas, em que apresentamos o objetivo e como esperávamos que fossem resolvidas, analisamos as produções de Juca e de Lili, respectivamente. Fizemos essa escolha porque nossa análise não se fundamenta apenas na objetividade das respostas fornecidas, mas também nos elementos contextuais, os quais, na maioria das vezes, repetiram-se para ambos os alunos. Além disso, embora todas as atividades tenham sido realizadas de forma individual, ocorreram de forma paralela.

Desse modo, respeitamos a temporalidade dos acontecimentos, sendo apresentadas as produções de Juca e de Lili relativas à Fase II e, em seguida, suas produções, na mesma ordem, relativas à Fase III. Por vezes, nossas análises quanto às produções de Juca foram maiores, por conta de termos interagido mais com esse aluno por meio do WhatsApp.

Tentamos trazer o máximo possível de informações, partindo do pressuposto de que “[...] analisar os dados qualitativos significa ‘trabalhar’ todo o material obtido durante a pesquisa, ou seja, os relatos de observação, as transcrições de entrevista, as análises de documentos e as demais informações disponíveis.” (LUDKE E ANDRÉ, 1986, p. 45). Contudo, ainda assim, é importante dizer que os registros escritos, fotográficos, áudios ou a transcrição de trechos das entrevistas foram trazidos conforme a pertinência para o diálogo em construção e objetivos específicos.

Para cada atividade, apresentamos brevemente nossos objetivos e, em algumas delas, validações matemáticas possíveis de serem apresentadas pelos estudantes ou de serem discutidas por nós no momento de institucionalizarmos localmente a situação. É necessário esclarecer que, ao pensarmos nessas validações, estamos considerando o nível de escolaridade, qual seja, alunos 9° ano do Ensino Fundamental. Assim sendo, não nos preocupamos em apresentar ou discutir demonstrações no sentido de Balacheff (1987; 2000), mas sim, provas possíveis, conforme a concepção de prova do mesmo autor, no sentido da Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2016). Isto é, definições mais descritivas e acompanhadas de exemplos, assim como formas alternativas de validar conjecturas.

Ao longo das atividades, tentamos construir uma análise descritiva pautada na identificação de *conceitos* utilizados pelos alunos e na observação da *linguagem* utilizada por eles, *características da situação* e *contexto*, na *identificação de situações adidáticas*, bem como possíveis *influências do contrato didático*, conforme indicações de Balacheff (2019). Considerando esses elementos, buscamos classificar as produções dos estudantes conforme a Tipologia provas, isto é, identificando o *nível* e, quando possível, o *tipo* de prova produzido. No nível de provas pragmático, temos os tipos de prova empirismo ingênuo e experiência crucial. Já no nível de provas intelectuais, temos os tipos de prova exemplo genérico e experiência mental. Em tempo, nas ocasiões em que tivemos acesso apenas à resolução dos estudantes de forma objetiva, sem qualquer tipo de interação que pudesse indicar a ocorrência da devolução ou de situações adidáticas, não levamos em consideração esses elementos.

Ao final da apresentação e discussão da Fase II e depois da Fase III, retornamos aos nossos objetivos específicos em que, a partir dos dados evidenciados e do nosso movimento de análise, tentamos identificar como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas para suas afirmações e/ou conjecturas; classificar provas matemáticas que foram por eles produzidas e identificar elementos relacionados às atividades desenvolvidas pelos estudantes, que pudessem favorecer a produção de validações. Para diferenciar textos escritos e áudios, fizemos a seguinte opção: frases escritas entre aspas se referem a uma escrita da apostila ou do aplicativo de mensagens WhatsApp. frases escritas entre aspas e em itálico reproduzem o conteúdo de áudio.

5. UM OLHAR SOBRE AS PRODUÇÕES DE JUCA E LILI

[...]
E em torno dela indagará o povo:
— Como é teu nome, meninazinha de olhos verdes?
E ela lhes dirá
(É preciso dizer-lhes tudo de novo!)
[...]

Neste capítulo, apresentamos a análise dos dados produzidos por Juca e por Lili, respectivamente, com vistas à investigação dos processos de validação matemática que eles apresentaram, ao longo das Fases II e III, período que compreendeu o ano letivo de 2020. Em meio a eles, buscamos dialogar com nossos referenciais, na tentativa de compreender e/ou identificar como pensaram ou como formularam suas explicações, em qual tipo ou nível a prova produzida pode ser classificada e se houve algum elemento relacionado às atividades que favoreceu ou não os movimentos dos alunos, que são nossos objetivos específicos.

Devido à particularidade do momento pandêmico, não foi possível acompanhar mais de perto os estudantes, sobretudo Lili, que não teve a oportunidade de interagir conosco em todas as situações. Nesse sentido, nem sempre foi claro para nós a análise em termos de situações adidáticas ou a classificação das provas quanto ao tipo, pois, conforme sinalizamos no Capítulo 1, é importante considerar a situação como um todo para saber de fato, qual o nível ou tipo de prova apresentado.

5.1 Fase II

❖ Atividade II – 1

1. Efetue os cálculos abaixo.

$a. \frac{3^3}{3^3} =$ $b. \frac{9^2}{9^2} =$ $c. \frac{1^5}{1^5} =$ $d. \frac{(-2)^4}{(-2)^4} =$

- ❖ Você notou alguma semelhança ou regularidade? Explique.
- ❖ Em caso positivo: você acredita que a regularidade encontrada poderá ocorrer sempre? Como você poderia ter certeza?

Com esta primeira atividade, gostaríamos que eles identificassem que o resultado de todas as operações indicadas seria o mesmo e igual a um. Antes de enviá-la aos estudantes, elaboramos um vídeo em que resolvemos potenciações para que eles pudessem se concentrar na busca pela regularidade na tentativa de minimizar problemas com a resolução dos cálculos, como sugerem algumas investigações (SANTOS, 2015, OLIVEIRA, 2009).

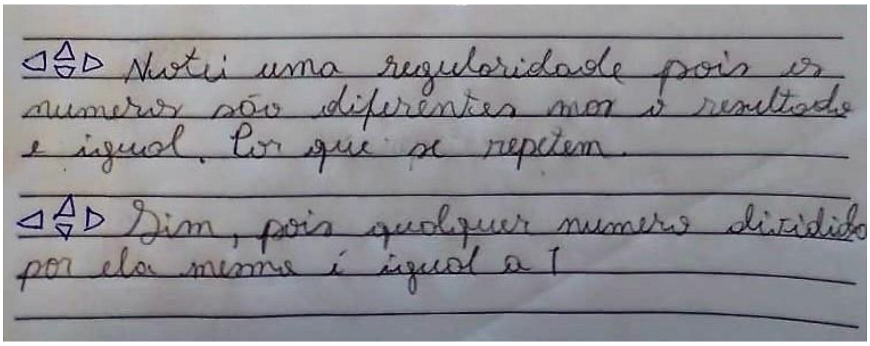
Todas as potências utilizadas possuem como expoentes números naturais, porque a inserção de valores negativos ou fracionários poderia ocasionar dificuldades na resolução das potências. Esse aspecto foi observado por Paias (2019), ao constatar o que chamou de ruptura do conhecimento, que até então estava sendo ressignificado. Ao discutir dados de um questionário aplicado com 60 estudantes, ela observou que nenhum aluno acertou as respostas para questões que envolveram expoentes não naturais.

Optamos também por inserir uma potência de base negativa, com o intuito de que os alunos percebessem que, independentemente disso, o resultado seria o mesmo. Consideramos ser possível que parte deles conclua seus cálculos após efetuarem a potenciação, uma vez que nem sempre há a compreensão de que o *traço* da fração também indica uma operação matemática de divisão. Nesse caso, poderíamos orientar e solicitar a comparação dos resultados após esse último passo. Uma prova possível de ser discutida junto aos alunos poderia estar relacionada à divisão de números iguais, que necessariamente resulta 1, independentemente de quais sejam eles (excluindo-se o 0 do denominador).

....

O aluno Juca resolveu cada uma das potenciações e, ao final, efetuou a divisão entre os valores obtidos. Tal como esperado, ele percebeu que, em todos os casos o resultado foi igual, e corresponde ao número 1. Sua justificativa para a regularidade encontrada foi a de que: “Todo número dividido por ele mesmo é igual a 1”.

Figura 3 – Resolução do aluno Juca para a atividade II – 1


Notei uma regularidade pois os numeros são diferentes mas o resultado e igual. Por que se repetem.

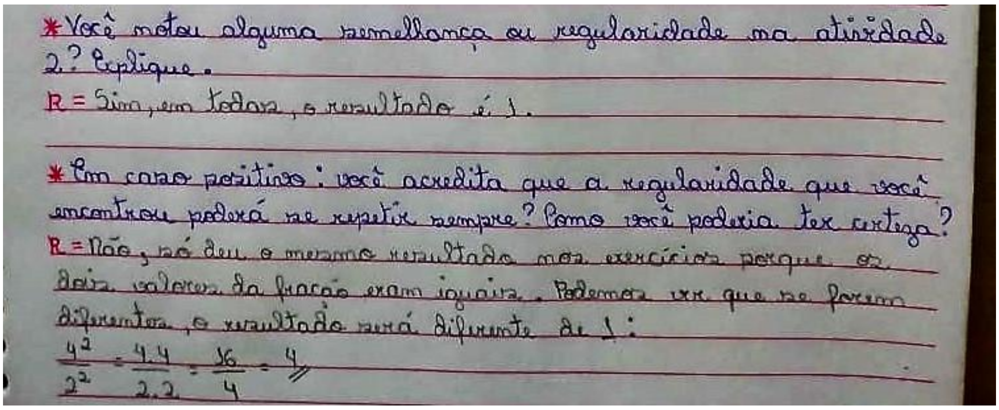
Sim, pois qualquer numero dividido por ele mesmo é igual a 1

Fonte: Dados da pesquisa

A validação de Juca é descritiva e foi elaborada considerando apenas uma escrita em linguagem natural. Sua formulação parece ter sido feita a partir da resolução dos itens sugeridos na atividade e sua explicação não faz referência ou cita outros exemplos. Para melhor compreender como ocorreu sua validação, poderíamos ter perguntado ao aluno se testou para outros casos ou se fez alguma pesquisa para complementar sua resposta.

Lili, por sua vez, identificou a regularidade pretendida, mas quanto ao segundo questionamento, ela acrescentou que somente ocorre porque os valores indicados no denominador e no numerador são iguais, o que é uma afirmação correta.

Figura 4 – Resolução da aluna Lili para a atividade II – 1


*Você notou alguma semelhança ou regularidade na atividade 2.? Explique.

R = Sim, em todas, o resultado é 1.

*Em caso positivo: você acredita que a regularidade que você encontrou poderá se repetir sempre? Como você poderia ter certeza?

R = Não, só deu o mesmo resultado nos exercícios porque os dois valores da fração eram iguais. Podemos ver que se forem diferentes, o resultado será diferente de 1:

$\frac{4^2}{2^2} = \frac{4.4}{2.2} = \frac{16}{4} = 4$

Fonte: Dados da pesquisa

Desse modo, pedimos para que a estudante considerasse apenas os valores das frações iguais e questionamos novamente se neste caso a resposta iria ser sempre 1. Em um áudio, e de forma objetiva, ela disse de outra forma o que já havia escrito em sua resolução, ou seja, que "*sim [...], toda vez que for colocado o mesmo valor no numerador e no denominador o resultado vai ser um*".

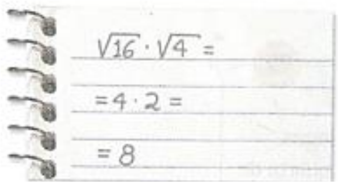
Cabe observar que Lili utilizou uma escrita em linguagem natural, mas além deste recurso, apresentou um exemplo para complementar e validar sua afirmação quanto à necessidade dos valores indicados no numerador e no denominador serem iguais.

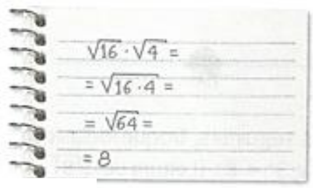
Pontuamos que para esta atividade, os alunos não tiveram dificuldades e puderam se concentrar na produção de validações, como prevíamos. Podemos dizer que as provas de Juca e de Lili correspondem ao nível intelectual, pois, mesmo que momentaneamente, ambos indicaram generalizar a resposta dada a partir do resgate de uma propriedade. Essa ação sinaliza um desprendimento da situação proposta em que se passou a considerar uma categoria de objetos.

Durante a institucionalização da atividade, confirmamos a veracidade das afirmações dos alunos e enfatizamos a importância de sempre se apresentar explicações da melhor forma possível.

- **Atividade II – 2**

2. Observe como Henrique e Giovana efetuaram a multiplicação: $\sqrt{16}\,.\sqrt{4}$:





❖ O que você acha? Foi uma coincidência, ou o resultado das duas continhas sempre será o mesmo, independentemente dos valores? Explique como você pensou, justificando sua resposta.

Dica: Você pode testar com outros exemplos. Veja:

$\sqrt{25}\,.\sqrt{4} =$ e $\sqrt{25}\,.\sqrt{4} =$

$5\ .\ 2 =$ e $\sqrt{25\,.\,4} =$

O resultado será o mesmo para as duas expressões?

Com esta atividade, tínhamos o objetivo de que os alunos formulassem conjecturas a respeito da propriedade de multiplicação de radicais, qual seja "A raiz quadrada do produto é igual ao produto das raízes quadradas", bem como verificassem sua veracidade. A atividade se refere a uma adaptação de uma tarefa proposta por um livro didático[16]. Nesse momento, não havia a intenção de que os alunos apresentassem provas mais elaboradas, porque, além de estarmos iniciando o trabalho, uma prova do tipo experiência mental exigiria o conhecimento de propriedades dos radicais, que não foram ainda exploradas com os estudantes.

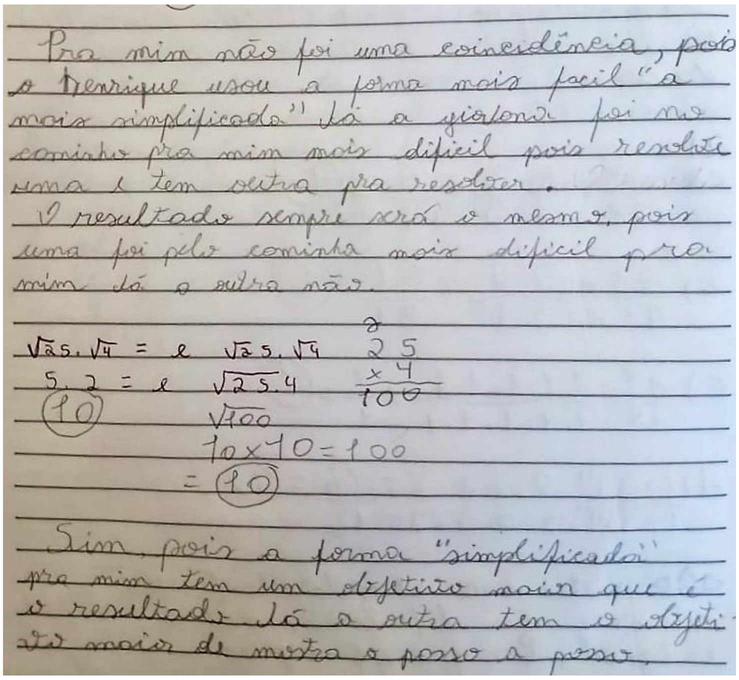
Da Fase I, verificamos que, mesmo em momentos presenciais, atividades de validação podem gerar muitas dúvidas que vão desde o enunciado até conceitos matemáticos envolvidos. Devido à nossa preocupação para que os alunos conseguissem realizar a proposta de forma mais independente possível, sem muitas dificuldades, assim como o contexto que envolve a distância física e possíveis dificuldades de comunicação entre nós e os estudantes, inserimos uma sugestão/dica para que a conjectura fosse testada com outros números, como 25 e 4. Esta variável, poderia, por exemplo, fazer com que eles escolham outros números para realização de testes. Sendo assim, esperamos que eles explorem e apresentem suas validações tendo como base exemplos e possíveis verificações.

....

Juca novamente priorizou um discurso em linguagem natural para explicar sua resposta. Pode-se perceber que ele também realizou as radiciações sugeridas no enunciado, respondendo da seguinte forma:

[16] DANTE, Luiz Roberto. Projeto Telaris: Matemática: Ensino Fundamental 2 – 2.ed. São Paulo: Ática, 2015.

Figura 5 – Resolução do aluno Juca para a atividade II – 2


Pra mim não foi uma coincidência, pois o Henrique usou a forma mais facil "a mais simplificada" Já a giovana foi no caminho pra mim mais dificil pois resolve uma e tem outra pra resolver.

O resultado sempre será o mesmo, pois uma foi pelo caminho mais dificil pra mim já a outra não.

$\sqrt{25} \cdot \sqrt{4} =$ e $\sqrt{25} \cdot \sqrt{4}$ $\quad$ 25

$5 \cdot 2 =$ e $\sqrt{25 \cdot 4}$ $\quad$ $\times 4$

10 $\quad$ $\sqrt{100}$ $\quad$ 100

$10 \times 10 = 100$

$= 10$

Sim, pois a forma "simplificada" pra mim tem um objetivo maior que é o resultado já a outra tem o objetivo maior de mostra o passo a passo.

Fonte: Dados da pesquisa

É possível que a forma pela qual o questionamento, utilizando a expressão “o que você acha" tenha sido importante para que ele pudesse expressar por meio de suas palavras, possíveis relações que fez ao analisar a situação dada, isto é, fragmentos de seu raciocínio. Ao se utilizar da palavra “sempre” mostra-nos que o raciocínio empregado contemplava generalidade e que há certo desprendimento daqueles exemplos que foram sugeridos pela situação naquele momento. Esse fato pode ser observado pela continuidade da sua resposta, quando deu a entender que tanto faz o modo de resolução, sendo um deles mais “simplificado” e outro com a intenção de mostrar o “passo a passo”.

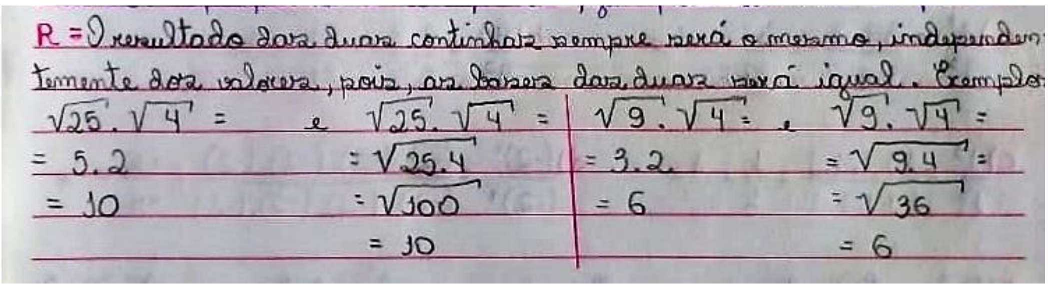
Momentaneamente, o aluno parece ter instituído para si a certeza de que os resultados serão os mesmos, pelo menos quando os cálculos envolvem valores próximos aos que ele conhecia. Em sua percepção, um dos modos de resolução é mais fácil e rápido. Questionamos o aluno se ele respondeu prontamente ou se desenvolveu algum outro cálculo para ter certeza de sua resposta. Ele argumentou que sim, que testou com os números 9 e 25, mas destacou que logo percebeu o padrão em jogo: “[...] de cara eu percebi que uma simplifica a raiz e depois [é só] multiplicá-las”.

Percebemos aqui o que Balacheff (1988) e Nasser e Tinoco (2003) consideram como sendo uma economia da lógica, ou seja, o aluno já percebeu que a propriedade é verdadeira e, muito provavelmente, apenas realizou um cálculo além do que foi solicitado como cumprimento de uma formalidade. Esse aspecto foi evidenciado por alunos que participaram do estudo de Healy e Hoyles (2000), que generalizavam questões particulares dada a obviedade da conjectura em ser verdadeira. Com efeito, nem sempre era possível classificar com clareza o tipo de validação que foi apresentada.

Num primeiro olhar, poderíamos classificar a prova produzida pelo aluno como sendo do tipo empirismo ingênuo, na medida em que houve a realização dos dois testes propostos na questão e de um outro elaborado por ele, sem conter números incomuns. Porém, ao analisarmos o processo em que se deu a elaboração da validação, inferimos que o teste realizado assumiu as características de uma experiência crucial, pois parece que o outro exemplo foi escolhido aleatoriamente apenas como um reforço para a explicação. Para ficar mais claro, poderíamos ter questionado o estudante por qual motivo ele optou pelos números 9 e 25 para melhor identificar o papel do exemplo.

Lili, por sua vez, utilizou-se tanto da linguagem natural quanto da linguagem matemática para responder positivamente à questão.

Figura 6 – Resolução da aluna Lili para atividade II – 2

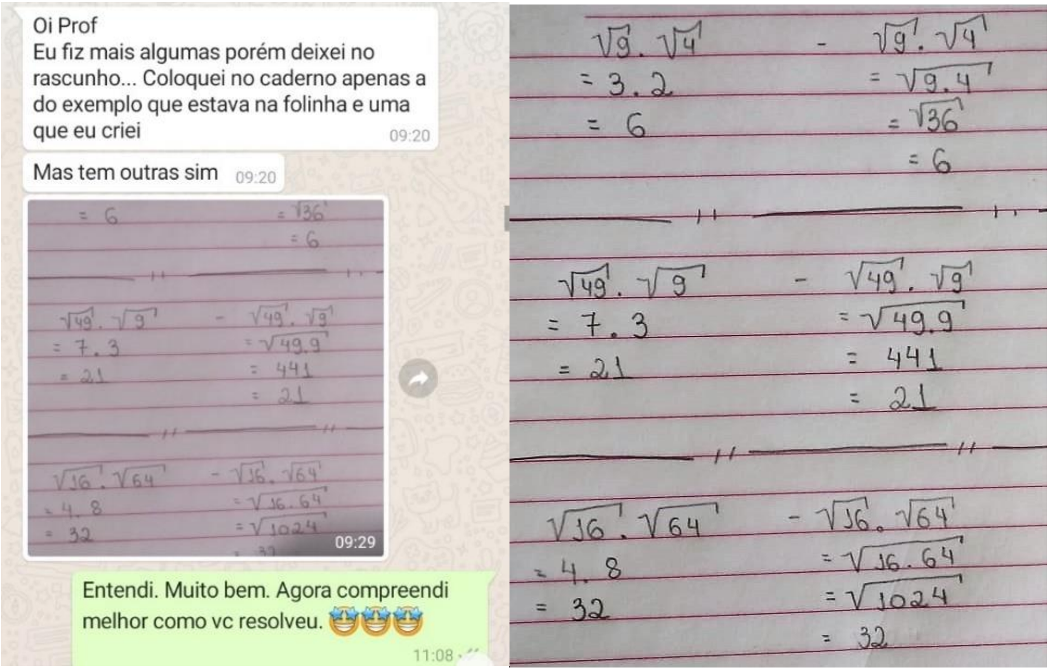


Fonte: Dados da pesquisa

Observamos que para melhor organização de sua resposta, Lili apresentou exemplos. Embora tenham sido os mesmos exemplos presentes no enunciado, a presença deles parece indicar que a aluna os considera importantes na produção de uma validação matemática.

Para compreender melhor como ela pensou, questionamos se havia feito algum teste utilizando outros números, e ela nos enviou foto de seu rascunho no qual havia feito outros três testes.

Figura 7 – Conversa de WhatsApp com a aluna Lili sobre a atividade II – 2



Fonte: Dados da pesquisa

Uma classificação possível para o tipo de prova produzido pela aluna pode ser a experiência crucial porque, para além dos exemplos sugeridos, ela apresentou outros que parecem ter garantido a ela a validade da conjectura. Contudo, é difícil estabelecer uma classificação clara para a validação de Lili, pois ela também pode ter apresentado exemplos apenas como uma forma de cumprir uma regra do contrato didático em construção ou em atendimento à nossa solicitação explícita no enunciado. Se durante as institucionalizações das atividades da Fase I e da atividade III – 1, insistimos com os estudantes sobre a importância da exploração da situação, realizando testes ou exemplos, não seria estranho que, aos poucos, eles fossem incorporando este discurso.

Uma pergunta que poderíamos ter realizado para uma melhor compreensão dessa ideia é se a diversidade de testes se deu porque lhe foi sugerido na questão ou se foi por conta da incerteza sobre a veracidade da conjectura.

Observamos que os alunos não tiveram dificuldades relativas ao conceito de raiz quadrada, o que permitiu que eles se concentrassem na produção da validação. Entretanto, como previmos, não discutimos uma outra prova intelectual possível, pois, para tal, seria necessário que os alunos conhecessem outras propriedades. Consideramos também que essa ação seria adequada neste início, porque poderia desmotivar os estudantes ou tornar-se um obstáculo à compreensão e à produção de provas – como ocorreu na investigação de Leandro (2012). Conforme outras atividades foram sendo desenvolvidas, fomos introduzindo discussões com provas do referido nível. No entanto, uma ação possível de ter sido desenvolvida, como parte da devolução para os dois estudantes, seria o questionamento a respeito da validade da conjectura para números altos ou fracionários, por exemplo.

Como institucionalização para ambos os alunos, pontuamos junto a eles que é muito importante verificar se a propriedade ou conjectura é realmente válida, se ela vale para todos os casos, porque isso nem sempre acontece.

- **Atividade II – 3**

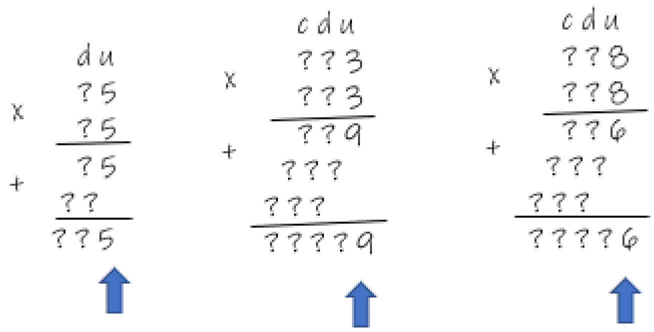
3. Joana conjecturou que "O dobro de um número quadrado perfeito continua sendo um número quadrado perfeito". Você concorda? A conjectura de Joana está correta? Explique como você pensou justificando sua resposta. 3.1 É verdade que os números que são quadrados perfeitos, sempre terminam em 0, 1, 4, 5, 6 e 9? Explique como você pensou justificando sua resposta.

Propusemos essas questões com o objetivo de que ambos verificassem a validade das conjecturas dadas, que envolveram o conceito de números "quadrados perfeitos". Na questão 3, a conjectura sugerida é falsa e poderia ser refutada com a apresentação de um contraexemplo. Já a atividade 3.1 é verdadeira, podendo gerar mais engajamento, tendo em vista sua resistência a sucessivos testes. Escolhemos propor uma conjectura falsa, porque não queríamos que os alunos criassem a expectativa de que todas as situações se relacionam com afirmações verdadeiras, restando apenas sua confirmação.

Devido à conjectura estar presente no enunciado, era esperado que os estudantes se envolvessem em um processo de validação que contempla principalmente a verificação e a explicação sobre o conceito em questão. Por exemplo, na verificação de que a conjectura da primeira atividade é falsa e na explicação do porquê a conjectura da segunda atividade é verdadeira.

Para institucionalizar a segunda atividade, poderíamos considerar que um número quadrado perfeito é um número natural n, tal que exista outro número natural "a" em que $n=a^2$, $(a \in \mathbb{N})$, uma validação possível de ser discutida com os estudantes poderia ser produzida a partir de alguns testes a partir do algoritmo da multiplicação, como nos exemplos a seguir – Figura 8.

Figura 8 – Resolução possível para a atividade II – 3



Fonte: Dados da pesquisa

Ao utilizar o mesmo raciocínio para os números que terminam com os algarismos 0, 1, 2, 4, 6, 7 e 9, pode-se constatar a veracidade da conjectura dada.

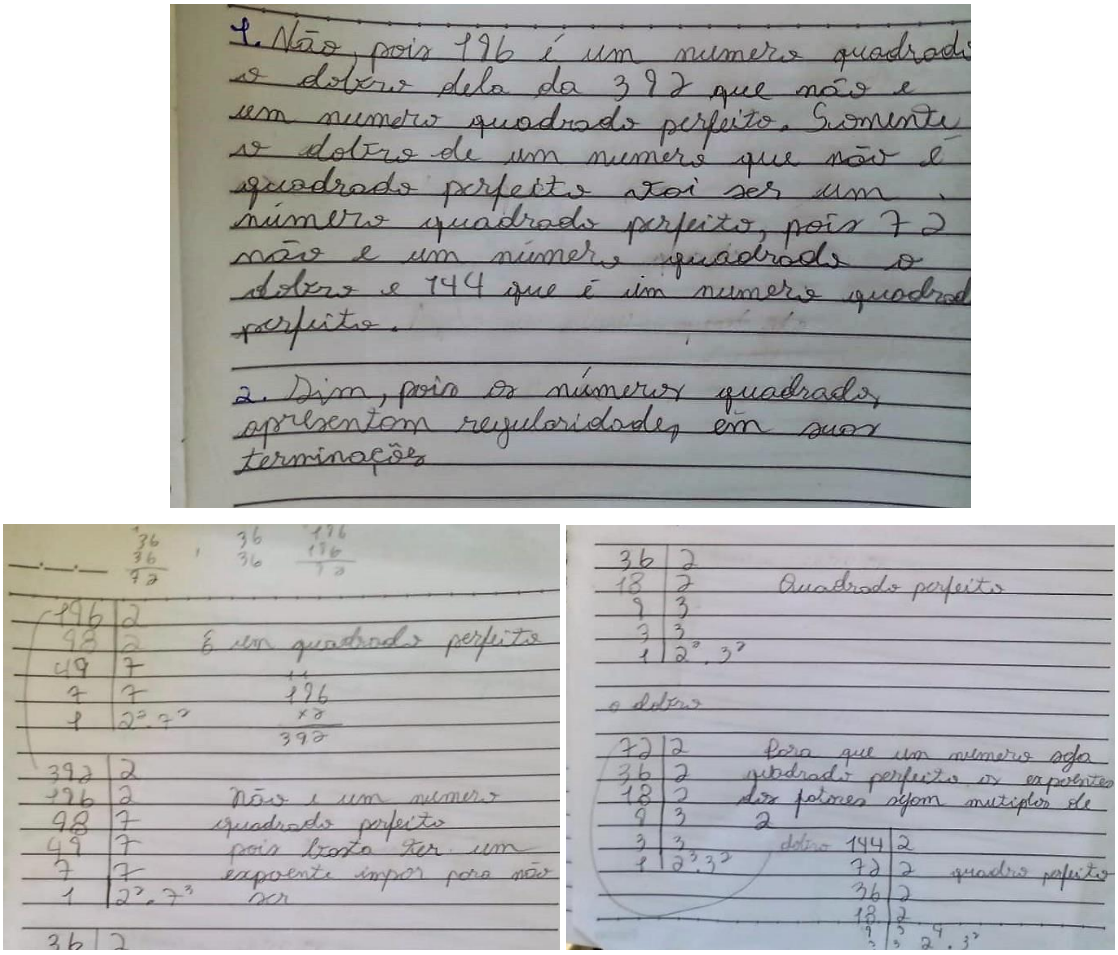
Para esta atividade, não enviamos nenhum material prévio contendo explicações, porque supomos que ambos haviam compreendido o significado dos objetos matemáticos envolvidos[17].

....

O aluno Juca logo identificou que a conjectura da primeira questão seria falsa e justificou sua resposta apresentando um contraexemplo, como pode ser observado em sua resolução abaixo – Figura 9.

[17] Pois ele havia sido abordado no material de estudos disponibilizado pela SEDUC MT, que mesmo não sendo obrigatório, estava sendo desenvolvido pelos estudantes.

Figura 9 – Composição da resolução do aluno Juca para a atividade II – 3



Fonte: Dados da pesquisa

Somente esta ação, de apresentar um contraexemplo, já seria suficiente para atender ao enunciado. Contudo, percebemos que ele buscou reformular a conjectura escrevendo que: “[...] Somente o dobro de um número que não é quadrado perfeito vai ser um número quadrado perfeito [...]”. Esta afirmação é incorreta, pois não é válida para todas as situações possíveis, já que o dobro de 20, por exemplo, não é um número quadrado perfeito.

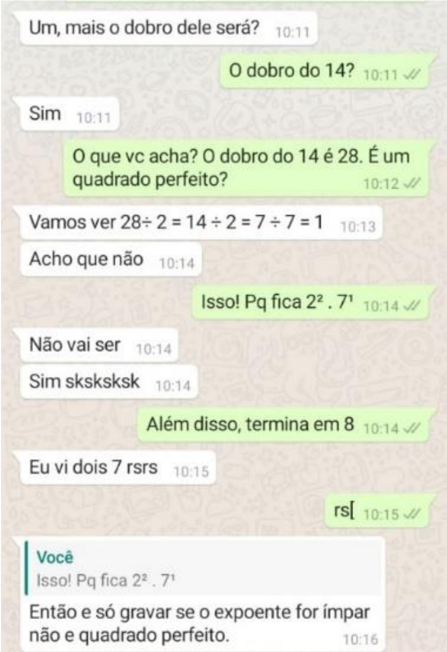
Além disso, algo a ser notado é a continuidade da frase, em que ele complementou o raciocínio com um exemplo. A palavra, “pois” pode indicar que sentiu a necessidade de justificar, de alguma forma a afirmação que realizou. Classificamos o tipo de prova apresentado pelo aluno como sendo do tipo experiência crucial, porque ele realizou diversos testes, dando indícios de que o convencimento momentâneo ocorreu após a verificação para pelo menos três casos, havendo um apego aos casos particulares.

Por outro lado, na segunda questão, o aluno apresentou uma justificativa mais geral, sem se dedicar à exploração da conjectura, indicando que a devolução e a vivência de situações adidáticas não ocorreram para ela, especificamente.

