UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL – UFMS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA – INMA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – PPGEduMat

DIOGO FERREIRA JANDREY

A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES NA COLEÇÃO "MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS" DE RUY MADSEN BARBOSA (1966)

CAMPO GRANDE – MS
2022

DIOGO FERREIRA JANDREY

A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES NA COLEÇÃO "MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS" DE RUY MADSEN BARBOSA (1966)

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Edilene Simões Costa dos Santos.

CAMPO GRANDE – MS

2022

DIOGO FERREIRA JANDREY

A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES NA COLEÇÃO "MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS" DE RUY MADSEN BARBOSA (1966)

Dissertação apresentada como requisito final para a obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Orientadora: Profª. Drª. Edilene Simões Costa dos Santos
Instituto de Matemática, UFMS. Membro Interno.

Profª Drª. Késia Caroline Ramires Neves
Universidade Federal da Grande Dourados, UFGD. Membro Interno

Profª. Drª. Denise Medina França
Universidade Estadual do Rio de Janeiro, UERJ. Membro Externo.

Campo Grande/ MS, 18 de fevereiro de 2022

Dedico este trabalho a Deus, que jamais desistiu de mim, me deu todo o suporte, o amor, a confiança e a capacidade de seguir firme na minha caminhada.

AGRADECIMENTOS

Inicio meus agradecimentos à Deus por conceder-me o dom da vida, a força de vontade de aprender cada dia mais e por me sustentar durante esta caminhada.

Agradeço também aos meus pais (Ademir e Cecilia) pela educação dada, pelas broncas, por ouvirem meus choros e por sempre me incentivarem a buscar meus sonhos, uma caminhada iniciada na Educação Básica passando pela Graduação e agora na Pós-Graduação, o meu muito obrigado a vocês.

Estar no mestrado só foi possível graças a dois anjos que Deus colocou em minha vida, André e Benedita (Dona B), que me deram o suporte para que esse dia chegasse, não tenho como agradecer o que fizeram por mim, peço a Deus que abençoe muito a vossa vida. Obrigado!!!

Quero agradecer também aos meus amigos, meus parentes que estiveram sempre presentes neste momento, deixei muitas vezes vocês de lado, mas foi por um bom motivo, espero que me entendam, obrigado pela compreensão.

Venho agradecer a todos os meus companheiros de turma pelas discussões em sala de aula, o Grupo de Pesquisa em História e Educação Matemática - Compasso MS, cordiais em me receber, discutir, auxiliar na compreensão dos textos, discutir pontos desta dissertação, o meu muito obrigado. Em especial quero agradecer ao Grupo Supera (Lúdier, Lucia e Jocelei) que tornaram esta caminhada mais leve, obrigado pelas conversas, por ouvir minhas reclamações, minhas inquietações, meus anseios, muito obrigado amigos.

Quero agradecer imensamente à Profª. Drª. Edilene Simões Costa dos Santos, não sei nem como começar a descrever o meu sentimento agora, a senhora com toda certeza, foi a pessoa mais importante nesse processo, nos momentos difíceis a senhora estava lá do meu lado, sempre me incentivando a aprender a cada dia mais. Lembro-me que nunca gostei de história, quando entrei no mestrado e descobri que seria na linha de História da Educação Matemática, eu quis desistir, mas com o passar dos dias, dos meses a senhora me ensinou a gostar da História, hoje não me arrependo de nada, muito obrigado por me escolher lá no processo seletivo. Muito obrigado!!!

Gostaria de agradecer à banca, em nome das Professora Doutoras Denise Medina França e Késia Caroline Ramires, por todas as contribuições, discussões e leitura minuciosa desta dissertação, que auxiliaram no meu crescimento enquanto pesquisador. Muito Obrigado!!!

Gostaria de agradecer ao Grupo de História Oral e Educação Matemática (GHOEM), em nome do Professor Doutor Vicente Marafioti Garnica, por ceder trabalhos sobre Ruy Madsen Barbosa, que auxiliaram na construção da bibliografia profissional do professor em estudo. Muito Obrigado!!!

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat), por contribuir na construção deste pesquisador, pelas discussões realizadas nos seminários, eventos e reuniões.

Gostaria de agradecer à Fundação de Apoio ao Desenvolvimento do Ensino, Ciências e Tecnologia do Estado do Mato Grosso do Sul (FUNDECT), por financiar esta pesquisa. Que este programa tenha uma longa caminhada, que forme novos pesquisadores para auxiliar o crescimento do nosso Estado.

“Professor sou há anos,

Mestre pretendo ser!”

(BARBOSA, 1966a, p. 8)

JANDREY, Diogo Ferreira. **A MATEMÁTICA DO ENSINO DE FRAÇÕES NA COLEÇÃO "MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS" DE RUY MADSEN BARBOSA (1966)**. 2022. 155f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Matemática (INMA) – Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS).

RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo identificar elementos da *matemática do ensino* de frações na coleção de manuais "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" de Ruy Madsen Barbosa publicadas no ano de 1966. Delimitamos um período para este estudo, a saber: 1960 a 1970. Esta demarcação se deve pela criação da Leis de Diretrizes e Bases da Educação de 1961 e um ano anterior à unificação do ensino primário em ensino de 1º grau pela Lei Nº. 5.692 de 1971, ambos considerados marcos importantes da história da educação brasileira. Os estudos foram conduzidos pelos seguintes questionamentos: Que orientações foram veiculadas, na coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" de Ruy Madsen Barbosa (1966), relativos ao ensino de frações? O referencial teórico-metodológico está embasado na perspectiva sócio-histórica, considerando elementos como: História da Educação Matemática (COSTA, 2017); *saber a ensinar* e *saber para ensinar* (HOFSTETTER e SCHNEUWLY, 2017); *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar* (VALENTE, 2017); e *matemática do ensino* (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2020). A coleta de fontes foi realizada no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina na página do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática (Ghemat/Brasil). Após uma assepsia das fontes encontradas, selecionamos a coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", publicada no ano de 1966, por Ruy Madsen Barbosa, contendo três manuais destinados à formação de professores. Foram consideradas como categorias de análise: *saber a ensinar*, *saber para ensinar*, *sequência*, *graduação*, *significado*, *dispositivos didáticos* e *exercícios e problemas*. A partir dos estudos realizados, é possível inferir que, nos livros analisados, o ensino de frações parte do concreto para o abstrato, utilizando materiais manipuláveis; os números fracionários eram apresentados anterior ao conteúdo de números decimais; os manuais apresentam uma linguagem matemática bem definida, no sentido de uma linguagem utilizando símbolos, definições, etc., utilizando a teoria dos conjuntos; ênfase nas frações equivalentes para o ensino das operações; os exercícios e problemas com características de repetição, entre outros pontos que discutimos durante a elaboração desta dissertação.

Palavras-chave: Matemática do Ensino. Ensino de Frações. Ruy Madsen Barbosa. Movimento da Matemática Moderna.

ABSTRACT

This dissertation aims to identify elements of the mathematics of fractions teaching in the collection of textbooks "Mathematics, Methodology and Complements for Primary Teachers" by Ruy Madsen Barbosa published in 1966. We delimited a period for this study, namely 1960 to 1970. This demarcation is due to the creation of the Law of Directives and Bases of Education of 1961 and a year before the unification of primary education in 1st grade by Law Nº. 5.692 of 1971, both considered important milestones in the history of Brazilian education. The studies were guided by the following questions: What guidelines were conveyed, in the collection "Mathematics, Methodology and Complements for primary teachers" by Ruy Madsen Barbosa (1966), concerning the teaching of fractions? The theoretical and methodological framework is based on the socio-historical perspective, considering elements such as: History of Mathematics Education (COSTA, 2017); knowledge to teach and knowledge to teach (HOFSTETTER and SCHNEUWLY, 2017); mathematics to teach and mathematics to teach (VALENTE, 2017); and teaching mathematics (MORAIS; BERTINI; VALENTE, 2020). The collection of sources was carried out in the Institutional Repository of the Federal University of Santa Catarina on the page of the Research Group in History of Mathematics Education (Ghemat/Brazil). After asepsis of the sources found, we selected the collection "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", published in 1966, by Ruy Madsen Barbosa, containing three manuals for teacher's training. We considered as categories of analysis: knowing how to teach, knowing how to teach, sequence, grading, meaning, didactic devices, and exercises and problems. From the studies carried out, it is possible to infer that, in the analyzed textbooks, the teaching of fractions starts from the concrete to the abstract, using manipulative materials; the fractional numbers were presented before the content of decimal numbers; the textbooks present a well-defined mathematical language, in the sense of a language using symbols, definitions, etc., using set theory; emphasis on equivalent fractions for the teaching of operations; the exercises and problems with repetition characteristics, among other points that we discussed during the preparation of this dissertation.

Keywords: Teaching Mathematics. Teaching Fractions. Ruy Madsen Barbosa. Modern Mathematics Movement.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE SIGLAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

Capes – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

CECIMIG - Centro de Ensino de Minas Gerais.

CIHEM – Congresso Iberoamericano em Educação Matemática.

Compasso MS – Grupo de Pesquisa em História e Educação Matemática

CPOR – Curso Preparatório de Oficiais da Reserva

ENAPHEM – Encontro Nacional de Pesquisa em Educação Matemática.

ERHISE - Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação, Universidade de Genebra, Suíça.

FFCL – Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras

GEEM – Grupo de Estudos do Ensino de Matemática.

Ghemat/Brasil – Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática no Brasil.

GHOEM – Grupo de História Oral e Educação Matemática

GRUEMA – Grupo de Ensino de Matemática Atualizada.

GT – Grupo de Trabalho.

HDB – Hemeroteca Digital Brasileira

HEM – História da Educação Matemática.

HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática

LDB – Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

m.d.c. – Máximo Divisor Comum.

m.m.c. – Mínimo Múltiplo Comum.

MMM – Movimento da Matemática Moderna.

PPGEduMat – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática.

SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

UERJ – Universidade Estadual do Rio de Janeiro.

UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Ao ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), não compreendia que a História da Matemática é um campo e a História da Educação Matemática é outro. Após a designação dos orientadores, surgiu a possibilidade de entender um pouco sobre a História da Educação Matemática, que vem se consolidando como campo profissional e de pesquisa. A linha de pesquisa em História, Filosofia e Educação Matemática proporcionou-me entender que a história é importante para a formação de professores, buscando elementos que podem nos ajudar a compreender as características do ensino da matemática atualmente.

Com o início do mestrado, uma janela de oportunidade se abriu e aumentou o anseio de buscar o conhecimento da História da Educação Matemática, uma história que às vezes é deixada de lado, na formação do professor e na escola, devido ao tempo de aula, dos conteúdos obrigatórios e por inúmeros projetos realizados pela escola, e quando era ensinada nos dava a entender que a matemática é algo que já veio pronta para ser ministrada e a prática de outros tempos podem ajudar na compreensão de alguns conteúdos.

Ao deparar-me com o assunto no Grupo de Pesquisa em História e Educação Matemática (Compasso – MS), do qual faço parte, causou-me um receio de não saber refletir a Educação Matemática em perspectiva histórica, a partir de debates e reuniões com a minha orientadora este receio foi diminuindo e surgiu uma nova expectativa, a de conhecer mais sobre a História da Educação Matemática.

O tema que proponho a pesquisar na dissertação é motivada por um projeto de pesquisa amplo que está sendo desenvolvido no PPGEduMat da UFMS, pelo grupo de pesquisa Compasso MS, em conjunto com a Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ).

Tal projeto é intitulado "UMA CARACTERIZAÇÃO DA MATEMÁTICA A E PARA ENSINAR FRAÇÕES EM DIFERENTES VAGAS PEDAGÓGICAS", desenvolvido pelas professoras doutoras, Edilene Simões Costa dos Santos – UFMS, Denise Medina França – UERJ e Késia Caroline Ramires Neves – UFGD.

Este projeto visa compreender o movimento de sistematização e transformação dos saberes a ensinar e para ensinar frações em diferentes vagas pedagógicas[1], como a pedagogia moderna, a escola nova e a matemática moderna.

Estabelecemos que minha pesquisa está inserida na vaga pedagógica da Matemática Moderna. Essa vaga pedagógica foi um movimento mundial de reformulação do currículo de matemática, iniciado a partir da II Guerra Mundial, o marco para as discussões desta reformulação foi o lançamento do foguete Sputnik. O foco dessas discussões era o avanço tecnológico, o qual buscavam aprimorar os conhecimentos sobre as tecnologias e a formação de técnicos.

Esse movimento envolveu grandes potências mundiais como os Estados Unidos e países da Europa, buscando aprimorar ensino/currículo para dominar as tecnologias. A matemática passou por essa reformulação, a partir de discussões, seminários, conferências, criação de grupos para discutir sobre a reformulação do currículo.

As discussões sobre o currículo de matemática englobavam diversos estudiosos, a saber: matemáticos, professores de matemática, psicólogos, lógicos, etc. Essa reformulação do currículo de matemática tornou-se um movimento de cunho internacional.

Segundo Búrigo (1989), a origem da expressão "Matemática Moderna" referia-se a uma evolução interna da disciplina, mas com sentidos variados, um deles era de atualizar o ensino para se adequar às exigências de uma sociedade em progresso técnico. Essa nova matemática se referia a um significado de eficaz, de boa qualidade, sendo o oposto da matemática tradicional, no sentido de trazer as estruturas algébricas desde os primeiros anos do ensino primário.

Este significado era visto com bons olhos pela sociedade que estava vivendo o progresso técnico. Ainda de acordo com essa pesquisadora, a reformulação do ensino em tal movimento foi pautada em duas justificativas, a primeira é a necessidade, em que tinha como ponto de vista o crescimento da economia, a qualificação e um aumento no número de cientistas e técnicos; a segunda justificativa utilizada era basicamente a capacitação para o trabalho.

[1] "Admitimos o emprego da expressão vaga pedagógica como sinônimo de movimento, de fluxo, de transformação de um dado tempo por meio da propagação e ampla aceitação de doutrinas, ideais, filosofias pedagógicas, estas que são analisadas, sobretudo, pelos historiadores da educação resultando no estabelecimento de marcos cronológicos que identificam a prevalência da divulgação destes movimentos, carregados do espírito de transformação." (GHEMAT-BRASIL, 2016, p. 18-19)

As discussões sobre o Movimento da Matemática Moderna (MMM) no Brasil, iniciaram a partir de 1960, onde se encontrava uma sociedade que estava com a economia desacelerada, a política em instabilidade e com fortes movimentos populares, este era o cenário que a Matemática Moderna estava sendo inserida.

A partir deste breve panorama do MMM, decidimos sobre o que estudar nesta vaga pedagógica, como o projeto desenvolvido pela minha orientadora em parceria com as professoras citadas anteriormente, decidimos por estudar os *saberes a ensinar* e *para ensinar* frações no ensino primário deste período.

O estudo dos saberes advém de discussões entre o Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática – Brasil (Ghemat/Brasil) em parceria com a Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação (ERHISE) da Universidade de Genebra, na Suíça, que tratam dos saberes do ensino e da formação do professor.

Os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*, o primeiro ligado ao objeto de trabalho do professor e o segundo ligado as ferramentas do trabalho do professor. A partir das discussões entre os dois grupos citados acima, o Ghemat/Brasil vem incorporando esses saberes para a realidade dos estudos sobre a matemática, ou seja, os *saberes a ensinar matemática* (objeto de trabalho do professor que ensina matemática) e os *saberes para ensinar matemática* (ferramenta do trabalho do professor que ensina matemática), esses dois saberes são indissociáveis e constituem a expertise do professor que ensina matemática.

O ensino de frações foi selecionado para esta dissertação, por ser uma temática pesquisada pelo Ghemat/Brasil nos últimos anos, por ser um assunto matemático que integra o projeto guarda-chuva de minha orientadora e pela buscar de compor um rol de trabalhos que estudam frações, buscando compreender como os números racionais foram ensinados no MMM.

Assim elaboramos uma questão que norteou a pesquisa, sendo esta: **Que orientações foram veiculadas, na coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" de Ruy Madsen Barbosa (1966), relativos ao ensino de frações?**

A partir deste questionamento buscamos identificar orientações para o ensino de frações que Ruy Madsen Barbosa sistematizou em sua coleção, partindo do ponto que esta coleção de manuais[2] foi destinada a professores do ensino primário em formação, segundo o próprio autor.

[2] livros, compêndios, ou ainda um conjunto de textos reunidos, geralmente organizados por um autor, um grupo de pessoas ou uma instituição, como por exemplo, editora, escola ou instituto. Possui o objetivo de orientar

Para ajudar a responder à indagação acima apresentamos o objetivo geral: Identificar elementos da *matemática do ensino* de frações presentes nos manuais “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” de Ruy Madsen Barbosa.

Este objetivo busca identificar as articulações entre os *saberes a ensinar matemática* e os *saberes para ensinar matemática*, resultando assim na *matemática do ensino*. No caso desta pesquisa, a *matemática do ensino* de frações presentes nos manuais de Ruy Madsen Barbosa (1966), destinados aos professores que ensinam matemática no ensino primário em formação a partir do ideário do MMM.

Para alcançar esse objetivo geral lançamos dois objetivos específicos, a saber:

- Identificar os *saberes a ensinar* fração nos manuais da coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários”.

Com este objetivo buscamos verificar como Ruy Madsen Barbosa, a partir das experiências sistematizadas em seus manuais, sugere o que deve ser ensinado sobre fração; o que o professor em formação deve saber para ensinar frações; como foi abordado o ideário do MMM, entre outros pontos que podem surgir durante o percurso da análise e escrita desta dissertação.

- Identificar os saberes para ensinar fração nos manuais da coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários”.

Neste objetivo temos o intuito de verificar quais foram os saberes que Ruy Madsen Barbosa sugere para se ensinar frações no ensino primários; quais as ferramentas o autor sugere para o professor ensinar frações.

Após a identificação destes dois saberes nos manuais da coleção citada, é possível verificar se houve articulação entre esses saberes e assim inferir a presença da *matemática do ensino* de frações nos manuais da coleção de Ruy Madsen Barbosa.

Após delimitar a vaga pedagógica escolhida, o nível de ensino, o conteúdo matemático, a questão de pesquisa e os objetivos, cabe-nos mencionar ainda que esta dissertação se embasou em uma pesquisa qualitativa de perspectiva socio- histórica, que realiza uma “associação sobre um terreno de estudo histórico, conceituação sociológica e mobilização de um corpus de fontes constituídas no e pelo questionamento do objeto de estudo”’ (BORER, 2017, p. 174).

---

e mediar a prática ou o ofício de ensinar em torno de um saber ou conjunto de saberes, como é o caso dos saberes elementares matemáticos (a aritmética, a geometria, o desenho e a álgebra). (GHEMAT, 2016, p. 12)

Passamos a descrever a organização desta dissertação. Ela está dividida em cinco capítulos, o qual descreveremos a seguir.

O capítulo 1 foi destinado à base teórica-metodológica, o qual nos auxiliou na discussão e análise dos manuais selecionados, para integrar este capítulo utilizamos as concepções do que é História da Educação Matemática, os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*, a *objetivação dos saberes*, *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, a *matemática do ensino* e as categorias de análises (*graduação*, *significado, sequência*, *dispositivos didáticos e exercícios e problemas*).

No capítulo 2 realizamos um levantamento chamado estado do conhecimento, que nos auxiliou na busca por trabalhos já realizados com a temática desta pesquisa, para averiguar quais os pontos em comuns e os pontos divergentes com esta pesquisa. O levantamento se deu em dois ambientes virtuais, onde são alocadas teses e dissertações, o primeiro no Banco de Teses e Dissertações da Capes e o segundo realizado no Repositório Digital do Ghemat/Brasil no site da Universidade Federal de Santa Catarina.

Para o capítulo 3 realizamos um primeiro inventário, buscando no repositório digital do Ghemat/Brasil manuais que continham orientações aos professores do ensino primário do período do MMM de 1960 a 1970, de modo ao final selecionar as fontes que serão analisadas. Realizamos também um breve panorama do que foi o Movimento da Matemática Moderna no ensino primário.

No capítulo 4 buscamos descrever um breve percurso profissional do professor Ruy Madsen Barbosa, buscando buscar indícios da participação deste professor no Grupo de Estudo do Ensino de Matemática (GEEM), informações sobre sua carreira profissional que levaram a elaboração dos manuais didáticos “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários”. Por fim buscamos descrever os manuais escolhidos.

O capítulo 5 é destinado às análises, buscando identificar os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar* frações nos manuais da coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” de Ruy Madsen Barbosa (1966), elencamos estes dois conceitos com categorias de análises e acrescentamos outras (*sequências, graduação, significado, dispositivos didáticos e exercícios e problemas*), de modo a verificar a articulação entre os *saberes a ensinar* e *para ensinar*, resultando na *matemática do ensino* de frações nos manuais selecionados.

E for fim as considerações finais, nas quais apresentamos resultados obtidos que nos leva concluir que: Ruy Madsen Barbosa pode ser um possível *expert*, há uma articulação entre os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar,* em consequência disto tem-se a presença de uma *matemática do ensino de frações* nos manuais da coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários”.

1. BASE TEÓRICO-METODOLÓGICA

Neste capítulo apresentaremos o embasamento da nossa pesquisa, buscando compreender elementos constitutivos da História da Educação Matemática a partir de Costa (2017), dos *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar* de Hofstetter; Schneuwly (2017), da *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar* de Valente (2017), da *matemática do ensino* de Morais; Bertini; Valente (2021) e por fim as categorias de análise.