Perguntamos ao estudante se ele havia realizado alguma pesquisa para responder às questões. Ele respondeu afirmando que sim, e que também havia assistido a um vídeo para compreender melhor o tema. Juca afirmou que observou o número 196 no vídeo, mas que, em relação aos demais números testados, escolheu e pensou por conta própria. Então, como dissemos, classificamos sua produção como uma experiência crucial, pois sua validação parece ter sido fundamentada a partir dos testes que realizou, nos quais fez uso de números quadrados perfeitos diversos. Ao resolver a questão 3, justificou o motivo pelo qual o número é ou não um quadrado perfeito nos quatro testes que realizou, utilizando uma escrita em linguagem natural.

Com essa atividade, tivemos uma maior interação e acreditamos que, embora não tenhamos estado no espaço formal da sala de aula, aos poucos uma espécie de contrato didático foi sendo estabelecido. A questão 3.1 respondida objetivamente por Juca foi a que gerou mais engajamento entre ele e nós no WhatsApp. Fomos discutindo o porquê da conjectura da segunda atividade ser verdadeira e, ao final, reiteramos que todos os números quadrados perfeitos terminam com os algarismos 0, 1, 4, 6 ou 9, mas que nem todos os números que terminam com tais algarismos são quadrados perfeitos, conforme, por exemplo, os números 14 e 26. Em determinado momento, o aluno questionou:

Figura 10 – Conversa WhatsApp com o aluno Juca sobre a atividade II – 3



Fonte: Dados da pesquisa

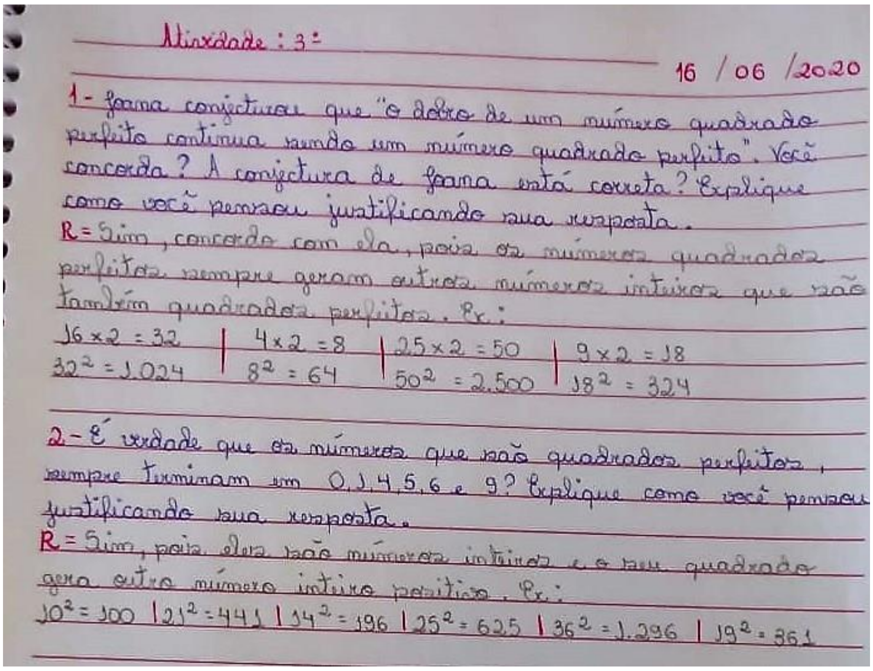
Na conversa, buscamos devolver o questionamento do aluno com outra pergunta com o intuito de convidá-lo à procura de respostas. Para justificar que o número 28 não seria um quadrado perfeito, Juca detalha o processo de fatoração, em que dividiu o valor por 2 duas vezes e, em seguida, por 7. Quando ele afirma “acho que não”, poderíamos ter questionado o porquê, e não apenas ter confirmado a afirmação que ele realizou. A partir dessa ação, antecipamos a resposta pretendida, impedindo que o aluno mesmo explicasse. Balacheff (2019), ao discutir uma pesquisa que se utilizou de validações matemáticas, observa algo parecido, isto é, em certas situações, os alunos não desenvolveram uma explicação que poderia vir a ser uma prova, devido à interferência do professor.

Com base em nossa interação, percebemos que o diálogo já estava mais fluente se comparado às primeiras duas interações (Atividades II – 1 e II – 2). Pode-se observar que Juca se dedicava a responder os questionamentos que realizamos, elaborava perguntas e, ao mesmo tempo, passava a pensar nas próprias respostas, como quando ele se propôs a pensar sobre o dobro de 14 ser ou não um quadrado perfeito, e buscou, ao mesmo tempo, formular e validar a proposição. Indícios esses que podem indicar a vivência de situações adidáticas de ação, formulação e validação. Pontuamos ainda que essa interação nem sempre ocorre quando está em jogo uma conjectura falsa, como ocorreu conosco, pois, segundo Balacheff (2000, p. 177), “[...] o tratamento de uma refutação não leva necessariamente a um questionamento dos fundamentos da conjectura como se poderia ter pensado a priori [...]”, havendo geralmente um abandono imediato do processo de validação.

No caso de Lili, houve um pequeno equívoco relativo ao conceito de números quadrados perfeitos, pois a aluna considerou o resultado do dobro de um número qualquer e o elevou ao quadrado, como sendo essa a ideia de números quadrados perfeitos. O conhecimento apresentado por ela, mesmo equivocado do ponto de vista da conceituação matemática, influenciou na sua produção (HEALY; HOYLES, 2000; OLIVEIRA, 2009). Então, nossa suposição de que os alunos teriam claro para si o significado de números quadrados perfeitos, estava equivocada.

Sua resposta à segunda atividade se deu de forma mais objetiva, mas, ainda assim, é possível identificar um pequeno discurso e a utilização de exemplos para reiterar sua validação.

Figura 11 – Resolução da aluna Lili para a atividade II – 3


Atividade: 3ª

16 / 06 / 2020

1- Joana conjecturou que "o dobro de um número quadrado perfeito continua sendo um número quadrado perfeito". Você concorda? A conjectura de Joana está correta? Explique como você pensou justificando sua resposta.

R= Sim, concordo com ela, pois os números quadrados perfeitos sempre geram outros números inteiros que são também quadrados perfeitos. Ex.:

$16 \times 2 = 32$ | $4 \times 2 = 8$ | $25 \times 2 = 50$ | $9 \times 2 = 18$

$32^2 = 1.024$ | $8^2 = 64$ | $50^2 = 2.500$ | $18^2 = 324$

2- É verdade que os números que são quadrados perfeitos, sempre terminam em 0, 1, 4, 5, 6 e 9? Explique como você pensou justificando sua resposta.

R= Sim, pois eles são números inteiros e o seu quadrado gera outro número inteiro positivo. Ex.:

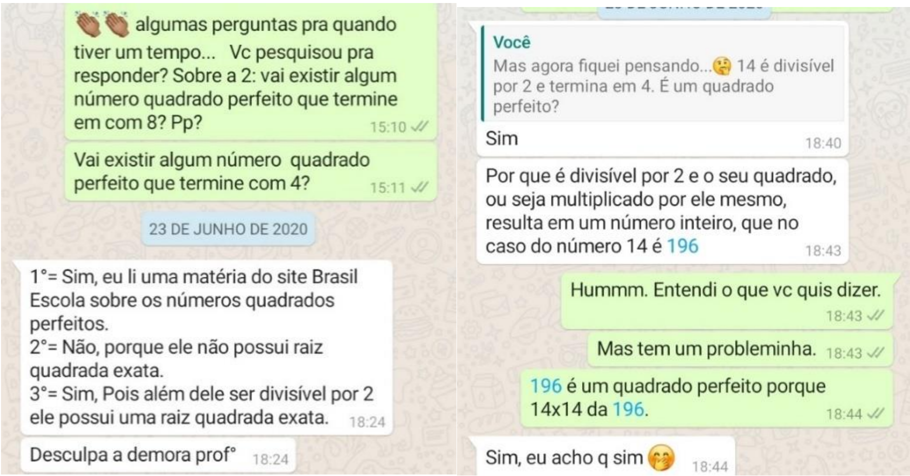
$10^2 = 100$ | $21^2 = 441$ | $14^2 = 196$ | $25^2 = 625$ | $36^2 = 1.296$ | $19^2 = 361$

Fonte: Dados da pesquisa

A validação produzida por Lili, na tentativa de garantir a veracidade da conjectura em questão, que não estava correta, parece indicar uma experiência crucial, pois a aluna realiza diversos testes incluindo números quadrados perfeitos produzidos a partir de valores como 8, 10 e, também, 19, 21, 36 e 50, concluindo suas afirmações com base neles.

Devolvemos questionamentos para a aluna, que também afirmou ter pesquisado para responder nossas perguntas. Buscamos colocar em xeque a veracidade da conjectura que pareceu estar sendo formulada por Lili, qual seja, a de que números cujo último algarismo seja divisível por 2 e que possua raiz quadrada exata são quadrados perfeitos. Mas como pode ser observado no diálogo abaixo, o conceito equivocado para o objeto matemático fez com que ela respondesse que o número 14 seria quadrado perfeito.

Figura 12 – Conversa WhatsApp com a aluna Lili sobre a atividade II – 3



Fonte: Dados da pesquisa

É possível notar que Lili estava convencida sobre a veracidade daquilo que proferia. Sua explicação, no entanto, contém equívocos quando ela relaciona ao fato de números quadrados perfeitos serem divisíveis por dois, porque isso não se aplica para todas as situações. Mesmo assim, notemos a preocupação dispensada em torno da explicação quando ela utilizava “porque” e “pois”.

No diálogo, fica evidente como geralmente interagíamos com Lili. Nem sempre havia sincronicidade, mas isso não impediu que ela se dedicasse e respondesse aos nossos questionamentos sempre que possível, como ocorreu nesta situação em que ela nos retornou uma semana depois – perguntamos no dia 16 de junho e ela nos respondeu no dia 23 do referido mês. Em seguida a esta conversa, retomamos o conceito de números quadrados perfeitos e finalizamos a atividade.

Como institucionalização para ambos os alunos, sinalizamos que a possibilidade de pesquisa pode e deve ser aproveitada por eles. Seguimos enfatizando a importância de pensar em diferentes possibilidades e exemplos para as conjecturas dadas ou formuladas e discutimos uma prova possível, a partir da análise das terminações dos números quadrados perfeitos, conforme havíamos previsto.

❖ Atividade II – 4

4. Encontre o valor das expressões da maneira que achar mais fácil (caso necessário, utilize calculadora):

a. $\left(\sqrt{9}\right)^2 = (\sqrt{9}) \cdot (\sqrt{9})$

Podemos resolver de duas maneiras diferentes, lembra?

Maneira 1	Maneira 2
$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} =$	$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} =$
$3 \ . \ 3 =$	$\sqrt{9 \cdot 9} \ =$

b. $\left(\sqrt{25}\right)^2 =$

c. $\left(\sqrt{3}\right)^2 =$

d. $\left(\sqrt{2}\right)^2 =$

A partir da análise dos resultados é possível identificar alguma regularidade? Em caso positivo:

- ❖ Elabore sua conjectura da maneira mais detalhada possível.
- ❖ Você conseguiria justificar porque a regularidade acontece?

Com esta atividade tínhamos a intenção de que os alunos investigassem a presença de regularidades e que percebessem que o resultado da raiz quadrada de um número maior ou igual a zero, elevada ao quadrado, sempre resultará nele próprio. Trata-se da explicação e da sistematização do porquê podemos utilizar a técnica da simplificação de resultados diante de uma situação análoga.

É esperado que os estudantes consigam ressignificar o conhecimento abordado na Atividade II – 2 e que, portanto, não possuam dificuldades para encontrar as respostas solicitadas. Nos itens a e b, os números escolhidos possuem raízes quadradas exatas, podendo ser utilizadas a maneira 1 e a maneira 2 sem que se deparem com um resultado irracional. O mesmo não ocorre nos itens c e d, em que os números 2 e 3 foram propositalmente colocados. Embora esta variável possa gerar discussões que envolvam números irracionais, consideramos que seja importante para que os alunos percebam que a conjectura permanece válida, não somente em situações que envolvem raízes exatas.

Nesse caso, havendo dúvidas, poderá ser sugerido que eles utilizem as duas maneiras para observar as vantagens e as desvantagens de cada uma delas. A calculadora também poderá ser utilizada já que nosso objetivo se direciona para a validação matemática da regularidade, que deverá ocorrer a partir da observação dos resultados.

Considerando as devidas restrições (“a” não é negativo; se raiz quadrada de “a” é igual a “b”, então $b^2 = a$; b não negativo), uma prova possível de ser discutida com os estudantes a respeito da regularidade encontrada, no momento da institucionalização, pode ser a seguinte:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a}\,.\sqrt{a}$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{a.a}$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \sqrt{(a)^2}$$
$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$$

Evidenciamos, assim, que a conjectura é verdadeira, pois após algumas manipulações, o resultado é o próprio valor do radicando, independentemente de qual seja ele. Nessa validação, a letra assume o estatuto de número genérico[18] (BIANCHINI; MACHADO, 2010), isto é, ela representa valores quaisquer, desde que atendidas as devidas restrições. Em outras palavras, corresponde a qualquer número inteiro não negativo.

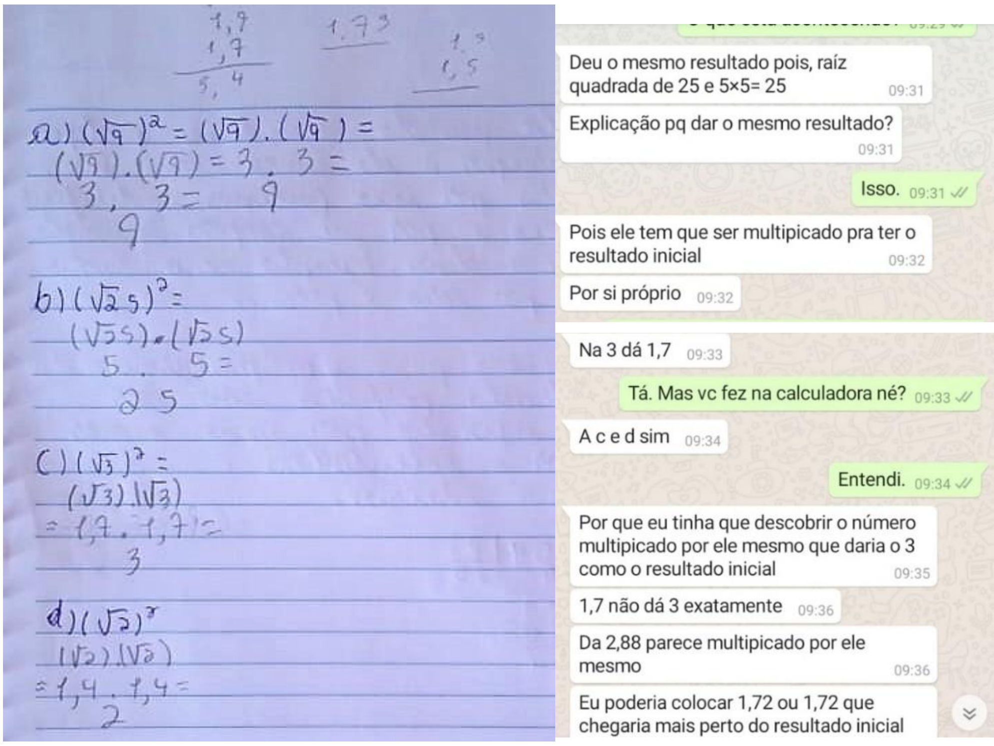
....

Juca resolveu todas as atividades, obtendo números inteiros em todas as situações propostas. Isso ocorreu porque, nos itens a e b, ele resolveu conforme a maneira 1, obtendo resultados inteiros em todas as etapas da resolução. Permanecendo com a maneira 1 e seguindo a sugestão do enunciado, o aluno utilizou calculadora – conforme observado no diálogo da Figura 13 – para efetuar os cálculos solicitados nos itens c e d. Ao encontrar valores aproximados para as raízes quadradas não exatas e multiplicá-los entre si, Juca anotou o valor inteiro mais próximo. Em relação à conjectura solicitada no enunciado, escreveu que os itens c e d não continham números quadrados perfeitos e que, por isso, não continham raiz quadrada exata – afirmação esta, que está correta.

Ao ser questionado por nós sobre outra possível regularidade envolvida na questão, respondeu que os valores “dão o mesmo resultado*”*, como evidenciado em nossa conversa pelo WhatsApp.

[18] Em acordo com o Modelo 3UV (Três principais usos da variável), quais sejam: incógnita (ou termo indeterminado), número genérico e o de relação funcional, conforme discutem Bianchini e Machado (2010).

Figura 13 – Resolução do aluno Juca para a atividade II – 4 / Conversa WhatsApp



Fonte: Dados da pesquisa

Juca se questionou acerca da explicação do porquê isso acontecia e utilizou corretamente o conceito de raiz quadrada de um número não negativo. Sua justificativa, especificamente para as respostas das radiciações envolvidas, embora pautada em exemplos fornecidos pela própria atividade, pode ser classificada como exemplo genérico. Observamos que, por causa da correta compreensão do conceito matemático envolvido, Juca utilizou um exemplo, mas há desprendimento em seu raciocínio, tanto que ele escreveu “pois ele tem que ser multiplicado para ter o resultado inicial”. Ainda que tenha reconhecido a regularidade, ele não produziu uma justificativa sobre o porquê de ela ocorrer. Em linguagem natural ele escreveu: “Sim, c e d não são números quadrados perfeitos e por isso são números irracionais, [...], infinitos [...]”. Não conseguimos questionar se Juca respondeu desta forma devido a seus conhecimentos prévios[19] ou se havia feito algum tipo de pesquisa.

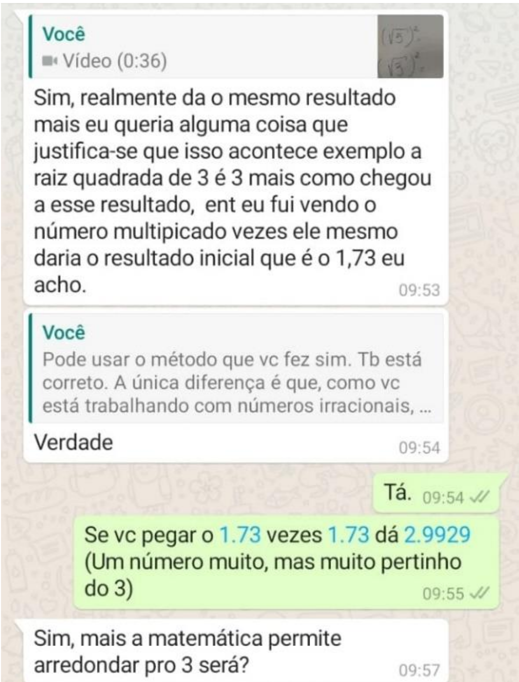
Observamos que sua explicação, embora correta, centrou-se nas raízes não exatas e seus resultados e não na regularidade especificamente. Na pesquisa de Carvalho (2014),

[19] O que seria possível, devido nosso trabalho ao longo do ano letivo de 2019, em que conhecimentos sobre conjuntos numéricos foram bastante discutidos.

por vezes, ocorreu algo semelhante, quando os alunos se centraram e tomaram ciência da regularidade e não no porquê de ela ocorrer. Consideramos esse deslocamento, que alterou o foco da prova em si, natural do processo de validação, em que nem sempre é claro para o aluno o que e como provar. De acordo com Balacheff (2000), é comum que durante a resolução de um mesmo problema, um aluno apresente diferentes tipos ou níveis de prova. Foi o que parece ter ocorrido nessa situação, em que, a partir de nossa interação identificamos um exemplo genérico em relação ao conceito de raiz quadrada e um empirismo ingênuo quanto à conjectura identificada no segundo item da atividade. Em relação a esta última, Juca não realizou outros testes para além daqueles sugeridos no enunciado e, por este motivo, classificamos sua validação neste último caso como um empirismo ingênuo.

Ao discutir um pouco mais sobre a situação, conversamos com o aluno sobre a possibilidade de, diante de outras situações que contivessem a raiz quadrada de um número maior ou igual a zero elevada ao quadrado, não necessariamente realizar todo processo resolutivo, pois, a partir daquele momento, seria possível responder de forma mais direta. Diante disso, Juca, embora parecesse estar convencido sobre a validade da conjectura, “[...] queria alguma coisa que justificasse que isso acontece [...]”, referindo-se ao porquê obtermos um número inteiro, mesmo trabalhando com aproximações.

Figura 14 – Conversa WhatsApp do aluno Juca para a atividade II – 4



Fonte: Dados da pesquisa

Essa interação foi bastante significativa do ponto de vista de nosso trabalho com validações, tendo em vista que antes mesmo de o questionarmos, Juca não se satisfez somente com a resolução da atividade e, ele mesmo, perguntou o porquê de o procedimento matemático envolvido ser possível. Evidenciando, dessa forma, a função explicativa da prova. Sobre isso, De Villiers (2001) escreve que, embora verificações empíricas possuam alto grau de confiança quando se trata de prova de uma conjectura, como parece ocorrido com Juca nesta atividade, elas

> [...] não fornecem em geral uma explicação satisfatória da razão pela qual pode ser verdadeira. Apenas confirmam que é verdadeira, e embora a consideração de mais e mais exemplos possa aumentar ainda mais a nossa confiança, não obtemos uma sensação psicológica satisfatória de esclarecimento (DE VILLIERS, 2001, p. 33).

Nessa oportunidade, discutimos com Juca uma possível prova de nível intelectual, como previmos, tendo em vista seu questionamento e a institucionalização local da atividade.

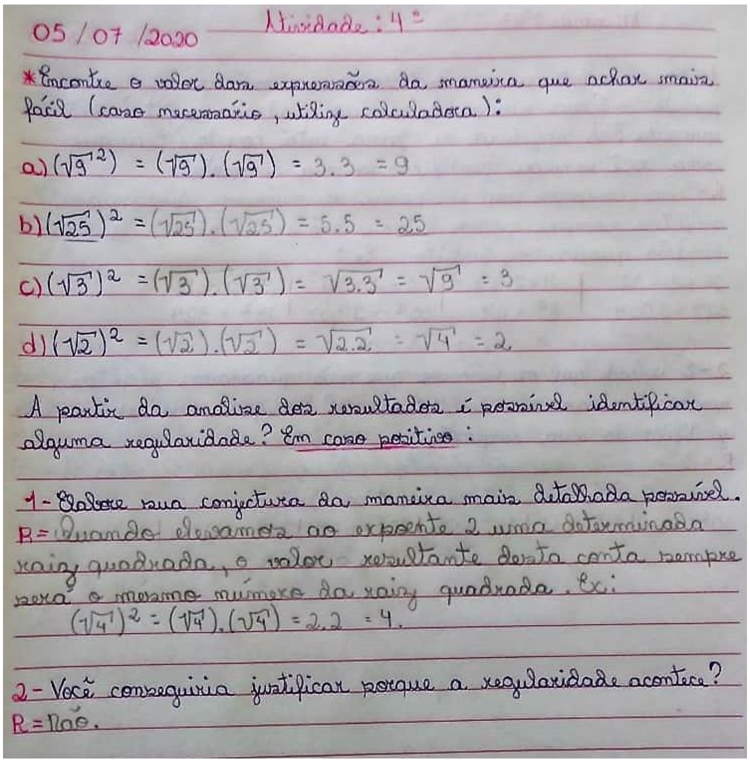
Em relação ao seu questionamento sobre a Matemática permitir “arredondar”, retomamos a própria fala de Juca no diálogo da Figura 13 em que ele mesmo percebe que quanto mais casas decimais usasse, mais próximo de um número inteiro o resultado seria.

A partir do diálogo estabelecido e considerando a interação do aluno por meio de perguntas, explicações, entre outros, é provável que a devolução da atividade tenha ocorrido, assumindo o aluno a responsabilidade pela situação. A vivência de situações adidáticas também pode ser observada, especialmente a situação adidática de validação, na medida em que o estudante busca validar afirmações relativas ao conceito de raiz quadrada. Busca, também, validar e discutir suas respostas para os itens c e d, em que encontrou valores irracionais, conforme Figuras 13 e 14.

Dessa forma, fomos dialogando e interagindo nesse dia, com mensagens escritas, pequenos vídeos e *prints* de tela até a conclusão momentânea de que, a partir dos exemplos discutidos, de fato a conjectura estabelecida parecia ser verdadeira.

Na produção de Lili – Figura 15, é possível identificar que suas respostas estão todas corretas, inclusive a conjectura solicitada. Podemos perceber no registro fotográfico de sua resolução o cuidado da aluna em relação à redação da conjectura. Como descrevemos no capítulo anterior, era esperado que os alunos não tivessem estranhamentos com essa expressão, dado nosso trabalho ao longo do Fase I.

Figura 15 – Resolução da aluna Lili para a atividade II – 4


05/07/2020 Atividade: 4ª

*Encontre o valor das expressões da maneira que achar mais fácil (caso necessário, utilize calculadora):

a) $(\sqrt{9}^2) = (\sqrt{9}).(\sqrt{9}) = 3.3 = 9$

b) $(\sqrt{25})^2 = (\sqrt{25}).(\sqrt{25}) = 5.5 = 25$

c) $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}).(\sqrt{3}) = \sqrt{3.3} = \sqrt{9} = 3$

d) $(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2}).(\sqrt{2}) = \sqrt{2.2} = \sqrt{4} = 2.$

A partir da análise dos resultados é possível identificar alguma regularidade? Em caso positivo:

1- Elabore sua conjectura da maneira mais detalhada possível.

R= Quando elevamos ao expoente 2 uma determinada raiz quadrada, o valor resultante desta conta sempre será o mesmo número da raiz quadrada. Ex:

$(\sqrt{4})^2 = (\sqrt{4}).(\sqrt{4}) = 2.2 = 4.$

2- Você conseguiria justificar porque a regularidade acontece?

R= Não.

Fonte: Dados da pesquisa

A aluna elaborou a conjectura de forma correta e, para além da escrita da frase, contém um exemplo diferente daqueles sugeridos na atividade. Apesar de responder que “não” conseguiria justificar, a ela apresentou um empirismo ingênuo como uma forma de explicar a afirmação que realizou. Poderíamos ter questionado à Lili se ela realizou mais testes ou ainda, qual foi o papel do exemplo em sua escrita para compreender melhor sua produção.

A resposta da aluna para a última pergunta, evidencia que ela não teve problema em admitir que não conseguiu pensar em uma justificativa. Em um cenário mais amplo, nos fornece indícios de que nem sempre é evidente aos estudantes como exatamente realizar validações, assim como ocorreu com Juca. A este respeito, Boavida (2001) escreve que a formulação de conjecturas de fato não deve estar subordinada à produção de provas, pois,

> Pode acontecer que os alunos formulem conjecturas que não são capazes de demonstrar com os conhecimentos matemáticos que possuem no momento. Este facto tem, em si mesmo, valor educativo, além de poder proporcionar boas oportunidades para os alunos aprofundarem, um pouco mais, a sua compressão sobre o trabalho dos matemáticos onde a formulação de conjecturas e a sua demonstração não anda, frequentemente, a par e passo (BOAVIDA, 2001, p. 14).

Questionando a aluna sobre a utilização das duas maneiras conhecidas, para resolver a primeira atividade, ela informou que tentou utilizar a maneira 1 para responder o item c, que envolvia um valor irracional. Porém, ao perceber que o número 3 não possuía raiz quadrada exata, optou pela segunda estratégia, segundo ela, porque havia um "exemplo", ou seja, uma sugestão no enunciado de que haveria mais de uma forma possível de se resolver os itens solicitados.

Figura 16 – Conversa WhatsApp de Lili sobre a atividade II – 4

Fonte: Dados da pesquisa

Na interação que tivemos, é possível perceber que a aluna questionou sobre o porquê a regularidade que ela encontrou funciona: "Mas, na última questão, por que isso acontece?", justamente porque não conseguiu produzir uma justificativa para tal – a aluna respondeu "não" ao questionamento: "Você é capaz de justificar [...]?". Trazemos para a discussão Healy e Hoyles (2000) que acrescentam que, em algumas situações o estudante produz uma validação possível, com os recursos de que dispõe, não significando que esteja satisfeito com a prova produzida. Diferentemente da atividade anterior II - 3, agora Lili parecia não ter dificuldades relativas ao conhecimento do objeto matemático de forma que, possivelmente, não justificou a conjectura, porque não sabia como fazer isso.

Nesse sentido, aproveitamos a oportunidade, em que a prova poderia atender à necessidade de causalidade, tendo em vista que tanto Juca quanto Lili sabiam da veracidade da conjectura, mas expressaram questionamentos sobre o porquê de ela ocorrer, para realizar uma institucionalização com uma prova intelectual para ambos, conforme havíamos pensado. Junto dela, buscamos estabelecer um paralelo com exemplos, relacionando com o conceito de números quadrados perfeitos, pois, segundo Nasser e Tinoco (2003), essa ação é importante para que os alunos percebam que expressões algébricas podem representar valores quaisquer, dadas as devidas restrições. Mesmo assim, é difícil saber como eles interagiram com a nossa produção, o que exatamente compreenderam, se acharam difícil ou se fez sentido. Lili apenas enviou a mensagem "ok, prof!", enquanto Juca escreveu sem termos questionado que "[...] entendi que a raiz quadrada elevada ao quadrado, o resultado sempre será o que está dentro da raiz, mesmo sendo em frações [...]*"*.

Esta fala *"*[...] mesmo sendo em frações*"* pode ter decorrido de, ao longo de nossa interação, na qual a letra assumiu o estatuto de número genérico, termos questionado a validade da conjectura para todos os casos possíveis, ou seja, se ela seria válida para números representados na forma decimal, fracionária, números muito altos, pares, ímpares, entre outros números não negativos.

- **Atividade II – 5**

5. É verdade que "A raiz quadrada exata de um número ímpar é sempre ímpar"? Explique como você pensou, justificando sua resposta.

Com essa atividade, tínhamos como objetivo que os estudantes trabalhassem na produção de uma validação matemática para a conjectura dada, isto é, de que a raiz quadrada de um número exato ímpar será sempre ímpar. A afirmação envolve essencialmente os conceitos de números pares, ímpares e raiz quadrada e, devido a isso, esperávamos que eles conseguissem responder ao nosso questionamento sem dificuldades. Para tanto, os alunos poderiam realizar testes com números conhecidos, verificar a veracidade da conjectura e justificar por meio deles. Considerando nossas interações nas atividades anteriores, em que sempre propomos ao final uma institucionalização local com uma prova de nível intelectual, seria possível que houvesse tentativas de generalização.

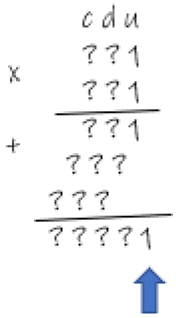
Poderíamos, nesse caso, pensar junto dos alunos, na escrita geral de um número ímpar 2.a + 1 – sendo "a" um número inteiro, maior ou igual a zero. Se esse número possui raiz quadrada exata, ele é um quadrado perfeito e poderíamos aplicar a simplificação conforme Atividade II – 4.

$$\left(\sqrt{2.\mathrm{a}+1}\right)^2 = 2.\mathrm{a}+1 \quad ; \quad a \geq 0$$

Aqui, a validação envolve uma generalização em que a letra assume o estatuto de número genérico, pois se trata de uma representação geral de um número ímpar, sobre a qual se pode raciocinar de forma dedutiva.

Outra possibilidade que envolve um raciocínio genérico, conforme o nível de escolaridade em questão, mas que não contempla elementos algébricos, seria uma análise de todas as possibilidades que envolvem um número quadrado perfeito ímpar, por meio da observação de regularidades aritméticas. Se a conjectura for verdadeira, o número quadrado perfeito será dado em função de outro número ímpar não negativo, multiplicado por ele mesmo. Como todos os números ímpares terminam com os números 1, 3, 5, 7 ou 9, qualquer número que termine com 1, gerará um quadrado perfeito que termine com 1, sendo ele ímpar, seguindo um raciocínio semelhante ao da Atividade II – 3. Por exemplo,

Figura 17 – Resolução possível para a atividade II – 5



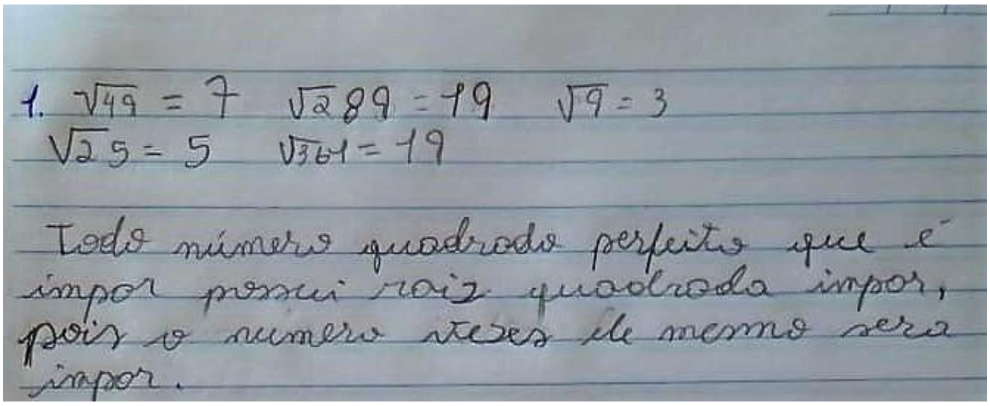
Fonte: Dados da pesquisa

Nesse caso, a raiz quadrada exata do número não negativo obtido como produto da multiplicação seria o valor que foi anteriormente multiplicado por ele mesmo, que era ímpar. O mesmo raciocínio poderia ser aplicado para as demais possibilidades, inclusive considerando números pares, para verificação.

....

Juca respondeu conforme a primeira possibilidade que havíamos pensado, em que apresentou exemplos e escreveu a seguinte explicação:

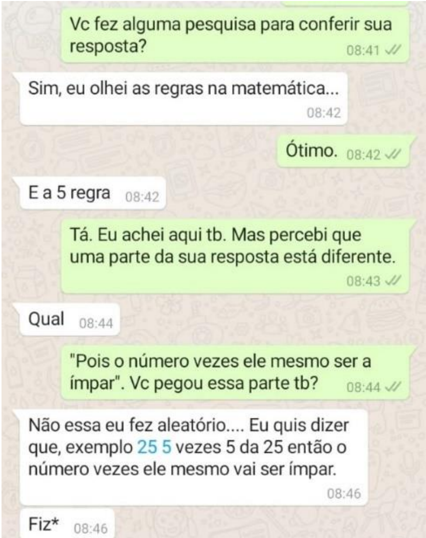
Figura 18 – Resolução do aluno Juca para a atividade II – 5



Fonte: Dados da pesquisa

Logo que recebemos sua resolução questionamos o motivo pelo qual em dois de seus exemplos o resultado foi igual a 19 e prontamente Juca pontuou que o resultado correto da raiz quadrada de 289 seria 17, corrigindo, ele mesmo, seu pequeno equívoco. Considerando as particularidades dos exemplos escolhidos por ele, poderíamos classificar sua produção como experiência crucial, pois houve a verificação para números ímpares incomuns. Buscando compreender melhor como Juca resolveu nossa atividade, perguntamos se ele havia feito alguma pesquisa, conforme diálogo da Figura 19.

Figura 19 – Conversa WhatsApp do aluno Juca para a atividade II – 5



Fonte: Dados da pesquisa

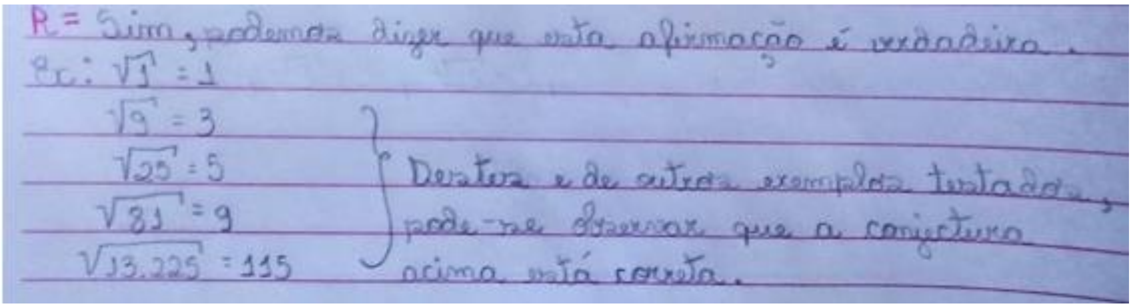
Observamos, então, que houve uma busca em que ele encontrou algumas “regras da matemática”, dentre elas a “regra 5”. No mesmo momento, em paralelo, encontramos o site[20] que fundamentou a resposta do aluno. Verificamos que os exemplos atípicos fornecidos por ele não foram retirados de lá, assim como a escrita não foi exatamente a mesma. Por isso, perguntamos por que uma parte da frase estava diferente. É possível que, devido à nossa insistência acerca da importância de se apresentar justificativas, Juca tenha sentido necessidade de complementar com uma estrutura linguística que contivesse a palavra “pois”. Mas, neste caso, o aluno não se direcionou para a produção de uma explicação acerca do porquê a regularidade ocorre.

Para nós, o fato de ter realizado uma pesquisa indica que havia um comprometimento em nos fornecer uma resposta correta e adequada. Ao final, realizamos uma breve institucionalização em que discutimos justificativas possíveis para validade da conjectura.

Lili, por sua vez, apresentou sua resolução, segundo a qual a afirmação realizada no enunciado seria verdadeira e justificou utilizando-se de exemplos.

[20] https://brasilescola.uol.com.br/matematica/numero-quadrado-perfeito.htm

Figura 20 – Resolução da aluna Lili para a atividade 04 – 5



Fonte: Dados da pesquisa

Podemos classificar sua prova como sendo experiência crucial devido à conclusão da aluna estar fundamentada em exemplos, sobretudo em um exemplo peculiar, em que verificou que a raiz quadrada do número ímpar 13.225 foi o número ímpar 115. No entanto, o fato de estarmos distantes, e de não podermos analisar melhor a situação vivenciada por Lili, deixa-nos em dúvida sobre a prova que produziu.

Poderíamos nos questionar qual foi o papel dos exemplos que a aluna apresentou? A origem de um experimento crucial pode ser, por exemplo, a tomada de consciência da insuficiência da verificação para alguns exemplos ou, também, a impossibilidade em termos cognitivos e linguísticos de produzir uma validação intelectual (BALACHEFF, 2000). Nesse último nível de prova, a "[...] experiência crucial subsiste como um procedimento final para assegurar a convicção, especialmente quando a afirmação foi baseada em um exemplo genérico. Encontramos aqui um exemplo de coabitação operacional entre pragmatismo empírico e racionalismo lógico [...]" (idem, p. 176).

Perguntamos se ela havia realizado outros testes, pelo modo como sua escrita deixou implícita ou se havia realizado alguma pesquisa para elaborar sua validação, mas, nesta ocasião, ela não respondeu às nossas questões. Diante disso, portanto, pontuamos que as restrições impostas pela pandemia, tais como a distância física, e a impossibilidade de intenção, fizeram com que não fosse possível analisar de forma mais detalhada o processo de produção da validação de Lili para esta situação.

- **Atividade II – 6**

6. Em uma aula de Matemática, Joana, Clara e Pedro formularam a seguinte conjectura: “A raiz quadrada exata de um número par é sempre par”. Para tentar justificar que a afirmação estava correta, cada um deles apresentou uma resposta diferente. Observe, analise e responda:

Resposta de Joana

$$\sqrt{4} = 2$$
$$\sqrt{16} = 4$$
$$\sqrt{36} = 6$$
$$\sqrt{64} = 8$$
$$\sqrt{100} = 10$$

Como podemos perceber, através destes exemplos, a afirmação é verdadeira.

Resposta de Clara

$$\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$$
$$\sqrt{16} = \sqrt{2^2.2^2} \rightarrow 2.2 = 4$$
$$\sqrt{36} = \sqrt{2^2.3^2} \rightarrow 2.3 = 6$$
$$\sqrt{64} = \sqrt{2^2.2^2.2^2} \rightarrow 2.2.2 = 8$$
$$\sqrt{100} = \sqrt{2^2.5^2} \rightarrow 2.5 = 10$$

Podemos simplificar o número que está ao quadrado com a raiz. Como todos os resultados são múltiplos de dois, a afirmação é verdadeira.

Resposta de Pedro

Um número par pode ser escrito genericamente como um número múltiplo de 2, ou seja: 2.a (a podendo ser qualquer número inteiro). Então, um quadrado perfeito de um número par é dado por $(2.a)^2$. Se calcularmos a raiz quadrada deste número, teremos:

$$\sqrt{(2.a)^2} = 2.a$$

Se simplificarmos, continuaremos com um número múltiplo de 2. Portanto, a raiz quadrada exata de um número par é sempre par.

- Qual ou quais respostas apresentadas pelo grupo você achou mais interessante? Por quê?
- Se você precisasse responder em uma prova, qual das três respostas você escolheria? Por quê?
- Caso você tenha pensado em alguma outra explicação diferente de Joana, Clara e Pedro, fique à vontade para apresentá-la.

Para finalizar essa Fase II de nossa investigação, propomos uma atividade com o objetivo de saber quais as impressões dos estudantes acerca de possíveis validações para uma mesma conjectura. Nela, seria necessário analisar cada uma das provas e, em seguida, indicar qual consideram mais interessante e qual escolheriam. Para sua elaboração, inspiramo-nos nos questionários desenvolvidos e aplicados por participantes do Projeto Argumentação e Prova na Matemática Escolar (AProvaME) e na pesquisa de Healy e Hoyles (2000).

Procuramos seguir uma estrutura semelhante, em que foram disponibilizadas várias provas para uma mesma conjectura, devendo o aluno analisá-las. Embora tenham envolvido temas diferentes, as investigações desenvolvidas no âmbito do projeto AProvaME que analisaram questionários desse tipo, sinalizaram uma preferência dos estudantes por provas empíricas (LEANDRO, 2006; SOUZA, 2009).

Diante disso, é possível que tanto Juca quanto Lili optem pelas respostas de Joana ou Clara por serem consideradas mais simples ou mais econômicas. Então, de forma proposital, questionamos especificamente qual resposta seria a mais interessante e, em seguida, qual escolheriam se estivessem em uma situação avaliativa, porque poderiam ser diferentes.

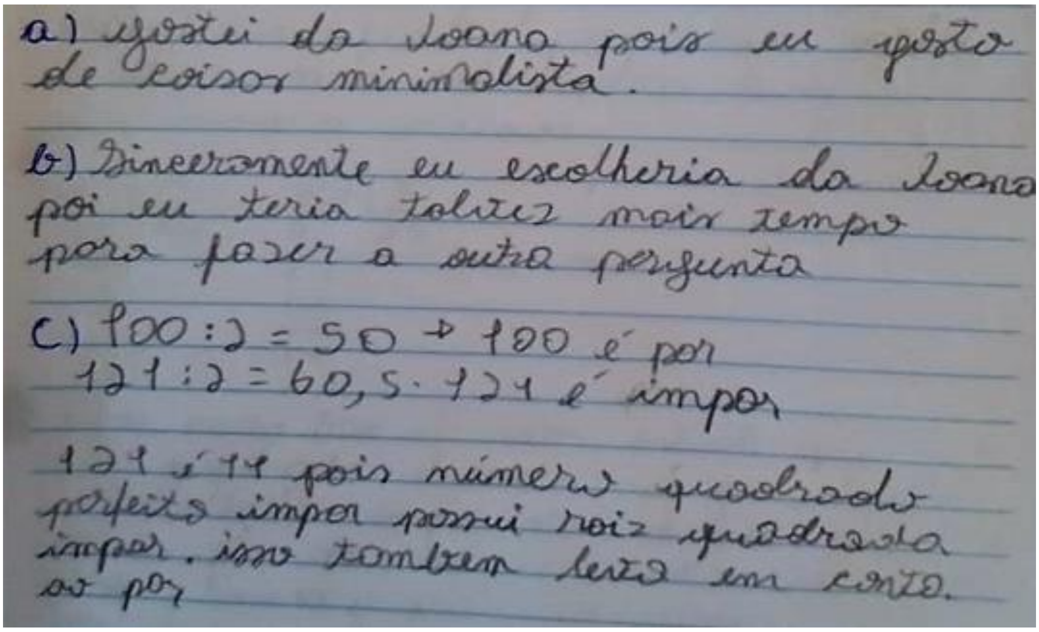
Por exemplo, mesmo que hipoteticamente não conseguissem expressar uma resposta como a de Pedro, ela está em acordo com as validações intelectuais sempre discutidas por nós ao final de cada atividade, podendo ela ser escolhida como a mais interessante. Variáveis tais como um atendimento à nossa autoridade (HEALY; HOYLES, 2000) em que a resposta de Pedro seria a escolhida por ser supostamente aquela que gostaríamos que fizessem, ou uma economia da lógica (BALACHEFF, 1987; 2019) em que optariam pela resposta mais simples, pois não precisariam investir tanto tempo na atividade, poderiam interferir nas escolhas dos alunos.

Considerando a existência de outras provas possíveis, inserimos o último item devido à possibilidade de eles apresentarem uma validação semelhante àquela discutida na institucionalização da atividade II – 5. Dessa forma, poderia ser analisada a terminação dos números pares.

....

Juca respondeu aos três questionamentos que realizamos. Afirmou que gostou mais e que também escolheria a resposta de Joana, porque gosta de coisas “minimalistas”, mais simples, conforme sua resolução.

Figura 21 – Resolução do aluno Juca para a atividade II – 6



a) gostei da Joana pois eu gosto de coisas minimalista.

b) Sinceramente eu escolheria da Joana poi eu teria talvez mais tempo para fazer a outra pergunta

c) 100 : 2 = 50 → 100 é par
121 : 2 = 60,5 · 121 é impar

121 é 11 pois número quadrado perfeito impar possui raiz quadrada impar. isso tambem leva em conta ou par

Fonte: Dados da pesquisa

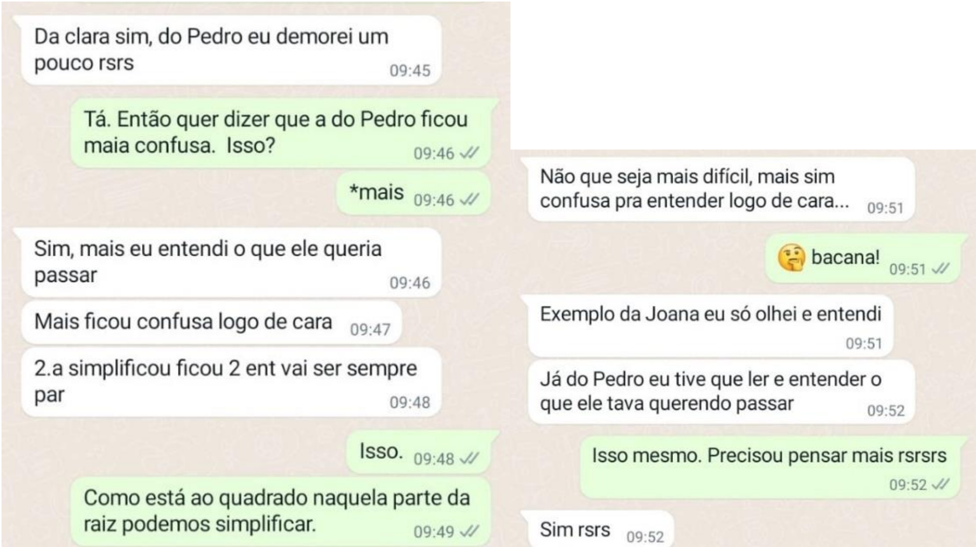
Juca parece levar em conta o contexto proposto, qual seja, uma situação de prova, no sentido de uma avaliação de aprendizagem. Nesse caso, haveria mais tempo para responder outras perguntas, uma preocupação legítima, especialmente quando o contrato didático arraigado é aquele em que se privilegia aspectos quantitativos e respostas ao invés do processo de resolução. Observamos aqui uma ideia relacionada à economia da lógica, em que o estudante tomou como verdadeira a conjectura a partir de exemplos. Poderíamos ter buscado a devolução da situação com questionamentos como: o que garante que as respostas de Joana ou Clara são válidas para todos os números pares se elas testaram com apenas alguns exemplos? Você confia neste tipo de prova?

Em se tratando do terceiro item, percebemos que Juca apresentou o número 100 como um exemplo de número par e justificou dividindo-o por 2 e constatando um resultado exato. Apresentou o número 121 como um exemplo de número ímpar e justificou realizando o mesmo procedimento, verificando um resultado não exato. Essa justificativa, em relação ao porquê o número escolhido ser par ou ímpar, poderia ser considerada de nível intelectual, pois o aluno utilizou um exemplo como suporte de sua explicação, para generalização.

No entanto, em relação à conjectura da atividade especificamente, observamos que não houve a produção de uma nova validação, mas sim o resgate de conjectura relativa aos números ímpares. Ao final, o aluno concluiu por extensão que a afirmação envolvendo números pares seria verdadeira. Em função disso, classificamos sua resolução como um empirismo ingênuo.

Como foi possível interagir com Juca, questionamos sobre o que ele pensou ou achou ao ver a resposta de Pedro, pois ele não a mencionou em sua resolução, conforme diálogo a seguir:

Figura 22 – Conversa WhatsApp com o aluno Juca sobre a atividade II – 6



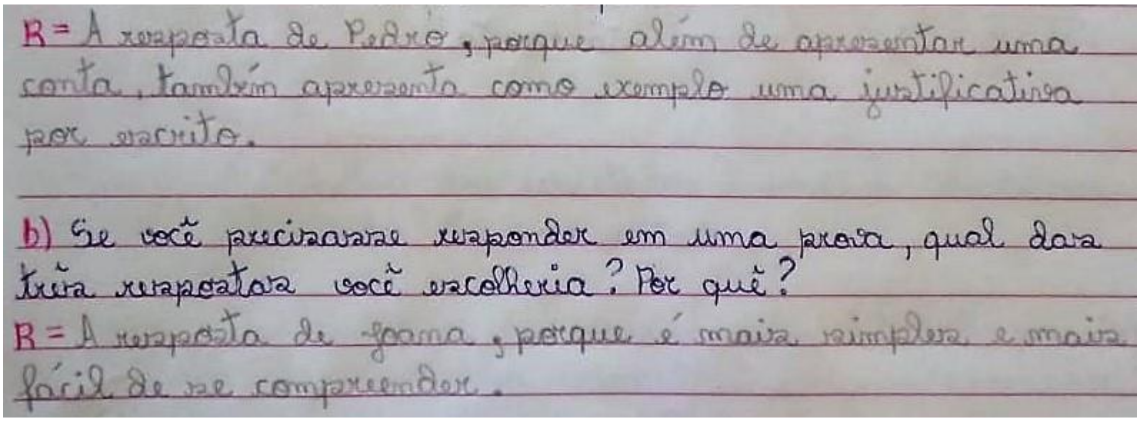
Fonte: Dados da pesquisa

O aluno respondeu que achou a prova de Pedro um pouco confusa, mas que compreendeu o que ele fez. Em sua escrita, ele retomou a ideia principal da validação em questão, ou seja, a da simplificação. Percebemos que ele cometeu alguns equívocos na escrita. Assim, poderíamos, por exemplo, ter questionado melhor o que ele quis dizer com a escrita “2.a simplificou ficou 2 então vai ser sempre par”. No momento, rapidamente interpretamos como se ele tivesse escrito, tal como na validação de Pedro e confirmamos que a ideia estaria correta.

Ademais, o estudante ainda acrescentou que não considerou a prova de Pedro difícil, mas que seria mais a confusa, pois, segundo ele, bastou olhar a validação de Joana para compreender. De fato, esta última se tratava de um empirismo ingênuo, em que houve a realização de alguns testes relativamente simples. Para Balacheff (2019), os estudantes tendem a aceitar um tipo de prova de acordo com seus conhecimentos e conforme suas percepções sobre a situação. Nas atividades que tem desenvolvido, Juca tem preferido validações de nível pragmático, com ênfase na escrita e testes. Possivelmente, a prova de Joana lhe traz mais segurança, mais confiança de que, de fato, a conjectura é verdadeira. Se consideramos todo o processo de Juca desde a primeira atividade desta Fase II, sua resposta estaria coerente com o que vem desenvolvendo em suas resoluções, isto é, provas que se concentram mais no âmbito pragmático.

Em uma outra direção, Lili parecia lidar melhor com o exemplo genérico de Pedro. Ela escolheu a referida prova como sendo a mais interessante, porque, segundo ela, para além de uma “conta”, há uma “justificativa por escrito”, conforme registro fotográfico enviado pela aluna – Figura 23.

Figura 23 – Resolução da aluna Lili para a atividade 04 – 6


R= A resposta de Pedro, porque além de apresentar uma conta, também apresenta como exemplo uma justificativa por escrito.

b) Se você precisasse responder em uma prova, qual das três respostas você escolheria? Por quê?
R= A resposta de Joana, porque é mais simples e mais fácil de se compreender.

Fonte: Dados da pesquisa

A resposta de Lili para o primeiro item nos ajuda a compreender seu modo de apresentar justificativas para nossas atividades de validação, pois parece que para a aluna é muito importante que exemplos ou contas estejam acompanhados de uma escrita em linguagem natural como uma frase, por exemplo.

No item b, ela optou pelo empirismo ingênuo de Joana porque, além de ser mais simples, seria mais fácil de compreender. Além disso, parece ter havido uma interpretação por parte da aluna quanto ao contexto proposto na atividade, em que, em um momento avaliativo, escolheria a resposta mais simples possível, aplicando uma economia da lógica. Para melhor compreender como a aluna pensou nesse sentido, poderíamos ter dialogado mais sobre as diferenças entre as respostas de Pedro e de Joana e como Lili as interpretou ou, ainda, qual das repostas convenceu mais.

A atitude de Lili em optar pela resposta mais simples no item b em detrimento da resposta de Pedro, não implica em uma desvalorização do raciocínio genérico, afinal a aluna a escolheu como a mais interessante. Além de uma possível interferência de variáveis, esta ação de indicar exemplos, ou justificar com base em alguns testes não só faz parte, como também é legítima do processo de validação matemática. Desse modo, as pontuações de Lili também se mostraram coerentes com as validações que têm apresentado ao escrever explicações sempre acompanhadas de exemplos.

Em relação ao item c, a aluna não apresentou uma tentativa de resolução.

- **Considerações sobre a Fase II**

Considerando os processos de validação matemática apresentados por Juca e por Lili, em relação às atividades aplicadas durante a Fase II, identificamos apontamentos a serem feitos, conforme nossos objetivos específicos,

- Como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas para suas afirmações e/ou conjecturas?

Nossos diálogos com Juca, geralmente ocorreram quando enviávamos a atividade. Assim, as conversas aconteceram de forma simultânea, ou seja, conforme questões ou dúvidas foram sendo colocadas de nossa parte ou por parte do aluno, íamos interagindo. O mesmo não ocorreu com Lili, que realizava atividades ou respondia aos questionamentos em tempos diferentes. Esses aspectos fizeram com que não fosse possível analisar as situações de forma mais detalhada, especialmente no caso de Lili, pois não estávamos junto com eles e não conseguimos acompanhar mais de perto o processo de como, de fato, eles responderam às nossas atividades de validação.

Ainda em se tratando de nossa comunicação, podemos dizer que a interação via WhatsApp dificultou a identificação e a vivência de situações adidáticas de ação, formulação e validação, sobretudo quando ela não ocorreu de forma síncrona. Não foi possível, por exemplo, saber como e quando realizaram a atividade. Isso não quer dizer que não seja possível identificar indícios de que a devolução tenha ocorrido e de situações adidáticas de ação, formulação e validação, como pontuamos nas atividades II – 3 e II – 4, especialmente nas resoluções de Juca.

Nas produções de Juca e de Lili, há prevalência de registros escritos em linguagem natural. Percebemos, que em todas as atividades Juca apresentou testes ou exemplos e que suas respostas finais foram descritivas, fazendo uso da linguagem natural para justificar suas respostas, como na atividade II – 3, em que os testes foram feitos em separado da resposta final. Embora Lili também tenha essa característica, em suas justificativas, ela buscou complementar sua resposta escrita em linguagem natural com exemplos unindo estes dois elementos, como foi o caso da resolução da atividade II – 5 e II – 3.

Ainda durante a formulação e apresentação de provas ao longo desta II, percebemos que o fato de os alunos terem conhecimento acerca do objeto matemático e conseguirem realizar atividades com êxito, embora fundamental em algumas situações, não foi suficiente para que eles elaborassem justificativas, pois nem sempre sabiam como exatamente fazer isso. Esse aspecto ficou claro, por exemplo, na produção de Lili para a atividade II – 4 e nas resoluções de Juca para as atividades II – 4, II – 5, quando houve um redirecionamento da prova para alguma outra afirmação envolvida na situação.

A situação específica em que houve um pequeno equívoco em relação ao conceito de números quadrados perfeitos, por parte de Lili, na atividade II – 3 possibilita-nos pensar que discutir validações matemáticas com os estudantes pode ser uma oportunidade para ressignificar e aprender novos conceitos e novos conhecimentos. Esse aspecto também pôde ser observado nas situações em que discutimos com ambos os alunos sobre simplificações possíveis, números pares, ímpares e relações.

Ademais, acrescentamos que, ao longo deste processo, os dois alunos buscaram informações em sites de busca em momentos específicos. Não tivemos controle sobre os temas que eles pesquisaram, mas consideramos válida tal iniciativa porque, de alguma forma, sinaliza interesse e dedicação para com as atividades.

- Quais provas matemáticas foram produzidas pelos alunos?

Até aqui, os estudantes têm transitado entre os dois níveis estabelecidos pela tipologia de provas de Balacheff (1987). Para melhor identificação das provas apresentadas, elaboramos um quadro, em que pontuamos as produções relativas à Fase II de ambos os alunos, conforme a seguinte legenda: sinalizações em azul, indicam o tipo ou o nível de prova referente à conjectura que constava no enunciado das questões propostas. Sinalizações em laranja, indicam o tipo ou o nível de alguma outra validação que tenha sido apresentada durante a discussão da atividade, que envolveu alguma outra afirmação.

Quadro 1 – Provas produzidas por Juca na Fase II

Atividade	**Nível pragmático**		**Nível Intelectual**	
	Empirismo Ingênuo	Experiência Crucial	Exemplo Genérico	Experiência Mental
II – 1				
II – 2				
II – 3				
II – 4				
II – 5				
II – 6				

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 2 – Provas produzidas por Lili na Fase II

Atividade	**Nível pragmático**		**Nível Intelectual**	
	Empirismo Ingênuo	Experiência Crucial	Exemplo Genérico	Experiência Mental
II – 1				
II – 2				
II – 3				
II – 4				
II – 5				
II – 6	Não houve a produção de uma validação por parte da aluna			

Fonte: Dados da pesquisa

As produções de ambos os alunos foram predominantemente pragmáticas. Em relação a Juca, por vezes, identificamos mais de um tipo de prova em uma mesma situação. Essa prova, embora relacionada com a atividade proposta, não se referia à conjectura dada, mas com outra afirmação no entorno. Por exemplo, na atividade II – 6, sua justificativa foi de nível intelectual ao explicar o porquê de um número ser par ou ímpar, mas foi do tipo empirismo ingênuo quanto à conjectura do enunciado: “a raiz quadrada exata de um número par é sempre par”. A possibilidade da interação contribuiu para que identificássemos essas outras validações. Como nossas conversas com Lili foram mais tímidas e ocorreram de forma assíncrona, as classificações foram realizadas fundamentalmente com base nas produções escritas.

- De que forma as atividades desenvolvidas favoreceram ou não a produção de validações?

Apesar de todas as atividades propostas a conjectura já estivesse estabelecida, de maneira mais ou menos explícita, enunciados com expressões como: “O que você acha?”, “Como você poderia ter certeza?” e “Você concorda?”, parecem ter sido importantes para que os alunos pudessem explicitar suas considerações. Desse modo, foi possível observar essa escrita mais pessoal na atividade II – 1 de Juca e II – 3 de Lili, por exemplo.

A inserção de dicas, ainda que realizadas de forma tímida, parecem ter incentivado Lili a realizar diversos testes na atividade II – 2 e a utilizar diferentes maneiras de resolução na atividade II – 4.

Os complementos “por que”, “explique” e “justifique” sempre estiveram presentes, pois, para atender a este comando seria necessário se preocupar, não somente em saber a veracidade ou não de uma conjectura, mas ir além e pensar em estratégias para validá-las. Ao observarmos as validações relativas à Fase II, em praticamente todas elas, houve uma escrita em linguagem natural acompanhada ou não de exemplos, em que os estudantes buscaram explicar suas respostas.

5.2 Fase III

- **Atividade III – 1 e Atividade III – 2**

1. Efetue as potenciações da forma que achar melhor:

a. $\frac{3^2}{3^2} =$ b. $\frac{(-5)^4}{(-5)^4} =$ c. $\frac{1^6}{1^6} =$ d. $\frac{(-2)^3}{(-2)^3} =$

- Observando os resultados obtidos, você identifica alguma regularidade ou semelhança entre eles? Explique de maneira detalhada.

2. Resolva as potenciações, seguindo os métodos indicados:

Resolva as potências. Depois, efetue a divisão	*Utilize a propriedade[21], indicada*
a. $\frac{2^3}{2^3} =$	b. $\frac{2^3}{2^3} =$

- Compare os resultados. O que você observa?

Com a atividade III – 1, tínhamos a intenção de que os alunos[22] formulassem conjecturas sobre o resultado de uma divisão com potências iguais. Com a atividade III – 2, pretendíamos que eles percebessem que o resultado de ambas as divisões deveria ser o mesmo, independentemente do procedimento adotado. Antes de propor suas resoluções, buscamos retomar e discutir o conceito de potenciação, abordando-o na apostila elaborada por nós e entregue aos estudantes.

Trata-se de uma adaptação da atividade II – 1 para esta terceira Fase, contemplando agora números positivos e negativos, expoentes pares e ímpares e acrescentamos uma segunda tarefa, com vistas ao objetivo estabelecido. A ideia era a de que os alunos percebessem que obrigatoriamente os dois resultados precisam ser iguais, pois se trata de uma divisão de um valor por ele mesmo. Na atividade III – 2, solicitamos que usassem a propriedade relativa à divisão de potências de uma mesma base – conforme nota de rodapé da página anterior – e nesse caso o resultado esperado é 2^0.

Parte dos estudantes pode finalizar a atividade com aquela resposta e indicar que os resultados obtidos foram diferentes. Nesse caso, seria possível questionar sobre o porquê os resultados serem diferentes em se tratando de uma mesma expressão. É provável que ainda assim alguns alunos não estabeleçam relações com a propriedade $a^0 = 1$, $a \neq 0$, sendo necessária uma intervenção mais direta. No momento da

[21] Tratava-se da propriedade relativa à divisão de potências de bases iguais, que permite repetir a mesma base e subtrair os expoentes. Ela foi apresentada anteriormente na apostila como “propriedade dois”.

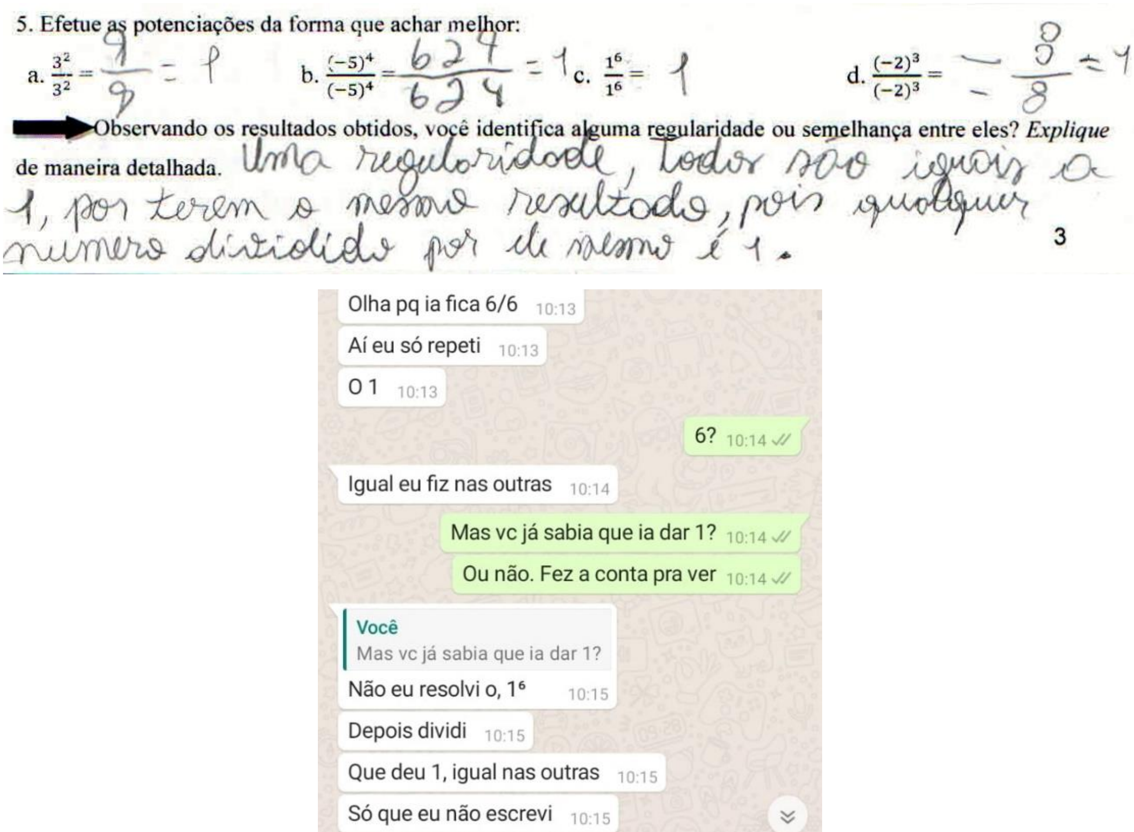
[22] Com a expressão “os alunos”, entenda-se: Todos os alunos das turmas de 9°ano das quais éramos professores.

institucionalização, esperávamos discutir uma prova intelectual possível, explorando, principalmente, a explicação e a sistematização das propriedades envolvidas.

....

Juca respondeu aos itens solicitados de forma parcialmente correta, identificando a regularidade pretendida. O estudante a apresentou utilizando uma escrita em linguagem natural e a justificou afirmando que “[...] qualquer número dividido por ele mesmo é 1.”, conforme Figura 24 abaixo.

Figura 24 – Resolução do aluno Juca para a atividade III – 1 / Conversa WhatsApp



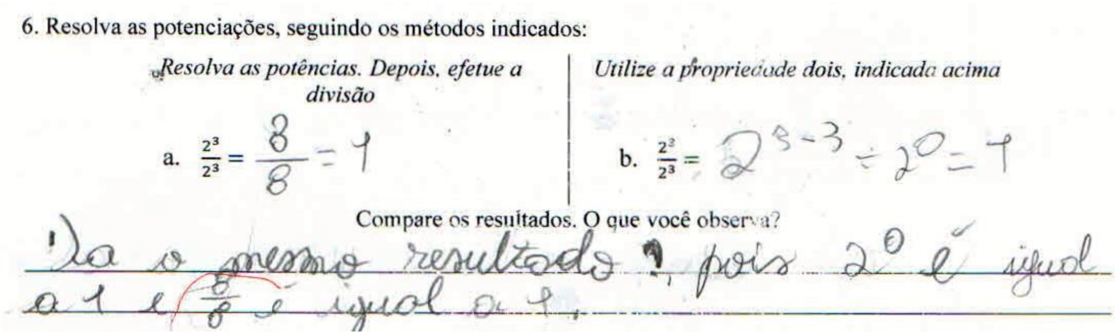
Fonte: Dados da pesquisa

Logo que Juca enviou sua resposta, por meio do WhatsApp, solicitamos que revisasse o cálculo efetuado no item b, visto que a resposta correta é 625 e não 624, conforme o aluno havia respondido. Mesmo tendo percebido o equívoco, o estudante não corrigiu sua escrita na versão final da resolução, referente ao item b. Em relação ao item c, como observamos no diálogo acima, ele considerou que 1^6 resultaria 6, o que é errado, tanto no denominador quanto no numerador, e que a divisão resultaria em 1. Paias (2019), que analisou obstáculos didáticos relacionados à potência, infere que esse erro é bastante comum e pode estar relacionado ao não entendimento da potenciação como uma representação do objeto matemático em questão. Quando o número 1 está presente, seja na base ou no expoente, como foi o caso, os equívocos tendem a ser maiores. Após nossa interação, ele logo percebeu seu erro e argumentou que isso não alteraria o resultado final, que seria 1 de qualquer maneira.