Aqui deixamos explícito que utilizamos a nomenclatura *base teórico-metodológica*, como:

> [...] expressão "base teórico-metodológica" como o lugar onde é possível encontrar os caminhos por onde a pesquisa irá trilhar. Alterando o ditado, sem alterar-lhe muito o sentido, tenho me amparado na ideia do "dize-me com quem andas que te direi por onde irás..." (VALENTE, 2007, p. 28 e 29)

Com isso, quebramos a regra básica de fazer pesquisa que é "tema- problema- objetivos- base teórica- metodologia- cronograma- resultados- bibliografia", pois entendemos que a nossa metodologia está inserida em nossas bases teóricas.

Antes de adentrarmos na base teórico-metodológica desta pesquisa, buscamos compreender a diferença entre dois campos disciplinares que, durante minha graduação em licenciatura em Matemática, em meu modesto conhecimento eram iguais, a História da Matemática e a História da Educação Matemática.

1.1 HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Um grande desafio ao entrar no grupo de pesquisa Compasso - MS foi entender a diferença entre a História da Matemática e a História da Educação Matemática, em minha concepção não havia distinção entre esses dois campos disciplinares. Então nesta seção buscamos discutir a diferença entre a História da Matemática e a História da Educação Matemática (HEM), e caracterizar a importância do campo disciplinar da História da Educação Matemática.

Para Costa (2017):

> Quando se pensa na disciplina de história da matemática, encontramos grande acolhimento nos cursos de licenciatura ou bacharelado de Matemática. Referências clássicas se perfilam nas ementas e planos de aula dessa disciplina

> (história da matemática) nas mais diversas instituições de ensino superior. (COSTA, 2017, p. 642)

A História da Matemática é um campo disciplinar bem aceito pelos cursos de licenciatura e bacharel de Matemática, pois se torna um potencializador pedagógico buscando oferecer um campo de investigação para novas descobertas na área, como, por exemplo: novos métodos, novas fórmulas, etc.

Já a História da Educação Matemática:

> [...] a disciplina de história da educação matemática surge de uma forma diversa que, em alguma medida, se assemelha a emergência da própria educação matemática. O enorme crescimento das pesquisas que envolvem a história da educação matemática reverbera em diversas instâncias: cursos, livros, artigos em revistas especializadas, congressos nacionais e internacionais. O surgimento de um corpo de pesquisadores consolida-se e pouco a pouco ganha espaços institucionais, fazendo circular suas produções, erigindo seus próprios problemas de pesquisa, não se filiando a história da matemática e se aproximando gradativamente da História. (COSTA, 2017, p. 642)

Com o aumento de produções, de pesquisas, de articulações a HEM vai se aproximando do campo disciplinar/científico da História e se distanciando da História da Matemática.

> Um campo científico (ou disciplina científica, na terminologia de Schubring) é marcado por: (a) uma comunidade; b) um corpo de conhecimento teórico codificado em livros-texto; c) questões não resolvidas; d) métodos de pesquisa juntamente com um conjunto de soluções de problemas paradigmáticos; e, e) normas específicas de carreira e processos de socialização institucionalizados para selecionar e educar candidatos de acordo com os paradigmas aceitos (KILPATRICK[3] apud COSTA, 2017, p. 645)

Assim, a HEM vem ganhando seu espaço como um campo científico, pois é consolidado como uma comunidade sendo criado na Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) um grupo de trabalho chamado GT 15 – História da Educação Matemática.

Eventos também estão sendo consolidados na área da Educação Matemática, tanto nacionais como internacionais, onde pesquisadores em HEM trocam experiências e discutem teorias, criando laços de uma comunidade científica. Podemos citar como eventos nacionais o Encontro Nacional de História da Educação Matemática (ENAPHEM) e como internacional o Congresso Iberoamericano de História da Educação Matemática (CIHEM).

Uma das revistas de destaque para o cenário da HEM é a Revista de História da Educação Matemática (HISTEMAT), pois tem agregado pesquisadores específicos dessa área

---

[3] KILPATRICK, J. Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a educação matemática como campo profissional e científico. Zetetiké, Campinas, v. 4, n. 5, p. 99 - 120, jan./jun. 1996.

e assim contribuído para a difusão e circulação das ideias e pesquisas na área. Esses indícios mostram um caminho de muitas conquistas para a História da Educação Matemática como um campo disciplinar/científico.

Neste campo disciplinar/científico da História da Educação Matemática, está o Grupo Associado de Estudos e Pesquisa sobre História da Educação Matemática (Ghemat/Brasil), grupo que contempla diversas pesquisas sobre a temática da História da Educação Matemática.

Este grupo vem realizando pesquisas em parceria com a Equipe de Pesquisa em História das Ciências da Educação (ERHISE) da Universidade de Genebra, na Suíça, que tratam dos saberes do ensino e da formação de professores, sendo: os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*.

1.2 *SABERES A ENSINAR* E *SABERES PARA ENSINAR*

A partir da leitura do livro “Saberes em (trans) formação: tema central a formação de professores” de Hosfstetter; Valente (2017), em seu terceiro capítulo escrito por Hofstetter; Schneuwly (2017) intitulado: “Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação”, os autores apresentam uma reflexão sobre os saberes buscando conceituar o papel na profissão de professor no ensino e na formação. Buscando conceituar saberes constitutivos do professor, definindo como saberes constitutivos: o *saber a ensinar* e o *saber para ensinar*.

Esses conceitos são novos e carecem de uma explanação aprofundada, na expressão saber há dois significados que devemos nos ater, o primeiro significado está associado aos saberes incorporados, aqueles ligados “à zona semântica das capacidades, dos conhecimentos, das competências, das aptidões, das atitudes, das profissionalidades” (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2017, p. 131), ou seja, ligado à subjetividade do sujeito.

O segundo significado está associado aos *saberes objetivados*, saberes valorizados pela sociedade e pelas comunidades científicas, postos em circulação e não faz parte de um sujeito. Segundo Valente (2019, p. 10), os *saberes objetivados* “mostram-se como discursos sistematizados, prontos para serem mobilizados, com capacidade de circularem. São comunicáveis de modo que se possam deles fazer uso e apropriação em diferentes contextos”. Hofstetter; Scheneuwly (2017) colocam no centro das suas reflexões os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*, ambos tratados como *saber objetivado*.

Segundo Hofstetter; Schneuwly (2017), o saber do professor é constituído de dois saberes: *os saberes a ensinar* (objeto do trabalho) e *os saberes para ensinar* (ferramentas do seu trabalho).

Hofstetter; Schneuwly (2017, p. 131) "O *saber a ensinar* é o objeto do seu trabalho", este saber está ligado a processos que transformam os saberes, propostos em currículos, planos de ensino, manuais, entre outros, "a fim de torná-los ensináveis" (2017, p. 133). Os *saberes a ensinar* estão ligados ao campo científico, oriundos das disciplinas universitárias, considerados importantes para a formação do professor (BERTINI; MORAIS; VALENTE, 2017, p. 11)

Hofstetter; Schneuwly (2017, p. 132) "Os saberes para ensinar são as ferramentas do seu trabalho", sendo: o objeto de ensino e de formação, as práticas de ensino, instituição entre outros, que define o campo de atividade profissional:

> Tratam-se principalmente de saberes sobre "o objeto" do trabalho de ensino e de formação (sobre os saberes a ensinar e sobre o aluno, o adulto, seus conhecimentos, seu desenvolvimento, as maneiras de aprender etc.), sobre as práticas de ensino (métodos, procedimentos, dispositivos, escolha dos saberes a ensinar, modalidades de organização e de gestão) e sobre instituição que define o seu campo de atividade profissional (planos de estudos, instruções, finalidades, estruturas administrativas e políticas etc.) (HOFSTETTER; SCHNEUWLY 2017, p. 134)

Ou seja, os *saberes para ensinar* estão abarcados ao exercício da profissão docente, são os saberes inerentes específicos do exercício profissional. Segundo Bertini; Morais; Valente (2017, p. 11) os saberes acima citados "constituem-se como saberes da formação de professores, mas a *expertise* profissional, caracterizando a profissão de professor é a posse dos *saberes para ensinar*".

Tomando assim a definição de *saberes para ensinar* e *saberes a ensinar*, dizemos que o professor que ensina matemática trabalha com os dois saberes que são inseparáveis e se complementam.

Nesta dissertação, utilizamos os *saberes a ensinar* e *para ensinar* como hipóteses de análises, que nos auxiliou na análise da coleção de manuais "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" do autor Ruy Madsen Barbosa, manual destinado à formação de professores primários. A partir destes conceitos o Ghemat/Brasil se volta a pesquisar os saberes profissionais dos professores que ensinam matemática, cunhando assim de novos conceitos como *matemática a ensinar, matemática para ensinar* e *matemática do ensino*.

1.3 *MATEMÁTICA A ENSINAR* E *MATEMÁTICA PARA ENSINAR*

Os conceitos de *saberes a ensinar* e *saberes para ensinar*, ganham um novo sentido, quando falamos sobre a matemática, a partir das discussões de Hofstetter; Schneuwly (2017), o que chamamos *matemática a ensinar* e *matemática para ensinar*, o qual discutiremos os pontos principais destes conceitos.

Valente (2017) “A *matemática a ensinar* é entendida como o objeto de trabalho do professor que ensina matemática”, no caso a matemática, as fórmulas, os teoremas, os cálculos, entre outras, este conceito é importante, pois é o que o professor deve saber para ensinar matemática. Esta matemática provém do campo disciplinar.

Segundo Valente (2017) “A *matemática para ensinar* é entendida como ferramentas para agir sobre o objeto de trabalho do professor que ensina matemática”, ou seja, a matemática que o professor deve mobilizar para o exercício da prática docente. Esta, mais ligada ao campo das Ciências da Educação.

No ensino primário, o professor é munido destes dois conceitos, mas segundo Valente:

> [...] a referência profissional, a especialidade do professor dos primeiros anos escolares, do professor primário, no decorrer da história, liga-se diretamente aos saberes para ensinar. Não cabe dizer que tais docentes são experts em cálculo aritmético, ou na ciência da geometria euclidiana, ou na língua portuguesa etc. Sua referência profissional, sua expertise é dada pela posse de um saber para ensinar o cálculo e as demais matérias para as crianças, tendo em vista as finalidades da escola numa dada época. (VALENTE, 2017, p. 217)

Isso quer dizer que o professor de ensino primário tem o conceito de *matemática para ensinar*, mesmo que não seja um expert[4] na *matemática a ensinar*. Como cita Bertini; Morais; Valente (2017) a utilização destes conceitos como hipótese nos leva a compreender os movimentos de constituição dos saberes profissionais dos professores que ensinam matemática.

Segundo Valente (2020) a relação entre a formação e o ensino é denominado como a *matemática do ensino*, ou seja, é uma articulação entre a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*, advindos do campo disciplinar e do campo das Ciências da Educação, o qual discutiremos na próxima seção.

[4] Expert é definido como: aquele (de notório saber) que é chamado por um Mandatário (governador, presidente, prefeito, diretor, etc) para resolver um problema, fenômeno, entre outros; se dá por um discurso (o saber) por meio de relatórios. Definição do Grupo de Pesquisa Compasso MS.

O caminho percorrido até o presente momento nos auxiliou na análise dos manuais selecionados, em que buscamos responder o seguinte objetivo geral: identificar os elementos da *matemática do ensino* de frações na coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” de Ruy Madsen Barbosa.

1.4 A *MATEMÁTICA DO ENSINO*

Como mencionamos anteriormente a *matemática do ensino* é a articulação entre a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar* segundo Valente (2020). Nesta seção discutiremos pontos importantes deste conceito.

Valente (2020) diz haver um jogo de palavras entre o *ensino de matemática* e a *matemática do ensino*, com isso é pertinente discutir sobre esse jogo de palavras para melhor entender o conceito de *matemática do ensino*.

Iniciamos pela caracterização do *ensino de matemática*. Segundo Valente (2020, p. 167) a “expressão *ensino de matemática* como reveladora do desafio que o campo disciplinar matemático tem para ser transmitido na escola”, ou seja, como ensinar a matemática para os alunos.

Morais; Bertini; Valente (2021, p.16) mencionam que, o *ensino de matemática* “preocupa-se em lançar olhar sobre mecanismos didáticos voltados para problemáticas postas pela transmissão de saberes dos campos disciplinares científicos para o interior do meio escolar”, assim o ensino da matemática busca mecanismos para didatizar os saberes que provem do campo disciplinar matemático.

Já a *matemática do ensino,* preocupa-se com a análise dos “processos de elaboração da *matemática a ensinar* e da *matemática para ensinar*, bem como a dinâmica de articulação entre esses saberes, na constituição da matemática do ensino em cada tempo histórico” (VALENTE, 2020, p. 169).

Para analisar os manuais selecionados, elencamos as seguintes categorias: *sequência; significado; graduação; dispositivos didáticos e exercícios e problemas*.

A categoria *sequência* é entendida como “lugar ocupado pelas frações no conjunto ordenado de temas que o professor deverá mobilizar tendo em vista à aprendizagem de seus alunos, em um dado período de tempo” (MORAIS; BERTINI; VALENTE, p. 18, 2020). Esta categoria nos auxiliou na caracterização dos saberes a ensinar frações, buscando compreender como o autor organizou o ensino das frações.

Entende-se como *significado* "o modo como o professor deverá se referir a um dado tema da matemática do ensino, de maneira a introduzi-lo em suas aulas, tendo em vista o inicial contato do aluno com um novo conteúdo" (MORAIS; BERTINI; VALENTE, p. 18-19, 2020). Esta categoria nos auxiliou a caracterizar de que forma o autor sugeriu que o ensino de frações seja iniciado.

A *graduação* "está diretamente ligada a uma dada concepção de ensino e aprendizagem de um dado assunto pelos alunos" (MORAIS; BERTINI; VALENTE, p. 19, 2021). Nesta categoria buscamos identificar como o ensino de fração é abordado, quais frações devem ser ensinadas primeiro e qual a sequência o professor deve utilizar.

Os *dispositivos didáticos* são entendidos como:

> [...] como a diagramação para ensinar a compor ou a ler determinada informação sobre as regularidades entre frações, ou mesmo a diagramação de comparações entre frações com denominadores diferentes, ou também as ilustrações, figuras e outros. (FRANÇA; RAMIRES; SANTOS, 2021, p. 9)

A categoria de análise "*dispositivos didáticos*" nos auxiliou na caracterização de como as frações foram diagramadas nos manuais em estudo, buscando identificar o uso de materiais que auxiliam o professor no ensino desta temática.

Como última categoria de análise citamos os *exercícios e problemas*, o qual é entendida como "respostas esperadas pelos professores relativamente ao que ensinaram sobre frações para os seus alunos" (MORAIS; BERTINI; VALENTE, p. 19, 2020), está categoria nos permitiu analisar o que o autor dos manuais esperava dos alunos após o final de cada novo assunto ensinado.

Em síntese, buscamos responder nossos objetivos, utilizamos os conceitos de *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar*, ou seja, a *matemática do ensino*, para identificar os saberes profissionais da formação e da docência. Neste capítulo, destacamos e discutimos elementos importantes que embasam esta pesquisa, iniciando com uma breve discussão sobre a diferença entre História da Matemática e a História da Educação Matemática, este último, como um campo em desenvolvimento, com indício de uma possível institucionalização como campo científico.

Discutimos elementos que contribuíram para a conceituação da *matemática do ensino*, passando pelos *saberes a ensinar* (objeto de trabalho do professor), *saberes para ensinar* (ferramentas sobre o objeto de trabalho do professor), ambos indissociáveis e constituintes dos saberes profissionais.

Debatemos sobre a *matemática a ensinar* (objeto do trabalho do professor que ensina matemática), a *matemática para ensinar* (ferramentas sobre o objeto de trabalho do professor que ensina matemática) e a articulação entre esses dois conceitos caracterizam a *matemática do ensino*.

2. LEVANTAMENTO DO ESTADO DO CONHECIMENTO

Nesta seção discutiremos alguns trabalhos no campo da História da Educação Matemática que nos auxiliarão na construção desta dissertação, para este levantamento nos apoiaremos no conceito de "estado do conhecimento" de Romanowski, Ens (2006).

Para adotar o conceito de estado do conhecimento, devemos entender a diferença entre "estado da arte" e "estado do conhecimento". Como afirma Romanowski; Ens (2006):

> Os estudos realizados a partir de uma sistematização de dados, denominada "estado da arte", recebem esta denominação quando abrangem toda uma área do conhecimento, nos diferentes aspectos que geraram produções. (ROMANOWSKI, ENS, 2006, p.39)

O estado da arte é um levantamento de pesquisas, referencial teórico, artigos, publicações em congressos, entre outras. É uma abordagem ampla de pesquisas em diferentes setores das publicações.

O estado do conhecimento é definido por Romanowski; Ens (2006, p.40) como: "O estudo que aborda apenas um setor das publicações sobre o tema estudado e vem sendo denominado de 'estado do conhecimento'". Assim tomamos como base para esta pesquisa o estado do conhecimento, pois buscamos apenas dissertações e teses.

Buscando entender como se deu o ensino de frações no ensino primário, durante o período do MMM, levantamos alguns trabalhos para observar como estão sendo encaminhadas as pesquisas nesta temática na área de História da Educação Matemática.

Partindo deste pressuposto, foi realizado uma busca de trabalhos no Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), um local com as mais variadas categorias de trabalhos acadêmicos e no Repositório Institucional da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) na página do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática (Ghemat/Brasil), um campo restrito aos estudos sobre a História da Educação Matemática, o qual apresentaremos a seguir.

2.1 CATÁLOGO DE TESES E DISSERTAÇÕES DA CAPES

Em resumo, o catálogo de teses e dissertações da Capes é um repositório virtual, que reúne produções científicas no Brasil, criado para facilitar o acesso a estas informações. Neste catálogo, podemos identificar o nome do autor, o ano de publicação, o título do trabalho, o resumo, palavras-chave, entre outras variedades de filtros.

Para iniciar a consulta no catálogo definimos alguns descritores, que auxiliaram na pesquisa, sendo: “Movimento da Matemática Moderna”, “Ensino Primário” e “Ensino de Frações”. Foi elaborado para cada descritor um quadro, de modo a verificar o ano, quantidades de trabalhos em um período e o quantitativo de teses e dissertações.

Para o primeiro descritor “Movimento da Matemática Moderna” foram encontrados um total de 94 trabalhos, observe o quadro 1:

QUADRO 1 - Resultado da pesquisa com o descritor "Movimento da Matemática Moderna", no catálogo da Capes

Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES																					
Descritores	**Quantidade de publicação por ano**																				
	1990	**1998**	**2001**	**2002**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**Total**	**Teses**	**Dissertação**
Movimento da Matemática Moderna	1	1	1	2	2	3	3	6	9	9	9	6	7	8	8	5	6	8	**94**	**21**	**73**

FONTE: Elaborado pelo autor.

Observando os resultados apresentados no quadro 1, o maior índice de trabalhos escritos sobre o MMM, foi nos anos de 2008 (contendo 8 dissertações e 1 tese), 2009 (contendo 8 dissertações e 1 tese) e 2010 (contendo 8 dissertações e 1 tese). Os trabalhos encontrados com este descritor são variados, de pedagogia, de psicologia, de matemática, entre outros.

Para o segundo descritor “Ensino de Frações” foram encontrados um total de 73 trabalhos relacionados a esta temática, observe o quadro 2.

QUADRO 2 - Resultado da pesquisa com o descritor "'Ensino de Frações", no catálogo da Capes

Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES			
	Quantidade de publicação por ano		

Descritores	1998	2003	2004	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	Total	Teses	Dissertação
Ensino de Frações	1	2	1	1	4	2	3	2	3	12	5	11	5	9	5	7	**73**	**3**	**70**

FONTE: Elaborado pelo autor.

Com a pesquisa utilizando o segundo descritor, percebemos haver alguns trabalhos sobre o ensino de fração, em livros, na sala de aula, utilizando softwares, jogos, mas em nenhum com um olhar voltado os *saberes para ensinar* frações, o qual é o foco de nossa pesquisa. As maiores incidências de trabalhos publicados foram nos anos de 2013 (contendo 12 dissertações) e 2015 (contendo 10 dissertações e 1 tese). Nos trabalhos verificados, o ensino de fração é abordado a partir da engenharia didática, da matemática aplicada, utilizando jogos, entre outros assuntos.

Para o terceiro descritor "Ensino Primário" foram encontrados 615 trabalhos relacionados a esta temática, observe o quadro 3.

QUADRO 3 - Resultado da pesquisa com o descritor "Ensino Primário", no catálogo da Capes

	Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES																											
	Quantidade de publicação por ano																											
Descritores	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**Total**	**Teses**	**Dissertação**
Ensino Primário	4	7	2	7	5	7	8	6	14	14	21	28	22	29	33	35	28	42	39	33	65	54	42	34	36	**615**	**199**	**416**

FONTE: Elaborado pelo autor.

Observamos que existem inúmeros trabalhos publicados que fazem referência ao ensino primário, onde encontramos maior incidências de pesquisa nos anos de 2016 (contendo 43 dissertações e 22 teses), 2018 (contendo 29 dissertações e 13 teses) e em 2017 (contendo 36 dissertações e 18 teses). Vale ressaltar que as pesquisas sobre o ensino primário são abordadas em diferentes áreas como: psicologia, pedagogia, matemática, entre outras, pouco utilizando a pesquisa em História da Educação Matemática.