Então, podemos dizer que Juca reinvestiu parcialmente o conhecimento institucionalizado na Fase II, quando discutimos essa mesma questão, pois o aluno ainda parecia sentir a necessidade de desenvolver os cálculos pretendidos, antes de responder efetivamente, conforme percebemos na Figura 24.

Em relação ao segundo questionamento, o aluno respondeu corretamente da seguinte forma,

Figura 25 – Resolução do aluno Juca para a atividade III – 2


6. Resolva as potenciações, seguindo os métodos indicados:

Resolva as potências. Depois, efetue a divisão	Utilize a propriedade dois, indicada acima
a. $\frac{2^3}{2^3} = \frac{8}{8} = 1$	b. $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0 = 1$

Compare os resultados. O que você observa?

Dá o mesmo resultado, pois 2^0 é igual a 1 e $\frac{8}{8}$ é igual a 1.

Fonte: Dados da pesquisa

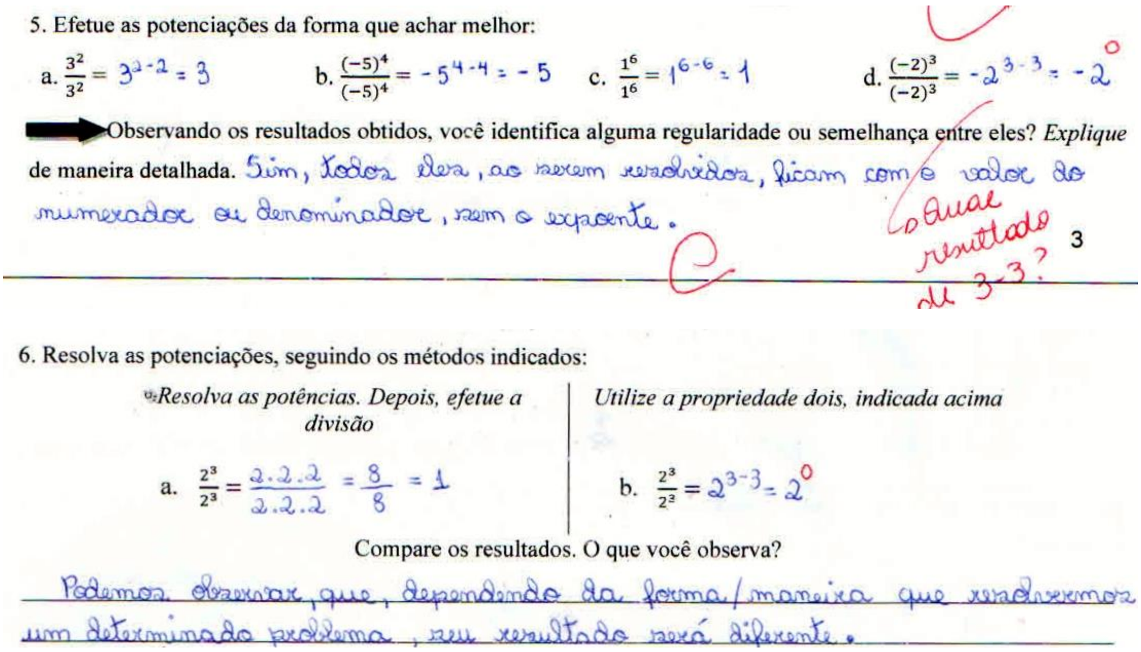
Apesar do questionamento não exigir justificativa, o aluno complementou sua observação de que o resultado obtido em ambas as situações foi o mesmo, explicando "[...] pois 2^0 é igual a 1 e $\frac{8}{8}$ é igual a 1". Embora enfático ao escrever que "qualquer número dividido por ele mesmo é 1", ele resolveu todos os itens passo a passo, o que evidencia que, neste momento, considerando a situação dada e o contexto, houve um apego à resolução e à verificação da validade ou não da conjectura. Poderíamos nos questionar aqui o porquê de isso ter ocorrido: ele respondeu, cuidadosamente, realizando todos os cálculos por ter sido a primeira apostila elaborada pela professora de Matemática? Foi uma tentativa de resolução cuidadosa e atenta? Foi uma resolução pautada na preocupação de apresentar o processo resolutivo? Foi uma resolução na tentativa de corresponder expectativas da professora? Ou, de fato, houve a necessidade do convencimento pessoal? Como Juca analisou e agiu diante da situação dada?

Aproveitando nossa interação, perguntamos se o resultado 1 se manteria para a divisão $(394597)^{202}$ / $(394597)^{202}$, uma situação inusitada para ver como ele responderia. Imediatamente ele enviou: "eu acho que sim prof, pois os números são iguais". Devido a essa resposta, classificamos a validação de Juca como de nível intelectual, em ambas as atividades, porque mesmo que momentaneamente, houve uma internalização da ação e o raciocínio do aluno contempla a categoria de objetos, apesar da nova circunstância que lhe foi apresentada (BALACHEFF, 2019).

Embora ele tenha cometido alguns equívocos em sua resolução, como, por exemplo, a ideia de que 1^6 resultaria 6, tivemos a oportunidade de apontar e discutir em tempos semelhantes àquele que ele desenvolveu a proposta. O mesmo não ocorreu com Lili, porque apenas tivemos acesso às suas resoluções quando a sua apostila mensal foi finalizada e entregue na escola. Em relação a sua resposta, observa-se que ela também cometeu equívocos, como quando, na primeira atividade – Figura 26, ignorou o resultado da subtração dos expoentes. Possivelmente isso se deu devido à crença de que, quando o número é apresentado sem qualquer expoente, ele não existe, sendo ele 0. Esse erro também foi pontuado por Paias (2009; 2019), que classificou a "compreensão do expoente 0 como nada" como um obstáculo epistemológico relacionado ao objeto matemático potência. Em várias das respostas analisadas os estudantes repetiam o número da base, como fez Lili, e explicavam que "não tinha expoente" ou que "não se multiplicaria por nada".

Na correção das atividades, questionamos, de forma escrita, conforme Figura abaixo, sobre o resultado da subtração envolvida, mas essa ação não foi eficiente, pois a apostila só foi devolvida à aluna um tempo depois. Nesse sentido, o contexto pandêmico, que resultou às aulas não presenciais, se constituiu uma restrição aos processos de ensino e de aprendizagem, bem como, às ações que podíamos desenvolver naquela ocasião.

Figura 26 – Resolução de Lili para as atividades III – 1 e III – 2



5. Efetue as potenciações da forma que achar melhor:

a. $\frac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3$ b. $\frac{(-5)^4}{(-5)^4} = -5^{4-4} = -5$ c. $\frac{1^6}{1^6} = 1^{6-6} = 1$ d. $\frac{(-2)^3}{(-2)^3} = -2^{3-3} = -2^0$

Observando os resultados obtidos, você identifica alguma regularidade ou semelhança entre eles? *Explique* de maneira detalhada. Sim, todos eles, ao serem resolvidos, ficam com o valor do numerador ou denominador, sem o expoente.

O qual resultado de 3-3?

3

6. Resolva as potenciações, seguindo os métodos indicados:

Resolva as potências. Depois, efetue a divisão	*Utilize a propriedade dois, indicada acima*
a. $\frac{2^3}{2^3} = \frac{2.2.2}{2.2.2} = \frac{8}{8} = 1$	b. $\frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0$

Compare os resultados. O que você observa?

Podemos observar que, dependendo da forma/maneira que resolvermos um determinado problema, seu resultado será diferente.

Fonte: Dados da pesquisa

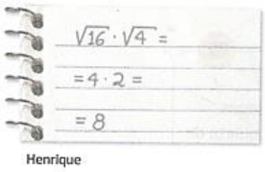
O que Lili observou aqui parece contraditório às conclusões obtidas para a atividade semelhante na Fase II, pois naquela ocasião, em todos os itens propostos, sua resposta esteve correta e foi justificada.

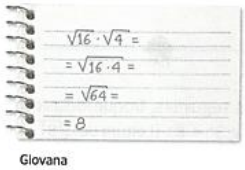
O mesmo pode ser observado na segunda atividade, mas com a diferença de que nesta Lili resolveu passo a passo a potenciação proposta. Observamos que suas explicações obedecem à coerência da conjectura equivocada, o que fez com que ela não percebesse a contradição matemática, qual seja, resultados diferentes para uma mesma expressão. Não tivemos a oportunidade de devolver questionamentos como: se as potenciações são idênticas, por que o resultado é diferente? Não deveríamos obter o mesmo resultado? Provavelmente essas perguntas colocariam a aluna em reflexão sobre a existência de contradições. Embora incorretas, se as conclusões de Lili parecem não indicar validações, mas conjecturas e, nesse sentido, não estabelecemos uma classificação para elas. A não comunicação entre nós e a aluna, como dissemos anteriormente, mostrou-se uma restrição, porque impediu que devolvêssemos questionamentos e a colocássemos em reflexão sobre suas considerações.

Tanto Juca quanto Lili poderiam ter simplesmente respondido a cada item com a resposta 1, pois este conhecimento já havia sido institucionalizado na ocasião anterior, mas ambos realizaram cálculos, o que não significa que não tenha lembrado ou ressignificado a experiência da situação semelhante. O conhecimento, o raciocínio e o contexto, por exemplo, podem ter interferido na produção da validação (BALACHEFF, 1999). Nossa institucionalização ocorreu de forma local com Juca em que discutimos a impossibilidade de obtermos resultados diferentes para uma mesma expressão. Não foi possível realizar a mesma ação com Lili.

❖ Atividade III – 3 e Atividade III – 4

3. Observe como Henrique e Giovana efetuaram a multiplicação $\sqrt{16}\,.\,\sqrt{4}$:





❖ O que você acha? Será que o resultado das continhas sempre será o mesmo, independentemente dos valores? Será que funciona para os números 9 e 49? Será que funciona para os números 676 e 3721? Justifique cada uma de suas respostas

4. Seguindo a mesma lógica de Henrique e de Giovana, um aluno de outra turma de 9° ano conjecturou que o mesmo acontece com a operação de adição. Veja só:

$\sqrt{16} + \sqrt{0} =$
$= 4 + 0 =$
$= 4$

$\sqrt{16} + \sqrt{0} =$
$= \sqrt{16 + 0} =$
$= \sqrt{16} =$
$= 4$

E agora? Foi coincidência ou o resultado destas continhas sempre será o mesmo, independentemente dos valores? Justifique sua resposta!

A questão 3 foi adaptada da Fase II, mas incluímos agora a sugestão do teste com os números 9 e 49 e 676 e 3721. A inclusão desta variável ocorreu devido a nossa preocupação com os estudantes que precisariam estudar sozinhos, sem nenhum tipo de interação conosco. Com ela buscamos uma maneira de identificar se a certeza dos alunos permanece, diante da sugestão de realizar testes com outros números. Uma questão possível de ser devolvida é o funcionamento da propriedade para números decimais, como no caso de 0,25 e 1,44 por exemplo, ou ainda, se a propriedade seria válida para o caso da divisão, conforme identificamos na ocasião em que a referida atividade foi desenvolvida, na Fase anterior. Uma prova intelectual poderia seguir os mesmos aspectos da validação discutida na atividade II – 4.

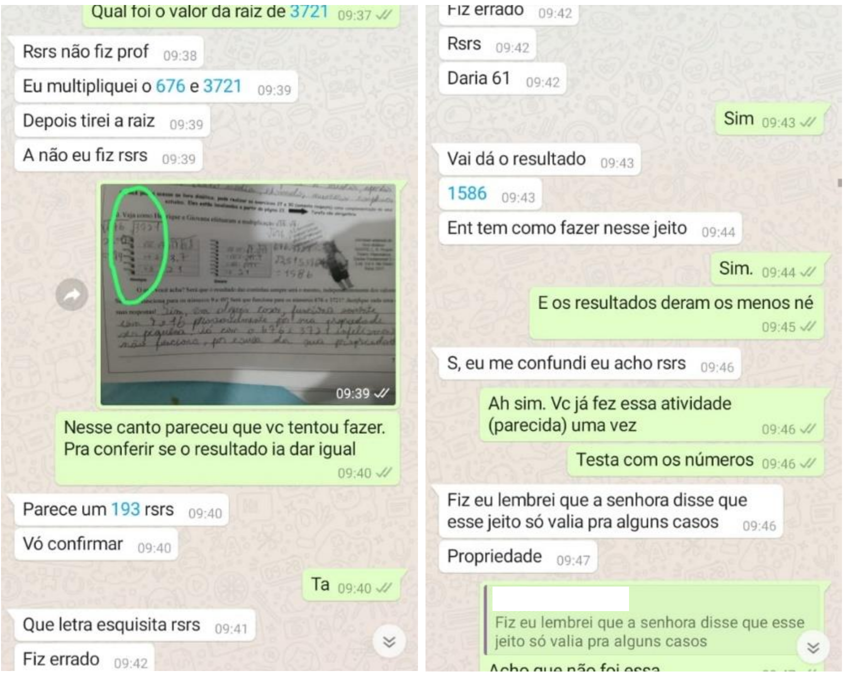
A conjectura estabelecida na questão 4 é falsa. É verdade que se ao menos um dos radicandos for zero, o resultado é igual em ambos os casos, mas é falso que se pode generalizar. Para provar a falsidade da conjectura, basta um contraexemplo e é isso que esperávamos dos alunos. Uma provocação possível poderia ser o questionamento: se a conjectura é falsa, por que ela funcionou para o caso dado? Ela funcionaria para $\sqrt{0}$ e

$\sqrt{144}$ ou para $\sqrt{1{,}69}$ e $\sqrt{0}$? Dessa forma, seria possível conjuntamente concluir que a conjectura é válida apenas quando um dos radicais for 0, já que se trata do elemento neutro.

....

No dia em que foi solicitado que fizessem tais atividades durante a aula de Matemática, Juca logo nos enviou um registro fotográfico de sua resolução, dando a entender que ele já a havia respondido em momento anterior. Para a atividade 3, ele apresentou a seguinte resposta: "Sim, em alguns casos. Funciona somente com o 9 e o 16 provavelmente por sua propriedade [característica] de serem pequenos. Já com o 676 e 3721 infelizmente não funciona por causa de suas propriedades [características]*"*. Neste caso, o aluno relaciona a funcionalidade da conjectura ao fato de os primeiros números testados serem de menor valor, o que não é verdade. Ao que parece, Juca observa o funcionamento da conjectura para números menores, tanto aqueles propostos pelo enunciado, quanto para aqueles que escolheu testar (9 e 16). Com a intenção de compreender como o aluno pensou e, também, de fazê-lo perceber o equívoco, fizemos questionamentos, conforme Figura 27:

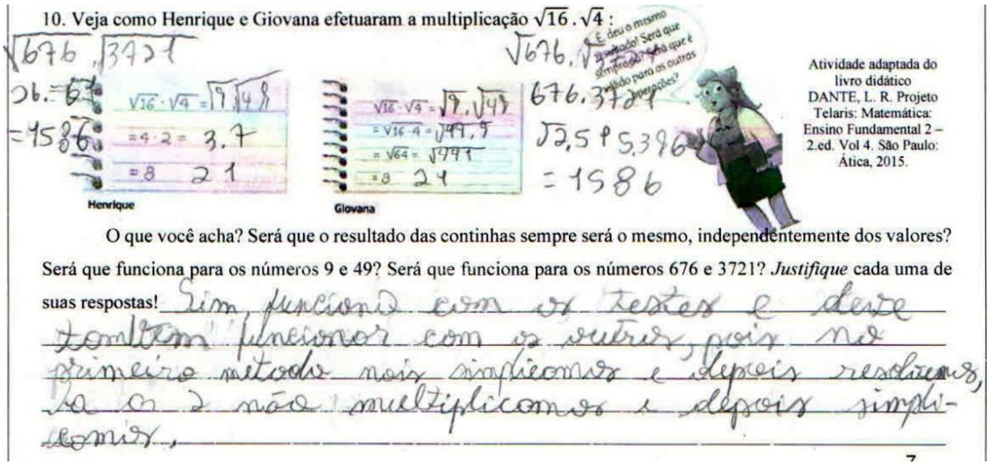
Figura 27 – Resolução de Juca para a atividade III – 3 / Conversa WhatsApp



Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo, perguntamos se ele havia realizado os cálculos para conferir se a igualdade em questão se manteria verdadeira, pois tivemos a impressão de que parte da resposta havia sido apagada, no espaço circulado. Nesse momento, o aluno verificou sua resolução e reescreveu sua resposta:

Figura 28 – Resolução do aluno Juca para a atividade III – 3

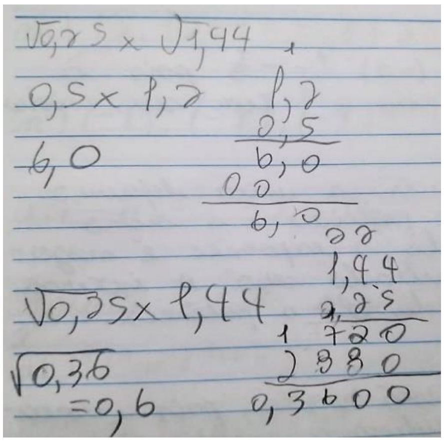


Fonte: Dados da pesquisa

No diálogo da Figura 27, sinalizamos que ele já havia realizado uma atividade parecida, durante a Fase II da pesquisa. Em resposta, ele disse que se lembrou que a propriedade seria válida apenas para alguns casos. Na sequência de nossa interação, Juca enviou um *print*, resgatando nossa conversa sobre essa atividade na Fase anterior em que escrevemos: “Às vezes é importante verificar pq nem sempre a propriedade vale para todos os casos. Mas neste caso, como você investigou... Vale Sim!”. Havíamos, então, enfatizado a importância de se pensar em diversas situações possíveis, mas confirmamos a validade da conjectura. Provavelmente houve um pequeno equívoco por parte do estudante ao rever nosso diálogo. Em pouco tempo, ele reformulou sua resposta.

Nessa oportunidade, questionamos sobre a validade da conjectura para números decimais, como havíamos previsto, e o aluno enviou o registro fotográfico de suas contas. Observa-se, que mesmo diante de nossa discussão acerca da validade da conjectura, o estudante realizou o teste. Acreditamos que essa necessidade, assim como apontado por Oliveira (2009), aconteça no sentido da segurança, ou seja, Juca se sentia seguro quando verificava com exemplos, mesmo sabendo que, muito provavelmente, os resultados serão os mesmos. Essa ação não difere de outros alunos, os quais retornam aos exemplos, mesmo depois do contato com uma validação de nível intelectual (BALACHEFF, 2019).

Figura 29 – Teste realizado por Juca sobre a validade da conjectura para números decimais



Fonte: Dados da pesquisa

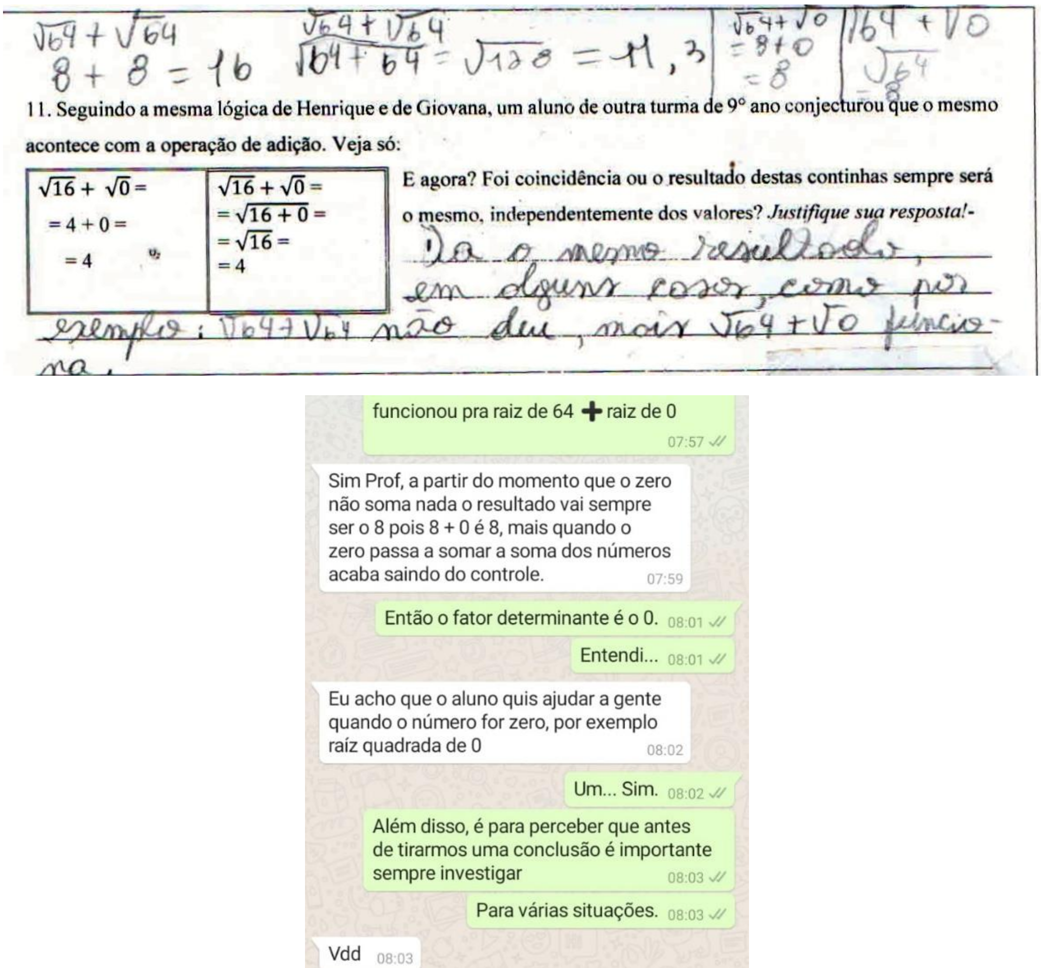
Nas primeiras linhas de sua resolução, o aluno primeiro calcula as raízes quadradas em separado e, posteriormente, multiplica-as. Na parte inferior, realizou o movimento contrário, isto é, primeiro encontra o resultado da multiplicação entre os radicandos para, depois, calcular o valor da raiz quadrada. Os cálculos que envolveram multiplicações também foram apresentados por Juca.

Sendo o processo de prova constituído por continuidades e rupturas (BALACHEFF, 1999), não é de se esperar que a linearidade esteja sempre presente nas produções dos estudantes. Há, além disso, outros elementos que podem interferir nessas produções, como o grau de convencimento relativo a uma atividade específica. Juca, por exemplo, apesar das institucionalizações que realizamos, ainda poderia ter dúvidas legítimas sobre a validade ou não de algumas conjecturas. Nesses casos, do ponto de vista dos alunos, a utilização de exemplos ou verificações pode assumir a função de assegurar a validade da conjectura, pois, em geral, são mais convincentes do que validações genéricas (ZASLAVSKY *et al*, 2012). Diante disso, classificamos a validação de Juca como de nível pragmático, pois parece evidente o apego aos exemplos e a necessidade da realização de testes para verificar a veracidade da conjectura.

Acrescentamos, ainda, a possibilidade de que o discurso estabelecido, em função da importância de se testar a validade da conjectura para diferentes situações, interfira na resolução do aluno que, em muitas situações, apresenta a resolução completa da atividade, quando poderia apenas resgatar uma propriedade já provada. Desse modo, seria uma possível influência do contrato didático, em que o professor, aluno e saber encontram-se envolvidos em uma relação, a qual pressupõe, por exemplo, a existência de comportamentos que o estudante desempenha porque já sabe que haverá a aceitação por parte do professor. Considerando essa situação, o referido comportamento poderia ser "realizar contas".

No que se refere à Atividade III – 4, Juca apresentou duas situações – Figura 30 – e as utilizou como suporte para justificar que a conjectura é válida apenas para alguns casos.

Figura 30 – Resolução de Juca para a atividade III – 4 / Conversa WhatsApp



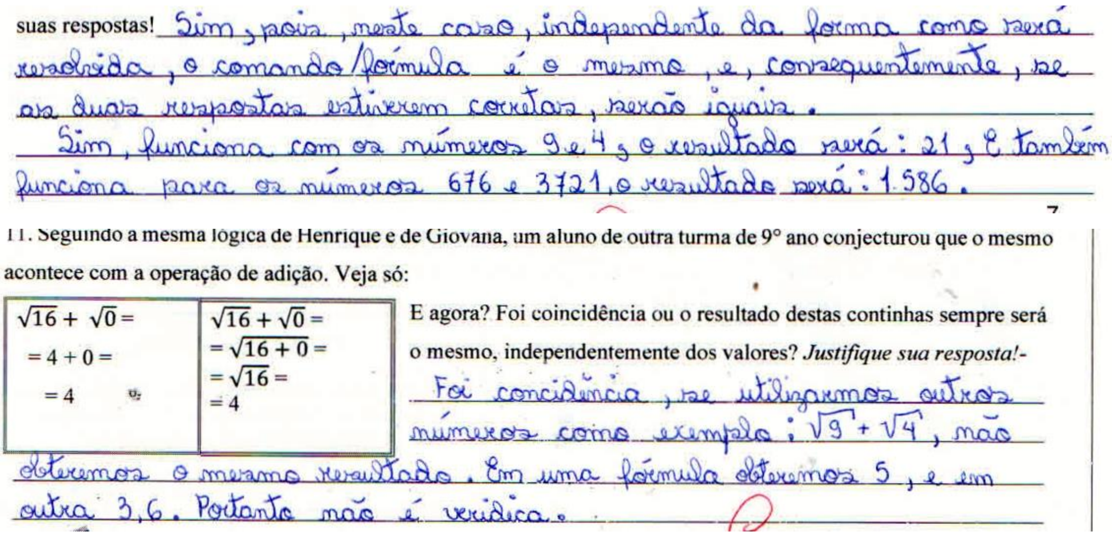
Fonte: Dados da pesquisa

Considerando a resolução apresentada, sua validação poderia ser classificada de nível pragmático, pois foi baseada em dois exemplos, os quais indicaram a falsidade da conjectura. Entretanto, ao longo de nossa interação, questionamos se ele saberia dizer ou se teria alguma suspeita do motivo pelo qual a conjectura se mostrou válida para $\sqrt{64} + \sqrt{0}$. Juca justificou afirmando que o zero é um elemento neutro e que, por este motivo, não influenciava no resultado. Quando no lugar do zero tivermos um número que "passe a somar", então "[...] a soma dos números acaba saindo do controle". A justificativa de Juca nessa ocasião é, então, um exemplo genérico, mesmo em se tratando de um discurso narrativo, porque o aluno respondeu conforme nosso questionamento, que se referiu a um exemplo específico, mas afirmando com desprendimento que "[...] o zero não soma nada, o resultado sempre vai ser o 8 [...]", neste caso porque o exemplo continha a raiz quadrada de 64. Para Balacheff (2019), ainda que a validação possa ser baseada em um exemplo, quando ela fornece ao aluno um meio de expressar sua prova, podemos dizer que se trata do nível intelectual. Juca parece se apoiar no caso em particular, mas apenas como uma referência, tendo tomado consciência do caráter genérico da situação (BALACHEFF, 2019).

Como se pode observar, por meio dos recortes dos diálogos nas Figuras 27 e 30, Juca interagia, perguntava, respondia, dedicava-se à resolução de forma acentuada e por isso acreditamos que a devolução tenha ocorrido, e que ele tenha perpassado por situações adidáticas. Especificamente, naquele último diálogo, por exemplo, ele formulava e, ao mesmo tempo, buscava validar a conjectura que envolvia a adição de raízes quadradas, sendo 0 o radicando de uma delas, características predominantes de uma situação adidática de validação.

Na apostila de Lili, vê-se que a aluna respondeu corretamente às atividades 3 e 4, conforme Figura 31. No primeiro caso, a estudante testou a veracidade da conjectura para os números sugeridos e, no segundo, organizou sua resposta com base em um contraexemplo, como esperado.

Figura 31 – Resolução de Lili para a atividade III – 3 e III – 4



suas respostas! Sim, pois, neste caso, independente da forma como será resolvida, o comando/fórmula é o mesmo, e, consequentemente, se as duas respostas estiverem corretas, serão iguais.

Sim, funciona com os números 9 e 4, o resultado será: 21, E também funciona para os números 676 e 3721, o resultado será: 1.586.

11. Seguindo a mesma lógica de Henrique e de Giovana, um aluno de outra turma de 9º ano conjecturou que o mesmo aconteça com a operação de adição. Veja só:

$\sqrt{16} + \sqrt{0} =$ $= 4 + 0 =$ $= 4$	$\sqrt{16} + \sqrt{0} =$ $= \sqrt{16 + 0} =$ $= \sqrt{16} =$ $= 4$

E agora? Foi coincidência ou o resultado destas continhas sempre será o mesmo, independentemente dos valores? *Justifique sua resposta!*- Foi coincidência, se utilizarmos outros números como exemplo: $\sqrt{9} + \sqrt{4}$, não obteremos o mesmo resultado. Em uma fórmula obteremos 5, e em outra 3,6. Portanto não é verídica.

Fonte: Dados da pesquisa

Não tivemos a oportunidade de conversar com Lili a respeito dessas atividades. Não sabemos, portanto, se ela realizou mais testes ou como pensou para resolver tais questões. Por outro lado, podemos inferir que suas respostas e sua linguagem, embora não apresentem cálculos em referência a valores genéricos, estão cada vez mais elaboradas, e esta é uma característica necessária à evolução das provas pragmáticas para as provas intelectuais (BALACHEFF, 2000; 2019). Não sabemos em que medida ela ressignificou a discussão e a institucionalização realizada junto à atividade semelhante aplicada durante a Fase II, mas quando ela escreve que "[...] o comando/fórmula é o mesmo e, consequentemente se as duas respostas estiverem corretas, serão iguais" nos sugere que a certeza da validade da conjectura foi estabelecida. Sua escrita, especialmente em relação à atividade III – 3, parece indicar uma descontextualização, ou seja, uma renúncia à situação específica como uma forma de contemplar uma categoria de objetos, uma vez que as respostas iguais seriam uma consequência do "comando". Ela sugere que a aluna aceita a validade da propriedade e que pode usá-la em todos os casos. Identificamos assim uma breve intenção de Lili no nível de provas intelectual.

- **Atividade III – 5**

5. Encontre o valor das expressões, utilizando calculadora caso necessário:

a. $\left(\sqrt{9}\right)^2 = (\sqrt{9}) \cdot (\sqrt{9}) =$

b. $\left(\sqrt{36}\right)^2 =$

c. $\left(\sqrt{5}\right)^2 =$

d. $\left(\sqrt{7}\right)^2 =$

Podemos resolver de duas maneiras diferentes, lembra?

Maneira	Maneira 2
$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} =$	$\sqrt{9} \cdot \sqrt{9} =$
$3 \ \cdot \ 3 =$	$\sqrt{9 \cdot 9} \ =$

- Observe os resultados. Investigue a regularidade e explique:

Com esta atividade tínhamos a intenção de que os alunos investigassem a regularidade envolvida e que percebessem que o resultado da raiz quadrada de um número não negativo elevado ao quadrado sempre resultará no próprio número, ou seja, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, com a maior ou igual a zero. Nesse caso, a justificativa para a regularidade pode estar relacionada à aplicação de propriedades da radiciação já estudadas, segundo as quais é possível multiplicarmos os dois radicandos antes de calcularmos a raiz quadrada. Essa multiplicação resulta um número quadrado perfeito, cuja raiz quadrada é o valor que anteriormente foi multiplicado por ele mesmo. Uma validação intelectual possível de ser discutida com os estudantes pode ser tal como aquela discutida na atividade II – 4.

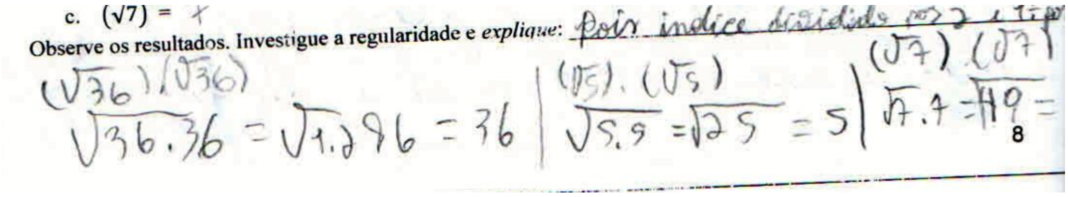
É importante pontuar que a atividade envolve explicitamente tanto a ideia de Raízes quanto ideia de Potências, pois se trata de uma potência cuja base é uma raiz quadrada e o expoente um número natural específico, que é o número dois. De acordo com Paias (2019), a presença de símbolos diversos – como os parênteses, por exemplo, pode fazer com que os alunos pensem que a forma pela qual devem resolver, deve ser diferente. Nesse caso, poderíamos realizar intervenções retomando o conceito de Potência.

No momento da institucionalização poderíamos questionar e destacar vantagens e limitações de cada uma das maneiras de resolução propostas, além de discutir uma validação tal como na atividade II – 4. Reiterando a importância de investigar se a conjectura em questão é válida para todos os casos possíveis. Teríamos a oportunidade de realizar questionamentos como: e se o radicando for um número decimal, a conjectura continua sendo verdadeira? E para o caso de frações? E para o caso de números altos? E para o caso de números negativos? Neste último caso, a conjectura não poderia ser considerada por causa das restrições da definição.

....

Tanto Juca quanto Lili conseguiram realizar a atividade com êxito, explicitando a conjectura em função da regularidade. Juca apresentou a seguinte resolução – Figura 32.

Figura 32 – Resolução de Juca para a atividade III – 5



Fonte: Dados da pesquisa

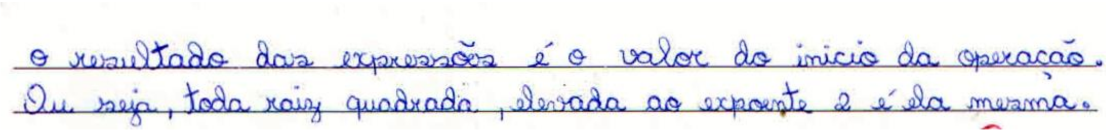
Considerando que a resposta de Juca havia ficado um pouco confusa e de difícil legibilidade, questionamos o aluno que, por meio de mensagem de texto escreveu "[...] eu quis dizer que como o radicando é igual e o índice também, sempre vai ser o resultado 36 no caso". Aproveitamos para questionar sobre a validade da conjectura para números decimais ou para números altos, conforme havíamos pensado. Prontamente, Juca respondeu acreditar que o resultado seria o radicando por se tratar de uma "regularidade". É possível que o estudante tenha aplicado aqui uma lógica da economia, devido a sua experiência com outras situações nas quais as regularidades se mostravam verdadeiras. Mesmo que ao longo do desenvolvimento das atividades tenhamos discutindo algumas conjecturas falsas, justamente com a intenção de refutar essa concepção por parte dos alunos, reconhecemos que elas resistiam a poucos testes. Fato esse que pode ter levado Juca a apresentar tal resposta.

Não temos elementos para discutir como Juca pensou ou se houve um engajamento maior ao longo da resolução da atividade. No entanto, especificamente no momento de nossa interação, a devolução parece não ter ocorrido, visto que o aluno prontamente nos respondeu, não havendo um engajamento junto à resolução da proposta. Questionamo-nos se o aluno teria respondido a esta questão em algum momento anterior, deixando apenas para nos enviar o registro no dia da aula. Se isso de fato tivesse ocorrida, seria esperado que a situação não gerasse tanta discussão, pois o aluno já à tinha respondido. Em nossa Entrevista 2, Juca confirmou que, às vezes, respondia quase toda a apostila de uma vez, mas não lembrava se este tinha sido o caso.

Como institucionalização, enviamos um vídeo em que, a partir de um exemplo, construímos uma validação de nível intelectual, conforme havíamos pensado, retomando e repetindo elementos já discutidos para essa mesma atividade, na Fase II.

Na apostila de Lili, deparamo-nos com a redação indicada na Figura 33.

Figura 33 – Resolução de Lili para a atividade III – 5



Fonte: Dados da pesquisa

Como se percebe, sua escrita está correta e contempla a conjectura pretendida. É interessante notar que nenhum deles fez referência explícita à institucionalização realizada durante a Fase II, em uma atividade análoga. Em relação às duas produções, observamos que "[..] um tipo de prova é menos informação sobre o aluno do que sobre *o aluno em uma situação em um dado momento de sua história matemática*." (BALACHEFF, 2019, p. 14, grifos do autor). Noutras palavras, olhar somente para uma validação, sem se levar em conta a situação na qual foi produzida, pode não refletir seu processo de produção. Dessa forma é importante considerar que as provas produzidas pelos alunos podem ter relações com a situação e com o contexto de aulas não presenciais, assim como, com a interação via WhatsApp ou a não interação, por exemplo. Nem todas as situações culminarão em provas ou gerarão situações adidáticas, como foi o caso. Esse aspecto, que também pode ser observado em interações presenciais, se sobressaiu nesta atividade, pois não identificamos a ocorrência da devolução com Juca, tampouco a presença de validações. Não é claro, portanto, nem o tipo, nem o nível de validação apresentado por Juca e por Lili para esta atividade, pois ambos reiteraram a conjectura, mas não apresentaram validações escritas para ela.

A este respeito, fazemos a seguinte reflexão: de fato, os alunos reescreveram a conjectura, mas essa ação pode indicar, de um lado, uma resolução sem muitas relações ou reflexões e, portanto, um não trabalho de validação. De outro, conclusões feitas a partir da resolução dos itens da atividade, o que implicaria em uma validação do tipo empirismo ingênuo, porque teria naqueles casos específicos seu fundamento. Aqui, parece haver uma diferença sutil entre apenas verificar a regularidade devido ao atendimento dos itens da atividade; verificar, por empirismo ingênuo, que a propriedade é válida; e aceitar de fato que a propriedade vale sempre, generalizando a situação e/ou passando o aluno a utilizá-la em outros casos.

É importante destacar que ambos atenderam de forma satisfatória o enunciado, porque identificaram a regularidade e explicaram descrevendo-a. Em nossas análises, perguntamo-nos como eles teriam se movimentado se tivéssemos solicitado claramente que explicassem o porquê de a regularidade ocorrer.

❖ **Atividade III – 6**

6. Veja só o que Laura descobriu brincando com os números 6 e 3:

$$6^2 - 3^2 = (6 + 3) . (6 - 3)$$
$$36 - 9 = 9 \quad . \quad 3$$
$$27 = 27$$

- ❖ Será que isso sempre irá funcionar? O que você acha?
- ❖ Júlio estava bastante desconfiado e resolveu testar com os números 8 e 4:

$$8^2 - 4^2 = (8 + 4) . (8 - 4)$$
$$64 - 16 = 12 \quad . \quad 4$$
$$48 = 48$$

- ❖ Um outro colega, o Matheus, ainda não se convenceu e resolveu testar para números bem altos: 150 e 75. O que você acha? O resultado também será igual?

$$150^2 - 75^2 = (150 + 75) . (150 - 75)$$

6.1. Seguindo a mesma ideia de Laura, Júlio e Matheus, um outro estudante de 9° ano, descobriu o seguinte:

$(4 + 2) . (4 - 2) = 4 . 3 \rightarrow$ Fixo $6 \quad . \quad 2 = 4 . 3$ $12 = 12$	$(3 + 0) . (3 - 0) = 3 . 3 \rightarrow$ Fixo $3 \quad . \quad 3 = 3 . 3$ $9 = 9$

❖ E agora? Qual sua opinião? Foi coincidência ou sempre irá funcionar? Explique.

Com a atividade 6, gostaríamos que os estudantes se envolvessem em um processo de validação com a finalidade principal de realizar verificações. Essa atividade subsidiou um texto explicativo[23] apresentado na sequência da apostila como uma sugestão de validação intelectual. No material, colocamos de forma escrita, questionamentos como: “Sempre que alguém escolhe dois números para testar, poderíamos perguntar: mas como você pode ter certeza? Será que funciona para números muito altos, como 10257 e 8659? Será que funciona para frações ou números decimais?”. Em seguida, utilizamos conhecimentos algébricos para generalizar textualmente a situação dada.

[23] Conforme apêndice A

Como disponibilizamos na apostila uma institucionalização da atividade II – 6, conforme o relato acima e apêndice A, esperávamos que os estudantes, além de verificarem a falsidade da conjectura na atividade II – 6.1, buscassem provar utilizando-se de um raciocínio genérico. Nesse sentido, ela poderia ser validada de forma análoga ao que foi apresentado na apostila, de forma escrita. Conforme Brousseau (1996), a analogia pode ser muito proveitosa se utilizada com responsabilidade. Nossa intenção foi evidenciar aos alunos, como poderiam pensar e validar apresentando provas diferentes daquelas que estão acostumados[24].

Nesse caso, já se sabe sobre a validade ou não da conjectura, tendo em vista que a apresentação de um contraexemplo seria suficiente para evidenciar sua falsidade. Entretanto, a prova pode assumir aqui uma função explicativa, em relação ao porquê de ela ser falsa. Então, uma prova intelectual possível de ser discutida no momento da institucionalização da atividade juntos dos alunos poderia ser a seguinte:

$$
\begin{array}{ccc}
(x+y).(x-y) & & x.3 \\
x^2+xy-xy+y^2 & & 3x \\
x^2+y^2 & \neq & 3x
\end{array}
$$

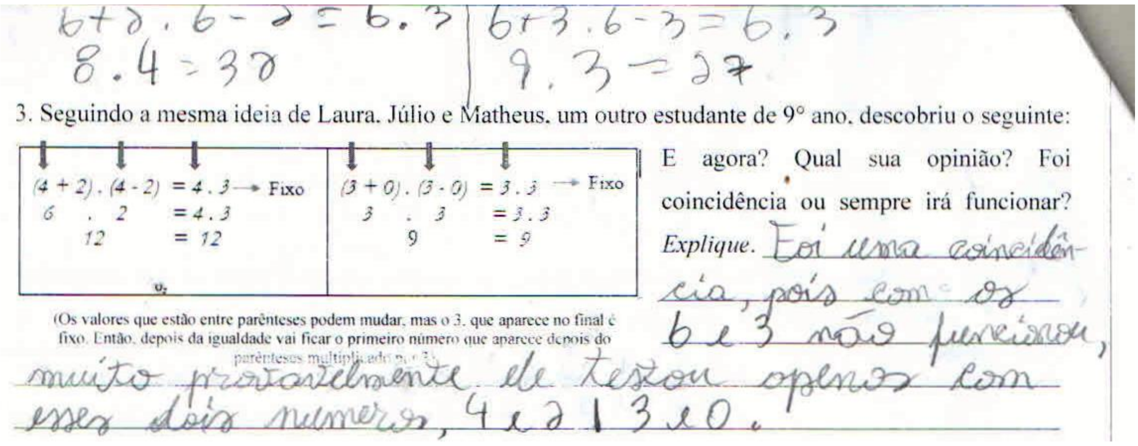
Logo, pode-se concluir que a conjectura evidenciada na atividade III – 6.1 se mostrou verdadeira apenas para casos particulares, sendo, então, falsa. Após alguns cálculos em que letras foram utilizadas para representar valores quaisquer, verificamos que a igualdade é falsa. Nessa atividade, teríamos a oportunidade de explorar uma validação em que são realizadas transformações algébricas em um dos membros até obter o outro. Para tanto, basta efetuar o produto algébrico, aplicando a propriedade distributiva. Nesses cálculos, as letras “x” e “y” possuem estatuto de número genérico (BIANCHINI; MACHADO, 2010), pois são válidas para quaisquer valores reais.

....

[24] É muito importante destacar que até então, não sabíamos quantos e nem quais alunos seriam considerados em nossas análises, pois estávamos desenvolvendo e aplicando todas as atividades em meio às apostilas, que eram destinadas para todos os estudantes das turmas de 9° ano que estavam sob nossa regência. Como descrevemos no capítulo 4, poucos eram aqueles que interagiam conosco ou que realizavam todas as propostas no tempo em que solicitávamos. De forma específica, essa ação acabou contribuindo para que pudéssemos interagir com Lili, evidenciando possíveis validações intelectuais, já que até então, não havíamos tido nenhuma oportunidade de institucionalizar as atividades da Fase III junto dela.

Tanto Juca quanto Lili responderam aos questionamentos realizados nas Atividades III – 6 e III – 6.1 de forma correta. Na resposta de Juca, observamos que ele testou outras situações e verificou que a igualdade não se manteve verdadeira. Esses testes foram utilizados para subsidiar a explicação que elaborou.

Figura 34 – Resolução de Juca para a atividade III – 6.1



$6+2 . 6-2 = 6 . 2$ | $6+3 . 6-3 = 6 . 3$
$8 . 4 = 32$ | $9 . 3 = 27$

3. Seguindo a mesma ideia de Laura, Júlio e Matheus, um outro estudante de 9° ano, descobriu o seguinte:

$(4 + 2) . (4 - 2) = 4 . 3$ → Fixo	$(3 + 0) . (3 - 0) = 3 . 3$ → Fixo
$6 . 2 = 4 . 3$	$3 . 3 = 3 . 3$
$12 = 12$	$9 = 9$

(Os valores que estão entre parênteses podem mudar, mas o 3, que aparece no final é fixo. Então, depois da igualdade vai ficar o primeiro número que aparece depois do parênteses multiplicado por 3.)

E agora? Qual sua opinião? Foi coincidência ou sempre irá funcionar? *Explique.* Foi uma coincidência, pois com os 6 e 3 não funcionou, muito provavelmente ele testou apenas com esses dois numeros, 4 e 2 | 3 e 0.

Fonte: Dados da pesquisa

A escrita "[...] muito provavelmente ele testou apenas com dois números" possivelmente reflete nosso discurso adotado durante o período de nossas intervenções e institucionalizações sobre a importância de não se satisfazer com apenas alguns exemplos, visto que a conjectura que está se estabelecendo pode ser falsa. Apesar de sua resposta ter sido muito interessante, Juca permaneceu trabalhando com exemplos, sem fazer referência a uma possível validação intelectual. O que pode ser colocado em pauta, é a concepção de conhecimento matemático do estudante (BALACHEFF, 2019), que, nessa situação específica, parece estar relacionada a uma questão pragmática. Ele acabou não produzindo uma prova utilizando-se de elementos genéricos. Não é claro aqui se Juca não percebeu a analogia pretendida ou se ele não reinvestiu a ideia porque, ao analisar a situação, não considerou necessário, já que atendeu ao enunciado que apenas solicitava uma explicação.

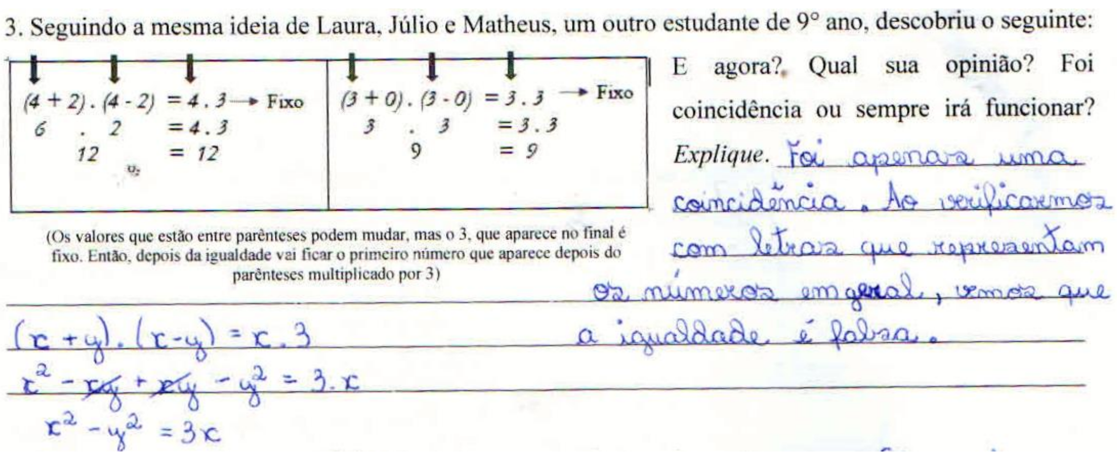
Lili, por sua vez, enviou-nos uma mensagem via WhatsApp, para compreender melhor como deveria desenvolver a atividade III – 6.1. Então, gravamos um vídeo explicando melhor a disposição dos números, sugerindo que ela considerasse outros valores e realizasse mais testes. Indicamos que, em seguida, verificasse se a conjectura se mantinha verdadeira.

Visto que a aluna havia iniciado a interação, aproveitamos para sugerir que tentasse validar de forma genérica, utilizando letras para representar números quaisquer. Prontamente ela enviou um áudio em que disse "*Então profe, eu tinha tentado fazer assim também com x e y, porque teve um exemplo também na apostila que era pra... pra verificar né, seria pra fazer com a letra. Só que aí eu fiz errado porque no lugar do 3 eu também coloquei uma letra. Só que o 3 é fixo, tinha que colocar o 3 mesmo né*!".

No diálogo acima, percebemos que o objetivo de se propor questionamentos e, principalmente, propor uma prova intelectual como uma possibilidade de resolução para a atividade 6, foi atingido junto à Lili. Sua resposta para a atividade 6.1, já passou a contemplar uma validação de nível intelectual. Nesse dia, a aluna nos procurou fora do horário de aula estabelecido pela escola, de forma que nossa interação se deu por mais de duas horas, de forma ininterrupta.

Ambos os alunos parecem ter percebido que certas atividades possuem intencionalidades e, de alguma forma, buscam corresponder às expectativas implícitas ou explícitas condicionadas pela interação e pela rotina (ALMOULOUD, 2007). Na ocasião de nossas trocas, tanto Juca quanto Lili dispuseram de conhecimentos estratégicos para responder aos questionamentos que realizamos, como a importância de se verificar a validade da conjectura para diferentes situações (Juca) e tentativas de generalização algébrica (Lili). Para a atividade III – 6.1, Lili apresentou a resolução indicada na Figura 35.

Figura 35 – Resolução de Lili para a atividade III – 6.1



3. Seguindo a mesma ideia de Laura, Júlio e Matheus, um outro estudante de 9° ano, descobriu o seguinte:

$(4+2).(4-2) = 4.3 \rightarrow$ Fixo $6 \quad . \quad 2 \quad = 4.3$ $12 \quad = 12$	$(3+0).(3-0) = 3.3 \rightarrow$ Fixo $3 \quad . \quad 3 \quad = 3.3$ $9 \quad = 9$

(Os valores que estão entre parênteses podem mudar, mas o 3, que aparece no final é fixo. Então, depois da igualdade vai ficar o primeiro número que aparece depois do parênteses multiplicado por 3)

E agora? Qual sua opinião? Foi coincidência ou sempre irá funcionar? Explique. Foi apenas uma coincidência. Ao verificarmos com letras que representam os números em geral, vemos que a igualdade é falsa.

$(x+y).(x-y) = x.3$

$x^2 - \cancel{xy} + \cancel{xy} - y^2 = 3.x$

$x^2 - y^2 = 3x$

Fonte: Dados da pesquisa

Após nossa interação, podemos dizer que a prova apresentada pela estudante na versão final de sua resposta foi de nível intelectual, especificamente do tipo exemplo genérico.

> O exemplo genérico constitui um estatuto transitório na passagem das provas pragmáticas para as provas intelectuais, na medida em que exige sempre uma negociação sobre o caráter genérico do exemplo utilizado. Essa fragilidade estimula uma evolução em direção à experiência mental [...] (BALACHEFF, 2000, p. 174).

É interessante observar, no entanto, que para se chegar em tal construção, houve um diálogo em que diversos elementos foram discutidos, como, por exemplo, uma sugestão de nossa parte para que ela testasse a validade da conjectura para outros casos, bem como sobre a possibilidade de se pensar de forma genérica. Como Lili explicitou em áudio, antes mesmo de nossa intervenção, ela havia esboçado um raciocínio genérico ("*eu tinha tentado fazer assim também com x e y*"), mas um pequeno equívoco em relação ao uso da Álgebra impediu que ela concluísse a atividade. Esta ação por parte da aluna, de tentar apresentar uma prova de nível intelectual, parece não ter ocorrido nas investigações de Picelli (2010) e Mello (1999) em que a própria construção da prova neste nível só foi possível com uma interferência mais direta dos pesquisadores nas interações com os alunos. É importante considerar que, a partir do momento em que propomos essa possibilidade nas institucionalizações ou na própria apostila, estamos interferindo nas produções dos alunos que buscam uma adaptação às regras implícitas ou explícitas do contrato. Porém, isso difere essencialmente de uma situação presencial em que os estudantes podem construir uma prova *com* o professor que, por sua vez, pode direcionar para o tipo de validação pretendido, sejam com questionamentos mais diretos, sejam com sugestões mais específicas.

Por fim, acreditamos que a elaboração da validação, além de um desafio (De VILLIERS, 2001) para Lili, pode ter contribuído para a compreensão (REID, 1995) de elementos mais específicos no que se refere ao trabalho com a Álgebra.

- **Atividade III – 7**

7. A igualdade $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y) . (x - y)$ é verdadeira ou falsa? Prove que sua resposta está correta.

Uma vez discutidos exemplos na apostila de como se realizar multiplicações algébricas, propusemos a atividade III – 7, com o intuito de que os estudantes verificassem a veracidade da igualdade. Ela difere das atividades anteriores pelo fato de ser objetiva e de requerer o uso de procedimentos algébricos sem qualquer referência a valores ou contexto. Essa variável ajuda a contemplar nossa intenção de abordar com os alunos diferentes situações que envolvem a produção de validações. Conforme sinaliza Freitas (2015), a independência e a coerência nas formas pelas quais se pode relacionar objetos da álgebra, como nessa atividade, a tornam potente. Entretanto, esse mesmo aspecto pode suscitar dúvidas, considerando que situações com esse formato, que se distanciam de elementos concretos, podem ser tomadas pelos alunos como um jogo de símbolos com pouco ou nenhum significado e serem de difícil compreensão (idem).

Anteriormente, na apostila, discutimos exemplos relacionados à multiplicação de expressões algébricas, que envolviam apenas uma letra com valor determinado, sem fazer referência aos produtos notáveis. Então, como dissemos, é possível que os alunos encontrem dificuldades quanto à multiplicação de variáveis e, neste caso, poderão ser retomados conceitos relacionados à potenciação. Poderá ser sugerido que eles substituam as letras por números, realizando um processo inverso àquele que vínhamos discutindo durante a institucionalização de algumas validações matemáticas, especificamente na atividade III – 6.

A igualdade sugerida é falsa e, como dissemos, poderiam ser reinvestidos conhecimentos algébricos para provar. Uma prova possível de ser discutida, que envolve uma generalização na qual a letra foi utilizada tem o estatuto de número genérico, poderia envolver a multiplicação do segundo membro da igualdade para verificação, como segue:

$$\begin{array}{ccc} x^2+2xy+y^2 & & (x+y).(x-y) \\ x^2+2xy+y^2 & & x^2-xy+xy-y^2 \\ x^2+2xy+y^2 & \neq & x^2-y^2 \end{array}$$

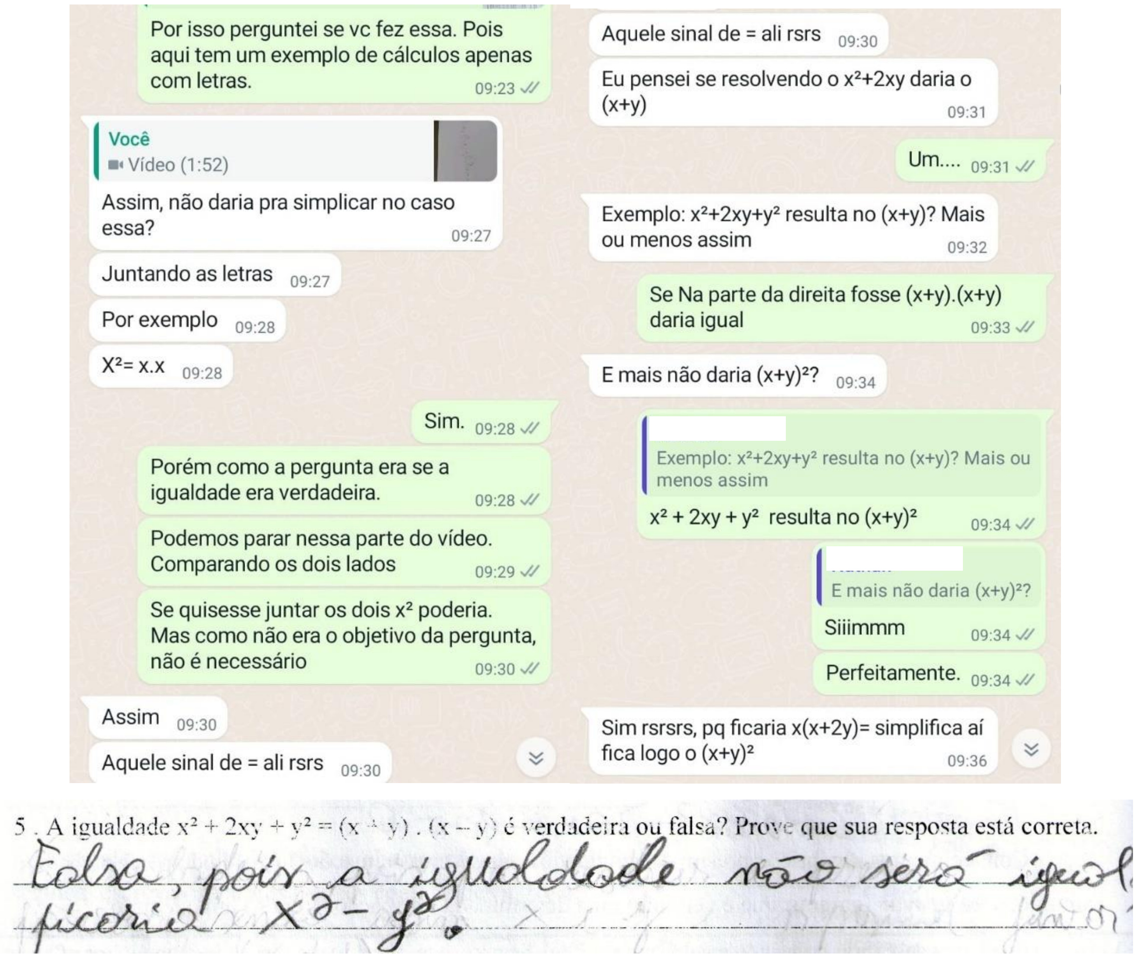
Após o desenvolvimento da multiplicação do segundo membro da igualdade, observamos que a igualdade é falsa.

....

Em um primeiro momento, Juca respondeu que a igualdade seria verdadeira, o que não é correto. Ele tentou justificar afirmando que seria preciso fatorar o primeiro membro para se obter (x + y)², o que seria verdade apenas se, após a igualdade, tivéssemos o quadrado da soma de dois termos.

Tendo em vista que ele não desenvolveu nenhum cálculo, perguntamos se ele havia observado o texto explicativo da validação corresponde a atividade III – 6, pois poderia se utilizar da mesma lógica para responder a essa questão, utilizando “cálculos apenas com letras”. Então, fomos interagindo a partir da possibilidade de realizarmos os cálculos de forma geral, como indicamos a priori.

Figura 36 – Resolução de Juca para a atividade III – 7 / Conversa WhatsApp



Fonte: Dados da pesquisa

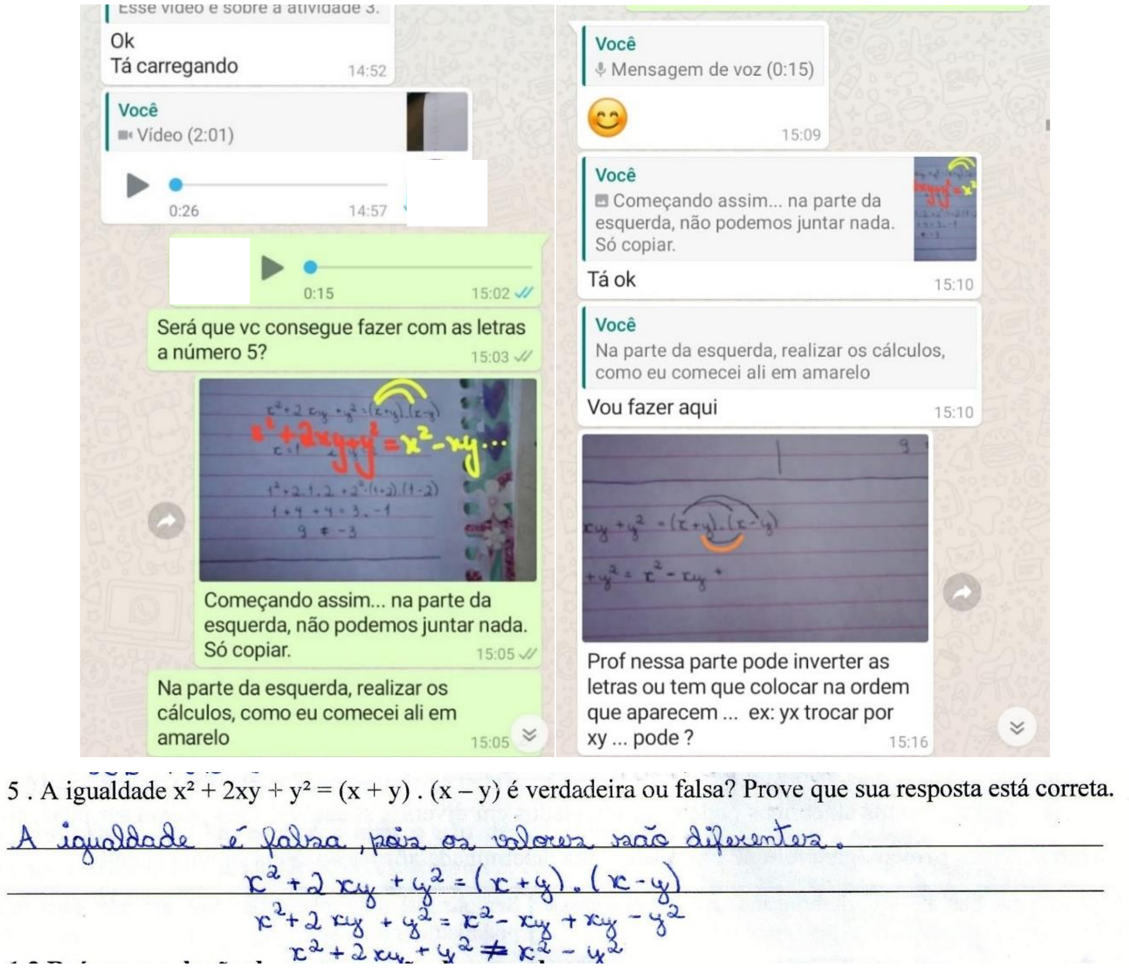
O vídeo, ao que o estudante se refere, continha a sugestão de realizarmos cálculos de forma geral. Logo, ele pergunta se “[...] não daria pra simplificar no caso essa?”, explicando como pensou, questionando novamente, ou seja, neste momento, para além de conhecimentos específicos acerca da produção de uma validação, estavam envolvidos conhecimentos algébricos.

Para finalizar nossa interação, discutimos com o estudante a diferença entre $x(x + 2y)$ e $(x + y)^2$, pois, conforme evidenciado no diálogo, ainda parecia haver uma pequena confusão sobre a igualdade daqueles termos, o que não é verdade. Para a versão final de sua resposta, Juca apresentou uma validação objetiva, conforme Figura 36.

Nessa situação, apesar de Juca ter discutido conosco elementos do cálculo algébrico envolvido, a validação apresentada parece ter sido de nível pragmático e pautada em um esquema de prova baseado em elementos externos (HAREL; SOWDER 2007), que no caso foi o vídeo que enviamos. Ao analisarmos o diálogo, percebemos que, quando o aluno fez questionamentos, rapidamente fornecemos respostas, sem possibilitar que ele mesmo refletisse sobre elas. Dessa maneira, impossibilitamos que Juca vivenciasse fases adidáticas e que construísse validações geradas de nossa interação.

Lili, para essa atividade, enviou-nos a sua resolução, em que havia aplicado a lógica da particularização dos valores envolvidos, isto é, ela substituiu x por 1 e y por 2. Verificou que a igualdade seria falsa e somente isso já seria suficiente para construção de sua resposta. Mas, como nessa situação tivemos a oportunidade de interagir com ela, pedimos se conseguiria generalizar a situação novamente, conforme o diálogo a seguir – Figura 37.

Figura 37 – Conversa WhatsApp / Resolução de Lili para a atividade III – 8



Fonte: Dados da pesquisa

Para finalizar o diálogo, ela ainda enviou um registro de como havia finalizado os procedimentos algébricos, o qual transcreveu para sua apostila. Sua validação é de nível intelectual e do tipo exemplo genérico, pois, primeiramente, houve a particularização e, em seguida, ela raciocinou de forma geral. Em relação ao questionamento de poder trocar yx por xy, sugerimos que ela pensasse na multiplicação de dois números e se a ordem da operação matemática alteraria a resposta. Concluímos, então, que a troca seria possível.

Nesse momento, é provável que Lili esteja em posição de transição, entre as provas pragmáticas e as provas intelectuais, um terceiro espaço cujas fronteiras são difíceis de ser delineadas. Segundo Balacheff (2000), essa transição passa pela interação entre três polos, quais sejam: o conhecimento, a linguagem e a racionalidade da prova produzida. Observamos que a aluna possui conhecimentos de Álgebra, utiliza a linguagem algébrica e atribui sentido à atividade desenvolvida.

❖ Atividade III – 8

8. Pense em um número. Adicione 5 a este número. Multiplique o resultado por 3. Subtraia 15. Qual foi o resultado obtido? Este resultado será sempre igual, independentemente do número escolhido? O que você acha? Existe alguma relação entre o número escolhido e a resposta? Explique.

Com essa atividade, buscamos fazer com que os estudantes trabalhassem na busca por regularidades, assim como, na validação de seus resultados. Nela, a conjectura não está clara, de forma que, ao realizar manipulações, podem ser formuladas pelos alunos. Esperávamos que percebessem que, após manipulações, o resultado sempre será o triplo do número pensado inicialmente. Entretanto, considerando o cenário de aulas não presenciais, admitimos a possibilidade da não percepção da conjectura. Mantivemos, porém, a escolha de suprimir a variável presença explícita da conjectura e a não inserção de dicas, porque gostaríamos de saber como os estudantes validariam uma atividade nesse formato. Além disso, uma situação semelhante já havia sido discutida junto deles, ainda na Fase I, quando propusemos atividades relativas às expressões algébricas. Os alunos lembrariam daquela experiência?

Embora não faça referência explícita, a Álgebra pode ser utilizada para representar valores quaisquer, de forma que uma validação possível de ser discutida com os alunos para a conjectura em questão poderia ser a seguinte:

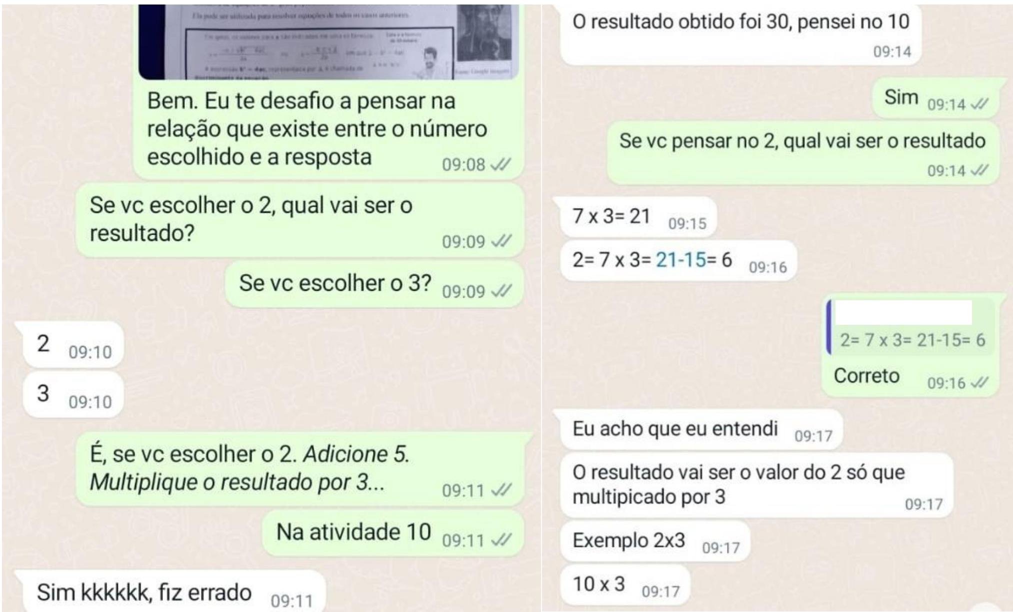
Número pensado	x
Adicione 5 a este número	$x + 5$
Multiplique o resultado por 3	$3.(x + 5)$ ou $3x + 15$
Subtraia 15	$3x + 15 – 15$
Resultado final	$3x$

Dessa forma, independentemente do valor escolhido, após a realização das operações matemáticas indicadas, o resultado sempre será o triplo do número pensado. Aqui, a letra possui estatuto de relação funcional, que é utilizada para representar uma relação de dependência entre duas ou mais variáveis. Nesse caso, a letra não representa um só valor específico, mas um valor qualquer ao qual pode-se atribuir valores específicos, para a realização de testes, por exemplo (BIANCHINI; MACHADO, 2010).