Este levantamento foi realizado em dois períodos diferentes, no ano de 2020 e no ano de 2021, para verificar se novas pesquisas surgiram entre este intervalo de tempo, mas o resultado obtido em ambas as pesquisas fora idêntico.

Tendo feito um levantamento no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, resolvemos buscar também em outro repositório, pois o catálogo nos deu uma visão ampla dos trabalhos, consideramos a possibilidade da existência de alguns trabalhos que abordam a História da Educação Matemática e não estão inseridos nesta pesquisa, assim buscamos trabalhos no Repositório do Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática, localizada na página da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC).

2.2 REPOSITÓRIO INSTITUCIONAL DA UFSC - PÁGINA DO GHEMAT-BRASIL[5]

O repositório digital do Ghemat-Brasil, visa reunir coleções e trabalhos digitalizados, no âmbito da pesquisa em História da Educação Matemática, possibilitando a expansão das pesquisas desta linha, onde o espaço é cedido pela Universidade Federal de Santa Catarina. Assim como explica Costa; Valente (2015):

> O Repositório [...] se alinha à sub-comunidade História da Educação Matemática, aninhada ao Centro de Ciências da Educação da UFSC. Trata-se de um repositório virtual, aberto e institucionalizado, especificamente para armazenar fontes diversas, ensaios e pesquisas voltadas para a História da Educação Matemática. (COSTA; VALENTE, 2015, p. 101)

A organização deste repositório está estruturado por coleções da seguinte forma: teses/dissertações, trabalhos de conclusão de curso, acervos pessoais, livros didáticos e manuais pedagógicos, artigos, fotografias, glossários, guia de pesquisas, legislação escolar, material didático, prova/exames/avaliações, referências históricas, referências para avaliação/provas/exames, referências para história global/ história conectada, referências para processos de internacionalização/institucionalização/profissionalização, constituição dos saberes em diversos Estados.

> Mais do que ser um fichamento com os dados básicos de uma dada fonte de pesquisa digitalizada (item do repositório), o cadastramento passa a ser elemento ativo no processo da pesquisa que se desenvolve no grupo alcançando um novo estatuto no trabalho coletivo. (COSTA; VALENTE, 2015, p. 104)

[5] Para mais informações, consulte o repositório https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/1769.

O repositório é constituído por um trabalho coletivo do Ghemat-Brasil, onde os pesquisadores alimentam esse repositório com fontes utilizadas nas pesquisas. Para inserir uma nova fonte neste repositório o pesquisador deve realizar uma bibliografia do documento, colocando nas normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

> Essa dinâmica de trabalho assumida por todos os pesquisadores do GHEMAT ao fazer uso do Repositório, cria um novo paradigma para as pesquisas históricas em educação matemática em âmbito nacional, quiçá transnacional, dado a mobilidade destes dados fomentados pelos interesses comuns de pesquisa orquestrados nos projetos temáticos em andamento no interior do Grupo. (COSTA; VALENTE, 2015, p. 104)

Este repositório é importante para o historiador em Educação Matemática, pois auxilia na produção, discussão e reflexão, possibilitando verificar tudo que está sendo trabalhado na perspectiva histórica da Educação Matemática. Assim, utilizaremos o repositório do GHEMAT, como fonte de busca de fontes para esta dissertação.

Iniciamos a pesquisa no repositório com o descritor “Movimento da Matemática Moderna”, interessar-se verificar a quantidade de teses e dissertações que se assemelham ao nosso objeto de pesquisa. Foram encontrados 30 trabalhos. Observe o quadro 4.

QUADRO 4 - Resultado da pesquisa com o descritor "Movimento da Matemática Moderna", no repositório do Ghemat/Brasil

Repositório do GHEMAT															
Descritores	**Quantidade de publicação por ano**														
	1989	**2007**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2020**	**Total**	**Teses**	**Dissertação**
Movimento da Matemática Moderna	1	3	4	2	3	2	6	3	1	1	3	1	**30**	**10**	**20**

FONTE: Elaborado pelo autor.

Observando o quadro 4, podemos identificar que a concentração dos estudos do MMM fora no ano de 2013 com 6 trabalhos (sendo 4 dissertações e 2 teses), também podemos observar que entre 1989 a 2007 não encontramos registros de trabalhos históricos sobre o MMM.

Continuando a busca por trabalhos no repositório, utilizamos o segundo descritor “Ensino de Frações”, obtendo um resultado de apenas 2 trabalhos. Observe o quadro 5.

QUADRO 5 - Resultado da pesquisa com o descritor "Ensino de Frações", no repositório do Ghemat/Brasil

Repositório do GHEMAT				
Descritores	**Quantidade de publicação por ano**			
	2013	**Total**	**Teses**	**Dissertação**
Ensino de Frações	2	**2**	**1**	**1**

FONTE: Elaborado pelo autor.

Podemos observar que o ensino de fração aparece em apenas 2 trabalhos no ano de 2013, sendo 1 dissertação e 1 tese, isso nos leva a pensar que devemos pesquisar mais e mais sobre o ensino de frações, buscando entender como se deu o ensino desta temática ao longo das vagas pedagógicas.

Para o último descritor "Ensino Primário", pesquisando no repositório, encontramos um total de 74 trabalhos. Observe o quadro 6.

QUADRO 6 - Resultado da pesquisa com o descritor "Ensino Primário", no repositório do Ghemat/Brasil

Repositório do GHEMAT																	
Descritores	**Quantidade de publicação por ano**																
	2007	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**	**2020**	**Total**	**Teses**	**Dissertação**
Ensino Primário	1	1	1	3	2	2	11	9	6	10	10	11	4	3	**74**	**22**	**52**

FONTE: Elaborado pelo autor.

Podemos observar que nos anos de 2013 e 2018 obtivemos um total de 11 trabalhos cada (o primeiro com 9 dissertações e 2 teses, e o segundo com 7 dissertações e 4 teses).

Assim, a partir da pesquisa utilizando tais descritores, chegamos a uma grande gama de trabalhos para serem lidos e discutidos, salientamos que alguns trabalhos foram contabilizados em duas ou mais oportunidade, pois para os descritores que utilizamos podem aparecer o mesmo trabalho.

Os trabalhos encontrados no repositório do Ghemat/Brasil estavam também no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, então filtramos apenas os trabalhos de cunho histórico encontrados no repositório.

A escolha dos trabalhos se deu pela análise dos títulos, os quais deveriam apresentar dois ou mais descritores que indiquei no início desta seção (Movimento da Matemática Moderna, Ensino Primário ou Ensino de Fração). Então, dos 103 trabalhos encontrados no repositório do Ghemat- Brasil, realizei esta análise, obtendo 8 trabalhos. Ver quadro 7.

QUADRO 7 - Resultado da pesquisa com dois ou mais descritores

Descritores Encontrados	**Autor**	**Ano**	**Título**
Movimento da Matemática Moderna e Ensino Primário	Godoi, Anieli Joana de	2020	A Aritmética Em Tempos De Matemática Moderna: Registros Em Cadernos Escolares Do Ensino Primário (1950- 1970)
Movimento da Matemática Moderna e Ensino Primário	França, Denise Medina de Almeida	2007	A Produção Oficial Do Movimento Da Matemática Moderna Para O Ensino Primário Do Estado De São Paulo (1960- 1980)
Movimento da Matemática Moderna e Ensino Primário	Alves, Antônio Maurício Medeiros	2013	A Matemática Moderna No Ensino Primário Gaúcho (1960- 1978): Uma Análise Das Coleções De Livros Didáticos Estrada Iluminada E Nossa Terra Nossa Gente
Movimento da Matemática	Mendonça, Thiago Neves	2016	Que Geometria Ensinar Às Crianças Em Tempos De

Moderna e Ensino Primário			Matemática Moderna? Referências E Práticas De Uma Professora Da Cidade De Juiz De Fora.
Movimento da Matemática Moderna e Ensino Primário	Borges, Rosimeire Aparecida Soares	2011	Circulação E Apropriação Do Ideário Do Movimento Da Matemática Moderna Nas Séries Iniciais: As Revistas Pedagógicas No Brasil E Em Portugal.
Movimento da Matemática Moderna e Ensino Primário	Arruda, Joseane Pinto de	2011	Histórias E Práticas De Um Ensino Na Escola Primária: Marcas E Movimentos Da Matemática Moderna.
Movimento da Matemática Moderna e Ensino Primário	França, Denise Medina de Almeida	2012	Do Primário Ao Primeiro Grau: As Transformações Da Matemática Nas Orientações Das Secretarias De Educação De São Paulo (1961 – 1979)
Movimento da Matemática Moderna e Ensino Primário	Costa, Reginaldo Rodrigues da	2013	A Capacitação E Aperfeiçoamento De Professores Que Ensinavam Matemática No Estado Do Paraná Ao Tempo Do Movimento Da Matemática Moderna (1961 – 1982)

FONTE: Elaborado pelo autor.

Destacamos que no momento em que a pesquisa com os descritores “Ensino Primário” e “Ensino de Frações” foi realizada, não encontramos nenhum trabalho que continha em seu título estes descritores, já com os descritores “Ensino de Frações” e “Movimento da Matemática Moderna”, não surgiu nenhum novo trabalho, os que apareceram já haviam sido contabilizados no primeiro par de descritores “Movimento da Matemática Moderna” e “Ensino Primário”.

2.3 ANÁLISE DE TRABALHOS SELECIONADOS

Para análise selecionamos 4 trabalhos, sendo 2 dissertações e 2 teses, esses trabalhos foram selecionados a partir da leitura do título e do seu resumo, de modo a analisar as semelhanças e diferenças do nosso objeto de pesquisa, encontrados no repositório do GHEMAT. Observe o quadro 8.

QUADRO 8 - Dissertações/Teses selecionadas do repositório do Ghemat/Brasil

Autor	Ano	Título	Tipo
França, Denise Medina de Almeida	2007	A produção oficial do Movimento da Matemática Moderna para o ensino primário do estado de São Paulo (1960- 1980)	Dissertação
Alves, Antônio Maurício Medeiros	2013	A matemática moderna no ensino primário gaúcho (1960- 1978): uma análise das coleções de livros didáticos Estrada Iluminada e Nossa Terra Nossa Gente	Tese
Godoi, Anieli Joana de	2020	A Aritmética em tempos de Matemática Moderna: registros em cadernos escolares do ensino primário (1950- 1970)	Dissertação
França, Denise Medina de Almeida	2012	Do primário ao primeiro grau: as transformações da Matemática nas orientações das Secretarias de Educação de São Paulo (1961-1979)	Tese

FONTE: Elaborado pelo autor.

Selecionamos estes trabalhos por abordarem o ensino de aritmética, podendo apresentar algo relacionado às frações, e por abordarem a formação de professores durante o período do MMM. O levantamento fora realizado em dois momentos, no primeiro semestre de 2020 e o segundo no primeiro semestre de 2021, buscamos em dois momentos diferentes, pois no primeiro não encontramos trabalhos que abordassem o ensino de fração, no segundo levantamento também não obtivemos sucesso. Para nossa análise dos trabalhos traçamos alguns pontos importantes para se observar, a questão de pesquisa, objetivo geral, específico e resultados obtidos com o auxílio destes pontos faremos a análise.

2.3.1 A PRODUÇÃO OFICIAL DO MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA PARA O ENSINO PRIMÁRIO DO ESTADO DE SÃO PAULO (1960-1980)

Este trabalho foi escrito por Denise Medina de Almeida França, publicado no ano de 2007, como dissertação do Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. As questões de pesquisa são: Como ocorreu a reestruturação do Ensino Primário no período de 1960 e 1980 em São Paulo? Quais estratégias de reformulação curriculares e divulgação, produzidas pelo Estado foram veiculadas por meio de documentos para implementar as novas diretivas para o ensino de matemática na escola primária paulista? E Como o ideário do MMM foi incorporado na produção de documentos oficiais que buscaram parametrizar o ensino de matemática nas séries iniciais das escolas paulistas?

O objetivo desta pesquisa foi analisar as alterações curriculares e legislações ocorridas no ensino primário paulista no período do MMM, e para analisar essas alterações a autora foi em busca de teses, dissertações e documentos oficiais que ajudassem a compreender as alterações ocorridas nesse período.

Queremos aqui apresentar alguns resultados obtido pela autora ao final desta pesquisa:

> Em suma, o Ensino Primário, as reformulações curriculares, por meio dos documentos, oficializaram alterações didático-metodológicas no currículo de matemática nas séries iniciais. Diante de todas as modificações metodológicas propostas para o ensino de matemática no primário, a Secretária foi pressionada a adotar uma política de formação dos professores por meio de documentos oficiais.
>
> De certa forma, nos documentos estudados, percebe-se a clara intenção justificada por teorias científicas, em diminuir as expectativas em relação à escola primária. Talvez para melhor cumprir as metas de expansão de matriculas foi preciso limitar as funções conferidas à escola e, assim, viabilizar a entrada de um enorme contingente de crianças no ensino das séries

> iniciais contando com os mesmos instrumentos disponibilizados até então. É fato que a escola não poderia continuar com as mesmas perspectivas elitistas, com o ingresso de uma grande população heterogênea, mudando toda sua estrutura e limitando a qualidade no entendimento. (FRANÇA, 2007, p. 203-204)

Essas reflexões sobre o ensino primário, durante o período do MMM, são importantes para compreender como a escola, o Estado e os seus planos de educações se modificaram tentando se adaptar ao novo cenário da matemática.

Nossa dissertação tem como diferencial identificar a matemática do ensino de frações nos manuais de Ruy Madsen Barbosa, observando os saberes utilizados pelo autor, e as características do movimento presentes nestes manuais, o trabalho de França (2007) nos auxiliou no entendimento do MMM e suas características.

2.3.2 MATEMÁTICA MODERNA NO ENSINO PRIMÁRIO GAÚCHO (1960-1978): UMA ANÁLISE DAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS ESTRADA ILUMINADA E NOSSA TERRA NOSSA GENTE

A segunda pesquisa que discutimos, foi escrito pelo professor Antônio Maurício Medeiros Alves, publicado no ano de 2013, como tese de Doutorado em Educação pela Universidade Federal de Pelotas. Os objetivos gerais desta pesquisa são: analisar como o MMM constituiu-se no RS e compreender como a Matemática Moderna foi incorporada nas coleções “Nossa Terra Nossa Gente” a partir da reelaboração da coleção “Estrada Iluminada”.

Os objetivos específicos são: Demonstrar que a coleção “Estrada Iluminada” foi reelaborada incorporando princípios da Matemática Moderna; Identificar os autores de obras da Matemática Moderna usados como referência nessa reelaboração; Descrever as referidas coleções, enfocando principalmente sua materialidade; Analisar quais conteúdos da Matemática Moderna foram contemplados na reelaboração da coleção “Estrada Iluminada” (EI), quando publicada sob o título de “Nossa Terra Nossa Gente” (NTNG_1 e NTNG_2); Analisar como foram propostos os conteúdos e os exercícios de Matemática nas coleções aqui em foco; Contribuir, a partir dos resultados deste estudo, com a História da Educação Matemática, das Disciplinas Escolares e dos Livros Didáticos.

Sendo assim, objetivo desta pesquisa foi verificar como se deu o MMM no estado do Rio Grande do Sul, com um olhar voltado aos livros didáticos para identificar quais conteúdos da Matemática Moderna foram utilizados nas reformulações dos livros didáticos.

Queremos aqui apresentar alguns resultados obtido pelo autor ao final desta pesquisa:

> [...] as maiores mudanças foram verificadas nos conteúdos de Aritmética, como no estudo das frações, por exemplo. As frações são tratadas de duas formas distintas nos livros: enquanto na coleção EI são consideradas como partes de um todo dividido em partes iguais, na coleção NTNG_1, as frações representam um subconjunto de um conjunto dado, na qual o numerador indica o número de elementos do subconjunto e o denominador o total de elementos do conjunto dado, ou seja, o conceito de fração passa a ser tratado com base na Teoria dos Conjuntos. Este trabalho nos permite verificar como se deu a história da matemática moderna no Rio Grande do Sul e quais conteúdos sofreram alterações nas reformulações, por meio das coleções de livros didáticos de Cecy Cordeiro Thofehrn e Nelly Cunha. (ALVES, 2013, p. 290)

A partir do excerto acima, podemos verificar que Alves (2013) encontrou nas frações mudanças, a utilização de frações com parte de um todo, como representação de um subconjunto, ou seja, abordando como base a Teoria dos Conjuntos.

Alves (2013) buscou identificar quais autores foram referências para as autoras elaborarem os livros da coleção analisada, utilizou como categorias de análises: a teoria dos conjuntos, as operações aritméticas, o estudo das relações e as estruturas topológicas. A partir das análises, encontrou que as autoras incorporaram elementos do MMM; um afastamento da Aritmética e uma aproximação da Álgebra; uma mescla entre os conteúdos “tradicionais” e os conteúdos “modernos”.

O trabalho de Alves (2013) contribuiu para esta dissertação, nas análises que o autor conclui em sua tese, no sentido de nos mostrar como as frações sofreram mudanças durante o MMM. O que diferencia da nossa dissertação é o olhar para os saberes e para a matemática do ensino de frações.

2.3.3 A ARITMÉTICA EM TEMPOS DE MATEMÁTICA MODERNA: REGISTROS EM CADERNOS ESCOLARES DO ENSINO PRIMÁRIO (1950- 1970)

O terceiro trabalho que discutiremos é escrita por Anieli Joana de Godoi, publicado no ano de 2020, como dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica pela Universidade Federal de Santa Catarina. A questão de pesquisa desta dissertação é: “Como se configura o MMM na introdução do conceito de número e suas operações em uma Aritmética ensinada, vista nos cadernos escolares de alunos no período de 1950 a 1970?”.

O objetivo geral é: "investigar e identificar como foi o desenvolvimento da Aritmética objetivada a partir dos ideais do Movimento da Matemática Moderna (MMM) no nível elementar, em cadernos escolares brasileiros de meados dos anos 1950 até 1970" e os objetivos específicos são: Caracterizar o MMM no ensino primário visto nas pesquisas; Elaborar inventário analítico de cadernos escolares que contêm aulas de Aritmética para os primeiros anos escolares; Sistematizar documentos que contenham normativas e orientações didático-pedagógicas para o ensino de matemática moderna; Captar e relacionar os saberes matemáticos presentes nesses cadernos, buscando apropriações do MMM no ensino de Aritmética.

Dito isso, a dissertação busca verificar como se deu a introdução da aritmética, no ensino primário durante o MMM, utilizando como principal fonte de dados os cadernos de alunos deste período.

Apresentaremos aqui alguns resultados encontrados por Godoi (2020):

> A partir dos anos 1961, após a criação do GEEM e do NEDEM em 1962, são iniciados cursos de formação para os professores das escolas. Junto com esta ideia percebeu-se algumas mudanças nos cadernos. A partir desse período, os mesmos apresentavam algumas diferenças dos anteriores, tais como a ideia de inclusão hierárquica de classes e propriedades de operações aritméticas: propriedade comutativa da soma e o elemento neutro da soma, que se relacionavam às estruturas mentais de cada criança.
>
> Ainda vale destacar que as primeiras atividades em que aparecem a palavra "conjuntos" são as dos cadernos a partir do ano de 1968. Além disso, sentenças aritméticas e propriedades das operações passaram a fazer parte de folhas e folhas dos mesmos. Outro fator importante a ser destacado, é a presença do ensino de Aritmética como uma estrutura, mais especificamente uma estrutura mental do indivíduo, saindo da ideia de número, sua quantidade e representação para elementos que exigiam conhecimento "mais avançado", como as operações aritméticas. Nestas operações foi observado que em todos os cadernos, primeiro eram realizadas operações na horizontal, no formato de sentenças (solução), para então ser realizada a "conta armada".
>
> Para tanto, o estudo mostrou uma mudança significativa na abordagem do conceito de número. De modo que, com o ideário do MMM, se entendeu que a ideia de número deve ser introduzida pela álgebra, com início pela relação entre os Conjuntos Numéricos e as operações Aritméticas. Fato este, que se diferencia de momentos anteriores, trazendo assim uma nova abordagem do ensino de número para os primeiros anos escolares. (GODOI, 2020, p. 103-104)

A partir destes resultados encontrados por Godoi (2020), podemos mencionar que o seu olhar está voltado para a aritmética, como era o ensino e como os professores trabalharam com esse modelo de ensino, como o número era ensinado partindo da ideia hierárquica de classes e propriedades como: propriedade comutativa da soma e elemento neutro da soma.

A dissertação de Godoi (2020) nos possibilitou observar elementos da Teoria dos Conjuntos no uso das propriedades e de uma estrutura, auxiliando-nos na análise das frações nos manuais de Ruy Madsen Barbosa.

Nossa pesquisa se diferencia no olhar para o conteúdo de frações, buscando identificar os saberes do ensino de frações, buscando encontrar características do MMM e a estrutura das frações, a partir da Teoria dos Conjuntos.

2.3.4 DO PRIMÁRIO AO PRIMEIRO GRAU: AS TRANSFORMAÇÕES DA MATEMÁTICA NAS ORIENTAÇÕES DAS SECRETARIAS DE EDUCAÇÃO DE SÃO PAULO (1961- 1979)

Esta pesquisa foi escrita por Denise Medina de Almeida França, publicada no ano de 2012, como tese de Doutorado em Educação, pela Universidade de São Paulo. A questão de pesquisa é: “Que transformações sofre a representação didática-pedagógica do conceito de número, no período analisado (1961- 1979), nas orientações publicadas pela Secretaria de Educação aos professores? E, em especial, que estratégias estão nos impressos destinados aos professores, de modo a garantir as transformações do ensino de Aritmética nas séries iniciais, em face do MMM?”.