....

Ao responder essa atividade, Juca parece ter testado para vários números. Em sua apostila, é possível verificar que se utilizou do número 10, obtendo o resultado 30. Para a primeira pergunta, em relação ao resultado ser sempre o mesmo, respondeu: “Não, pois se mudar os valores muda o resultado”. Para a segunda, que se refere à existência de alguma relação entre o número escolhido e resposta, no entanto, não obteve êxito e, por isso, desafiamos o aluno a buscar por ela.

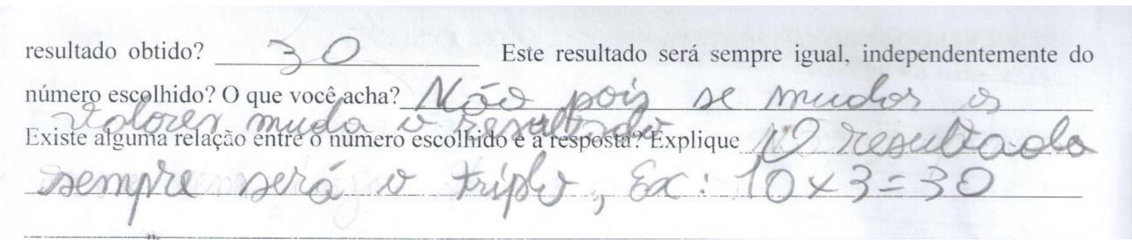
Figura 38 - Conversa WhatsApp de Juca para a atividade III – 8



Fonte: Dados da pesquisa

O aluno escreveu que o resultado obtido havia sido 30, pois foi esse o valor que registrou em sua apostila, conforme Figura 39. Na sequência, insistimos para que considerasse o número 2, e então ele descreveu o passo a passo de seus cálculos. Logo em seguida, ele mesmo percebeu que o resultado parece ser o próprio número pensado, multiplicado por 3, escrevendo a conjectura tanto no WhatsApp, quanto em sua apostila.

Figura 39 – Resolução do aluno Juca para a atividade III – 8

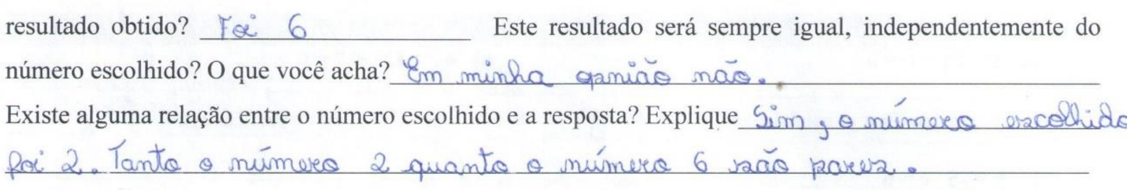

resultado obtido? 30 Este resultado será sempre igual, independentemente do número escolhido? O que você acha? Não pois se mudar os valores muda o resultado
Existe alguma relação entre o número escolhido e a resposta? Explique O resultado sempre será o triplo, Ex: 10x3=30

Fonte: Dados da pesquisa

Na sequência, inferimos que, apesar de parecer uma conjectura correta, seria importante que tentasse generalizar a situação, mas o aluno apenas respondeu “seria 3.x”. De fato, houve uma generalização no sentido da resposta final, porque como sabemos, ela sempre será o triplo do número pensando. Poderíamos aqui ter buscado devolver a situação, explorando ainda mais a função explicativa da prova, perguntando ao aluno o porquê de isso ocorrer. Apesar de ter identificado a regularidade em questão, o aluno não trabalhou em uma validação para ela, em partes, talvez devido à forma de nossa interferência. Um trabalho semelhante aquele que Juca desenvolveu na atividade III – 7 poderia ser ressignificado para essa situação. Nos questionamos, no entanto, se o uso da letra como estatuto de relação funcional (BIANCHINI; MACHADO, 2010), teria influenciado no desenvolvimento da resolução de Juca, pois, até o momento, foram discutidas somente atividades em que a letra tinha o estatuto de número indeterminado – como na atividade III – 7.

Na produção de Lili, observamos que a aluna escolheu o número 2 para realizar seu teste. Após realizar as operações matemáticas indicadas, obteve de forma correta o número 6 – Figura 40. Ela também escreveu acreditar que o resultado não será sempre o mesmo, mas não explicou o porquê.

Figura 40 – Resolução da aluna Lili para a atividade III – 8


resultado obtido? Foi 6 Este resultado será sempre igual, independentemente do número escolhido? O que você acha? Em minha opinião não. Existe alguma relação entre o número escolhido e a resposta? Explique Sim, o número escolhido foi 2. Tanto o número 2 quanto o número 6 são pares.

Fonte: Dados da pesquisa

Pontuamos que a aluna atendeu ao pedido do enunciado, que solicitava de forma objetiva se o resultado iria ser sempre igual e o que os alunos achavam. Não havia, por exemplo, a solicitação de explicar ou de justificar a resposta.

Situação diferente no segundo questionamento, que continha a palavra “explique” para o caso da identificação de regularidades. Como se pode observar na produção de Lili, ela observou que, tanto o número que ela escolheu quanto a resposta, foram pares, o que está correto. No entanto, essa conjectura não se aplica para todas as situações, visto que, se o número escolhido tivesse sido 3, por exemplo, o resultado seria ímpar. Nesse sentido, é provável que a aluna tenha efetuado apenas teste com números pares nessa situação. A ausência de sugestões para que fossem escolhidos outros números pode ter favorecido essa limitação. A aluna, portanto, não identificou a regularidade pretendida, e consequentemente, não produziu uma validação para ela. Porém, a afirmação relacionada aos números ímpares, aparentemente poderia ser justificada com base em um empirismo ingênuo, produzido conforme as solicitações da situação.

Nessa atividade, é evidente a influência do contexto, tendo em vista que as conclusões de Lili poderiam ser facilmente colocadas em xeque a partir de questionamentos como: Por que você acredita que os resultados não serão os mesmos? Quais resultados você obteria se testasse para outros números? Se sempre escolhêssemos números pares, os resultados seriam também pares? Como poderíamos generalizar essa situação?

Ademais, parece que a supressão da conjectura explícita e de sugestões para que os alunos realizassem testes foram determinantes para que nossas intenções não fossem alcançadas. Em um primeiro momento, nem Juca, nem Lili, identificaram a priori a conjectura pretendida e dessa maneira, não se envolveram em um processo de validação para tal.

- **Atividade III – 9**

9. Lauanda conjecturou que se o valor do discriminante (delta) for zero, então a equação polinomial do segundo grau possui duas raízes reais iguais. O que você acha? Concorda ou discorda? Explique.

Tínhamos o objetivo de que os estudantes investigassem e verificassem a relação existente entre o valor do discriminante de uma equação polinomial do 2°grau e suas raízes. Em relação à validação, esperávamos que eles justificassem suas respostas com base em exemplos, buscando referências nas soluções encontradas em atividades e equações já resolvidas anteriormente na apostila. Isso porque uma validação de nível intelectual exigiria que eles fizessem relações junto à fórmula resolutiva, considerando o valor do discriminante nulo. Mesmo assim, no momento da institucionalização, poderíamos discutir junto deles uma prova de nível intelectual, cuja letra assume o estatuto de número genérico, como a seguinte:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$Se\ o\ resultado\ de\ b^2 - 4ac\ \text{é}\ zero, então$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$$
$$x = \frac{-b \pm 0}{2a}$$
$$x' = \text{x}'' = \frac{-b}{2a}$$

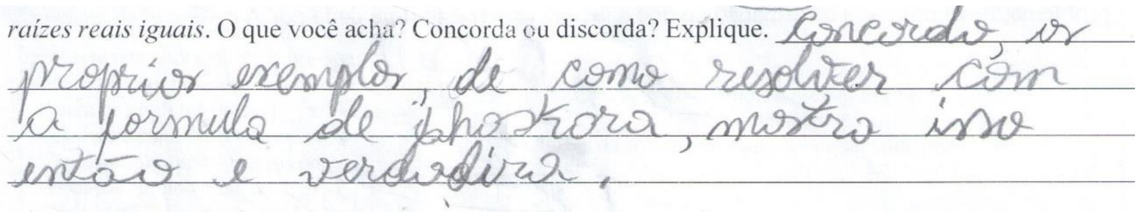
Concluindo, assim, que a equação possuirá duas raízes reais e iguais.

Mesmo que os estudantes já tivessem tido experiências com este nível de prova, essa associação poderia não ser tão simples e lhes causar estranhamento, como relatou um professor participante da pesquisa de Leandro (2012), ao falar sobre sua experiência com uma validação relacionada a este tema com seus alunos do Ensino Médio.

....

Em sua resposta, Juca apresentou uma resolução descritiva e fez referência a exemplos resolvidos anteriormente na própria apostila.

Figura 41 – Resolução de Juca para a atividade III – 10


raízes reais iguais. O que você acha? Concorda ou discorda? Explique. Concordo, os proprios exemplos, de como resolver com a formula de bhaskara, mostro isso então e verdadeira.

Fonte: Dados da pesquisa

Percebemos que ele não se preocupou em realizar mais exemplos, tampouco testar para casos específicos, no caso, atípicos. Segundo Balacheff (2019), o contrato didático junto da situação, da linguagem e das concepções mobilizadas podem ser restrições que constituem o processo de validação. Assim, é possível que o estudante não tenha buscado testar ou generalizar sua explicação por não ter compreendido muito bem o que deveria fazer para atender ao questionamento. Por outro lado, pode ser que devido às regras implícitas do contrato didático relativo ao saber, em construção a partir de nossas interações, Juca tenha aplicado uma lógica da economia, ao perceber que a conjectura funcionou para alguns casos e ela se mostrou verdadeira. Ao discutir o conceito de contrato didático, Brousseau (1996) infere que "mesmo que o professor dissimule o facto de que o novo problema se assemelha ao antigo, os alunos procuram – legitimamente – as semelhanças entre eles, a fim de transportarem – já pronta – a solução que lhes foi dada." (BROUSSEAU, 1996, p. 45). Pode ter sido este o caso, em que Juca reinveste a ideia de que, em situações anteriores, quando se mostraram válidas para alguns casos, as conjecturas foram verdadeiras.

Provas como a de Juca, geralmente, estão relacionadas a conjecturas verdadeiras de fato, como no caso da atividade proposta, pois elas resistem aos sucessivos testes, fazendo com que o aluno se convença a respeito de sua validade. Então, poderíamos dizer que o "[...] o empirismo ingênuo constitui uma forma resistente de generalização." (BALACHEFF, 2000, p. 26), visto que o estudante não identifica nenhuma necessidade de uma validação intelectual.

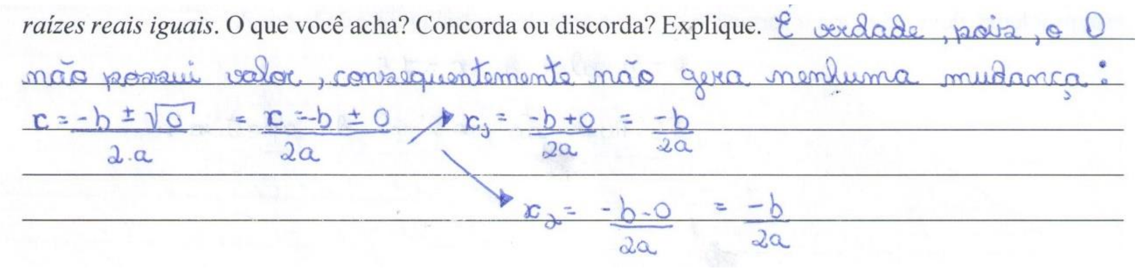
Ao tentar resolver sozinha, a aluna Lili buscou nossa ajuda e interagiu conosco por meio de um áudio em que disse "*Minha dúvida é nesta atividade que fala sobre o delta, se ele for zero, se a equação sempre vai possuir as duas raízes iguais. Eu tentei... Eu fiz e não sei se está certo, com as letras né, que aí abrange todos os números. Mas eu não sei se está certo, vou mandar [registro fotográfico] para a prof*".

Devido à tentativa de resolver a situação com as letras, Lili nos sugere sua compreensão de que neste caso, uma explicação fundamentada em exemplos seria questionável, porque não iria abranger todos os números. Isso evidencia que ela já percebia a necessidade de não se satisfazer apenas com exemplos ou com casos particulares.

No registro fotográfico de sua resolução, pudemos identificar uma linguagem matemática geral, em que ela considerou a fórmula resolutiva das equações polinomiais do 2° grau, o que não esperávamos. Após a correção de um pequeno equívoco[25], em sua resposta final, ela mostrou perceber que o valor das raízes será igual justamente pelo valor do discriminante ser zero, o que não altera os resultados finais.

[25] Em que ela considerou o valor a no denominador e não 2.a.

Figura 42 – Resolução de Lili para a atividade III – 10



raízes reais iguais. O que você acha? Concorda ou discorda? Explique. É verdade, pois, o 0 não possui valor, consequentemente não gera nenhuma mudança:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2.a} = x = \frac{-b \pm 0}{2a}$ → $x_1 = \frac{-b+0}{2a} = \frac{-b}{2a}$ → $x_2 = \frac{-b-0}{2a} = \frac{-b}{2a}$

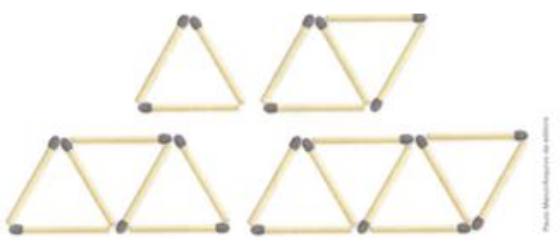
Fonte: Dados da pesquisa

Classificamos a prova apresentada por Lili como sendo do tipo experiência mental, pois, ao analisarmos a situação de forma geral, parece haver um desprendimento aos casos particulares, uma vez que a aluna buscou resolver a situação de forma direta sem fazer referência a exemplos. Mesmo que ela tivesse desconfiado da validade da conjectura, observando exercícios feitos anteriormente, em sua produção não há elementos de que tenha feito outro teste. Além disso, parece haver um desapego em relação aos casos particulares, pois Lili partiu da fórmula indicada não importando os valores dos coeficientes envolvidos.

Na Entrevista 2, tivemos a oportunidade de questionar como ela havia pensado ao resolver essa atividade. Lili afirmou que, devido aos exemplos trabalhados anteriormente nas apostilas, sugerindo o uso de validações intelectuais para garantir a validade ou não de uma conjectura, pensou que deveria utilizar "*as letras*". Aliás, afirmou que não realizou nenhuma pesquisa para essa atividade em específico.

❖ **Atividade III – 10**

Utilizando palitos de fósforo, canetas ou lápis, faça construções como as representadas abaixo:



Número de triângulos		Número de palitos
1	→	3
2	→	
3	→	
4	→	

Conte o número de triângulos e o número de palitos em cada construção. Em seguida, complete o quadro.

- ❖ Observe o número de triângulos e o número de palitos necessários. Você consegue identificar alguma regularidade, ou seja, algum padrão? Explique.
- ❖ Encontre o número de palitos necessários para construir: 10 triângulos, 15 triângulos e 25 triângulos
- ❖ Como você encontrou as respostas exigidas na letra b? Explique.

Essa atividade foi adaptada de um livro didático e com ela gostaríamos que os alunos realizassem explorações, conjecturas e que generalizassem possíveis relações entre o número de palitos e o número de triângulos a serem formados.

Para resolvê-la, os alunos poderiam fazer desenhos ou utilizar objetos que representem os palitos. Analisando a tabela, poderiam perceber que, para cada novo triângulo, será necessário incluir mais dois palitos à quantidade existente.

Devido ao incentivo constante à realização de testes, verificações, identificação de padrões e generalizações, pensamos na possibilidade de os alunos generalizarem a situação dada, indicando que o número de palitos será o dobro do número de triângulos, mais um, podendo expressá-la mais ou menos da seguinte maneira:

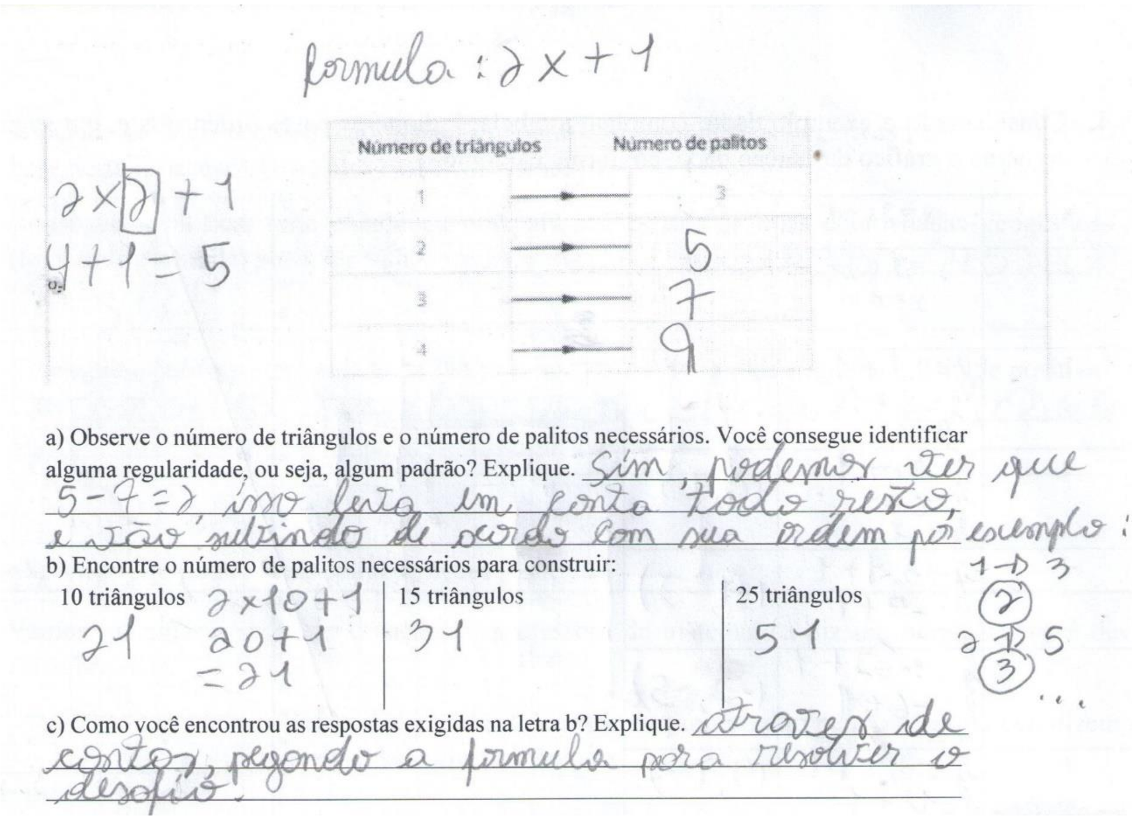
$P = 2t + 1$, sendo P o número de palitos e t o número de triângulos.

Se, por outro lado, não for indicada a relação pretendida, certos questionamentos poderão ser realizados tais como: o que ocorre com os números indicados nas colunas da tabela? E em relação às linhas? Ao completar a tabela para outras quantidades de triângulos e palitos, essas relações se mantém? Para incentivar a busca por uma generalização, em que a letra assume o estatuto de variável numa relação funcional, poderíamos perguntar a quantidade de palitos necessários para construir um número muito alto de triângulos ou vice e versa.

....

Em sua resolução, Juca percebeu a relação pretendida. Ele também indicou que, de 5 para 7 – se referindo ao número de palitos –, há um aumento de duas unidades. Ele ainda reforçou o argumento, fornecendo mais exemplos da própria tabela construída, conforme se pode observar no registro de sua apostila – Figura 43.

Figura 43 – Resolução de Juca para a atividade III –10



Fonte: Dados da pesquisa

Para encontrar o número de palitos necessários e construir um número maior de triângulos, o aluno relatou ter utilizado a “fórmula”, multiplicando o número de triângulos por dois e adicionando um.

Tanto em nossa conversa via WhatsApp quanto em nossa Entrevista 2, perguntamos para Juca se ele havia realizado alguma pesquisa para resolver essa atividade,

> Liana: Essa aqui foi um exemplo de atividade que você pesquisou na internet ou não?
> Juca: A fórmula não, mas eu pesquisei um pouco sobre a letra b.
> Liana: Entendi.
> Juca: Eu fui testando com vários números, fui testando com 2 x, 2,5 pra ver se dava... Aí colocando 2 x mais um dava.

Não podemos deixar de considerar a possibilidade de que, ao pesquisar sobre o item b da atividade proposta, Juca tenha se deparado com alguma resolução que sugerisse a apresentação de uma fórmula. No entanto, isso não significa que ele não tenha se envolvido em um processo de validação ou que a devolução da atividade não tenha ocorrido ao buscar, testar e verificar a validade da informação que encontrou. Além de ter desenhado palitos e triângulos em seu caderno, ele reforçou suas tentativas de generalização tanto na Entrevista 2, que ocorreu tempo depois da aplicação da atividade, quanto em nossa conversa via WhatsApp, no dia em que a desenvolveu, como se pode perceber abaixo.

Figura 44 – Conversa WhatsApp de Juca para a atividade III – 10

Fonte: Dados da pesquisa

Quando questionamos o estudante sobre ter encontrado a relação geral entre o número de palitos e o número de triângulos, Juca explicou que buscou relações entre os valores da tabela multiplicando aqueles da esquerda por 2. Ao perceber que essa não era a relação pretendida, tentou multiplicá-los por 2,5 e depois por 3. Ao refutar todas essas opções, verificou que o dobro do número de triângulos mais um, funcionava. Durante esse processo, é possível que o aluno tenha vivenciado situações adidáticas de ação, ao desenhar representações de palitos e realizar contagens. É possível que tenha vivenciado, também, situações adidáticas de formulação, ao conjecturar relações entre triângulos e palitos, tais como o dobro, o triplo, ou o dobro mais um e situações adidáticas de validação, ao testar e refutar suas hipóteses.

Em nossa interação, perguntamos como ele teve a ideia de buscar pela fórmula, uma vez que não havia essa sugestão específica. Para tanto, ele respondeu ter sido um conselho dado por nós. Acreditamos que o aluno tenha se referido ao nosso discurso relativo à importância de se buscar generalizações, sempre realizado com ele nas institucionalizações de cada atividade. Essa ação era possível com Juca, devido a sua possibilidade de interação via WhatsApp em todas as aulas.

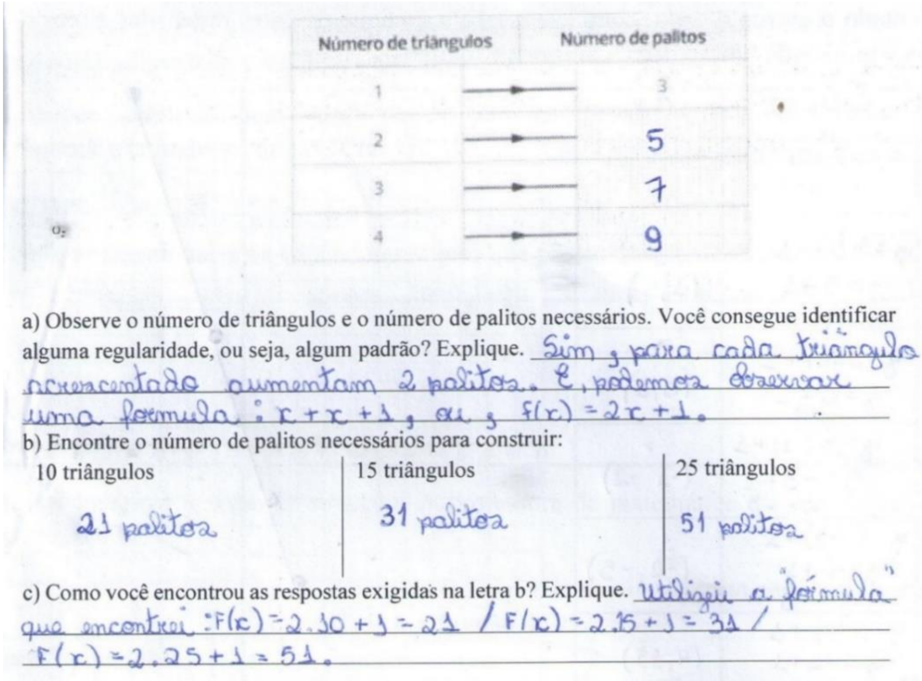
Essa atitude do aluno, pode ter sido realizada na tentativa de atender a uma regra do nosso contrato didático. Para Brousseau,

> É certo que, se a solução for articulada como um texto matemático, [ela] compreende a justificação científica correta do resultado, mas muitos alunos obtém *a resposta, não através do raciocínio matemático desejado,* mas pela decodificação da convenção didática. (BROUSSEAU, 1986, p. 57, grifos do autor).

Sendo assim, a produção de Juca pode ter sido de nível intelectual em atendimento a uma convenção didática, com o intuito de atender nossas expectativas.

Na resolução de Lili, foi possível observar que ela encontrou a relação pretendida e utilizou a notação de função.

Figura 45 – Resolução de Lili para a atividade III –10



Número de triângulos		Número de palitos
1	→	3
2	→	5
3	→	7
4	→	9

a) Observe o número de triângulos e o número de palitos necessários. Você consegue identificar alguma regularidade, ou seja, algum padrão? Explique. Sim, para cada triângulo acrescentado aumentam 2 palitos. E, podemos observar uma formula: $x + x + 1$, ou, $f(x) = 2x + 1$.

b) Encontre o número de palitos necessários para construir:

10 triângulos	15 triângulos	25 triângulos
21 palitos	31 palitos	51 palitos

c) Como você encontrou as respostas exigidas na letra b? Explique. utilizei a "fórmula" que encontrei: $F(x) = 2.10 + 1 = 21$ / $F(x) = 2.15 + 1 = 31$ / $F(x) = 2.25 + 1 = 51$.

Fonte: Dados da pesquisa

Em nossa Entrevista 2, questionamos a aluna sobre ter pesquisado, em sites de busca, a resposta da atividade, conforme diálogo a seguir:

> Liana: Lembra desta atividade dos palitos? Você chegou a fazer o desenho?
> Lili: Eu fiz o... Só que no caderno mesmo, como se fosse palitinho, mas desenhado.
> Liana: Achei interessante que você chegou nessa parte do x né... Aqui x + x + 1. Você chegou a pesquisar?
> Lili: Não, eu acho que eu fiz da... Só olhando né, pensando.
> Liana: Você desenhou para conferir essas respostas? [referentes ao item b]
> Lili: Não, eu usei a fórmula.

Podemos classificar a produção da aluna como sendo de nível intelectual, pois parece ter havido a generalização pretendida. Observemos o cuidado de Lili em responder os itens a e c, que solicitavam explicações. Especificamente na primeira pergunta, a aluna se preocupou não somente com a apresentação da generalização, mas também com a explicação da própria relação que encontrou. Ela teve o cuidado de deixar transparecer que o número de palitos deve ser somado a ele mesmo $(x + x)$ acrescentando-se o número 1. Daí, $f(x) = 2x + 1$, evidenciando os conhecimentos algébricos ressignificados.

O fato de que, em sua Entrevista 2, a aluna afirmou não ter pesquisado para responder a essa atividade e que ela não tenha feito nenhum tipo de desenhos ou manipulações para conferir os resultados do item b, sugere que Lili já consegue discutir e lidar com raciocínios mais gerais sem muitas dificuldades. Como discutimos em nossos capítulos teóricos, é muito comum que validações intelectuais não impliquem certezas para os alunos, pois o significado dos exemplos e seu caráter visual e prático são elementos mais próximos aos que os estudantes vêm discutindo em suas trajetórias escolares, desde os primeiros anos de escolaridade. Não parece ter sido esse o caso de Lili para a atividade em questão.

- **Atividade III – 11**

11. Analise a seguinte definição: "Função polinomial de segundo grau é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com a diferente de 0, e x pode ser qualquer número real.". Por que o coeficiente a não pode ser nulo (zero)? Explique.

Com esta atividade, tínhamos a intenção de investigar como os alunos formulariam a sua validação, diante de um questionamento relativo à definição de função polinomial de 2° grau. A definição já havia sido abordada anteriormente na apostila, mas não havíamos fornecido detalhes sobre o porquê do coeficiente que acompanha x^2 não poder ser zero. Então, nessa oportunidade tínhamos como intenção explorar as funções da prova relacionadas à explicação e à compreensão.

Caso os estudantes encontrassem dificuldades para responder a atividade, poderíamos solicitar que atribuíssem o valor 0 para o coeficiente "a" e valores quaisquer para os demais, neste caso, diferentes de zero. A partir de diversos exemplos, poderíamos solicitar que eles comparassem com a definição ou com conhecimentos relativos às funções polinomiais de 1° grau, anteriormente discutidos nas apostilas. Uma prova de nível intelectual possível de ser discutida nesta atividade poderia ser discutida a partir da substituição do coeficiente "a" por 0, como segue:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Sendo a = 0; b e c números reais, temos

$$f(x) = 0x^2 + bx + c$$

0 multiplicando qualquer valor real de x², resulta 0, então:

$$f(x) = 0 + bx + c$$

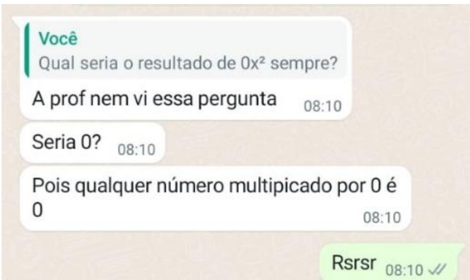
$$f(x) = bx + c$$

Logo, não teremos mais uma função polinomial do segundo grau e, por este motivo, o coeficiente “a” é o único que não pode ser nulo. Nessa validação, não é necessário reconhecer a relação de dependência, mas sim, raciocinar sobre possíveis valores a serem assumidos pelo coeficiente “a”. Então, no que se refere ao uso da letra, acaba sendo um trabalho mais direcionado ao estatuto de número genérico, apesar de ser também variável na relação funcional.

....

Juca parece não ter se envolvido em um processo de validação nessa situação, pois respondeu de forma objetiva “para que a função seja válida”. Por conta de nossa oportunidade de interação, realizamos mais perguntas no WhatsApp, as quais ele respondeu da mesma maneira, de forma objetiva. Uma delas foi a seguinte: “Qual seria o resultado de $0.x^2$ sempre?” –, conforme indicado na Figura abaixo. Mas ela acabou se perdendo em meio à nossa conversa sobre resoluções de outras atividades, que foi bastante profícua naquele dia. Quando dissemos que retornaríamos à referida questão em outro dia, ele percebeu que não havia respondido.

Figura 46 – Conversa WhatsApp com aluno Juca

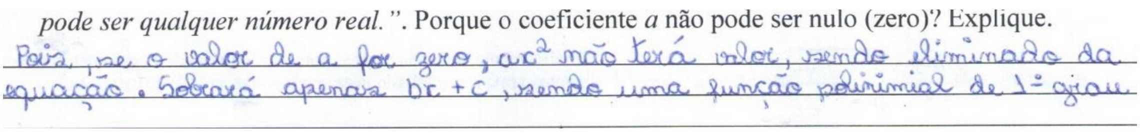


Fonte: Dados da pesquisa

Sua validação para este questionamento específico que fizemos ao longo da conversa, é de nível intelectual, pois parece haver a compreensão de que o resultado da multiplicação será zero, independentemente do valor de x. No entanto, não ficou claro sua explicação para a situação inicial que foi proposta. É possível que a devolução não tenha ocorrido e ele não tenha se dedicado a um processo de validação ou, em outra direção, tenha aplicado uma economia da lógica para responder rapidamente que a função não seria válida. Ainda assim, a resposta parece estar incompleta, já que o intuito era justamente saber por que isso ocorre.

Na apostila de Lili, podemos observar que a aluna respondeu utilizando escrita em linguagem natural e com uma escrita matemática específica, em que evidencia compreender que, se o valor do coeficiente a for zero, não teremos mais uma equação polinomial de 2° grau.

Figura 47 - Resolução da aluna Lili para a atividade III – 11


pode ser qualquer número real.". Porque o coeficiente *a* não pode ser nulo (zero)? Explique.

Pois, se o valor de a for zero, ax^2 não terá valor, sendo eliminado da equação. Sobrará apenas $bx + c$, sendo uma função polinimial de 1° grau

Fonte: Dados da pesquisa

Mesmo tendo a aluna utilizando a expressão do senso comum "não terá valor", que é de senso comum, pontuamos seu cuidado com a elaboração da escrita da explicação e a presença de um raciocínio genérico. Em Balacheff (2004), encontramos que a escrita matemática e a prova produzida têm relações específicas com a linguagem utilizada e com o conhecimento dos estudantes. Sendo assim, podemos classificar sua produção como de nível intelectual, pois parece ter havido uma descontextualização, ao trabalhar com uma categoria de objetos sem haver uma particularização, uma despersonalização ao separar sua ação, trabalhando de forma aparentemente independente e uma atemporalidade (BALACHEFF, 2000).

➢ Atividade III – 12

12. Um estudante de 9° notou a presença de algumas regularidades quando a atividade pedia para encontrar as raízes (ou zeros) de uma função polinomial de 1° grau. Em seguida, ele construiu a seguinte relação:

Podemos representar uma função polinomial de 1° grau da seguinte forma:
$y = ax + b$
Para encontrarmos a raiz dessa função, devemos encontrar o valor de x para o qual y = 0. Então:
$0 = ax + b$
$ax + b = 0$
$ax = 0 – b$
$ax = –b$
$x = (-b)/a$
Conclusão: o zero de uma função polinomial de 1° grau é sempre o valor de (-b)/a Por exemplo:
A função y = 3x + 9 possui coeficientes a = 3 e b = 9. O zero da função é (-(9))/3 = – 3

- ❖ Você concorda com o raciocínio apresentado pelo aluno? O que você achou? Explique.
- ❖ É verdade que a raiz (ou o zero) da função y = 3x + 9 é -3? Explique como você pensou.

Com a atividade acima, tínhamos o objetivo de que os estudantes avaliassem uma validação matemática de nível intelectual. Trata-se de uma explicação possível para a maneira direta de encontrar raízes de uma função polinomial do 1° grau. Para tanto, seria necessário conhecer previamente o significado de coeficientes e raízes de uma função polinomial do 1° grau. Por conta de não estarmos em uma sala de aula presencial de Matemática, consideramos que essa atividade pode ser um pouco confusa, pois ela envolve um raciocínio genérico.

Como pontuamos ao longo desse texto, assumimos a premissa de proporcionar aos estudantes diferentes experiências que envolvem validações matemáticas. Avaliar diferentes provas é uma delas. Dessa maneira, além de uma oportunidade de os estudantes conhecerem uma prova possível para uma dada conjectura é, também, uma forma de explorarem raciocínios genéricos.

....

Juca respondeu que concorda com o raciocínio apresentado na situação, porque, segundo ele, seria como se houvéssemos encontrado a “fórmula”. Em sua resolução, percebemos que o aluno realizou uma outra divisão, no canto superior esquerdo, envolvendo os números 16 e 4.

Figura 48 – Resolução do aluno Juca para a atividade III – 12

$$\frac{16}{4} = 4$$

$$ax = 0 - b$$
$$ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{a}$$

Conclusão: o zero de uma função polinomial de 1° grau é sempre o valor de $\frac{-b}{a}$ *Por exemplo:*

A função y = 3x + 9 possui coeficientes a = 3 e b = 9. O zero da função é $\frac{-(9)}{3} = -3$

a) Você concorda com o raciocínio apresentado pelo aluno? O que você achou? Explique.

Sím é como que ele tivesse encotrado a formula, é encontrou. Achei muito bom

b) É verdade que a raíz (ou o zero) da função y = 3x + 9 é -3? Explique como você pensou.

É verdade, so substitui o x pelo -3, e realmente da zero.

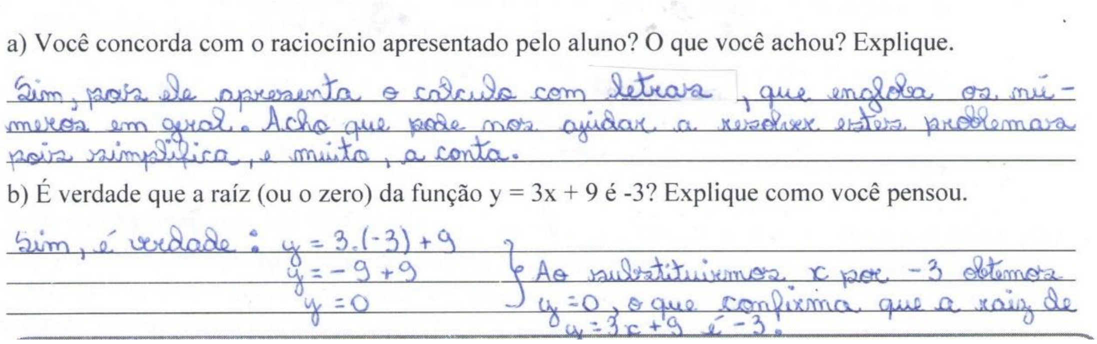
Fonte: Dados da pesquisa

Perguntamos se ele havia realizado o teste para uma atividade anterior, proposta na apostila, que solicitava encontrar a raiz da função y = 4x-16 e ele respondeu que sim, e que usou “[...] o 16/4 para saber se dava certo tbm”.

Ao responder ao item b, ele indicou que substituiu o valor de x por -3 para verificar que o valor de y seria 0. Em nosso diálogo no WhatsApp, o aluno digitou o cálculo que fez mentalmente no momento de sua resolução. Poderíamos nos questionar se Juca realizou o teste para realmente ter certeza ou para atender à ideia de que é importante sempre responder de uma forma o mais completa possível, sempre investigando a validade das conjecturas dadas.

A aluna Lili também respondeu concordar com o raciocínio do estudante porque ele apresentou um cálculo com letras. Para ela, essa situação pode ajudar a simplificar contas:

Figura 49 – Resolução da aluna Lili para a atividade III – 12



a) Você concorda com o raciocínio apresentado pelo aluno? O que você achou? Explique.

Sim, pois ele apresenta o cálculo com letras, que engloba os nú-
meros em geral. Acho que pode nos ajudar a resolver estes problemas
pois simplifica, e muito, a conta.

b) É verdade que a raíz (ou o zero) da função y = 3x + 9 é -3? Explique como você pensou.

Sim, é verdade: $y = 3.(-3)+9$
$y = -9+9$
$y = 0$

Ao substituirmos x por -3 obtemos $y = 0$, o que confirma que a raiz de $y = 3x + 9$ é -3.

Fonte: Dados da pesquisa

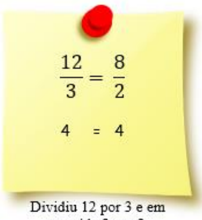
Em relação ao item b, a aluna substituiu o valor de x por -3 e concluiu que, neste caso, o valor de y será 0. Além disso, ela ainda teve o cuidado de descrever como pensou. Em nossa Entrevista 2, questionamos sobre ela ter evoluído a linguagem matemática em suas explicações, sobre esse cuidado e uso de algumas relações, mesmo sem termos tido a oportunidade de interagirmos frequentemente.

> Liana: Nas primeiras atividades [Fase II] e na primeira apostila que fizemos, eu percebi que você usou bastante palavras, explicou com palavras... Você foi ótima, não parece que você teve dificuldades, foi isso mesmo?
> Lili: É, mais ou menos, assim... eu leio bastante né aí eu vou procurando formar uma frase que explique bem o que está pedindo na questão.
> Liana: Entendi... Por que nesta apostila aqui você usou palavras, exemplos, mas nesta outra, você começou usar uma outra lógica para explicar as atividades, percebe?
> Lili: Sim, comecei usar mais letras.
> Liana: Como assim?
> Lili: Foi porque eu conversei com a professora [durante Atividade III – 8 e conforme Figura 35] e vi na apostila né! Aí explicou que para abranger todos os números a gente faz o teste com as letras, que aí também já era uma coisa mais... mais certa né.

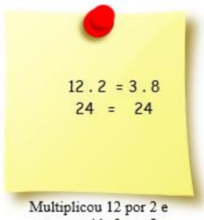
No diálogo acima, percebemos que a nossa intervenção durante a atividade III – 8 assim como os textos explicativos sobre provas intelectuais disponibilizados nas apostilas foram importantes para que Lili passasse a considerar cálculos com letras. Quando ela nos diz que ficaria “uma coisa mais certa”, sugere seu entendimento sobre a limitação de verificações ou exemplos.

➢ Atividade III – 13

13. Brincando com algumas proporções, Marta encontrou alguns resultados interessantes. Ela escolheu as razões 12/3 e 8/2 porque formam uma proporção. Realizando cálculos de divisão e de multiplicação, ela obteve igualdades verdadeiras. Veja:



Dividiu 12 por 3 e em seguida 8 por 2



Multiplicou 12 por 2 e em seguida 3 por 8

❖ Será que isso sempre vai ocorrer, independentemente dos valores escolhidos? O que você acha?

❖ Faça o teste com as seguintes proporções (use calculadora se necessário).

- $\frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ — $10 . 3 = 2 . 15$
- $\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$ — $4 . 6 = 8 . 3$

❖ Agora que você realizou os cálculos, o que aconteceu? As igualdades continuam sendo verdadeiras? Explique.

❖ Escolha duas razões que formam uma proporção, assim como Marta e verifique se a igualdade continuará sendo verdadeira.

❖ Comparando os cálculos de multiplicação e de divisão (coluna da direita e coluna da esquerda), você consegue identificar alguma regularidade? Algum padrão? Explique.

Propusemos essa atividade com o intuito de que os alunos investigassem regularidades e elaborassem conjecturas ao se comparar duas proporções. Nesse sentido, escolhemos apresentar algumas sugestões para que os estudantes pudessem realizar testes e que eles observassem os cálculos à direita e à esquerda, comparando-os, com o intuito de facilitar suas explorações. Essa escolha se deve ao fato de que gostaríamos que o máximo de estudantes obtivessem êxito pois, conforme Alpha (2020), é comum que os estudantes demonstrem domínio tardio ou insuficiente da noção de proporção.

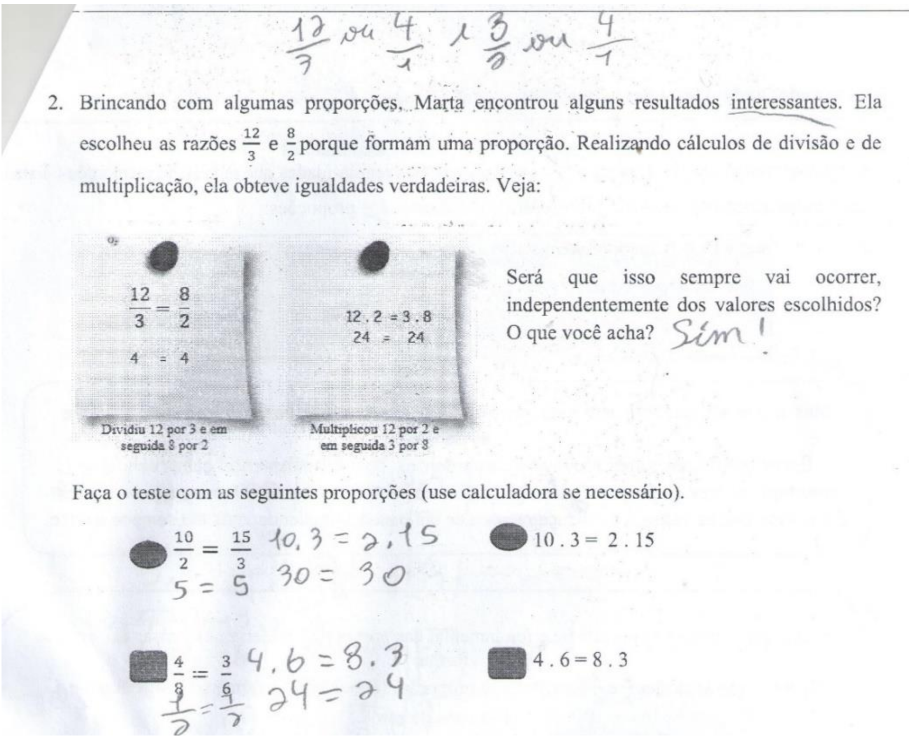
É importante destacar que a atividade em questão foi proposta antes de abordarmos textualmente a propriedade fundamental das proporções, segundo a qual “em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios”. Devido a todo trabalho desenvolvido até este momento, seria possível que houvesse tentativas de prova intelectual.

Fizemos a escolha de inserir a validação dessa propriedade, na sequência do texto da apostila, pois assim como na atividade III – 6, queríamos mostrar aos estudantes provas intelectuais possíveis de serem apresentadas para as conjecturas dadas ou elaboradas. Tomamos essa decisão também porque a apostila era a única forma de comunicação que tínhamos com aqueles alunos que não podiam interagir conosco no momento das aulas, os quais inclusive, eram maioria. Dessa forma, o principal intuito dessa atividade centra-se na elaboração de conjecturas e na verificação de sua veracidade. No apêndice B, apresentamos o texto tal como colocado na apostila dos estudantes, em que discutimos uma prova para tal propriedade. Nessa validação, as letras têm estatuto de número genérico, em que se aplicou a propriedade de que, quando multiplicamos ambos os membros de uma igualdade por um mesmo número, a igualdade é mantida.

....

Em relação ao primeiro questionamento, Juca respondeu objetivamente que "sim", indicando que a regularidade sempre iria ocorrer. Quanto aos testes, efetuou a divisão e a multiplicação com as primeiras proporções indicadas, simplificou e multiplicou as segundas, obtendo êxito e observando as igualdades pretendidas.

Figura 50 – Resolução do aluno Juca para a atividade III – 13


$\frac{12}{3}$ ou $\frac{4}{1}$ e $\frac{3}{2}$ ou $\frac{4}{1}$

2. Brincando com algumas proporções, Marta encontrou alguns resultados interessantes. Ela escolheu as razões $\frac{12}{3}$ e $\frac{8}{2}$ porque formam uma proporção. Realizando cálculos de divisão e de multiplicação, ela obteve igualdades verdadeiras. Veja:

$\frac{12}{3} = \frac{8}{2}$

$4 = 4$

Dividiu 12 por 3 e em seguida 8 por 2

$12 . 2 = 3 . 8$

$24 = 24$

Multiplicou 12 por 2 e em seguida 3 por 8

Será que isso sempre vai ocorrer, independentemente dos valores escolhidos? O que você acha? Sim!

Faça o teste com as seguintes proporções (use calculadora se necessário).

$\frac{10}{2} = \frac{15}{3}$ $10 . 3 = 2 . 15$

$5 = 5$ $30 = 30$

$10 . 3 = 2 . 15$

$\frac{4}{8} = \frac{3}{6}$ $4 . 6 = 8 . 3$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $24 = 24$

$4 . 6 = 8 . 3$

Fonte: Dados da pesquisa

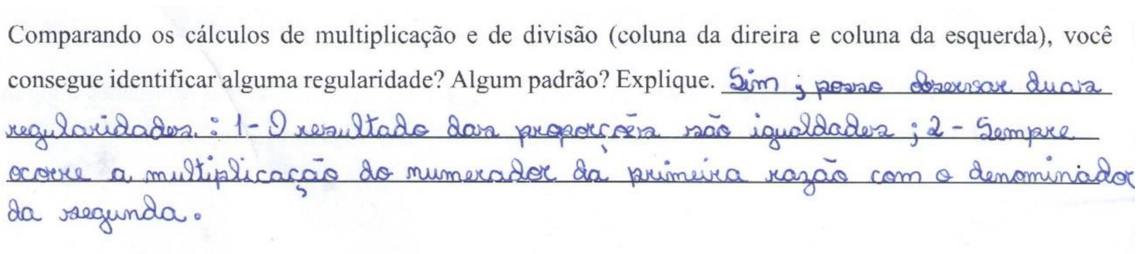
O estudante escolheu as proporções 15/30 e 45/90 para realizar mais um teste, conforme solicitava o enunciado. Dessa maneira, classificamos a prova do aluno como uma experiência crucial devido ao teste ter ocorrido com uma razão que envolveu números maiores se comparados àqueles que foram propostos na situação.

Para a última pergunta, ele indicou que reconheceu a regularidade e justificou com a frase “[o produto] os extremos é igual o dos meios”. Neste caso, a escrita de Juca reflete em tese a conjectura pretendida, mas não uma explicação do porquê ela ocorre. Embora tenhamos apresentado a *priori* na apostila os significados de meios e de extremos de uma proporção, não ficou claro se o aluno elaborou sua afirmação com base neles ou se tomou como referência o conteúdo posterior, em que enunciamos no material tal propriedade, junto de uma prova de nível intelectual (conforme apêndice B).

Harel e Sowder (1998), ao analisarem produções dos alunos participantes de uma de suas investigações, sinalizaram a existência de esquemas de prova baseados em fatores externos, ou seja, um livro, buscas na internet, uma informação dada por um colega ou por um professor ou como pode ter ocorrido na produção de Juca, pela própria apostila. Trata-se de uma recorrência a alguma autoridade para validação de resultados. Esta, pode ser, como dissemos, o professor, um livro ou a própria apostila, o que parece ter sido o caso do aluno. Segundo os autores, mesmo que se apoiem nos materiais acima ciados, os estudantes podem utilizar seus próprios meios para elaborarem justificativas, mas não parece ter sido este o caso de Juca, uma vez que houve apenas a repetição da propriedade.

No caso de Lili, a aluna não respondeu ao primeiro questionamento da atividade, mas resolveu todos os demais. Ao realizar os testes solicitados, efetuou a divisão e a multiplicação conforme indicado nas duas proporções da atividade. A aluna indicou que as igualdades permaneceram verdadeiras e escolheu a proporção 10/25 e 6/15 para realizar seu último teste. Ela identificou duas regularidades.

Figura 51 – Resolução da aluna Lili para a atividade III – 13


Comparando os cálculos de multiplicação e de divisão (coluna da direira e coluna da esquerda), você consegue identificar alguma regularidade? Algum padrão? Explique. Sim ; posso observar duas regularidades : 1- O resultado das proporções são igualdades ; 2- Sempre ocorre a multiplicação do numerador da primeira razão com o denominador da segunda.

Fonte: Dados da pesquisa

As duas observações da estudante se relacionam, uma vez que a primeira delas somente ocorreu porque há a multiplicação do numerador da primeira com o denominador da segunda e vice-versa. Percebemos que Lili pontuou as regularidades que encontrou e, ao mesmo tempo, explicou quais foram. Ao fazer isso, a aluna atendeu as exigências do enunciado, mas não apresentou uma escrita na tentativa de justificar o porquê de elas ocorrerem.

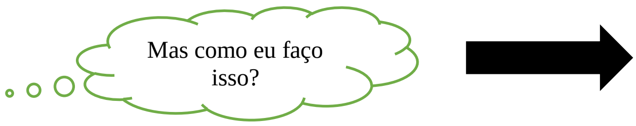
Uma validação matemática possível para a regularidade apresentada pelos estudantes foi discutida textualmente na sequência da apostila, pois esse foi um movimento necessário na tentativa de nos comunicarmos com aqueles estudantes que não puderam interagir conosco por outros meios.

Consideramos que, apesar de terem sido corretas, não identificamos tentativas de generalização e nos questionamos em que medida termos institucionalizado a atividade textualmente, em seguida à sua proposição, influenciou na produção dos estudantes. Isto é, eles teriam trabalhado em uma prova de nível intelectual se não a tivéssemos apresentado? Tivemos a oportunidade de interagir com Juca no WhatsApp, mas a atividade não proporcionou muito engajamento, o que nos permite dizer que no momento de nossa interação, a devolução da atividade não ocorreu.

- **Atividade III – 14**

14. Além da propriedade fundamental, existem outras propriedades relacionadas às proporções. Verifique se as duas propriedades apresentadas abaixo são verdadeiras a partir da proporção 9/6=3/2

a. $\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$ b. $\frac{a+b}{b} = \frac{d-c}{c}$



Basta que você substitua o valor de a por 9, o valor de b por 6, e assim por diante. Depois é só verificar se a igualdade é verdadeira ou falsa 😊

- ❖ As duas propriedades são verdadeiras? Explique.
- ❖ A realização deste teste é suficiente para garantir que a propriedade vale para todas as proporções existentes? O que você acha? Em sua opinião, o que poderia ser feito de diferente?

Com essa última atividade, tínhamos a intenção de que os alunos verificassem as propriedades das proporções indicadas nos itens a e b. Mais do que isso, investigar se eles reconhecem a insuficiência dos testes realizados para concluírem a veracidade ou falsidade de uma conjectura.

A propriedade do item a é verdadeira e a propriedade do item b é falsa. Esperávamos que os estudantes substituíssem os valores das proporções indicadas e efetuassem os cálculos com números. Para evitar dificuldades e para que o máximo possível de alunos obtivesse êxito, inserimos a sugestão de como poderiam resolver a situação dada.

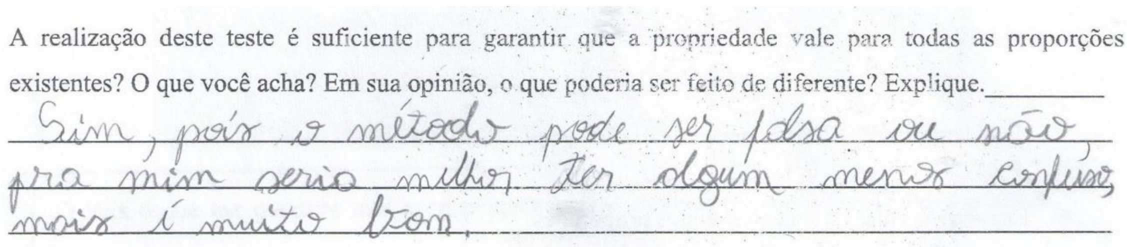
Como apontamos anteriormente, não tínhamos a intenção de que eles fizessem uso de propriedades matemáticas para produzir uma prova utilizando um raciocínio geral, mas sim de saber se os estudantes reconhecem as limitações de um único teste. Por esse motivo, não solicitamos que buscassem por validações, porém, questionamos acerca da suficiência do único teste para garantir a veracidade da conjectura e o que poderia ser feito nesse sentido. Após todo nosso processo de interação, esperávamos que respondessem que deveriam ser realizamos mais testes, em situações diversas, envolvendo números com as mais variadas características, ou ainda, que se utilizasse de um raciocínio geral, efetuando-se os cálculos com as letras, que, nesse caso, representam valores quaisquer, a, b e c, diferentes de zero.

....

Tanto Juca quanto Lili efetuaram corretamente os cálculos e concluíram a veracidade da propriedade indicada no item a e a falsidade da propriedade indicada no item b. Essa ação pode indicar que nossa escolha, por apresentar uma sugestão de resolução, atingiu o objetivo esperado. Além disso, obtiveram êxito ao responder o primeiro questionamento da atividade. As respostas foram descritivas, nas quais indicaram que a segunda não seria verdadeira pois não contém uma igualdade.

Quanto ao segundo questionamento, Juca respondeu que a realização do teste indicado teria sido suficiente,

Figura 52 – Resolução do aluno Juca para a atividade III – 14

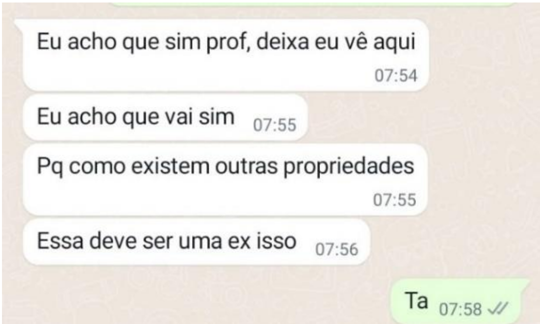

A realização deste teste é suficiente para garantir que a propriedade vale para todas as proporções existentes? O que você acha? Em sua opinião, o que poderia ser feito de diferente? Explique.

Sim, pois o método pode ser falsa ou não, pra mim seria milhor ter algum menos confuso, mais é muito bom.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse dia, não foi possível interagir instantaneamente com o aluno e apenas conseguimos conversar sobre sua resposta em um dia posterior. Na tentativa de reiniciar a discussão sobre o item em questão, perguntamos para ele, em áudio o que aconteceria se realizássemos o teste da primeira propriedade com outras razões, envolvendo números negativos ou números muito altos, como milhões, por exemplo. Ele sinalizou que iria verificar, mas logo respondeu,

Figura 53 – Conversa WhatsApp com o aluno Juca sobre a atividade III – 14



Fonte: Dados da pesquisa

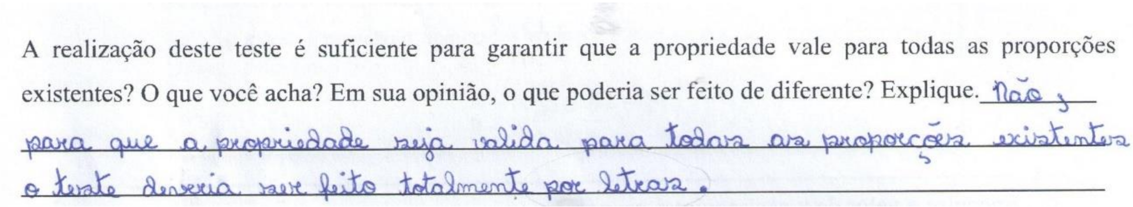
Por meio do diálogo, observamos que nosso questionamento possivelmente não provocou a devolução, porque o aluno respondeu quase imediatamente afirmando que, devido à existência de outras propriedades, aquela em questão deveria ser um exemplo delas. Além disso, a resposta do aluno – Figura 52 – foi fundamentada na realização de apenas um teste, sendo possível classificar como empirismo ingênuo. No momento de nossa interação, que ocorreu um dia após ele nos ter enviado a atividade, parece não ter havido um engajamento em um processo de validação. Ademais, quando o aluno escreve que “deve ser um exemplo disso”, possivelmente está sob influência do contrato didático no qual atividades propostas por nós, que envolveram “propriedades”, como ele mesmo escreve, quase sempre foram verdadeiras.

Sobre isso, poderíamos ter insistido no diálogo tentando realizar outros questionamentos com intuito de que Juca investigasse um pouco mais a situação, porém acabamos seguindo por outro caminho. Na sequência, questionamos a parte da resposta em que ele dizia ter ficado confuso, conforme escreveu na resolução e identificamos que ele estava se referindo ao texto explicativo utilizado para a institucionalização da atividade III – 13, conforme apêndice B. No texto em questão, apresentamos uma prova possível para a propriedade fundamental das proporções. Juca acrescentou “Rsrs, meia [*sic*] confusa, se não prestar atenção dá pra trocar as letras com os números”.

Balacheff (2004) escreve que as características específicas da escrita matemática têm consequências sobre sua compreensão, como também sobre a compreensão da prova matemática. O fato de Juca ter achado confuso um texto explicativo contendo uma prova de nível intelectual evidencia essa especificidade. A dificuldade apresentada por Juca parece ter relação com o uso e a compreensão de elementos algébricos. Questão essa, que também foi identificada por Santos (2015) e Lima (2015) no desenvolvimento de suas pesquisas com estudantes. Embora estejamos interagindo com ele há tempo e discutindo sempre que possível validações intelectuais que envolvem conhecimentos da Álgebra, faz-se necessário destacar que, em muitas situações a entrada e o aprofundamento nesse campo, significa uma ruptura, em que a matemática perde um pouco de seu sentido (FREITAS, 2015), como parece ter ocorrido com o aluno nessa situação.

Não tivemos a mesma oportunidade de interação com Lili, mas podemos observar em sua resposta o reconhecimento da limitação da realização de testes, conforme objetivávamos saber:

Figura 54 – Resolução da aluna Lili para a atividade III – 14


A realização deste teste é suficiente para garantir que a propriedade vale para todas as proporções existentes? O que você acha? Em sua opinião, o que poderia ser feito de diferente? Explique. Não, para que a propriedade seja valida para todas as proporções existentes o teste deveria ser feito totalmente por letras.

Fonte: Dados da pesquisa

Não esperávamos que eles elaborassem provas nessa atividade, mas por curiosidade, em nossa Entrevista 2 perguntamos se ela tentou generalizar a situação dada, realizando os cálculos com “letras”, como ela se referia. Lili pontuou que não fez essa tentativa.

Para nós, esse reconhecimento recorrente de Lili, de que existem limitações ao se realizar testes ou observar exemplos específicos, é bastante significativo porque nos mostra uma aproximação com a especificidade matemática de elaborar justificativas. Pode ser um passo importante e transitório para a elaboração de validações intelectuais.

- **Considerações sobre a Fase III**

Considerando os processos de validação matemática apresentados por Juca e por Lili, em relação às atividades aplicadas durante a Fase III, identificamos apontamentos a serem feitos, conforme nossos objetivos específicos,

- Como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas para suas afirmações e/ou conjecturas?

Juca e Lili desenvolveram as atividades de validação que foram propostas em meio às apostilas de Matemática elaboradas por nós e disponibilizadas mensalmente para cumprimento da carga horária letiva. Ao longo da Fase III, Juca permaneceu interagindo conosco via WhatsApp de forma síncrona, enquanto Lili o fazia mediante dúvidas pontuais. Não tivemos controle sobre esse aspecto que, inevitavelmente influenciou quanto à possibilidade de melhor compreender o processo de produção de validações dos estudantes.

Aos poucos, tanto nós quanto os alunos fomos nos adaptando a esta nova forma de comunicação, o que justifica uma maior interação nas atividades, inclusive com Lili, nas ocasiões em que ela entrava em contato conosco, devido a certas dúvidas que tinha. Esses elementos podem ser observados nas atividades IIII – 6 ou III – 8, por exemplo.

Nesse mesmo sentido, identificamos uma reorganização e readaptação do contrato didático no tocante à resolução das atividades propostas, tendo em vista que o discurso relativo à importância da realização de testes ou à utilização de um raciocínio genérico foram sendo considerados pelos alunos, como nas situações III – 9 ou III – 14 no caso de Lili ou nas situações III – 4 ou III – 10 no caso de Juca. Registra-se, também, que em algumas atividades, Juca parece ter percebido que quando uma regularidade resiste para alguns testes, ela tende a ser verdadeira. Por vezes, parece ter feito uso dessa ideia para construir sua validação. Foi o caso na atividade III – 5, por exemplo.

Devido à nossa oportunidade de aplicar atividades readaptadas da Fase II, foi possível perceber que nossas institucionalizações não implicaram no reinvestimento explícito daquele conhecimento, ao menos em termos de validações intelectuais, em outras atividades, como ficou claro na primeiras situações da Fase III, cujas situações tinham poucas alterações comparadas à Fase anterior. Dessa forma, nem Juca nem Lili apresentaram provas como aquelas que discutimos na institucionalização de atividades análogas durante a Fase II. Entretanto, consideramos que isso não significa que eles não tenham lembrado, revisitado ou ressignificado as situações trabalhadas, como, por exemplo, quando Juca resgatou uma conversa realizada semanas antes.

Outro elemento a ser destacado após o desenvolvimento das atividades dessa Fase III é o conhecimento matemático dos estudantes, pois na maioria das situações eles não apresentaram dificuldades. Esse aspecto pode ter favorecido, tanto Juca, quanto Lili, em se concentrarem na produção de validações matemáticas.

A inserção de uma atividade ou textos explicativos com o objetivo de explicitar uma validação possível, em que se apresenta uma prova de nível intelectual aos alunos como exemplo, contribuiu para que Lili, que pouco interagia conosco nesse momento, produzisse provas semelhantes. Apesar de importantes, não foi possível garantir que os estudantes ressignificassem ou compreendessem integralmente seu conteúdo, como no caso de Juca, para as mesmas atividades.

Nas produções de Juca, percebemos que o estudante mantém sua escrita principalmente em linguagem natural, e, em geral, acompanhada de verificações empíricas. Por conta das suas respostas nas resoluções das atividades III – 8 ou III – 14, acreditamos que esta ação do aluno ocorre porque provas intelectuais que envolvem raciocínio genérico ainda são, em parte, confusas para ele. Sendo assim, o nível de provas pragmáticas parece lhe causar maior segurança. As produções de Lili indicam que a aluna consegue estabelecer relações mais expressivas com provas intelectuais. Em várias atividades, identificamos o emprego de um raciocínio genérico e, especificamente na atividade III – 15, o reconhecimento da limitação de testes pontuais.

- Quais provas matemáticas foram produzidas pelos alunos?

Sinalizações em laranja, indicam o tipo ou o nível de alguma outra validação que tenha sido apresentada durante a discussão da atividade, que envolveu alguma outra afirmação. Enquanto sinalizações em azul, se referem àquelas que foram produzidas especificamente para a conjectura do enunciado.

Quadro 3 – Provas produzidas por Juca na Fase III

Atividade	Nível pragmático		Nível Intelectual	
	Empirismo Ingênuo	Experiência Crucial	Exemplo Genérico	Experiência Mental
III – 1				
III – 2				
III – 3				
III – 4				
III – 5	Não houve classificação			
III – 6				
III – 7				
III – 8	Não houve classificação			
III – 9				
III – 10				
III – 11				
III – 12	Não houve classificação			
III – 13				
III – 14				

Fonte: Elaborado pelos autores

Quadro 4 – Provas produzidas por Lili na Fase III

Atividade	Nível pragmático		Nível Intelectual	
	Empirismo Ingênuo	Experiência Crucial	Exemplo Genérico	Experiência Mental
III – 1	Não houve classificação			
III – 2	Não houve classificação			
III – 3				
III – 4				
III – 5				
III – 6				
III – 7				
III – 8				
III – 9				
III – 10				
III – 11				
III – 12	Não houve classificação			
III – 13				
III – 14	Não houve classificação			

Fonte: Elaborado pelos autores

Nas produções de Juca, observamos uma maior transição entre os níveis de prova. Aquelas apresentadas por Lili, que foram possíveis de serem classificadas, permaneceram no nível intelectual. A possibilidade de interagirmos em alguns momentos foi importante para que pudéssemos compreender melhor o papel dos exemplos utilizados pela aluna ao longo de suas explicações. Dessa forma, algumas provas foram do tipo experiência mental, em que pareceu haver um desprendimento dos objetos matemáticos que estavam sendo considerados.

A distância e a impossibilidade de interagirmos melhor com ambos os alunos impossibilitou uma compreensão melhor da vivência da situação, fazendo com que, às vezes, não tivéssemos elementos para classificar pontualmente os tipos de prova dentro dos níveis.

- De que forma as atividades desenvolvidas favoreceram ou não a produção de validações?

Nessa Fase III, percebemos a necessidade de inserirmos atividades ainda mais direcionadas e indicar sugestões para minimizar dificuldades apresentadas pelos estudantes que estariam estudando sozinhos, devido às aulas não presenciais. Devido às interações terem ocorrido dessa forma, este aspecto foi ainda mais importante na tentativa de possibilitar que Juca e Lili trabalhassem de forma mais independente possível. Pequenos recados e dicas inseridos em algumas atividades parecem ter contribuído para que eles conseguissem responder a todas as atividades que propusemos, como nas atividades III – 5 ou III – 6.

Em quase todas elas, a conjectura já estava presente no enunciado, fazendo com que os estudantes se concentrassem mais em situações de validação. Na atividade III – 8, cuja conjectura não estava clara e a presença de dicas foi suprimida, nenhum aluno identificou sozinho a regularidade a ser provada.