A tese de França (2012), buscou a entender como se deu a transformação de representações do conceito de número, a partir de documentos oficiais do estado de São Paulo, expedidos pelas Secretárias de Educação com um olhar para o MMM.

Mostraremos alguns resultados encontrados por França (2012) em sua tese de doutorado:

> [...] de acordo com as orientações modernas, antes da introdução do conceito de número, são organizadas atividades lógicas, em situações artificialmente criadas, utilizando materiais estruturados que possibilitem a ação, de modo a chegar à descoberta de novas estruturas. Nessa perspectiva, a aprendizagem ocorre à medida que são oferecidas situações artificiais, com conjuntos de objetos físicos que permitam a concretização de conceitos matemáticos. A ação de observar, manipular e refletir sobre conjuntos de objetos em jogos propostos resulta na formação de relações matemáticas, fazendo com que o aluno descubra as estruturas matemáticas envolvidas.
>
> [...] são introduzidos os conceitos de conjuntos, pertinência, subconjuntos e operações com conjuntos, que didaticamente, facilitam a abordagem de estruturas básicas para a compreensão do conceito de número. (FRANÇA, 2012, p. 259-260)

Assim, a tese de França (2012) mostrou como se deu a implantação de estratégias para implementar as novas diretrizes para o ensino de Aritmética na escola primária, no período do MMM, a partir de uma análise de documentos oficiais verificando em específico como o conceito de número estava sendo transformado.

Nossa pesquisa se diferencia da tese de França (2012) no sentido de olhar os elementos que constituem os saberes dos professores que ensinam matemática, a partir de manuais de Ruy Madsen Barbosa, no período do MMM. A tese nos auxiliou no entendimento do movimento e na possível semelhança das estruturas do conceito de números nos números racionais.

Em síntese, este "estado do conhecimento" permitiu observar como estão sendo tratados os assuntos a partir dos descritores (ensino primário, ensino de frações e movimento da matemática moderna). Como apresentado, existem trabalhos abordando o MMM e o ensino primário, o MMM e o ensino de fração, entre outros. O que gostaríamos de destacar que cada trabalho analisado é observado por perspectivas diferentes.

Nesta análise encontramos dois trabalhos que se voltaram a analisar documentos oficiais do período em um determinado estado do Brasil; um que enfatizou as mudanças dos conteúdos nos livros didáticos, e por fim, um que analisou a aritmética em cadernos. Os trabalhos de França (2007; 2012) nos deram suporte na escrita sobre o Movimento da Matemática Moderna no ensino primário e suas características, e entender como o conceito de número se transformou durante o MMM. Já o trabalho de Godoi (2020) nos auxiliou no entendimento de como a aritmética foi trabalhada durante este movimento. O trabalho de Alves (2013) contribuiu no sentido de verificar elementos como a teoria de conjuntos foi incorporado por Ruy Madsen Barbosa em seus manuais.

Nesta pesquisa, abordaremos a *matemática do ensino* de fração no ensino primário, durante o MMM, com um olhar para os saberes. Logo esta pesquisa se justifica por buscar compreender como ocorreu a inserção dos números racionais durante o período de modernização do ensino de matemática no Brasil, e poderá compor um 'corpus' de trabalho que estudam as frações em diferentes vagas pedagógicas, auxiliando na expansão da História da Educação Matemática como um campo científico.

3. O MMM, AS FRAÇÕES E O ENSINO PRIMÁRIO: UM PRIMEIRO INVENTÁRIO

Neste capítulo temos o intuito de apresentar um breve panorama do que foi o Movimento da Matemática Moderna no ensino primário e posteriormente realizar um primeiro inventário, o qual, auxiliou na delimitação das fontes utilizadas nesta dissertação de mestrado.

O Movimento da Matemática Moderna, em seu extenso inventário e discussões, foi voltado, em um certo ponto, ao ensino secundário. Como afirma:

> No extenso inventário realizado sobre os estudos sobre o MMM observa-se que boa parte deles, fixou-se no ensino secundário. Mas, é preciso dizer que o nível inicial de ensino – o curso primário - também foi objeto de atenção das discussões que primeiro internacionalizam propostas e programas para um novo currículo de ensino de matemática para crianças. (DUARTE, et al., 2011, p. 98)

Mas, ressaltamos que houve discussões, contribuições, publicações, cursos, estágios, entre outras ações envolvendo o MMM no ensino primário. Durante o Seminário de Royaumont, no ano de 1959, já se discutia sobre as abordagens do MMM no ensino primário, neste seminário apresentaram algumas sugestões:

> Elas propunham a utilização de materiais concretos e familiares aos alunos para a introdução à Teoria dos Conjuntos. A observação e a experiência foram consideradas como fundamentais para o desenvolvimento da abstração matemática. Foram exemplificadas situações para que o professor explorasse o conceito de conjunto a partir dos alunos em sala de aula ou de partes do corpo, como o conjunto dos dedos na mão (CANDEIAS, 2007, apud DUARTE, et al., 2011, p. 98).

Foram sugeridas utilização de materiais concretos para introduzir à Teoria dos Conjuntos, exemplificando e explorando os conceitos a partir do visual dos alunos.

Todas as ações e atividades pertinentes ao MMM no ensino elementar eram de responsabilidade das professoras Manhucia Liberman e Anna Franchi. O GEEM se apoiava, segundo Búrigo (1989, p. 160), "no desenvolvimento concreto de uma experiência pedagógica, que foi a do Grupo Escolar Experimental da Lapa".

Anna Franchi tinha como formação o curso de Licenciatura em Matemática concluído em 1961, o curso de treinamento para professores das escolas vocacionais concluído em 1961, foi professora do ensino primário por 6 anos antes deste grupo, dentre esses anos quatro foram à escola rural.

Após uma palestra, proferida por Sangiorgi, na escola em que Anna atuava, a diretora designou-lhe a responsabilidade de estar em contato com o GEEM e pela coordenação da renovação do ensino da matemática na escola.

Segundo Búrigo (1989, p. 162):

> O primeiro curso realizado pelo GEEM para professores primários aconteceu em 1964. Em 1965, Manhucia Liberman e Anna Franchi publicaram o texto "Introdução da matemática moderna na escola primária", dedicado aos professores e com o caráter experimental.

No ano de 1967, Manhucia Liberman, Anna Franchi e Lucília Bechara, publicaram o livro "O Curso Moderno para a Escola Elementar", destinados a alunos do ensino primário.

Segundo França; Silva; Guimarães (2020) o MMM defendia as concepções levantadas por Piaget, o qual dizia que o indivíduo constrói seu conhecimento desde seu nascimento. Este período também ficou marcado pelo estruturalismo, definindo-se como:

> O estruturalismo consiste em procurar as relações que dão aos termos um valor "de posição" em um conjunto organizado, O estruturalismo implica, pois, duas ideias: a de totalidade e a de interdependência. Assume, em todo caso, a atitude totalizante. Mas para totalizar, é preciso colocar em relação aquilo que se deve mostrar também como separável. Assim, a palavra apareceu quando foi necessário designar um método ao mesmo tempo analítico e totalizante. O método permite definir o que faz a singularidade de um conjunto - sua estrutura - e, ao mesmo tempo, fornece os meios de não o fecharmos ali. (CORREIA, 2015, p.96-97)

A Teoria dos Conjuntos ganha lugar de destaque no MMM, pois defende:

> Uma linguagem axiomática e dedutiva para a disciplina, assim como uma escolha adequada das situações didáticas de aprendizagem, acabou promovendo uma supervalorização dos novos métodos e dos modos como são organizados, deixando em segundo plano, o conhecimento sobre o sujeito que aprende e de suas reais condições para aprender, criando um distanciamento entre Pedagogia e Matemática (PINTO; FELISBERTO; BERTICELLI, 2020, p. 79)

Essa linguagem axiomática e dedutiva que o MMM defendia acabou valorizando os métodos e os modos de organizar o ensino de matemática levando, assim, a Teoria dos Conjuntos a um lugar de destaque.

A vaga pedagógica do MMM foi embasada no racionalismo, dando ênfase na abstração. Ao que tange o ensino primário, as ideias de Dienes foram apropriadas, pois, introduzia os materiais manipuláveis na realização de atividades. Segundo França; Silva; Guimarães (2020, p.51) os "materiais eram utilizados com intuito dos alunos exercitarem a lógica e evoluírem no raciocínio abstrato, facilitando o trabalho com números e operações".

Dienes propôs para o ensino primário:

> A concretização dos conceitos matemáticos abstratos a partir de manipulação com materiais concretos como jogos, brincadeiras, histórias etc. Era uma proposta de ensino com uma metodologia alternativa, adequando-se ao desenvolvimento de processos psicológicos da criança. (PINTO, FELISBERTO; BERTICELLI, 2020, p. 84)

A utilização dos materiais manipuláveis, a abordagem da Teoria dos Conjuntos, o enfoque nos métodos e as técnicas foram apontadas como uma pedagogia tecnicista:

> Em tempos de MMM (1960 – 1970) nota-se uma forte presença da didática tecnicista que ao enfatizar as tecnologias de ensino tirou o centro do processo de ensino e aprendizagem do professor e do aluno e focou nos objetivos instrucionais e nas técnicas de ensino. (PINTO; FELISBERTO; BERTICELLI, 2020, p. 80)

Podemos inferir, que neste período de modernização do ensino de matemática o foco que em outras vagas eram voltadas aos alunos ou aos professores, no MMM, voltou-se para a centralidade nos objetivos instrucionais e nas técnicas de ensino.

A compreensão foi um elemento da proposta da Matemática Moderna que mais teve destaque, para o GEEM, do ensino primário, no trabalho desenvolvido em parceria com a escola e os integrantes do grupo.

> Essa preocupação com a compreensão se combinava com a preocupação de levar em consideração o desenvolvimento da criança. A partir da experiência com ensino primário, alguns conteúdos foram remetidos para séries posteriores às que previa o programa de ensino primário e o próprio exame de admissão [...] (BÚRIGO, 1989, p. 163)

Outra influência da Matemática Moderna no ensino primário, foi a unificação da linguagem matemática utilizada nos cursos superiores e ensino primário, essa influência modificou as terminologias de fração (fração própria, fração impropria, número misto), como cita Búrigo (1989, p. 164), "viés mais formalista em discussões como as que opunham à introdução do conceito de "fração", no ensino primário, a introdução do conceito de número racional, um conceito bem mais complexo".

Segundo Duarte, et al. (2011), cita que durante o MMM houve uma avalanche de informações sobre as mudanças proposta, um aumento considerável de professores nas escolas, a mudança de uma escola elitista para uma escola heterogênea, e muitos pedidos para divulgarem, de forma rápida, essas mudanças. Assim temos:

> Um dos caminhos possíveis para concretizar as reformas curriculares foi a formação, por meio de apostilas com sugestões de atividades, que subsidiassem os professores quanto às alterações propostas. Esses documentos foram os responsáveis pela institucionalização do ideário do MMM no ensino primário. Os Subsídios podem ser vistos como a oficialização das alterações metodológicas, quando introduzem e enfatizam as orientações que Zoltan Dienes preconizava. Pode-se caracterizá-los como instrumentos divulgadores da metodologia com utilização de materiais concretos, exemplificando passo a passo as atividades a serem realizadas. (DUARTE, et al., 2011, p. 102)

Percebemos por essa citação a importância dos manuais didáticos para a disseminação do ideário do MMM no Brasil, esses manuais davam subsídios aos professores para ensinar conforme as propostas de mudanças da matemática.

Podemos destacar algumas professoras que escreveram manuais didáticos para o ensino primário, abordando os ideários do MMM como: Anna Franchi, Lucília Bechara e Manhucia P. Liberman, autoras da "Coleção Curso Moderno de Matemática para as Escolas Elementares", de 1964 a 1974. Essas três autoras em conjunto com Anna Averbuch e Franca Cohen Gottlieb escreveram a "Coleção Moderno de Matemática para as Escolas de 1º grau", de 1972 a 1980. Segundo Duarte, et al. (2011, p. 103):

> Esses livros inovaram, sobretudo na forma, usando ilustrações e diálogos que simulam o processo de construção de conhecimentos em sala de aula, sendo fiéis à proposta estruturalista da matemática moderna.

Os manuais didáticos foram umas das ações que disseminaram o ideário do MMM por várias regiões do Brasil. Mas, cabe ressaltar a importância dos cursos de aperfeiçoamento realizados nesse período, esses cursos tiveram como pioneiros o GEEM.

> Talvez seja possível dizer que o MMM tenha inaugurado uma forma de contato com os professores diferente, em termos de sua formação continuada. De um modo ou de outro, esses "grupos de formação" levaram a cabo a difusão da Matemática Moderna para professores já em exercício, encontrando-os em suas práticas da "matemática tradicional". Ao que tudo indica, pioneiro nessa empreitada foi o GEEM, criado sob a inspiração do grupo estadunidense SMSG. (DUARTE, et al., 2011, p. 107)

Os cursos de aperfeiçoamento chegavam aos professores que já trabalhavam no ensino primário e trabalhavam com as práticas da "matemática tradicional".

Segundo Duarte, et al. (2011), os cursos oferecidos pelos grupos de estudos existentes e pela Secretárias de Educação, foram uma tentativa de adequar a formação desejada, de forma rápida e cômoda, complementando a formação que os professores já possuíam com o ideário do MMM.

Este breve panorama do MMM no ensino primário nos serviu de base para entender como o movimento foi introduzido no contexto do ensino primário e nos auxiliou na elaboração do inventário para a seleção de fontes. Para elaborar este inventário buscamos fontes no repositório digital da UFSC em parceria com Ghemat/Brasil.

O primeiro contato com o repositório observamos que nele havia separações dos arquivos por abas, que facilitou a coleta de materiais, logo utilizamos a aba de livros didáticos e manuais pedagógicos, neste momento da busca havia um total de 599 livros/manuais.

Para esta coleta de fonte, criamos um quadro visando facilitar a catalogação dos manuais selecionados, neste quadro contém informações relevantes para um primeiro levantamento, como, por exemplo: autor do manual, ano de publicação, título do manual e numeração. Utilizamos a numeração para organizar os arquivos baixados do repositório.

Durante esta fase, delimitamos um critério para iniciarmos as buscas por fontes, o critério utilizado foi buscar todos os arquivos datados de 1960 a 1970. Por que buscar manuais neste período? Pois, este foi o período em que o MMM estava sendo disseminado no Brasil, 1960 foi o ano antecessor da criação da primeira LDB/61 e neste mesmo viés 1970 foi o ano antecessor da unificação do ensino primário e secundário em ensino de 1º grau, a partir da LDB/71.

Ao encontrar um manual com a data de publicação dentro deste recorte temporal, os arquivos eram baixados. Nesta primeira coleta de fontes selecionamos 67 manuais, que abordavam o ensino de fração no ensino primário, entre eles encontramos manuais de exercícios, de metodologias e manuais destinados os professores. Observar o QUADRO 9.

QUADRO 9 - Coleta de fontes - primeiro critério

Autor	**Ano**	**Titulo**	**Numeração**
Sanchez, Lucilia Bechara; Liberman, Manhúcia Perelberg	1970	Grueminha ensina você a gostar de Matemática	1
Sanchez, Lucilia Bechara; Liberman, Manhúcia Perelberg	1969	Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar, 2ª edição, 4º vol., 1969.	2
Liberman, Manhúcia Perelberg; Franchi, Anna; Sanchez, Lucilia Bechara	1968	Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar, 3º vol., 1968.	3
Castrucci, Benedito	1969	Matemática Curso Moderno, 1969	4

Rocha, Arlete Vieira Machado; Barbosa, Nira Aguiar	1965	Aprendizagem Infantil na 2ª série volume 2, 1965.	5
Marquez, Ángel Diego.	1967	Didática das matemáticas elementares: o ensino das matemáticas pelo método dos números em cor ou método Cuisenaire, 1967	6
Quintella, Ary	1963	Matemática, 1a série, 106ª Edição, 1963	7
Fontoura, Afro do Amaral	1960	Prática de Ensino, 1960	8, 8.1 e 8.2
Sanchez, Lucilia Bechara; Liberman, Manhúcia Perelberg	1976	Curso Moderno de Matemática Para o Ensino de 1º grau, 3ª série, 3ª edição, 3º v., 1976	9 e 9.1
Ministério da Educação e Cultura	1962	Linguagem na Escola Primária, 1962	10
Porto, Rizza de Araújo	1967	Frações na escola elementar, 4ª Edição, 1967	11; 11.1; 11.2;
Trench, Claedmar	1962	Raciocine com a criança: problemas aritméticos e exercícios diversos, 3º grau primário, 8ª Edição, 1962.	12
Osório, Norma Cunha; Porto, Rizza de Araújo	1965	Matemática na escola primária moderna, 1965	13 e 13.1
Ministério da Educação e Saúde	1962	Matemática na escola primária, 1962	14

Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial	1965	Didática da Matemática, 1965	15
Pereira, Waldecyr C. de Araújo	1961	Matemática dinâmica com números em cores, 1961	16
Nelly Cunha e Helga J. Trein	1968	Pinceladas Verde-Amarelas - Admissão ao Ginásio, 5º ano, 2ª Edição, 1968	17
Santos, Theobaldo Miranda	1960	Noções de didática especial, 1960.	18
Santos, Theobaldo Miranda	1962	Noções de metodologia de ensino – 9ª edição, 1962.	19
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1960	Coleção Estrada Iluminada- Exercício de Gramática Funcional e Matemática Significativa, 2º ano, v. 106, 20ª Edição, 1960	20
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1960	Coleção Estrada Iluminada- A Festa do Vaga-lume, 2º ano, v. 2, 1960	21
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1961	Coleção Estrada Iluminada- O Álbum Maravilhoso, 3ºano, v. 3, 22ª Edição, 1961	22
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1967	Coleção Estrada Iluminada- O Álbum Maravilhoso, 3ºano, v. 3, 45ª Edição, 1967	23

Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1961	Coleção Estrada Iluminada- Canto da Minha Terra, 4º ano primário, v.4, 14ª Edição, 1961	24
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1968	Coleção Estrada Iluminada- Exercício de Gramática Funcional e Matemática Significativa, 4º ano, v. 8, 19ª Edição,1968	25
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1960	Coleção Estrada Iluminada - Admissão ao Ginásio, v. 5, 2ª Edição, 1960	26
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1968	Coleção Estrada Iluminada- A Festa do Vaga-lume, 2º ano, v.2, 52ª Edição,1968	27
Thofehrn, Cecy Cordeiro; Cunha, Nelly	1965	Coleção Estrada Iluminada- Exercício de Gramática Funcional e Matemática Significativa - 3ºano, v. 107, 15ª Edição,1965	28
Cunha, Nelly; Trein, Helga	1967	O Canto do Brasileiro - Série Era uma Vez, 4º ano primário, 2ª Edição, 1967.	29; 29.1 e 29.2
Santos, Theobaldo Miranda	1966	Vamos Estudar? - 3ª série primária, 26ª Edição, 1966	30
Espinheira, Ariosto	1960	Infância Brasileira - para a quarta série primária, 103ª Edição, 1960	31
Santos, Theobaldo Miranda	1960	Metodologia do Ensino Primário, 8ª Edição, 1960	32
Azevedo, Aroldo de; Cegalla,	1970	Programa de Admissão, 24ª Edição, 1970	33

Domingos Paschoal; Silva, Joaquim; Sangiorgi, Osvaldo			
Côrtes, Margarida Saraiva	1963	Exercícios e problemas de matemática, 1963	34 e 34.1
Peixoto, Andréa Fontes	1961	Aritmética – Admissão ao curso ginasial, 14ª Edição, 1961.	35; 35.1; 35.2; 35.3; 35.4 e 35.5
Correa, Cecilia Torcelli	1967	Admissão ao Ginásio - Luz do Saber, 1967.	36; 36.1; 36.2; 36.3 e 36.4
Peixoto, Vicente	1960	Aritmética e Geometria 3o. Ano primário, 1960.	37
Moraes, João Barbosa de	1963	Admissão Ginasial, 43a. Edição, 1963.	38; 38.1; 38.2 e 38.4
Santos, Theobaldo Miranda	1960	Exercícios de linguagem e matemática, 4ª serie, 10ª Edição, 1960	39
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática Moderna na Escola Elementar, vol. 4, 1970.	40 e 40.1
Morandi, Henrique	1966	Programa Mínimo de Matemática Moderna, livro I, 2a. edição, 1966.	41
Muniz, Amaury Pereira	1964	Caderno de Aritmética - admissão, vol. 1, 1964.	42
Bezerra, Manoel Jairo	1968	Matemática - Aritmética, 2ª edição, 1968	43

Sem autor, mas é assinado por Darcy Ribeiro, o então ministro da educação	1962	Matemática na Escola Primária, 1962	44
Dottori, Hugo Luciano	1966	Frações e Expressões Aritméticas, 1966	45
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática Metodologia e Complementos para professores primários, vol. 1, 1966.	46 e 46.1
Grossnickle, Foster E.; Brueckener, Leo J.	1965	O Ensino de Aritmética pela Compreensão, 1ª edição, vol. 2, 1965.	47 e 47.1
Sirangelo, Margarida de Souza; Albuquerque, Noely Sagebin de	1970	Matemática Escola Primária, 7ª edição,1970.	48
Trajano, Antonio	1962	Aritmética Elementar ilustrada, 139ª edição, 1962.	49
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática, Metodologia e Complementos, vol. 2, 1966.	50 e 50.1
Waldecyr, C. de Araujo Pereira	1962	Curso moderno de matemática - Aritmética, 1º vol., 1962.	51
Ferreira, Tosca; Carvalho, Henriqueta de	s.d.	Curso completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário, vol. 4, (s.d.).	52 e 52.1

Ferreira, Tosca; Carvalho, Henriqueta de	s.d.	Curso completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário, vol. 2, (s.d.).	53; 53.1 e 53.2
Sirangelo, Margarida de Souza; Sagebin, Noelly	1960	Nossos Exercícios de Matemática - 2º ano primário, 1960.	54 e 54.1
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática na Escola Elementar- 5º Volume, 1970.	55
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática na Escola Elementar - 2º volume, 1970.	56
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática na Escola Elementar - 3º volume, 1970.	57
Mettig, Olga Pereira; Magalhães, Maria Ligia L.	1963	Minha Aritmética - Quarto Ano, 57a. Edição, 1963.	58; 58.1 e 58.2
Azevedo, Aroldo de; Cegalla, Domingos Paschoal; Silva, Joaquim; Sangiorgi, Osvaldo	1968	Programa de Admissão, 19a. Edição, 1968.	59; 59.1; 59.2; 59.3; 59.4 e 59.5
Muniz, Amaury Pereira	1966	Iniciação à Matemática, 1966.	60; 60.1 e 60.2
Sangiorgi, Osvaldo	1963	Matemática e Estatística, 15a. Edição, 1963.	61; 61.1 e 61.2
Porto, Rizza de Araújo	1968	Ver, sentir, descobrir a Aritmética, 10a. Edição, 1968.	62

Cavalcante, Luiz G.	1968	Ensino Moderno da Matemática, 3º ano, 1968.	63
Roxo, Maria Helena; Neves, Maria Luiza do Carmo	1969	Didática Viva da Matemática no Curso Primário, 1969.	64
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática, Metodologia e Complementos, v.3, 1966.	65
Porto, Rizza de Araújo	1965	Ver, sentir, descobrir a Aritmética, 1965.	66
Santos, Theobaldo Miranda	1965	Vamos estudar? - 4a. série primária, 86a. Edição	67

FONTE: Elaborado pelo Autor.