Em algumas atividades solicitamos aos alunos que identificassem regularidades e que as explicassem. Porém a forma como apresentamos a pergunta, como nas atividades III – 6 ou III – 8 pode ter influenciado na produção dos estudantes, por não termos sido claros em solicitar que explicassem o porquê de ela ocorrer ou não.

Por fim, embora não tenhamos nos direcionado mais amplamente ao estudo de possíveis influências de atividades que envolveram os estatutos da letra, esse aspecto parece importante na medida em que a álgebra se faz presente em parte das validações intelectuais. Conforme indica Freitas (2015, p. 664), “[...] o trabalho com os diversos estatutos da letra e a exploração de diferentes contextos e de articulações, bem como a mobilização adequada de propriedades, a identificação de regularidades e o processo de generalização.” pode levar o aluno a apresentar dificuldades. O que, por sua vez, pode influir na produção de provas no nível anteriormente citado.

Considerações sobre Juca após a vivência de todas as Fases

Juca, muito dedicado, esteve conosco em todos as Fases, especialmente nos dois últimas, sempre muito solícito e disposto a realizar as atividades que propúnhamos. É importante dizer que houve uma convergência de elementos para que isso ocorresse, como, por exemplo, a disponibilidade de recursos tecnológicos e tempo. Em que pese suas produções, o estudante, em geral, se preocupava com a realização de testes, levando em consideração exemplos, sejam aqueles fornecidos por nós ou por ele mesmo identificados. Apesar de termos tido a oportunidade de institucionalizar praticamente todas as atividades junto dele, é difícil dizer como o aluno lidava com a possibilidade de provas intelectuais, uma vez que as validações apresentadas tenderam à prática pragmática. Em outras palavras, ele parece ter mais dificuldades para compreender a limitação de um trabalho com números, com exemplos ou casos particulares.

Ao observarmos algumas atividades realizadas ao longo da Fase III, em nossa Entrevista 2, perguntamos o que Juca tinha a dizer sobre atividades nas quais precisava testar ou buscar por regularidades. Ele respondeu que "*É... É bom porque a gente... Não convence só um exemplo no caso*". E complementou dizendo que: "*às vezes eu testava, aqui eu testei com seiscentos* [Atividade III – 3] *..., Mas às vezes quando eu via que... quando eu via que estava certo eu não testava não! Ah, essa daqui também eu testei.*". Suas falas nos fazem refletir, de um lado, sobre sua consciência acerca da limitação de conclusões que sejam baseadas em apenas um caso e de outro, sobre a dificuldade de se superar a lógica da prática quando as conjecturas discutidas são verdadeiras e se mostram resistentes a sucessivos testes.

Ao ser questionado sobre a escrita em linguagem natural para explicar suas conclusões, característica que tem acompanhado Juca desde o início das atividades desenvolvidas, ele disse que, por vezes, acaba respondendo "*aleatoriamente*", especialmente naquelas que não compreende bem como fazer. Essa resposta nos ajuda a compreender, por exemplo, sua resposta para a questão III – 14, em que utilizou a palavra "confuso". Não podemos deixar de considerar a possibilidade de que Juca perceba que suas validações nem sempre estão de acordo com aquelas que se espera, mas devido ao não domínio do tratamento algébrico, não se dedique às validações intelectuais.

Apesar disso, acredita que "*tem que explicar, eu sempre... Antes eu só escrevia lá, tipo, 'sim' e deixava né. Aí as professoras sempre brigavam pra justificar e não colocar o atacante*[26] *também... Às vezes eu coloco...*".

Diante dessas considerações, o processo de validação matemática desenvolvido por Juca, aluno de uma de nossas turmas de 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Mato Grosso, considerando o ano letivo de 2020, evidencia uma perspectiva pragmática, pois houve predominância de um discurso em linguagem natural, na maioria das vezes, realizado com base em exemplos ou testes.

Considerações sobre Lili após a vivência de todas as Fases

Lili, sempre muito dedicada, esteve conosco em todos as Fases, apesar de nem sempre termos tido a oportunidade de interagir com ela de forma síncrona, especialmente na Fase III, quando as interações foram poucas, apenas quando a aluna sentia necessidade de conversar acerca de suas dúvidas. Restrições estas sobre as quais não tivemos controle. Em relação às suas produções, Lili geralmente apresentava um discurso em linguagem natural, acompanhada de exemplos, buscando atender às exigências do enunciado. Então, segundo fala da aluna em nossa Entrevista 2, "*é mais ou menos, assim... eu leio bastante né aí eu vou procurando formar uma frase que explique bem o que está pedindo na questão*".

Aos poucos, a aluna foi percebendo, por meio de nossas sugestões seja na apostila ou nas oportunidades que tivemos de conversas via WhatsApp, que poderia utilizar um outro tipo de raciocínio para explicar suas respostas. Segundo ela, em nossa Entrevista 2, essa lógica está relacionada ao uso de "*letras*", porque "*para abranger todos os números a gente faz o teste com as letras, que aí também já era uma coisa mais... mais certa né*". Diante dessa fala, perguntamos se ela observava alguma diferença entre as formas de se explicar alguma afirmação em matemática e em outras disciplinas, como a Língua Portuguesa ou História. Ao reiterar que seria diferente porque "*tem que ir usando números e fazendo cálculos*", juntamente da resolução de suas atividades, como também de suas falas, acreditamos que Lili parece ter raciocínios genéricos, bem como, reconhece limitações de uma prova empírica.

[26] Sigla para etc. – entre outras coisas.

Diante dessas considerações, o processo de validação matemática desenvolvido por Lili, aluna de uma de nossas turmas de 9° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Mato Grosso, considerando o ano letivo de 2020, indica que ela transita e consegue estabelecer relações junto às provas de nível intelectual. Suas explicações apresentaram um discurso em linguagem natural, quase sempre acompanhado de exemplos. Aos poucos, esses exemplos foram sendo substituídos pela apresentação de raciocínios mais gerais.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

[...]
Ela lhes dirá bem devagarinho, para que não esqueçam:
— O meu nome é ES-PE-RAN-ÇA...

Poesia Brasileira, Mario Quintana

Com a intenção de desenvolver uma proposta que estivesse relacionada à produção de validações matemáticas e à realidade da sala de aula e que contemplasse os mais diversos conteúdos abordados, durante um período de tempo considerável, estabelecemos o objetivo geral de pesquisa. Dessa maneira, buscamos investigar processos de validação matemática desenvolvidos por dois alunos de uma turma de 9° ano do Ensino Fundamental, no decorrer do ano letivo de 2020. Nossos objetivos específicos foram: identificar como os alunos analisados formularam e apresentaram validações matemáticas para suas afirmações e/ou conjecturas; classificar provas matemáticas que foram produzidas pelos alunos e identificar elementos relacionados às atividades desenvolvidas pelos estudantes, que pudessem favorecer a produção de validações.

Assumimos como referencial teórico o Modelo de Tipologia de Provas de Balacheff (1988), em que desde validações empíricas até aquelas que contemplam aspectos de generalidade podem ser consideradas. Nessa perspectiva, um processo de validação se caracteriza pela ação do aluno na tentativa de garantir ou não a validade de uma conjectura e pode contemplar, por exemplo, registros escritos, falas, desenhos ou e/ou testes. Quando um aluno se envolve em um processo de validação, pode apresentar diferentes tipos de prova – empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e a experiência mental – que por sua vez podem ser pontuados em dois diferentes níveis – nível pragmático e nível intelectual. A conceituação de prova relativa, discutida a partir de Balacheff (1987; 2000; 2019), nos permitiu considerar as produções dos estudantes, contribuindo com nosso primeiro objetivo específico, relacionado aos movimentos dos alunos no sentido de garantir a validade ou não de uma conjectura. De forma ainda mais evidente, possibilitou que classificássemos as validações matemáticas produzidas ao longo de nossa experimentação, que era nosso segundo objetivo específico.

Ainda no que se refere às provas, consideramos diferentes funções que elas poderiam assumir, principalmente quanto à explicação de algumas propriedades, verificação, entendimento, convencimento pessoal e a outrem, descoberta, verificação ou como parte de um desafio intelectual (DE VILLIERS, 2001; ZASLAVSKY et al, 2012). As funções da prova nos ajudaram a pensar nas situações propostas de forma a possibilitar que os estudantes tivessem diferentes experiências com a atividade de provar, que era uma de nossas premissas iniciais.

Em que pese os processos de ensino e de aprendizagem, a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986; 1987; 2008) esteve presente em nossa investigação, subsidiando nossas ações. A Teoria nos ajudou na compreensão do nosso papel, enquanto professores e pesquisadores, mas também do papel do aluno. Conceitos como situação adidática, devolução e contrato didático foram muito importantes para que pudéssemos planejar e tentar colocar em prática ações, conforme os pressupostos que acreditamos. Especialmente devido ao contexto em que aplicamos as atividades planejadas, não foi possível identificar ou discutir com ênfase as fases de ação, formulação e validação. Entretanto, procuramos trabalhar com os alunos em busca de um contrato didático segundo o qual eles pudessem agir de forma mais autônoma, formular, conjecturar, testar, identificar regularidades, entre outras ações.

Nesse mesmo sentido, a identificação de pesquisas que abordaram validações matemáticas foi importante para que pudéssemos discutir e identificar elementos como: dificuldades envolvendo provas matemáticas que permeiam alunos da Educação Básica, licenciandos e professores; possíveis ações a serem desenvolvidas; conteúdos já explorados; exemplos de atividades. Para além disso, essa ação nos permitiu identificar a carência de investigações que explorem validações e temas para além da Geometria, como também, a carência de pesquisas que envolvam diretamente a sala de aula de Matemática, por um período de tempo que ultrapasse um número determinado de sessões. Situando, dessa maneira, alguns de nossos diferenciais frente a elas.

Seguindo ideais da metodologia qualitativa, especialmente do estudo de caso, seguimos entre idas e vindas, estudo, preparações, organizações e reorganizações, ao passo que nossa parte experimental foi desenvolvida principalmente na sala de aula não presencial, em meio às aulas de matemática. A Fase I se deu de forma presencial, quando os alunos cursavam o 8° ano do Ensino Fundamental e as demais Fases (II e III), de forma não presencial, durante o ano letivo de 2020, quando eles já estavam frequentando o 9°.

Em decorrência de restrições ocasionadas pela pandemia do Corona vírus e como parte de nossas ações enquanto professora regente das turmas do ano em questão, foi necessário continuar discutindo com os alunos atividades de validação matemática, mesmo sem saber de antemão quantos ou quais alunos realizariam produções a serem consideradas nesse relatório de tese. Mesmo assim, ao final do processo, tivemos a oportunidade de analisar dados de dois estudantes que foram acompanhados mais de perto por nós desde 2019. Fato esse que contribuiu para discussão de nossos objetivos, tanto específicos quanto geral, dada a oportunidade de olhar mais de perto para o processo que cada um desenvolveu, suas características e suas maneiras de lidar com atividades de validação.

As breves entrevistas realizadas foram importantes para compreender melhor o entendimento dos alunos acerca da ideia de explicar, justificar suas respostas em matemática. Ao serem confrontados com algumas atividades da Fase III, pudemos saber melhor suas ações, como as de Juca, que disse que considera confusas provas que envolvem generalidade ou Lili que afirmou que devido às explicações da professora e escritos da apostila, passou a considerar que cálculos com "letras" seria algo "mais certo".

Devido às restrições impostas pelo momento pandêmico, nossas interações se deram de forma não presencial. Não conseguimos, portanto, explorar atividades em duplas ou grupos, o que poderia ter modificado o processo dos estudantes. Em função disso, não conseguimos acompanhar mais de perto suas resoluções o que implicou em uma dificuldade de observar a devolução ou situações adidáticas. Indícios dessas vivências somente foram possíveis de serem identificados quando houve interação via WhatsApp. Acrescenta-se nossa dificuldade de observar os tipos de prova em certas situações. Questões essas, que são mais bem discutidas na pesquisa de Rosa (2022), na qual o autor buscou compreender como pode/deve ser a estruturação do meio, no sentido da Teoria das Situações Didáticas, no ensino remoto. Corroborando com nossas percepções, pontuou-se na investigação acima citada, que quando as interações com os estudantes ocorreram de forma síncrona, a resolução das atividades parecia ocorrer melhor.

Tendo em vista os registros de suas resoluções, obtidos por meio de fotografias ou pela própria apostila, assim como dos registros de nossas interações, construímos uma análise a partir dos referenciais teóricos adotado. Sendo assim, podemos retornar ao nosso objetivo geral e questão de pesquisa inferindo que os dois alunos têm convergido para direções diferentes em seus processos de validação. Curiosamente, o aluno com o qual pudemos ter mais contato, o observamos permanecer em uma perspectiva pragmática, o que coloca em evidência discussões realizadas no primeiro capítulo, que alertavam para o fato de que, mesmo diante de situações que possam convergir para provas matemáticas intelectuais, parte dessa ação e necessidade diz respeito ao estudante. Aos poucos, eles passaram a incorporar nosso discurso em suas práticas, de maneiras distintas, Juca passou a considerar a possibilidade de testar a validade de conjecturas para diferentes situações, sempre se preocupando com uma explicação em linguagem natural, enquanto Lili passou a considerar generalizações, apresentando explicações com um pequeno discurso, seguido de exemplo ou deduções gerais.

Diante de nossa sequência de atividades, em poucas ocasiões os estudantes manifestaram dificuldades ou equívocos em relação ao conhecimento matemático, o que acreditamos que tenha sido importante para a produção de suas validações, independentemente do nível. Em outras palavras, não se constituiu em um empecilho ou dificuldade para que eles pudessem se concentrar na produção de provas, como gostaríamos.

Registramos, também, que nossa interferência, seja de forma escrita na apostila ou nos diálogos no WhatsApp, em algumas situações resultou na produção de provas de nível intelectual. Em outras, impossibilitou a apresentação de validações, porque respondemos os questionamentos ou direcionarmos demasiadamente a ponto de impedir que os próprios alunos sem envolvessem mais no processo. Diante disso, inferimos que nem sempre conseguimos colocar em prática os pressupostos teóricos, no tocante ao papel do professor. Ao longo de todo o processo, foi preciso uma preocupação, de um lado, em mostrar aos alunos possibilidades de validarem conjecturas, de outro, mudar de posição em relação à produção do saber, para que eles pudessem trabalhar de forma independente. Nesse sentido, relatar nossas ações e, sobretudo, refletir sobre elas fez parte de nosso processo de doutoramento.

Para além disso, destacamos algumas possibilidades para futuras investigações, como, por exemplo, o aprimoramento de situações que coloquem ainda mais em evidência a certeza dos alunos. Em nossas atividades, discutimos conjecturas falsas, o que consideramos que seja importante para que os alunos tenham consciência de que nem todas as afirmações propostas são, de fato, verdadeiras. Mas em geral, elas não resistiram a muitos testes e os alunos – especialmente Juca – rapidamente desistiram de buscar uma validação de nível intelectual nesses casos. Também deixamos a sugestão de que sejam exploradas atividades mais abertas, nas quais a conjectura não esteja evidente e possa ser formulada e validada pelos estudantes. Elementos esses, que não abordamos dado o contexto de produção de dados, no qual a maioria dos alunos precisariam estudar sozinhos sem nenhuma interferência do professor. Ademais, não foi nosso direcionamento analisar relações entre os estatutos da letra – incógnita, número genérico e variável – e a produção de validações, mas indicamos que essa é uma possibilidade na qual outros pesquisadores podem se aprofundar.

Por fim, mesmo tendo realizado nossa pesquisa em meio a um cenário pandêmico, de aulas não presenciais e de (não) interações remotas com os estudantes, buscamos discutir e trabalhar com o que acreditamos e defendemos: situações que coloquem em evidência a certeza da conjectura, que incentivem a verificação, explicação e/ou compreensão do conhecimento matemático em jogo podem ser um caminho para a abordagem de provas de nível intelectual, apesar dos mais diversos temas que venham a ser discutidos.

Dessa maneira, temos que um trabalho em sala de aula que contemple validações matemáticas sempre que possível, independentemente dos conteúdos, pode fazer com que os estudantes, aos poucos, se familiarizem com este tipo de atividade, apresentem justificativas cada vez mais elaboradas, assim como, reconheçam limitações de uma prova empírica. A partir de nossa questão de pesquisa e nossos objetivos, tanto geral quanto específicos, mostramos que esses aspectos são viáveis e que podem ser inseridos e discutidos em sala de aula. Nosso estudo de caso nos permitiu pontuar que ambos os alunos analisados perpassaram processos de aprendizagens diferentes e produziram difersas validações ao longo do ano letivo, as quais contemplaram também diferentes níveis de generalidade. Ao final, eles também sinalizaram a importância da realização de testes e do uso de letras, por exemplo, para se construir uma explicação que contemple todos os casos possíveis.

ESPERANÇA

Lá bem no alto do décimo segundo andar [...]
Vive uma louca chamada Esperança
E ela pensa que quando todas as sirenas
Todas as buzinas
Todos os reco-recos tocarem
Atira-se
E
— ó delicioso vôo!
Ela será encontrada miraculosamente incólume na calçada,
Outra vez criança...
E em torno dela indagará o povo:
— Como é teu nome, meninazinha de olhos verdes?
E ela lhes dirá
(É preciso dizer-lhes tudo de novo!)
Ela lhes dirá bem devagarinho, para que não esqueçam:
— O meu nome é ES-PE-RAN-ÇA...

Poesia Brasileira, Mario Quintana

Ao longo de todo este processo de doutoramento, aquela louca, a ES-PE-RAN-ÇA, por muitas vezes se atirou do alto do décimo segundo andar sem pudor. Não foram poucos os momentos em que as sirenas e as buzinas tocaram, saltando aos olhos um estado caótico das coisas. Quase não foi possível suportar. Por muitas vezes,

Não havia controle.

Não havia paz.

Não havia uma direção.

Mas havia a ES-PE-RAN-ÇA.

Sempre que renascia, em seus olhos verdes se podia ver o reflexo de todas as pessoas que no caminho junto estavam. Fica aqui o registro, ES-PE-RAN-ÇA, de que você também é verbo. Então,

É preciso ter esperança, mas ter esperança do verbo esperançar; porque tem gente que tem esperança do verbo esperar. E esperança

> do verbo esperar não é esperança, é espera. Esperançar é se levantar, esperançar é ir atrás, esperançar é construir, esperançar é não desistir! Esperançar é levar adiante, esperançar é juntar-se com outros para fazer de outro modo...” (PAULO FREIRE)

Esta tese é para nós, processo E construí-la foi um constante ESPERANÇAR.

FIM PROVISÓRIO.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** 2 ed. Curitiba, UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A.; MELLO, E. G. S. **Iniciação à demonstração**: aprendendo conceitos geométricos. In: REUNIÃO ANUAL DE ANPED, 24: Caxambu, 2000.

AGUILAR, C. A.; NASSER, L. **Estudo sobre a Visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola**. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 28, p. 1012-1031, 2014.

ARAÚJO, I. B. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e cabri-géomètre**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M.C; (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

BALACHEFF, N. **Processus de preuveet situations de validation. in educational studies in mathematics**, nº18, 1987, pp.147-176.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en Mathématiquechez les élèves de collège**. Tese de Doutorado. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

BALACHEFF, N. **Es la argumentación un obstáculo?** Invitación a um debate. In: International Newletter on the teaching and learning of mathematical proof. Laboratoire Leibniz: Grenoble, mai-juin 1999.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas** (Trad. Pedro Gómez). Bogotá, Colombia: Universidad de los Andes, 2000.

BALACHEFF, N. The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. **Les cahiers du laboratoire Leibiniz.** N. 109. Agosto. 2004. Documento não paginado.

BALACHEFF N. Bridging knowing and proving in mathematics An essay from a didactical perspective. In: HANNA G., JAHNKE H. N., PULTE H. (eds.) **Explanation and Proof in Mathematics** (pp. 115-135). Heidelberg: Springer, 2010.

BALACHEFF N. **Contrôle, preuve et démonstration**. Trois régimes de la validation. In: Pilet J., Vendeira C. (eds.) Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2018 (pp.423-456). Paris: ARDM et IREM de Pris - Université de Pari Diderot, 2019.

BESSOT, A. Importance de la notion de situation en Didactique des Mathématiques. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 15, 20 dez. 2014.

BIANCHINI, B.L.; MACHADO, S.D.A. A dialética entre pensamento e simbolismo algébricos. **Educação Matemática em Pesquisa.** São Paulo, v.12, n.2, pp. 354-368, 2010.

BOAVIDA, A. M. **Um olhar sobre o ensino da demonstração em Matemática**. Lisboa: Revista Educação e Matemática, 2001, n. 63, p. 11-15.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. Dados Qualitativos. In BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação - uma introdução à teorias e aos métodos.** Porto: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, 5ª a 8ª Séries. Brasília, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio** (PCNEM): Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2000.

BRASIL, **PCN+ ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Semtec, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular.** Brasília, DF, 2018.

BOERO, P. **Argumentation and mathematical proof**: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the teaching and learning of mathematical proof. Julho/Agosto.1999. Documento não paginado, 1999.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BORBA, M.de C. A Pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: 27ª Reunião Anual da ANPED. **Anais**. Caxambu, MG, 2004.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de ladidactique dês mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques**. v. 7. n. 2. 1986.

BROUSSEAU, G. **La théorie des situations didactiques** Le cours de Montréal 1997. Disponível em <http://math.unipa.it/~grim/brousseau_montreal_03.pdf> Acesso em 02 de jul. 2021.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARVALHO, C. C. S. **O design de um ambiente digital e suas contribuições para a formulação de conjecturas e provas na educação básica.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2014.

D’AMBROSIO, U. Prefácio. In: **Pesquisa qualitativa em Educação Matemática.** BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (org). Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

D’AMORE, B. **Elementos de didática da Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2007

DE VILLIERS, M. D. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad**. Educação e Matemática**, n 62, p. 31-36, 2001.

DIAS, M.S. **Um estudo da demonstração no contexto da licenciatura em Matemática:** uma articulação entre os tipos de prova e os níveis de raciocínio geométrico. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009

DUARTE, V. F. **Um estudo sobre propriedades do paralelogramo envolvendo o processo de argumentação e prova.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

DUVAL, R. Cognitive functioning and the understanding of mathematical process of proof. In: P. Boero (Ed.). **Theorems in schools: from history, epistemology and cognition to classroom practice**. Rotterdam/Taipei: Sense Publishers. 2006. p. 137-161.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2016.

FREITAS, J. L. M. de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2012. p. 77-111.

FREITAS, J. L. M. **Reflexões e questionamentos sobre pesquisa em educação algébrica.** Educação Matemática e Pesquisa, PUC-São Paulo, v.17, n.3, pp.655-665- III Fórum de Discussão: Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática no Brasil, 2015.

GARNICA, A. V. M. As demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **BOLEMA** – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro: Unesp. n.18, p. 91- 99, 2002.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a Prova Matemática:** um olhar sobre o desenvolvimento professional. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

GUERATO, E. T. **Um estudo sobre a demonstração em geometria plana com alunos do curso licenciatura em matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2016.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in mathematics**, n. 44, p. 5-23, 2000.

HAREL, G. SOWDER, L. Types of Students’ Justifications. **The Mathematics Teacher**, 91, 670–675, Estados Unidos. 1998.

HAREL, G.; SOWDER, L. **Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof**. In: LESTER, F. (Ed.). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Charlotte: Ed. Information Age Publishing, 2007. p. 805-842

HEALY, L.; HOYLES, C. A study of proof conceptions in algebra. **Journal for research in Mathematics Education.** 31. P. 396-428, 2000.

KRAKECKER, L. **Produção de Conjecturas e Provas de propriedades de ângulos de polígonos**: um estudo com alunos do 8° ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

LEANDRO, E. J. **Um panorama de argumentação de alunos da educação básica:** o caso do fatorial. 2006. Dissertação (Mestrado professional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

LEANDRO, E. J. **Saberes mobilizados por professores quando o foco são as provas matemáticas:** um estudo de caso. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2012.

LIMA, M. L. S. **Sobre pensamento geométrico, provas e demonstrações matemáticas de alunos do 2° ano do Ensino médio nos ambientes lápis e papel e geogebra.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

LÜDKE, M. ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARGOLINAS, C. **Points de vues de l´élève et du professeur:** essai de développement de la théorie des situations didactiques. Provence: Université de Provence. 160f. 2004.

MANZINI, E. J**. A entrevista na pesquisa social. Didática**, São Paulo, v. 26/27, p. 149-158, 1991.

MATEUS, M. E. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na educação básica.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015.

MATO GROSSO (Estado). Secretaria Adjunta de Gestão Educacional. **Documento De Referência Curricular Para Mato Grosso.** Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Mato Grosso: Secretaria de Estado de Educação, 2018a.

MATO GROSSO (Estado). Secretaria Adjunta de Gestão Educacional. **Documento De Referência Curricular Para Mato Grosso.** Anos Finais do Ensino Fundamental. Mato Grosso: Secretaria de Estado de Educação, 2018b.

MATO GROSSO (Estado). Secretaria Adjunta de Gestão Educacional. **Documento de referência curricular para Mato Grosso:** etapa Ensino Médio. 2ª versão preliminar. Mato Grosso: Secretaria de Estado de Educação, 2021.

MELLO, E. G. S. **Uma sequência didática para a introdução do seu aprendizado no ensino da geometria.** Dissertação de Mestrado, Universidade Pontifícia Católica de São Paulo, Mestrado em Educação Matemática, São Paulo, 1999.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: Licenciatura e prática docente**. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

NASSER, L. TINOCO, L. A. **Argumentação e prova no ensino da matemática**. Instituto de Matemática (Projeto Fundão), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

NUNES, J. M. V. **A prática da argumentação como método de ensino:** O caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2011.

OLIVEIRA, S. G. da S. **Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis de triângulo**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, 2009.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana:** concepções de estudantes da licenciatura em Ensino de matemática em Moçambique. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2015.

PAIAS, A. M. **Diagnósticos dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos do Ensino Fundamental e Médio**. Dissertação de Mestrado, Universidade Pontifícia Católica de São Paulo, Mestrado em Educação Matemática, São Paulo, 2009;

PAIAS, A. M. **Investigação dos obstáculos didáticos e epistemológicos no ensino e aprendizagem de um objeto.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2019.

PEDEMONTE, B. Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. **The International Newsletter on the teaching and learning of Mathematical proof**. 2000.

PICCELLI, P. H. **Processos de validação de conjecturas em geometria plana.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

PONTE, J.P; BROCARDO, J. OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J.P. **Estudos de caso em educação matemática**. Bolema, 25, 105-132, 2006.

REID, D. **The need to prove**. Unpublished doctoral dissertation, University of Alberta, department of Secondary Education. Tese de doutorado. 1995.

ROSA, M. L. **Uma engenharia didática para os números inteiros relativos:** do ensino presencial ao ensino remoto. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2022.

SALES, A. **Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de licenciatura em matemática.** Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Doutorado em Educação, Campo Grande, 2010.

SALES, A. PAIS, L. C. A Argumentação Nas Atividades De Geometria Desenvolvidas Por Acadêmicos De Um Curso de Licenciatura Em Matemática. **Revista da Faculdade de Educação**. Ano VIII nº 13 (Jan./Jun. 2010). 2010.

SANTOS, M. C. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do ensino médio:** realidades e necessidades. Dissertação (Mestrado professional em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A. (org.). In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2012. p. 49-75.

SOUZA, M. E. C. de O. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar:** o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. Dissertação de Mestrado, Universidade Pontifícia Católica de São Paulo, Mestrado em Educação Matemática, São Paulo, 2009.

ZASLAVSKY, O.; NICKERSON, S. D.; STYLIANIDES, A. J.; KIDRON, I.; WINICKI-LANDMAN, G. The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. In: **Proof and proving in mathematics education**. HANNA M. DE VILLIERS. New York: Springer, 2012.

YIN, R. K. **Estudo de caso – planejamento e métodos**. (2Ed.). Porto Alegre: Bookman. 2001.

APÊNCICE A

Texto inserido na apostila, referente a uma prova intelectual possível para a atividade dada, com relação ao tema geral “equações polinomiais do 2° grau”:

....

Conhecimentos algébricos podem ser utilizados em diversas situações! Eles podem ser úteis, por exemplo, para **provar** (garantir que realmente é verdade) uma determinada afirmação. Veja só um exemplo:

Veja só o que Laura descobriu brincando com os números 6 e 3:

$$\begin{aligned} 6^2 - 3^2 &= (6 + 3) . (6 - 3) \\ 36 - 9 &= 9 \quad . \quad 3 \\ 27 &= 27 \end{aligned}$$

Será que isso sempre irá funcionar? O que você acha? ______________________________

Júlio estava bastante desconfiado e resolveu testar com os números 8 e 4:

$$\begin{aligned} 8^2 - 4^2 &= (8 + 4) . (8 - 4) \\ 64 - 16 &= 12 \quad . \quad 4 \\ 48 &= 48 \end{aligned}$$

Um outro colega, o Matheus, ainda não se convenceu e resolveu testar para números bem altos: 150 e 75. O que você acha? O resultado também será igual? ____________________
____

$$150^2 - 75^2 = (150 + 75) . (150 – 75)$$

Nessa situação, sempre que alguém escolhe dois números para testar, poderíamos perguntar:

Mas como você pode ter certeza?

Será que funciona para números muito altos, como 10257 e 8659?

Será que funciona se escolhermos números decimais ou frações?

A questão é: Como podemos provar que o que Laura descobriu realmente vale para todos os casos possíveis?

Uma forma possível é a seguinte: substituímos os números por letras, para representar generalidade (contemplando todos os números possíveis – altos, frações, negativos, entre outros).

Na conta de Laura, substituindo 6 por x e 3 por y, temos:

$$6^2 - 3^2 = (6 + 3) . (6 – 3)$$

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (x + y) . (x – y) \\ x^2 - y^2 &= x^2 \underline{- xy + xy} - y^2 \\ x^2 - y^2 &= x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Após a realização de alguns cálculos, podemos observar que a igualdade é verdadeira, independentemente dos números escolhidos.

APÊNCICE B

Texto inserido na apostila, referente a uma prova intelectual possível para a propriedade fundamental das proporções, em relação ao tema geral "equações polinomiais do 2° grau":

....

Mas o que garante que essa propriedade é realmente verdadeira? Se for, por que ela é verdadeira?

Esses questionamentos são muito importantes, pois é fundamental compreender e investigar porque as propriedades, as "regrinhas" e até mesmo as fórmulas são verdadeiras. É verdade que as vezes a explicação pode ser um pouco complicada, mas ela sempre existe!

Por exemplo, no caso da propriedade fundamental das proporções, poderíamos pensar da seguinte forma:

Digamos que as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ formem uma proporção (a, b, c e d podem ser quaisquer números, com a restrição de que b e d sejam diferentes de zero).

Então, elas teriam resultados iguais da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Multiplicando estrategicamente ambos os membros da equação por b e d, teríamos:

$$b.d.\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.b.d$$

Como todo número dividido por ele mesmo resulta 1, poderíamos simplificar:

$$\cancel{b}.d.\frac{a}{\cancel{b}} = \frac{c}{\cancel{d}}.b.\cancel{d}$$

Restando

$$d.a = c.b$$

Para finalizar, sabemos que a ordem dos fatores não altera o resultado de uma multiplicação, então:

$$a.d = c.b$$

CONCLUSÃO

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \rightarrow \quad a.d = c.b}$$

APÊNCICE C

Apresentamos nesse apêndice o quantitativo de pesquisas encontradas conforme critérios mencionados no capítulo 3 e o respectivo Programa de Pós-Graduação.

(3) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação matemática – Universidade Estadual de Londrina. Disponível em: http://www.uel.br/pos/mecem/index.htm

(5) Mestrado Profissional em Ensino de Matemática – Universidade de São Paulo. Disponível em: https://www.ime.usp.br/pos-mpem/

(0) Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática – Universidade Federal de Goiás. Disponível em: https://ppgecm.prpg.ufg.br/

(0) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – Universidade Federal de Outo Preto. Disponível em: https://ppgedmat.ufop.br/

(0) Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica – Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: https://ppgect.ufsc.br/

(5) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/index.html

(6) Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Disponível em: https://ppgedumat.ufms.br/

(0) Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemática / Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas

Universidade Federal do Pará. Disponíveis em:
http://ppgdoc.propesp.ufpa.br/index.php/br/ e
http://ppgecm.propesp.ufpa.br/index.php/br/

(2) Programa de Doutorado em Educação em Ciências e Matemática - Instituições de Ensino Superior da Amazônia Legal Brasileira, intitulada Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática. Disponível em:
https://www1.ufmt.br/ufmt/unidade/index.php?l=PPGECEM

(0) Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Disponível em:
https://www5.unioeste.br/portalunioeste/pos/ppgecem

(4) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Anhanguera de São Paulo. Disponível em: https://www.pgsskroton.com.br/unian/cursos-unian/educacao-matematica/

(0) Mestrado Profissional em Educação Matemática. Universidade Federal de Juiz de Fora. Disponível em: https://www2.ufjf.br/mestradoedumat/

(0) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Federal de Pelotas. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/ppgemat/

(0) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Federal de Rondônia. Disponível em: http://www.ppgem.unir.br/homepage

(0) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual do Paraná. Disponível em: http://prpgem.unespar.edu.br/

(0) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física. Universidade Federal de Santa Maria. Disponível em: https://www.ufsm.br/cursos/pos-graduacao/santa-maria/ppgemef/

(5) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual da Paraíba. Disponível em: http://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/

(0) Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Disponível em: https://www2.uepg.br/ppgecem/

(2) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Disponível em: https://igce.rc.unesp.br/#!/pos-graduacao/programas-de-pos/educacao-matematica/pagina-inicial/

(0) Programa De Pós-Graduação em Ensino De Ciências e Educação Matemática. Universidade Federal de Lavras. Disponível em: https://sigaa.ufla.br/sigaa/public/programa/portal.jsf?lc=pt_BR&id=2596

(40) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica - São Paulo. Disponível em: https://www.pucsp.br/pos-graduacao/mestrado-e-doutorado/educacao-matematica#breve_apresentacao

* Endereços consultados pela última vez em 27 de março de 2021.

* Resultados considerando a busca pelas palavras: “prova” “demonstração(ões)” “conjectura” “argumentação(ões)” “validação(ões)” no título de teses e dissertações.