Neste quadro 9, podemos observar a grande gama de manuais publicados durante a disseminação do MMM no Brasil, alguns desse manuais publicados, ou são para o ensino primário ou para o ensino ginasial e não abordam o ensino segundo o MMM, logo decidimos estabelecer um novo critério para as buscas.

O novo critério estabelecido é de que o manual além de estar datado entre os anos de 1960 a 1970, deveriam ser destinados ao ensino primário e voltados para as concepções do MMM. Porque o ensino primário? E, porque as concepções do MMM? Durante o primeiro levantamento, em uma leitura inicial, percebemos que alguns manuais encontrados eram do ensino secundário de outras vagas pedagógicas, assim, decidimos por restringir a nossa buscar neste novo critério.

Com este novo critério encontramos 19 manuais que vão ao encontro do que buscamos utilizando este novo filtro. Observe os resultados desta nova busca no QUADRO 10:

QUADRO 10 - Coleta de fontes - segundo critério

Autor	**Ano**	**Titulo**	**Numeração**

Sanchez, Lucilia Bechara; Liberman, Manhúcia Perelberg	1969	Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar, 2ª edição, 4º vol., 1969.	1
Liberman, Manhúcia Perelberg; Franchi, Anna; Sanchez, Lucilia Bechara	1968	Curso Moderno de Matemática para a Escola Elementar, 3º vol., 1968.	2
Marquez, Ángel Diego.	1967	Didática das matemáticas elementares: o ensino das matemáticas pelo método dos números em cor ou método Cuisenaire, 1967	3
Osório, Norma Cunha; Porto, Rizza de Araújo	1965	Matemática na escola primária moderna, 1965	4 e 4.1
Pereira, Waldecyr C. de Araújo	1961	Matemática dinâmica com números em cores, 1961	5
Cunha, Nelly; Trein, Helga	1967	O Canto do Brasileiro - Série Era uma Vez, 4º ano primário, 2ª Edição, 1967.	6; 6.1 e 6.2
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática Moderna na Escola Elementar, vol. 4, 1970.	7 e 7.1
Morandi, Henrique	1966	Programa Mínimo de Matemática Moderna, livro I, 2a. edição, 1966.	8
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática Metodologia e Complementos para professores primários, vol. 1, 1966.	9 e 9.1
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática, Metodologia e Complementos, vol. 2, 1966.	10 e 10.1

Ferreira, Tosca; Carvalho, Henriqueta de	s.d.	Curso completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário, vol. 4, (s.d.).	11 e 11.1
Ferreira, Tosca; Carvalho, Henriqueta de	s.d.	Curso completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário, vol. 2, (s.d.).	12; 12.1 e 12.2
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática na Escola Elementar- 5º Volume, 1970.	13
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática na Escola Elementar - 2º volume, 1970.	14
Toledo, Maria do Carmo Arruda	1970	Matemática na Escola Elementar - 3º volume, 1970.	15
Cavalcante, Luiz G.	1968	Ensino Moderno da Matemática, 3º ano, 1968.	16
Roxo, Maria Helena; Neves, Maria Luiza do Carmo	1969	Didática Viva da Matemática no Curso Primário, 1969.	17
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática, Metodologia e Complementos, v.3, 1966.	18
Sanchez, Lucilia Bechara; Liberman, Manhúcia Perelberg	1970	Grueminha ensina você a gostar de Matemática	19

FONTE: Elaborado pelo Autor.

Com essa nova busca restringimos as nossas fontes, de modo a encontrar os manuais do período em estudo. Como portamos 19 manuais, acrescentamos um novo critério para as buscas. O novo critério estabelecido será os manuais direcionados aos professores que ensinam matemática no ensino primário, restringindo um pouco mais o nosso universo de fontes. Mas por que restringir a destinação dos manuais para professores? Pois, como buscamos os *saberes para ensinar* e os *saberes a ensinar* estes, no que lhe concerne, estão ligados aos saberes que os professores que ensinam matemática detêm em sua profissão. Assim, delimitamos que os manuais devem ser destinados aos professores, ou com orientações aos professores. Ver QUADRO 11:

QUADRO 11 - Coleta de fontes - terceiro critério

Autor	Ano	Título	Numeração	OBS
Osório, Norma Cunha; Porto, Rizza de Araújo	1965	Matemática na escola primária moderna, 1965	1 e 1.1	Direcionado a professores do ensino primário, contendo orientações para o ensino e atividades com frações.
Pereira, Waldecyr C. de Araújo	1961	Matemática dinâmica com números em cores, 1961	2	Direcionado a professores do ensino primário, secundário, comercial e industrial, contendo orientações e didática de ensino com frações.
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática Metodologia e Complementos para professores primários, vol. 1, 1966.	3 e 3.1	Direcionado a professores primários, contendo

				matemática, metodologia e complementos.
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática, Metodologia e Complementos, vol. 2, 1966.	4 e 4.1	Direcionado a professores primários, contendo matemática, metodologia e complementos.
Ferreira, Tosca; Carvalho, Henriqueta de	s.d.	Curso completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário, vol. 4, (s.d.).	5 e 5.1	Direcionado a professores do 4º ano do ensino primário, contendo metodologia e didática.
Ferreira, Tosca; Carvalho, Henriqueta de	s.d.	Curso completo de Matemática Moderna para o Ensino Primário, vol. 2, (s.d.).	6; 6.1 e 6.2	Direcionado a professores do 2º ano do ensino primário, contendo metodologia e didática.
Roxo, Maria Helena; Neves, Maria Luiza do Carmo	1969	Didática Viva da Matemática no Curso Primário, 1969.	7	Direcionado a professores do ensino primário, contendo conteúdo e materiais que auxiliam a

				preparação das aulas.
Barbosa, Ruy Madsen	1967	Matemática, Metodologia e Complementos, v.3, 1967.	8	Direcionado a professores primários, contendo aritmética teoria-prática.

FONTE: Elaborado pelo Autor.

Ao final desta terceira pesquisa encontramos 8 manuais que tem como foco os professores do ensino primário, publicados entre os anos de 1960 a 1970, com características do MMM. Mas ainda assim são muitos manuais, então elencamos o nosso último critério da seguinte forma, dentre estes 8 manuais selecionamos os manuais que tiverem no título a palavra Metodologia, pois a nossa pesquisa tem como intuito de caracterizar os saberes a/para ensinar.

Desta forma, selecionamos os seguintes manuais como fonte para esta pesquisa, ver QUADRO 12, abaixo:

QUADRO 12 - Coleta de fontes - quarto critério

Autor	Ano	Titulo	Numeração	OBS
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática Metodologia e Complementos para professores primários, vol. 1, 1966.	1 e 1.1	Direcionado a professores primários, contendo matemática, metodologia e complementos.
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática, Metodologia e Complementos, vol. 2, 1966.	2 e 2.1	Direcionado a professores primários, contendo

				matemática, metodologia e complementos.
Barbosa, Ruy Madsen	1966	Matemática, Metodologia e Complementos, v.3, 1966.	3	Direcionado a professores primários, contendo aritmética teoria-prática.

FONTE: elaborado pelo autor.

O inventário, após a delimitação de cinco critérios, chegamos a este último quadro, contendo 3 manuais que compreendem uma coleção de autoria de Ruy Madsen Barbosa, publicamos no ano de 1966, manuais estes destinados à formação de professores primários, contendo teoria e prática no volume I, metodologia no volume II e complementos no volume III.

Estes manuais foram analisados a partir das categorias elencadas no capítulo 1, *saberes a ensinar*, *saberes para ensinar*, *sequência*, *graduação*, *dispositivos didáticos*, *significado* e *exercícios e problemas*. Estas categorias nos auxiliaram na verificação de uma possível *matemática do ensino* de frações nos manuais de Ruy Madsen Barbosa.

4. RUY MADSEN BARBOSA E A COLEÇÃO "MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS PARA PROFESSORES PRIMÁRIOS"

Neste capítulo buscamos descrever um breve percurso profissional do professor Ruy Madsen Barbosa, buscando indícios da participação deste professor no GEEM, informações sobre sua carreira profissional que levam a elaboração dos manuais didáticos "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários". Por fim, buscamos descrever os manuais escolhidos.

Iniciamos com o seguinte questionamento, quem foi Ruy Madsen Barbosa?

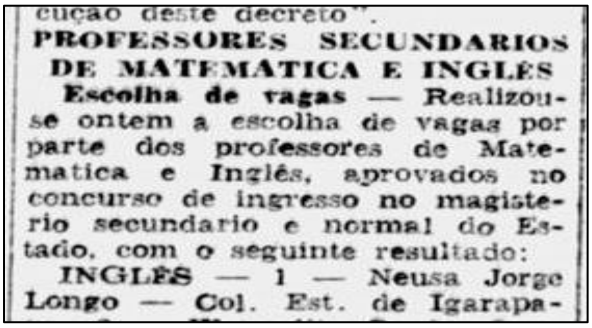
> O professor Ruy foi um dos idealizadores do curso de Matemática criado na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Araraquara (UNESP) em 1966, mesmo ano da publicação dos livros que aqui estudamos. Também na década de 1960, ele foi um dos criadores e membro da primeira diretoria do GEEM (Grupo de Estudo do Ensino da Matemática) e do CRAEM (Centro Regional de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática), grupos de estudos que tiveram forte influência para que o Movimento Matemática Moderna circulasse no Brasil. (MILANEZ, 2020, p. 12)

Ruy Madsen nasceu no ano de 1931, no município de Campinas no estado de São Paulo, terminando em 1950 o colegial. Segundo Martins-Saladim (2012), cursou Desenho Técnico Arquitetônico e Desenho Técnico em Mecânica. No ano de 1951 iniciou a sua graduação na Universidade Católica de Campinas, neste período em paralelo com a graduação fazia o Curso Preparatório de Oficiais da Reserva (CPOR), concluindo em 1952.

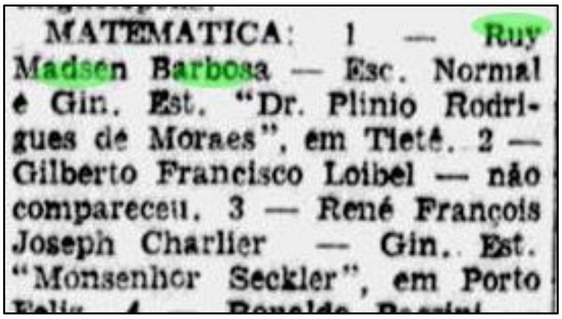
Após o término do curso CPOR, foi chamado pelo reitor da Universidade Católica de Campinas para ministrar aula de Desenho do Curso de Formação de Professores de Trabalhos Manuais. Assim, durante sua graduação em matemática, Ruy Madsen Barbosa atuou como professor de desenho da mesma instituição. (MARTINS-SALADIM, 2012).

Na busca de informações na Hemeroteca Brasileira Digital (HBD), encontramos indícios que Ruy Madsen Barbosa atuou como professor do ensino secundário, passando em dois concursos na primeira colocação nos anos de 1955 e 1956.

FIGURA 1 - Aprovação em concursos



cução deste decreto".
PROFESSORES SECUNDARIOS DE MATEMATICA E INGLÊS
Escolha de vagas — Realizou-se ontem a escolha de vagas por parte dos professores de Matematica e Inglês, aprovados no concurso de ingresso no magistério secundario e normal do Estado, com o seguinte resultado:
INGLÊS — 1 — Neusa Jorge Longo — Col. Est. de Igarapa-



MATEMATICA: 1 — Ruy Madsen Barbosa — Esc. Normal e Gin. Est. "Dr. Plinio Rodrigues de Moraes", em Tietê. 2 — Gilberto Francisco Loibel — não compareceu. 3 — René François Joseph Charlier — Gin. Est. "Monsenhor Seckler", em Porto

FONTE: Jornal Correio Paulistano (HBD, 1955, p. 6)

FIGURA 2 - Escolha de vagas do concurso

PROFESSORES DE MATEMATICA ESCOLHERAM VAGAS
Os professores secundarios de Matematica, aprovados em concurso de ingresso no magisterio estadual, escolheram vagas onte, a saber:
1 — Ruy Madsen Barbosa, Ginasio Estadual de Boituva; 2 — Dirce da Silva Damato Capuani, Gin. Est. "José J. Bittencourt", de Palmital; 3 — Pedro Nabuco Gambale, Desistiu; 4 — Rosa Feldmann, Não compareceu; 5 — Manuel Arthur Amorosini, Desistiu; 6 — Fernando de Campos Guerra, Gina-

FONTE: Jornal Correio Paulistano (HBD, 1956, p. 3)

Nestes dois recortes percebemos indícios que Ruy Madsen Barbosa atuou no ensino secundário, em 1955 como professor da Escola Normal e Ginásio Estadual "Dr. Plínio Rodrigues de Moraes" em Tietê. Já em 1956, foi aprovado no concurso no Ginásio Estadual de Boituva.

Segundo Milanez (2020, p. 174):

> O doutorado de Ruy Madsen foi desenvolvido entre os anos de 1958 e 1961, não sendo sequência de um mestrado – como é usual atualmente – pois trata-se de uma época em que ainda inexistia um sistema de pós-graduação no Brasil. Em 1965 obteve o título de Livre-docente, depois de Professor Adjunto e posteriormente de Professor Titular. Dedicou grande parte da sua vida ao ensino da Matemática, incluindo produções que acompanharam os movimentos de ensino da época.

Professor que atuou no GEEM, compondo a primeira diretoria do grupo, um dos professores criadores do curso de matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de

Araraquara no ano de 1966, atuou como escritor de manuais, o qual destacamos um quadro construída por Martins; Luiz (2020) que apresenta algumas de suas produções:

QUADRO 13 - Produções de Ruy Madsen Barbosa

Tombo	Titulo	Autor	Volume	Ano
2220	Matemática, metodologia e complementos	BARBOSA, R. M. - B195	3	1969
2264	Combinatória e Grafos	BARBOSA, R. M. - B195		1974
2265	Grupos e Combinatória	BARBOSA, R. M. - B195		1979
2267	Combinatória e Grafos	BARBOSA, R. M. - B195	2	1975
2290	Matrizes, determinantes, sistemas lineares	ESPADA FILHO, A. - E1 BARBOSA, R. M. - B195		1971
2327	Matemática, metodologia e complementos	BARBOSA, R. M. - B195	1	1967
2386	Frações Contínuas	BARBOSA, R. M. - B195		1977
2423	Cálculo Numérico: Cálculos Aproximados	BARBOSA, R. M. - B195	3	1972
2424	Cálculo Numérico: Cálculos Aproximados	BARBOSA, R. M. - B195	3	1978
2482	Sôbre a Circuferência de R. Madsen	BARBOSA, R. M. - B195		1952
2503	Descobrindo padrões em mosaicos	BARBOSA, R. M. - B195		1993
2504	Descobrindo padrões em mosaicos	BARBOSA, R. M. - B195		1993
2505	Descobrindo a geometria fractal	BARBOSA, R. M. - B195		2002
2506	Descobrindo a geometria fractal	BARBOSA, R. M. - B195		2005

FONTE: Martins; Luiz (2020, p. 76)

Esta tabela é resultado da catalogação do acervo pessoal de Ruy Madsen Barbosa, o qual, após a sua morte, em 06 de julho de 2017, foi doado pela família do professor para o Grupo de História Oral e Educação Matemática (GHOEM). Este grupo está realizando projetos que visam digitalizar e organizar os materiais cedidos pela família de Ruy Madsen Barbosa.

A partir desta tabela podemos inferir que Barbosa, concentrou sua produção em manuais voltados para o ensino superior, para temática de Análise Combinatória, Grupos, Cálculo Numérico, entre outros. Segundo Martins-Saladim (2012, p. 90), Ruy Madsen Barbosa "foi quem introduziu matrizes, no ensino secundário, no Brasil". Como relata em uma entrevista para Lima (2006):

> Fui eu quem introduziu matrizes no curso secundário, no Brasil /.../ não se dava matrizes no ensino colegial, ficava se dando teoremas, teoremas de determinantes, porque só dos determinantes, a quantidade de teoremas é muito grande /.../ as matrizes eram mais apropriadas, elas são mais férteis como fontes para muitos tópicos de matemática aplicada (depoente Ruy Madsen Barbosa).

Lima (2006) ainda relata que para publicar este manual sobre matrizes, Ruy Madsen Barbosa, apresentou ao GEEM que discutiu sobre e aprovou, e após a aprovação é realizado as experiências no ensino secundário de Araraquara.

Ainda sobre matrizes, em uma entrevista para Martins-Saladim (2012, p. 105), José Gaspar Ruas Filho (foi aluno da primeira turma do curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) de Araraquara), menciona que:

> /.../ o Ruy foi um dos que introduziu o estudo de matrizes no Brasil. O Ruy deu cálculo numérico também, cálculo operacional, e esta disciplina nós estudamos num livro em inglês também, não me lembro quem deu aquele curso, acho que foi o... Talvez mudaram o nome de alguma disciplina para o modo como ela aparece no meu histórico... (depoente José Gaspar Ruas Filho).

A partir dos depoimentos de Ruy Madsen Barbosa e José Gapar Ruas Filho, buscamos por indícios que nos auxiliassem na verificação deste fato, Ruy foi quem introduziu o estudo de matrizes no Brasil, nesta busca por indícios encontramos a segunda edição do manual "Matemática Moderna para o Ensino Secundário", publicado no ano de 1965 pelo grupo GEEM.

Tal manual apresenta "sugestões para um roteiro de Programa para a cadeira de Matemática, Curso Secundário: 1.º ciclo, 2.º ciclo e Normal, da Secretaria da Educação S. Paulo (Departamento de Educação), que constou do Diário Oficial de São Paulo, do dia 19/1/1965" (GEEM, 1965, s.p.).

O índice do manual nos dá uma visão de quais assuntos estavam sendo tratados neste manual e quais foram os autores, como podemos verificar nas figuras abaixo:

FIGURA 3 - Índice do manual "Matemática Moderna para o Ensino Secundário"

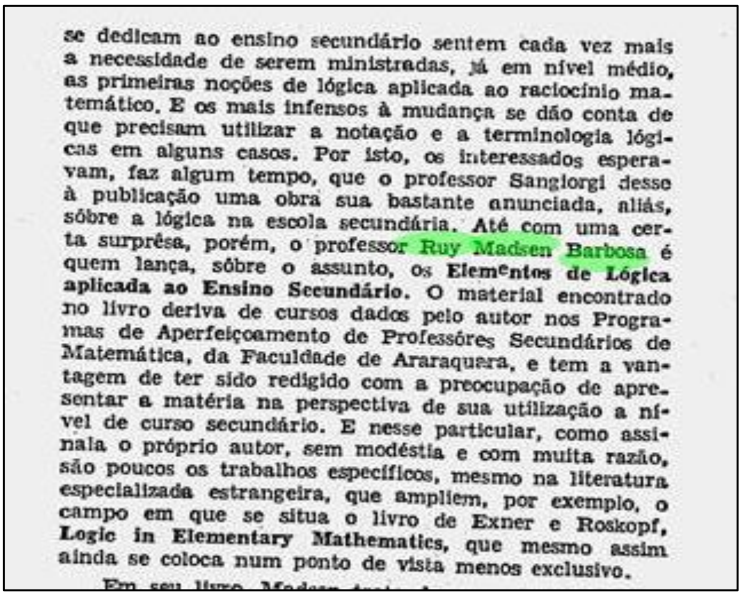
ÍNDICE

FONTE: GEEM (1965, s.p.)

Na segunda parte do índice, podemos verificar a presença do autor Ruy Madsen Barbosa, o qual escreve um capítulo sobre “Introdução Elementar de Matrizes no Curso Colegial”. Por se tratar de um manual do GEEM, com parceria com o Estado de São Paulo, que tomou proporções de currículo no referido estado, podemos inferir que Ruy Madsen Barbosa foi um dos precursores da introdução de matriz no curso colegial.

Na Hemeroteca também encontramos indícios que mostram a influência de Ruy Madsen Barbosa no ensino secundário, como mostra a figura a seguir:

FIGURA 4 - Influência de Ruy Madsen Barbosa no Ensino Secundário



se dedicam ao ensino secundário sentem cada vez mais a necessidade de serem ministradas, já em nível médio, as primeiras noções de lógica aplicada ao raciocínio matemático. E os mais infensos à mudança se dão conta de que precisam utilizar a notação e a terminologia lógicas em alguns casos. Por isto, os interessados esperavam, faz algum tempo, que o professor Sangiorgi desse à publicação uma obra sua bastante anunciada, aliás, sôbre a lógica na escola secundária. Até com uma certa surprêsa, porém, o professor Ruy Madsen Barbosa é quem lança, sôbre o assunto, os **Elementos de Lógica aplicada ao Ensino Secundário**. O material encontrado no livro deriva de cursos dados pelo autor nos Programas de Aperfeiçoamento de Professôres Secundários de Matemática, da Faculdade de Araraquara, e tem a vantagem de ter sido redigido com a preocupação de apresentar a matéria na perspectiva de sua utilização a nível de curso secundário. E nesse particular, como assinala o próprio autor, sem modéstia e com muita razão, são poucos os trabalhos específicos, mesmo na literatura especializada estrangeira, que ampliem, por exemplo, o campo em que se situa o livro de Exner e Roskopf, **Logic in Elementary Mathematics**, que mesmo assim ainda se coloca num ponto de vista menos exclusivo.

FONTE: Jornal Correio da Manhã (RJ) (HBD, 1968, p. 4)

Percebemos neste recorte do Jornal Correio da Manhã (RJ) de 1968, que Ruy Madsen Barbosa buscava inserir uma noção de lógica no ensino secundário, para aprimorar o raciocínio matemático dos alunos, como ferramenta para esta inserção Barbosa lança o manual “Elementos de Lógica Aplicada ao Ensino Secundário”.

Ruy Madsen Barbosa foi um professor que ministrava cursos para professores e em universidades, temos um registro em que Ruy Madsen Barbosa ministrou uma conferência sobre o cálculo numérico e conferências sobre a Matemática Moderna.

FIGURA 5 - Conferência ministrada por Ruy Madsen Barbosa na Semana da Matemática Moderna

SEMANA DA MATEMÁTICA

MODERNA

Sob a supervisão do catedrático, prof. Henrique Morandi, realizou-se, em outubro, a Semana do Ensino da Matemática Secundária, com a colaboração de vários mestres de renome do país. No dia 9 de outubro, foi aberto solenemente o certame com uma conferência do prof. Mário de Oliveira, sôbre o tema *A Geometria Moderna*. Além do catedrático, pronunciaram conferências durante a Semana os profs. Ulisses Carneiro, Clemenceau Chiabi Saliba, Edson Durão Júdice, Pedro Mendes, Aristides Camargos, Wagner Brandão de Oliveira, Scipione di Pierro Netto, Luís Mauro Rocha, Ruy Madsen Barbosa. Na sessão de encerramento, foi prestada uma homenagem ao Prof. José Alcides Ferreira, como um protótipo do mestre brilhante e dedicado. As palestras eram seguidas de debates e exposições práticas.

FONTE: Informativo do Colégio Municipal (MG) (HBD, 1967, p. 6)

Podemos inferir que, além de professor universitário e secundário, escritor de manuais, participante do GEEM, membro da diretoria deste grupo, disseminador das ideias do MMM, Ruy Madsen Barbosa proferiu cursos sobre a matemática moderna. Neste evento, Semana da Matemática Moderna em Minas Gerais, obteve como resultado a criação do Grupo de Estudo do Ensino da Matemática de Minas Gerais (GEEMMIG).

Em relação aos cursos de formação de professores, temos indícios da participação de Ruy Madsen Barbosa. Como podemos observar em Lima (2006), em sua dissertação, apresenta um cronograma de um curso chamado: "Curso de Férias de Verão" realizado em fevereiro de 1965, com parceria do GEEM com o Ministério de Educação e Cultura (Diretoria do Ensino Secundário) e com a Secretaria de Educação de São Paulo (Serviço de Expansão Cultural), o qual podemos verificar a parceria entre o GEEM e a Secretária de Educação), constatemos o cronograma:

FIGURA 6 - Cronograma do Curso de Férias de Verão (1965)

Responsáveis		1º Estágio Sílvio Nepomuceno e Douglas Belluomo				2º Estágio Alcides Bóscolo e Rubener Freitas			3º Estágio Irineu Bicudo			
DIA		8h	9h	10h	11h	13h	14h	15h	15h	16h	17h	20h
1	2ª	S. Inaug.		Pr	Pr	CI	AM1	V.GA	Top	AM2	Se.	-
2	3ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	V.GA	Top	AM2	PL	-
3	4ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	V.GA	Top	AM2	PL	CN
4	5ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	V.GA	Top	AM2	PL	CN
5	6ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	V.GA	DEBATES		PL	-
8	2ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	Pb	Top	AM2	Se.	-
9	3ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	Pb	Top	AM2	Se.	CN
10	4ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	Pb	Top	AM2	Se.	-
11	5ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	Pb	Top	AM2	Se.	CN
12	6ª	TC	LM	Pr	Pr	CI	AM1	Pb	DEBATES		Se.	-
13	sábado	AVALIAÇÃO				AVALIAÇÃO			AVALIAÇÃO			

SIGLAS	DISCIPLINAS	PROFESSORES REGENTES
TC	Teria dos Conjuntos	Benedito Castrucci
LM	Lógica Matemática	Osvaldo Sangiorgi
CI	Cálculo Infinitesimal	Alésio de Caroli
AM1	Álgebra Moderna 1	Renate Watanabe
V.GA	Vetores e Geometria Analítica	Carlos Calioli
Pb	Probabilidades	Flavio Wagner Rodrigues
Top	Topologia	Carlos B. Lyra
AM2	Álgebra Moderna 2	L.H. Jacy Monteiro
PL	Programação Linear	Ruy Madsen Barbosa
Se.	Seminários de Ensino	Irineu Bicudo
CN	Sessões de Estudo – Curso Normal	Alcides Bóscolo Manhúcia P. Liberman
Pr	Práticas Modernas	

Práticas Modernas:

DIA		TURMA	TÓPICOS	PROFESSOR
1	2ª	A-B	Conjuntos	Elza Babá
		B-A	Número e Numeral	Osvaldo Sangiorgi
2	3ª	A-B	Operações e Propriedades Estruturais	Sílvio Nepomuceno
		B-A	Números Racionais Absolutos	Elza Babá
3	4ª	A-B	Operações e Propriedades Estruturais	Sílvio Nepomuceno
		B-A	Números Racionais Relativos	Elza Babá

4	5ª	A-B	Operações e Propriedades Estruturais	Sílvio Nepomuceno
		B-A	Múltiplos e Divisores	Manhúcia P. Liberman
5	6ª	A-B	Geometria	Manhúcia P. Liberman
		B-A	Resolução de Equações e Inequações	Osvaldo Sangiorgi
8	2ª	A-B	Geometria	Manhúcia P.Liberman
		B-A	Resolução de Sistemas de Equações	Osvaldo Sangiorgi
9	3ª	A-B	Trinômio do 2º grau	Clara Betanho
		B-A	Geometria	José Bezerra
10	4ª	A-B	Trinômio do 2º grau	Clara Betanho
		B-A	Geometria	José Bezerra
11	5ª	A-B	Bases de Numeração	Sílvio Nepomuceno
		B-A	Geometria	Lucília Bechara
12	6ª	EXERCÍCIOS E DEBATES		

Sessões de Estudos – Curso Normal:

TÓPICOS	PROFESSORES
Algoritmo da divisão – Sistemas de numeração; Justificação das técnicas operatórias (Quatro Operações)	Alcides Bóscolo
Modernização da linguagem do futuro professor primário	Manhúcia P. Liberman

FONTE: Lima (2006, p. 61; 62; 63)

A partir dos indícios apresentados, por integrar a diretoria do GEEM e ter ministrado a disciplina de Programação Linear no referido curso, conclui-se que Ruy Madsen Barbosa foi chamado pelo Estado para ministrar os cursos sobre a Matemática Moderna em conjunto com outros integrantes do GEEM.

Ainda em Lima (2006), a autora apresenta a estrutura do curso de férias, realizado em 1968, com o convênio da chefia do Departamento do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Cultura de São Paulo, este curso foi realizado em duas cidades distintas, mas de forma simultânea, um, na cidade de São Paulo e outro na cidade de São Manuel, em São Paulo. Foram realizados dois estágios; aos moldes do curso de férias de 1967, e em São Manuel fora realizado apenas o primeiro estágio.

> [...] as disciplinas do 1º estágio do curso de 1967 [...] são: Teoria dos Conjuntos, Lógica Matemática e Práticas Modernas, no entanto foi acrescida da disciplina de Álgebra Moderna I, e essas disciplinas foram ministradas pelos professores Eliana E. Riscalla, Auri Estala Barradas Cardoso, Maria Lucia M. Schmit, Daysi Ortis de Camargo e Pedro Jussier.
> Já no segundo estágio, as disciplinas forma: Geometria Elementat e álgebra Linear; Polinômios e Equações Algebricas, Campus Numéricos, Cálculo Analógico, Estatística, Probabilidade e Combinatória, lecionadas pelos professores Dorival A. Mello, Jacy Monteiro, João Afonso Pascarelli, Michel Aymard, Flavio Manzoli e Ruy Madsen Barbosa, respectivamente. (LIMA, 2006, 78-79)

No que se refere aos estágios, vale ressaltar a existência de três categorias de cursos propostos pelo GEEM, os cursos que tinham um estágio, dois estágios e três estágios.

Segundo Lima (2006) o primeiro estágio era voltado para aos professores de matemática que não eram formados nesta ciência, continha as disciplinas básicas do MMM e também as práticas modernas (disciplinas como: operações e propriedades estruturais, números racionais absolutos e relativos, múltiplos e divisores, etc.); o segundo estágio era voltado à formação do professor de matemática (disciplinas como: cálculo infinitesimal, introdução ao cálculo, álgebra moderna, álgebra linear, etc.); o terceiro estágio, era um espaço de debate e palestras sobre a Matemática Moderna, onde os formadores e alunos tinham um pequeno espaço para compartilhar as suas experiências em salas experimentais (disciplinas como: álgebra linear II, programação linear, introdução à estatística, etc.).

Após a análise dos documentos encontrados nesta pesquisa, consideramos que ainda não temos elementos suficientes para considerar que Ruy Madsen Barbosa é um expert do período da Matemática Moderna, pois não encontramos evidências de que ele tenha sido convocado pelo Estado. Mas ressaltamos a sua expertise dada por saberes necessários no período em estudo, destinados à formação de professores, na elaboração de materiais didáticos e na disseminação do ideário do MMM.

Por outro lado, segundo França e Santos (2021), para ser considerado *expert* é necessário atender os seguintes critérios:

> [...] haver o reconhecimento social da expertise do educador; por meio da apropriação de concepções educacionais que circularam em nível internacional, aliadas às suas experiências docentes, ser capaz de resolver problemas relacionados à cultura em que esse profissional está inserido; responder às demandas do Estado; ser capaz de sistematizar saberes no âmbito educacional; fomentar a circulação desses saberes. (p. 216)

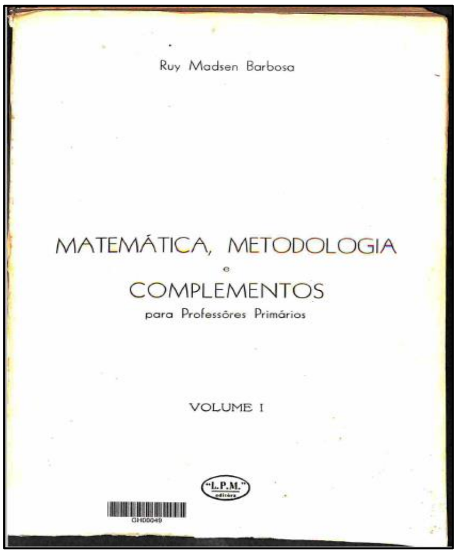
A nossa pesquisa aponta que Ruy Madsen Barbosa atende a esses critérios quando considerado como membro do GEEM, pois, parcerias foram estabelecidas com este grupo, mas a atividade foi realizada por Madsen e outros membros, também poderíamos considerar a especificidade do MMM, onde a expertise dos membros de grupos como o GEEM e de outros grupos, ditaram elementos para decisões públicas no que diz respeito à governança em educação e adoção de novas concepções sobre os saberes em educação.

Considerando a autoria de manuais para o ensino primário, nesta dissertação analisaremos a coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” em seus três volumes, publicados no ano de 1966, identificando a *matemática do ensino* de frações nestes manuais, o qual descreveremos nas próximas seções.

4.1 - MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS PARA PROFESSORES PRIMÁRIOS, VOLUME I

Nesta subseção descrevemos o manual “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” de autoria de Ruy Madsen Barbosa, publicado no ano de 1966 pela editora “L. P. M.”. O exemplar possui 7 capítulos contendo 310 páginas e vai abordar a aritmética teórico-prática.

FIGURA 7 - Capa do manual "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", vol. I



FONTE: Repositório do Ghemat/Brasil

O volume I deste manual foi publicado no ano de 1966, pela editora “L.P.M.”. Em seu prefácio, traz algumas ponderações importantes, como, por exemplo:

> Entrego aos prezados leitores este trabalho de Matemática, não “porque a nossa literatura correlata não possua outros trabalhos”, não “porque não existam grandes obras dos diversos gêneros aqui desenvolvidos”, “chavões” tão fáceis de serem empregados; mas, pura, categórica e simplesmente, por

> julgar os livros em nossa língua insuficientes aos fins que a este destino." (BARBOSA, 1966, p. 9)

Podemos dizer que este trecho do prefácio de Ruy Madsen Barbosa, mostra o descontentamento com os manuais e com a linguagem que estavam sendo apresentados, chamando a atenção que existem outros, por julgar a linguagem insuficiente, ele propõe este novo manual.

O manual em questão está dividido em 3 partes: a primeira parte fala sobre a aritmética teórico-prática, a segunda parte fala sobre a metodologia e a terceira parte sobre complementos.

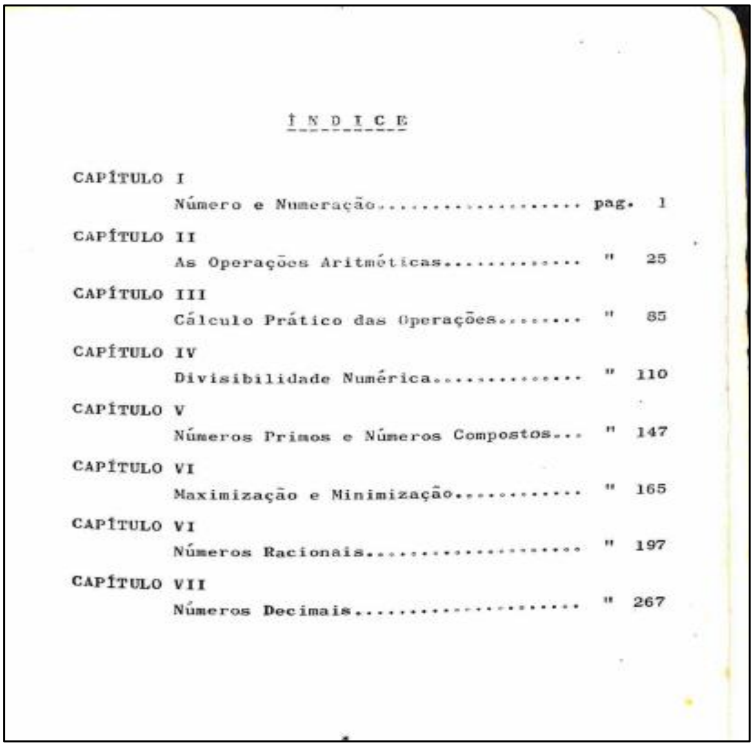
Segundo Barbosa (1966), com a chegada do MMM no Brasil, em 1961, começou a estudar a fundo a aritmética do ensino primário, buscando integrar o ideário deste movimento dando ênfase nas noções de teoria dos conjuntos e destacando às estruturas operatórias.

> Ao iniciar a redação, tive oportunidade de encontrar nos livros do grupo de pesquisadores, de psicólogos, lógicos, matemáticos, e de epistemologia genética, material que me deu novas forças e convicção no caminho escolhido. (BARBOSA, 1966. p.10)

Ruy Madsen Barbosa dedica este manual para professores primários, futuros professores primários, professores primários em aperfeiçoamento, professores de matemática, professores de prática de ensino ou metodologia e futuros professores de pedagogia.

O volume I da coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" apresenta a seguinte organização:

FIGURA 8 - Índice do manual "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", vol. I



ÍNDICE

FONTE: Repositório do Ghemat/Brasil.

O capítulo I vai tratar de número e numeração, o autor inicia com a noção de conjunto, com a justificativa que ajudará nos próximos capítulos. O capítulo II vai iniciar com as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) utilizando as propriedades (comutativa, elemento neutro, associativa, etc.).

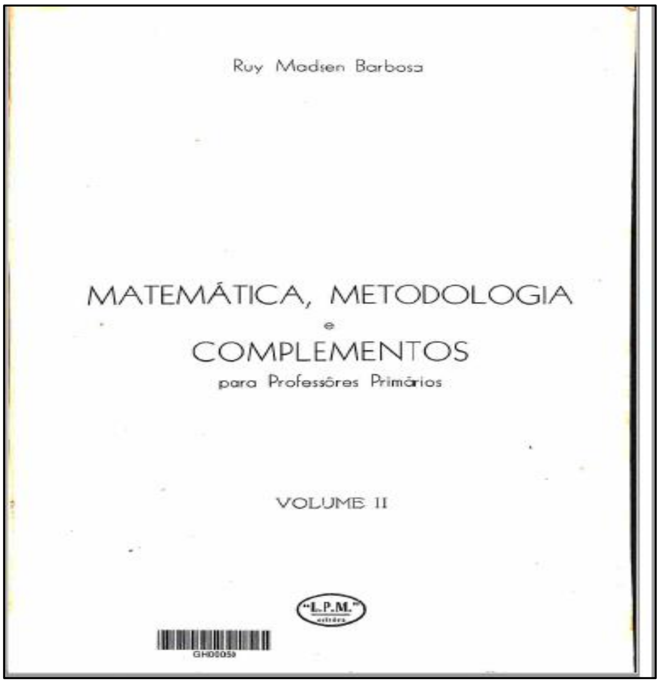
Já no capítulo III iniciará com o cálculo prático das operações a partir da composição de números. O capítulo IV trata dos critérios de divisibilidade. O capítulo V vai abordar os números primos e os números compostos utilizando propriedades, fórmulas e regras práticas.

O capítulo VI abordará a Maximização e a minimização a partir de algoritmos e propriedades. O capítulo VII vai tratar dos números racionais, introduzindo o conceito de frações, que será o capítulo em que será aprofundado nosso estudo. O capítulo VIII abordará os números decimais a partir de teoremas, definições, condições, etc. abordando também alguns tipos de frações.

4.2 MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS PARA PROFESSORES PRIMÁRIOS, VOLUME II

O manual “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” é o segundo volume da coleção destinado a professores do ensino primário.

FIGURA 9 - Capa do manual "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", vol. II



FONTE: Repositório do Ghemat/Brasil.

O volume II tem como tema central a metodologia da aritmética para o ensino primário, foi publicado no ano de 1966, pela “L.P.M” Editora. Este manual tem um total de 244 páginas, tendo uma página de errata e índice e está divido em XI capítulo.

FIGURA 10 - Índice do manual "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", vol. II

Í N D I C E

FONTE: Repositório do Ghemat/Brasil.

O capítulo I trata dos primeiros passos com os números. O capítulo II vai tratar o início da adição e numeração superior a nove. O capítulo III abordará o início da subtração, sucessões e as associatividades. O capítulo IV abordará o início da multiplicação, propriedades e o início da divisão.

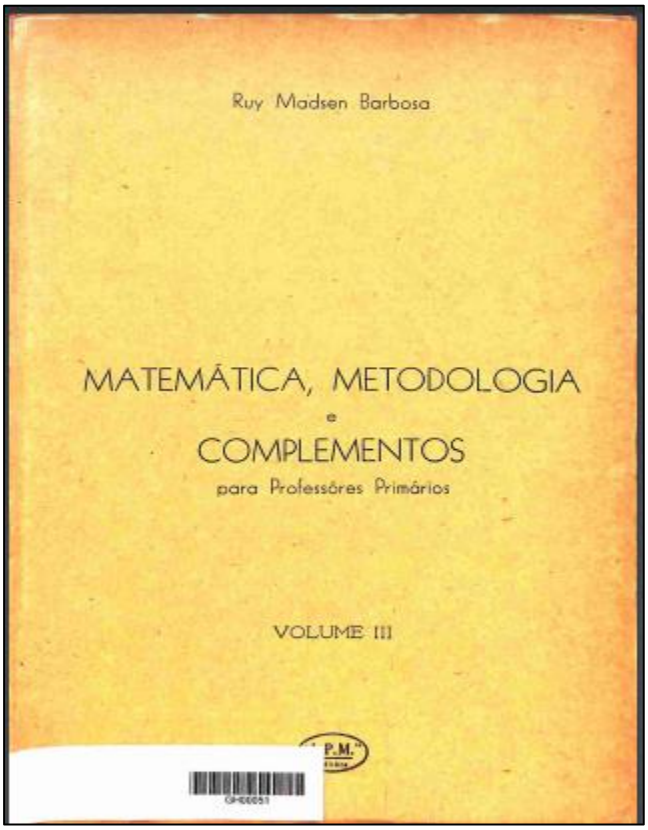
O capítulo V vai tratar da adição e subtração com dois ou mais algarismos. O capítulo VI vai tratar da multiplicação e divisão com dois ou mais algarismos. O capítulo VII abordará problemas. O capítulo VIII abordará divisibilidades, números primos, maximizações e minimizações.

O capítulo IX vai abordar o assunto de frações, um dos objetos de estudo desta dissertação. Já o capítulo X que abordará os números decimais. No capítulo XI abordará as considerações gerais metodológicas.

4.3 MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS PARA PROFESSORES PRIMÁRIOS, VOLUME III.

O manual “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” é o terceiro volume da coleção, de autoria de Ruy Madsen Barbosa, publicado no ano de 1966, pela “L.P.M.” Editora.

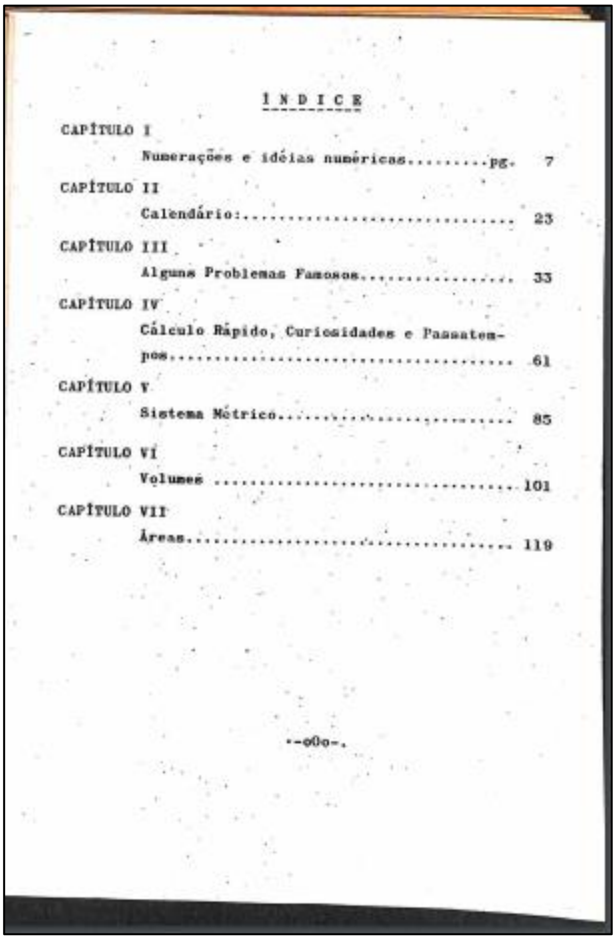
FIGURA 11 - Capa do manual "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", vol. III



FONTE: Repositório do Ghemat/Brasil.

Este volume contém ao todo 157 páginas, assim como o volume II não possui prefácio. Este manual é divido em VII capítulos.

FIGURA 12 - Índice do manual "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", vol. III



ÍNDICE

.-oOo-.

FONTE: Repositório do Ghemat/Brasil.

O capítulo I abordará o conceito de numeração e ideias numéricas. O capítulo II trabalha com o calendário, na questão de horas, dias da semana, meses, etc. O capítulo III apresenta alguns problemas famosos. O capítulo IV apresenta cálculos rápidos, curiosidades e passatempos.

O capítulo V abordará o sistema métrico. O capítulo VI abordará o conteúdo de volumes e o capítulo VII abordará o conteúdo de áreas.

Neste breve capítulo, descrevemos quem foi Ruy Madsen Barbosa, sua trajetória profissional, alguns manuais escritos, apontamos indícios que possibilitam iniciar a verificação se o autor é um possível *expert*, a sua contribuição para a disseminação do MMM no Brasil em conjunto com o GEEM e formações ministradas. Por fim, uma breve explanação referente a coleção de manuais “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” em seus três volumes.

5. ANALISANDO O ENSINO DE FRAÇÕES NA COLEÇÃO DE MANUAIS DIDÁTICOS DE RUY MADSEN BARBOSA

Nesta seção iniciaremos a análise detalhada da coleção de manuais do professor Ruy Madsen Barbosa, intitulada como “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários”, publicado no ano de 1966 pela editora L. P.M. editora. A coleção é composta por três volumes, que já descrevemos no capítulo anterior.

Para a nossa análise confrontamos os volumes, o qual o primeiro volume está direcionado ao o que ensinar sobre a aritmética no ensino primário e o segundo volume direcionado a como ensinar a aritmética no ensino primário, já o terceiro volume apresenta assuntos que não foram abordados nos volumes anteriores e problemas, ditos pelo autor como “problemas famosos”.

O único volume que apresenta prefácio é o volume I, o qual nos permite ter uma visão do porquê o autor escreveu esta coleção, para quem foi destinado esses manuais, qual o problema que o autor pretendia resolver, entre outros pontos importantes que surgem neste início.

O primeiro ponto que destacamos no prefácio é a explicação do porquê elaborar esta coleção.

FIGURA 13 - Justificativa para a elaboração de um novo manual didático

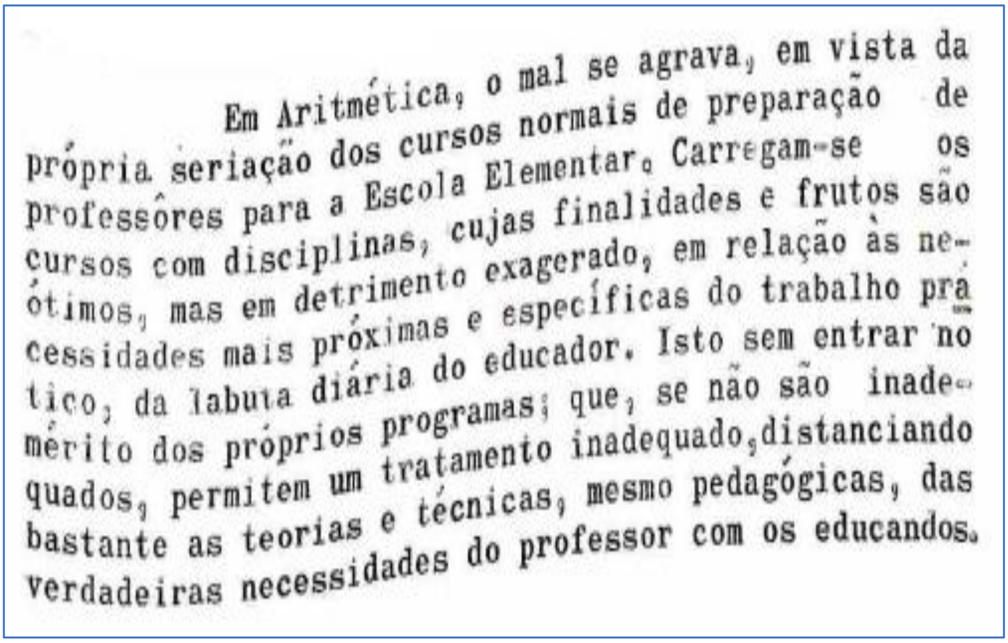
Entrego aos prezados leitores êste trabalho de Matemática, não "porque a nossa literatura correlata não possua outros trabalhos", não "porque não existam grandes obras dos diversos gêneros aqui desenvolvidos", "chavões" tão fáceis de serem empregados; mas, pura, categórica e simplesmente, por julgar os livros em nossa língua insuficientes aos fins que a êste destino.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 1)

Neste trecho, é possível perceber que o autor faz uma crítica aos manuais didáticos que estavam presentes naquele momento, dizendo julgar os manuais em nossa língua insuficiente para o ensino primário.

Continua sua justificativa ainda dizendo que a aritmética do ensino primário, já há muitos anos, apresenta falhas de conceitos, de processos e didáticos, e que a culpa raramente recaia sobre o professor, mas sim na formação, “ou melhor, na pseudoformação do professor primário” (BARBOSA, 1966a, p.1). A pseudoformação do professor primário é justificada por Barbosa (1966a) a partir da aritmética:

FIGURA 14 - Justificativa da pseudoformação do professor primário



Em Aritmética, o mal se agrava, em vista da própria seriação dos cursos normais de preparação de professôres para a Escola Elementar. Carregam-se os cursos com disciplinas, cujas finalidades e frutos são ótimos, mas em detrimento exagerado, em relação às necessidades mais próximas e específicas do trabalho prático, da labuta diária do educador. Isto sem entrar no mérito dos próprios programas; que, se não são inadequados, permitem um tratamento inadequado, distanciando bastante as teorias e técnicas, mesmo pedagógicas, das verdadeiras necessidades do professor com os educandos.

FONTE: Barbosa (1966a, p.1)

Essa crítica à formação do professor, a partir do ponto de vista do autor, no exagero de disciplinas o qual não estava ligada a real necessidade dos professores para o exercício do trabalho, com disciplinas muito técnicas e teóricas.

Barbosa (1966a) escreve a coleção de manuais a partir de muitos estudos, levantamento de bibliografias possíveis, análise das deficiências dos candidatos nos exames de admissão, o contato com outros professores de matemática dos cursos ginasiais, dos cursos normais e dos professores primários, o qual discutiam, coletava materiais e acompanhava experimentações.

FIGURA 15 - Indícios que Ruy Madsen Barbosa participou da disseminação do ideário do MMM no Brasil

> A partir de 1 961 iniciou-se, no Brasil, um movimento de modernização da Matemática, reflexos de movimentos idênticos iniciados poucos anos antes em países da Europa e da América do Norte. Tive, e tenho, a satisfação de participar de grupo de estudo e trabalho renovador, cujos contatos e reuniões, aliados aos meus estudos isolados, muniram-me de um elemento precioso para o tratamento moderno e melhor da Aritmética; quer no seu desenvolvimento teórico, quer como subsídio ideal para a aprendizagem da mesma.

FONTE: Barbosa (1966a, p.2)

Com a chegada do MMM no Brasil, Ruy Madsen Barbosa, começou a realizar novos estudos, visando integrar as concepções que o MMM estava trazendo de novo, como, por exemplo, a utilização de noções de conjuntos, procurando sempre dar destaque às estruturas operatórias que “permitem um elo seguro entre a vida comum e a aritmética”. (BARBOSA, 1966a, p.2).

FIGURA 16 - Justificativa da utilização do ideário do MMM

> Essa Aritmética "abstrata" e por vêzes "árida", mas imprescindível, tanto para o homem médio, nos seus afazeres diários da vida, como para o homem técnico; ou mesmo para o simples e superficial entendimento das relações e grandezas numéricas do desenvolvimento científico moderno; ou como preparação para estudos posteriores, encontra nas noções de conjuntos, elementos úteis e adequados para o seu ensino, oferecendo ao professor uma linguagem mais comum ao educando, e mais uniforme e correta sob o ponto de vista matemático.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 2)

Este trecho do manual aponta uma preocupação com o ensino da aritmética, para as diferentes finalidades, tanto para o homem médio (ao nosso entendimento, o homem médio se referia aos homens que utilizam a aritmética para os afazeres do dia a dia, como, por exemplo, a carpintaria, o açougueiro, entre outros.), quanto para o homem técnico (ao nosso entendimento, o homem técnico utilizava a aritmética para desenvolver atividades como, por exemplo, os professores, os profissionais da tecnologia, entre outros.), de modo a equiparar o entendimento das relações e grandezas numéricas do desenvolvimento científico moderno, e para preparar o homem para estudos posteriores, ou seja, pelos indícios Ruy Madsen Barbosa via a teoria dos conjuntos como uma forma de valorizar a matemática e a universalidade dela.

Neste trecho percebemos uma semelhança com o trabalho de Godoi (2021) o qual em uma de suas conclusões, dizia que: “[...] com o ideário do MMM, se entendeu que a ideia de número deve ser introduzida pela álgebra, com início pela relação entre os Conjuntos Numéricos e as operações Aritméticas” (GODOI, 2020, p. 103-104). O que nos faz refletir sobre pontos que o MMM se diferencia de outros movimentos.

Este manual foi escrito a partir dos ideários do MMM, o qual teve contribuições de profissionais de outros campos científicos, como a de psicólogos, de lógicos, de matemáticos e de epistemólogos da genética (BARBOSA, 1966a), no sentido de, a partir de debates com os outros campos científicos, verificar o caminho que escolheu estava em consonância com o que era pretendido.

O autor faz crítica à escola nova:

FIGURA 17 - Crítica à Escola Nova

que, parece-me, ter-se formado em muitas mentes com a
má idéia do que seja uma verdadeira "escola nova". O
aluno é considerado sujeito a complexos, a problemas
sociais, pleno de necessidades e cuidados, motivá-lo,
agradá-lo descer até ao aluno, dar liberdade a seus im
pulsos, dar jogos; mas, em geral esquece-se que êle -
possui um potencial enorme para a aprendizagem, abaixar
o nível, descer até ao aluno, mas trazê-lo, suas capa-
cidades são em geral desprezadas, rouba-lhes as oportu
nidades, deprecia-se demais os talentos. Sôbre o assun
to, que não é problema só nosso, mas da própria terra
de Dewey, é testemunho o interessante e oportuno arti-
go de Sterlyng M. McMurrin, U.S. Commissioner of Educa
tion: "What every inteligent woman should know about
education", In: Ladies'Home Journal-March.1962.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 3)

Ruy Madsen Barbosa critica a Escola Nova por não considerar que o aluno possui um potencial enorme para a aprendizagem, abaixar o nível e não aprimorar as suas capacidades, são alguns dos pontos em que Barbosa discordava das concepções da Escola Nova. E ainda menciona que este problema não é apenas no Brasil, mas também na terra de Dewey, personagem de destaque da Escola Nova.

A partir das considerações, que levaram Ruy Madsen Barbosa escrever a coleção de manuais didáticos, ele continua estabelecendo as finalidades desta coleção, para alguns grupos, como, por exemplo: professores primários, futuros professores primários, professor primário em aperfeiçoamento, professor de matemática, professor de práticas de ensino ou metodologia e futuros professores de pedagogia.

Para professores primários (aqui entendemos como aqueles professores que possuem uma formação e estão nas classes), o livro deveria ser usado como livro de consulta. Para os futuros professores primários (aqui entendemos como aqueles professores que em formação nas escolas normais), deveria ser utilizado como livro-texto, o volume I permitiria o estudo aprofundado dos conceitos matemáticos, das propriedades, e como livro de consulta, o volume II e III permitiria aprender os processos de ensino e aprendizagem.

Já para o professor primário em aperfeiçoamento (entendemos como aqueles professores que participam de cursos para aperfeiçoamento), poderia ser utilizado como um livro de consulta. Para o professor de matemática (entendemos como aqueles professores de matemática do curso normal), poderia ser utilizado o volume I como livro-texto, e como livro de consulta utilizando os volumes II e III.

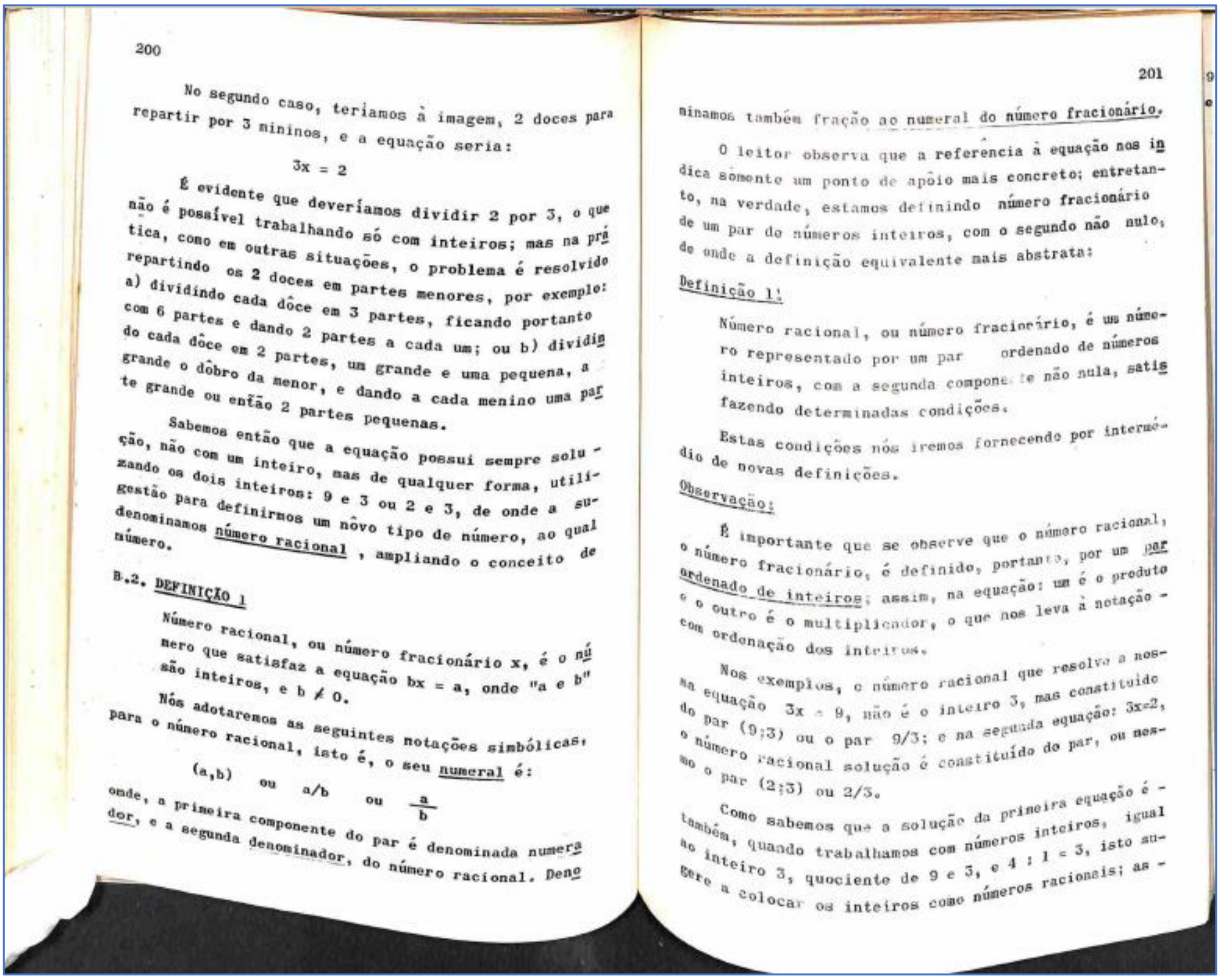
Para professores de práticas de ensino ou metodologia (entendemos como aqueles professores do curso normal), poderia ser utilizado como livro de consulta ou como livro-texto os volumes II e III. E para futuros professores de pedagogia (entendemos como aqueles professores em formação no ensino superior), poderia ser utilizado como livro de consulta.

Ruy Madsen Barbosa vai além e menciona que os volumes podem também serem utilizados para cursos de didática especial de matemática e para inspetores escolares do ensino primário.

Cabe ressaltar que os três manuais se complementam, no momento em que o autor menciona para quem é destinado os manuais, ele utiliza as terminologias livro-texto e livro de consulta. O livro-texto é usado para dizer que o manual serve como um apoio para a formação de professores e para o ensino, assim, como o livro de consulta, diferindo os termos é o local em que está sendo utilizados os manuais.

Como mencionado anteriormente, o volume I da coleção foi escrito para formar os professores, no sentindo de explicar o que o professor que ensina matemática deveria saber para ensinar aritmética, ou seja, as definições, as demonstrações, as consequências, os exercícios, etc., como observamos na figura abaixo:

FIGURA 18 - Exemplo do que o professor em formação deve saber para ensinar frações



200

No segundo caso, teriamos à imagem, 2 doces para
repartir por 3 mininos, e a equação seria:

$$3x = 2$$

É evidente que deveríamos dividir 2 por 3, o que
não é possível trabalhando só com inteiros; mas na prá
tica, como em outras situações, o problema é resolvido
repartindo os 2 doces em partes menores, por exemplo:
a) dividindo cada dôce em 3 partes, ficando portanto
com 6 partes e dando 2 partes a cada um; ou b) dividin
do cada dôce em 2 partes, um grande e uma pequena, a
grande o dôbro da menor, e dando a cada menino uma par
te grande ou então 2 partes pequenas.

Sabemos então que a equação possui sempre solu -
ção, não com um inteiro, mas de qualquer forma, utili-
zando os dois inteiros: 9 e 3 ou 2 e 3, de onde a su-
gestão para definirmos um nôvo tipo de número, ao qual
denominamos número racional , ampliando o conceito de
número.

B.2. DEFINIÇÃO 1

Número racional, ou número fracionário x, é o nú
mero que satisfaz a equação bx = a, onde "a e b"
são inteiros, e b $\neq$ 0.

Nós adotaremos as seguintes notações simbólicas,
para o número racional, isto é, o seu numeral é:

(a,b) ou a/b ou $\frac{a}{b}$

onde, a primeira componente do par é denominada numera
dor, e a segunda denominador, do número racional. Deno

201

minamos também fração ao numeral do número fracionário.

O leitor observa que a referencia à equação nos in
dica somente um ponto de apôio mais concreto; entretan-
to, na verdade, estamos definindo número fracionário
de um par de números inteiros, com o segundo não nulo,
de onde a definição equivalente mais abstrata:

Definição 1:

Número racional, ou número fracionário, é um núme-
ro representado por um par ordenado de números
inteiros, com a segunda componente não nula, satis
fazendo determinadas condições.

Estas condições nós iremos fornecendo por intermé-
dio de novas definições.

Observação:

É importante que se observe que o número racional,
o número fracionário, é definido, portanto, por um par
ordenado de inteiros; assim, na equação: um é o produto
e o outro é o multiplicador, o que nos leva à notação -
com ordenação dos inteiros.

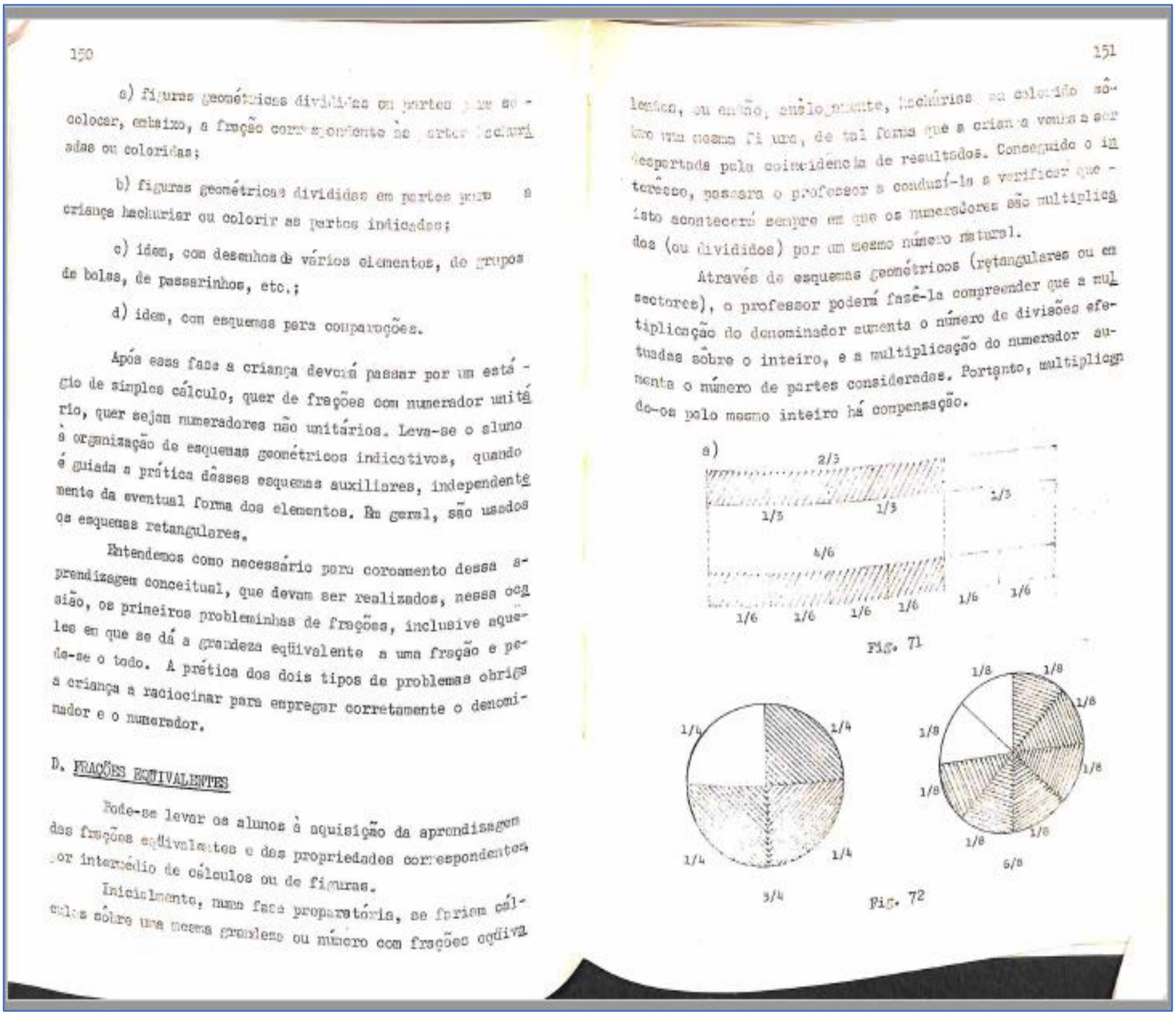
Nos exemplos, o número racional que resolve a nos-
sa equação 3x = 9, não é o inteiro 3, mas constituido
do par (9;3) ou o par 9/3; e na segunda equação: 3x=2,
o número racional solução é constituído do par, ou mes-
mo o par (2;3) ou 2/3.

Como sabemos que a solução da primeira equação é -
também, quando trabalhamos com números inteiros, igual
ao inteiro 3, quociente de 9 e 3, e 4 : 1 = 3, isto su-
gere a colocar os inteiros como números racionais; as -

FONTE: Barbosa (1966, p. 200)

Já os volumes II e III, são direcionados para o ensino, como o professor dever ensinar a aritmética, segundo o MMM, ou seja, dialogando com os professores sobre diferentes formas de ensinar os conteúdos apresentados no volume I, como constatamos na figura abaixo:

FIGURA 19 - Exemplo de como o professor em formação pode ensinar frações



150

a) figuras geométricas divididas em partes para se colocar, embaixo, a fração correspondente às partes hachuriadas ou coloridas;

b) figuras geométricas divididas em partes para a criança hachuriar ou colorir as partes indicadas;

c) idem, com desenhos de vários elementos, de grupos de bolas, de passarinhos, etc.;

d) idem, com esquemas para comparações.

Após essa fase a criança deverá passar por um estágio de simples cálculo, quer de frações com numerador unitário, quer sejam numeradores não unitários. Leva-se o aluno à organização de esquemas geométricos indicativos, quando é guiada a prática dêsses esquemas auxiliares, independentemente da eventual forma dos elementos. Em geral, são usados os esquemas retangulares.

Entendemos como necessário para coroamento dessa aprendizagem conceitual, que devam ser realizados, nessa ocasião, os primeiros probleminhas de frações, inclusive aquêles em que se dá a grandeza eqüivalente a uma fração e pede-se o todo. A prática dos dois tipos de problemas obriga a criança a raciocinar para empregar corretamente o denominador e o numerador.

D. FRAÇÕES EQÜIVALENTES

Pode-se levar os alunos à aquisição da aprendizagem das frações eqüivalentes e das propriedades correspondentes por intermédio de cálculos ou de figuras.

Inicialmente, numa fase preparatória, se fariam cálculos sôbre uma mesma grandeza ou número com frações eqüiva-

151

lentes, ou então, analogamente, hachuriada ou colorido sôbre uma mesma figura, de tal forma que a criança venha a ser despertada pela coincidência de resultados. Conseguido o interêsse, passará o professor a conduzí-la a verificar que isto acontecerá sempre em que os numeradores são multiplicados (ou divididos) por um mesmo número natural.

Através de esquemas geométricos (retangulares ou em sectores), o professor poderá fazê-la compreender que a multiplicação do denominador aumenta o número de divisões efetuadas sôbre o inteiro, e a multiplicação do numerador aumenta o número de partes consideradas. Portanto, multiplicando-os pelo mesmo inteiro há compensação.

Fig. 71

Fig. 72

FONTE: Barbosa (1966b, p. 150)

Em resumo, os manuais da coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” de Ruy Madsen Barbosa, em seus três volumes, assumiram um papel de formação e ensino, partindo de experiências com professores do GEEM e professores do ensino primário e secundário, ou seja, uma articulação dos *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*, o qual discutiremos de forma aprofundada nas próximas seções.

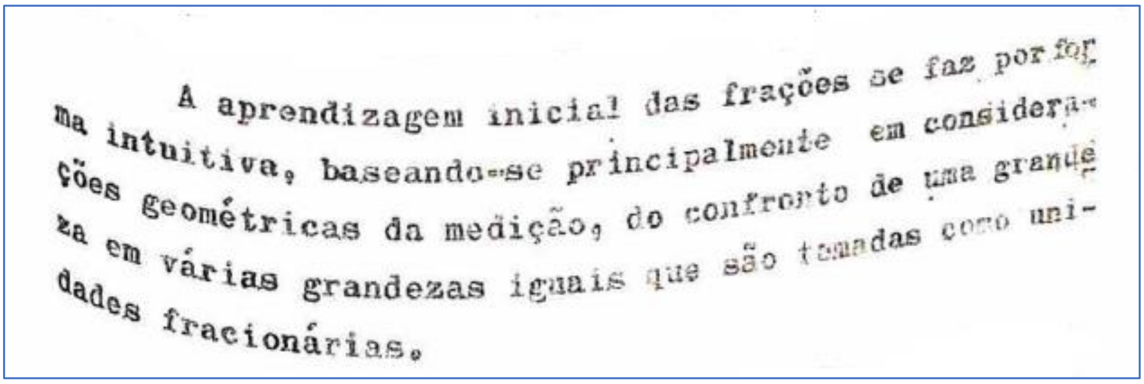
5.1 OS SABERES RELATIVOS ÀS FRAÇÕES NOS MANUAIS DIDÁTICOS DA COLEÇÃO “MATEMÁTICA, METODOLOGIA E COMPLEMENTOS PARA PROFESSORES PRIMÁRIOS”

Barbosa (1966) apresenta a seguinte *sequência* no volume I: número e numeração; as operações aritméticas; cálculo prático das operações; divisibilidade numérica; números primos e números compostos; maximização e minimização; números racionais e números decimais. O volume II é sequenciado da seguinte maneira: primeiros contatos com os números; início de adição e numeração superior a nove; início da subtração, sucessões e a associatividade; início da multiplicação – as propriedades – início da divisão; adição e subtração com dois ou mais algarismos; multiplicação e divisão de números de dois ou mais algarismos; problemas; divisibilidade, números primos, maximização e minimização; frações; números decimais e considerações gerais metodológicas.

Assim, a *sequência* estabelecida por este autor é iniciar com o ensino das frações e posteriormente o ensino dos números decimais, mostrando ambos conteúdos como representações do conjunto dos números racionais.

Neste primeiro momento da análise buscamos verificar como Ruy Madsen Barbosa apresenta, critica e entende o ensino das frações, como o professor deve ensinar, quais as concepções estão sendo discutidas antes de adentrar no conjunto dos números racionais. No volume I o autor apresenta o que entende por aprendizagens iniciais de frações:

FIGURA 20 - Ponto de vista de Ruy Madsen Barbosa sobre as aprendizagens iniciais de frações


A aprendizagem inicial das frações se faz por forma intuitiva, baseando-se principalmente em considerações geométricas da medição, do confronto de uma grandeza em várias grandezas iguais que são tomadas como unidades fracionárias.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 197)

A partir desta passagem percebemos que o autor enfatiza a aprendizagem inicial das frações de forma intuitiva, pois, “tradicionalmente é uma fonte de dúvidas para as crianças e fontes de ojeriza para adultos, que se recorda com tristeza da escola elementar” (BARBOSA, 1966b, p. 147). Ou seja, ocorrer essa aprendizagem inicial das frações os professores devem partir da intuição dos alunos, utilizando o auxílio de materiais didáticos, formas e figuras geométricas.

Barbosa (1996b), enfatiza em alguns pontos que levam as dúvidas das crianças e dos adultos no ensino de frações como, por exemplo: necessidade de dois números inteiros expressar somente um número fracionário; influência de dois números inteiros em sentidos inversos para a comparação, entre outros. Mas explicita que os fatores de ordem didática também influenciam para este problema, como cita Barbosa (1966b):

FIGURA 21 - Crítica à ordem didática no ensino de frações

Os fatôres de ordem didática surgem em conseqüência em maior intensidade, visto, não raras vêzes, o professor se limitar a dar regrinhas sem as necessárias explicações - com razões intuitivas ou não. Quantos adultos afirmam que não entendiam "aquêles complicados cálculos com frações".! Na resolução de problemas muitos professores influem desastrosamente, agravando a situação, pois "ensinam proble-

1.8

mas".

FONTE: Barbosa (1966b. p. 197, 198).

No excerto acima Barbosa (1966b) critica a forma que os professores ensinam as frações, segundo ele, os professores apenas ensinam regrinhas, que os alunos devem seguir para resolver um determinando problema.

A crítica é acompanhada de uma sugestão, para ser sanada a dificuldade que o professor encontra ao ensinar as frações, para isso os professores devem orientar a aprendizagem por processos racionais, utilizando o máximo do caráter intuitivo dos números fracionários (BARBOSA, 1966b), que podem ser encontrados e articulados nos três volumes escritos para o ensino primário.

Durante a escrita do manual, o autor faz algumas críticas, no sentido de questionar a forma de ensinar os números racionais, mas a crítica vem acompanhada por uma justificativa e uma solução de como tentar resolver o problema.

No que tange as frações, Barbosa (1966b, p. 148-149) menciona no volume II, quatro aspectos que devem ser considerados no ensino de frações, aspectos que um número fracionário pode apresentar, sendo eles: "como parte de um todo, como parte de um grupo, como uma relação e como divisão indicada".

Atualmente, na vaga pedagógica da Educação Matemática, se fala em diferentes significados que uma fração pode assumir, como, por exemplo: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo (CAMPOS; MAGINA; NUNES, 2006); podemos inferir que esses significados advêm da vaga anterior à Educação Matemática, a partir destes indícios os significados já aparecem na vaga pedagógica do Movimento da Matemática Moderna.

Voltando para os aspectos que uma fração pode assumir, segundo Barbosa (1966b), parte de um todo é definido como:

FIGURA 22 - Aspecto das frações como parte de um todo

> Entendemos êste todo como um bloco, intacto; exemplo: um bloco, um chocolate, uma maçã, uma fita de papel, etc.. - Dêste aspecto é que tem derivado a denominação antiga "que - brado".

FONTE: Barbosa (1966b, p. 148)

A parte como um todo, como mostra o excerto acima, é entendida como a uma parte de um total, o professor deve utilizar representações para que o aluno utilize de forma intuitiva, ou seja, o professor do ensino primário, ao assumir uma fração como parte de um todo, deverá explicar de forma intuitiva e utilizando materiais didáticos, de modo a mostrar a relação que uma parte tem para com o todo.

O aspecto, como parte de um grupo, é definido por Barbosa (1966b) como:

FIGURA 23 - Aspecto das frações como parte de um grupo

> Onde entendemos grupo como um todo constituído de vários elementos separados; exemplo: algumas meninas, alguns livros, uma dúzia de ovos, balas, etc.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 148)

Como apresentado na figura acima, fração como parte de um grupo, é identificado como vários elementos de um grupo separados, utilizando a intuição para identificar as frações como parte de um determinado grupo, ou seja, o professor deverá apresentar elementos que formem um grupo e mostrar características que diferem uma parte deste grupo, verificando a relação da parte com o grupo.

Outro aspecto, apresentado por Barbosa (1966b) é a fração como uma relação:

FIGURA 24 - Aspectos das frações como uma relação

> Quando a fração surge de comparações, como uma razão. Aspecto que permitirá dar o notável ensinamento para a vida prática: a porcentagem.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 148)

O aspecto de uma fração como uma relação está ligado a comparações, como, por exemplo, verificar a probabilidade de ao lançar um dado, a face seja 4, ou seja, o professor deverá mostrar haver uma relação entre a face que deseja “4” e as possibilidades existentes neste evento.

O último aspecto apresentado por Barbosa (1966b) é a fração como uma divisão indicada.

FIGURA 25 - Aspecto das frações como uma divisão indicada

> Quando se dará o número fracionário a/b interpretado como notação da divisão a:b, não realizada.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 149)

Este aspecto, mencionada na figura acima, se trata do número fracionário quando já é dado ao aluno a/b como uma notação de uma divisão em que ele não realizou.

Após essa discussão sobre os aspectos das frações, fazemos uma aproximação com o trabalho de Alves (2013), que ao analisar uma coleção de livro do MMM no Rio Grande do Sul, percebeu algumas transformações, a saber:

> As frações são tratadas de duas formas distintas nos livros: enquanto na coleção EI são consideradas como partes de um todo dividido em partes iguais, na coleção NTNG_1, as frações representam um subconjunto de um conjunto dado, na qual o numerador indica o número de elementos do subconjunto e o denominador o total de elementos do conjunto dado, ou seja, o conceito de fração passa a ser tratado com base na Teoria dos Conjuntos (ALVES, 2013, p. 290)

Assim, percebemos que no MMM as frações sofreram transformações, e tanto no trabalho de Alves (2013) quanto em nossa análise, notamos a utilização de diferentes aspectos que uma fração pode assumir, inclusive baseado na Teoria de Conjuntos.

Percebemos, até o momento, o esforço de Barbosa (1966b) em mostrar aos leitores do manual os vários aspectos que o ensino de fração deve ser considerado, desde a noção de fração a partir da noção de partes de um todo até a noção de fração a partir de uma divisão a/b, ou, como dito por ele, um número fracionário.

Voltando ao ensino intuitivo de fração, uma das fases preliminares diz que “a aprendizagem do conceito de fração, significados dos termos e denominações, podem ser conseguidas intuitivamente” (BARBOSA, 1966b, p. 149), mas para conseguir esses significados de forma intuitiva o professor deverá:

FIGURA 26 - Utilização de materiais que permitem o aluno compreender frações de forma intuitiva

Para isso se usará figuras, objetos, blocos, palitos, etc., quando o aluno ampliará os conhecimentos de meio, metade, têrça parte, etc., com os quais se familiarizará antes de adquirir ensinamentos dos símbolos correspondentes.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 149)

Nesta passagem podemos inferir sobre a categoria de *dispositivos didáticos*, onde o autor menciona que os professores podem utilizar figuras, objetos, blocos, palitos, ou seja, materiais que o aluno possa manipular, para compreender de forma intuitiva as frações, mas Barbosa (1966b) salienta que os alunos devem ter, antes de inserir o conceito de fração, as noções de metade, meio, terça parte, etc., e partir disso adquirir os símbolos correspondentes.

Para Barbosa (1966b) o professor fica encarregado de diversificar as suas práticas, os tipos e formas de exemplos, fornecendo aos alunos vários aspectos do ensino de frações. O professor também deverá orientar a classe na interpretação do que é o numerador e do que é o denominador. Essas possibilidades que o autor apresenta se deve a experiências realizadas em salas de aulas, conversas com professores e estudiosos de diversas áreas.

Para que essa aprendizagem alcance o almejado pelo autor, Barbosa (1966b) diz:

FIGURA 27 - Utilização de materiais didáticos na aprendizagem

Para uma melhor aprendizagem, é recomendável que as crianças, nessa fase conceitual, operem elas próprias sôbre os materiais didáticos; assim, a utilização de blocos de madeira, de fitas de cartolina, de coleções de palitos e fichas, flanelógrafo para fixação e retirada de figuras, é o preferível. Os blocos de madeira poderão ter pequenas marcas divisórias. São bastante práticas as fitas de cartolina com divisões previamente picotadas.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 149)

Assim observamos novamente que na fase conceitual do ensino de fração o principal apoio para os alunos compreenderem, de forma intuitiva esse novo assunto é por meio dos *dispositivos didáticos*, os quais os próprios alunos operam e dão significado. Mas salienta que boas práticas podem ser feitas com a utilização de materiais impressos como:

FIGURA 28 - Boas práticas com materiais impressos

a) figuras geométricas divididas em partes para se colocar, embaixo, a fração correspondente às partes hachuriadas ou coloridas;

b) figuras geométricas divididas em partes para a criança hachuriar ou colorir as partes indicadas;

c) idem, com desenhos de vários elementos, de grupos de bolas, de passarinhos, etc.;

d) idem, com esquemas para comparações.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 150)

Os materiais didáticos auxiliam na construção intuitiva do conceito de frações, mas o material impresso também pode ser uma boa prática, se utilizado de forma correta (Barbosa, 1966b) como mostra a figura acima, elencando 4 formas de utilização deste material.

Podemos inferir que Ruy Madsen Barbosa propõe o uso de *dispositivos didáticos* variados para a fase conceitual de frações, dá um certo destaque aos materiais didáticos (blocos de madeiras, flanelógrafos, palitos, fitas, etc.), mas não descarta os materiais impressos, as figuras geométricas, os desenhos, etc., mostrando haver formas diversificadas de ensinar frações no ensino primário.

Após à fase conceitual que o professor deve proporcionar aos seus alunos, a criança deve entrar em outra fase, como descreve Barbosa (1966b):

FIGURA 29 - Estágio simples de cálculos

Após essa fase a criança deverá passar por um estágio de simples cálculo, quer de frações com numerador unitário, quer sejam numeradores não unitários. Leva-se o aluno à organização de esquemas geométricos indicativos, quando é guiada a prática dêsses esquemas auxiliares, independentemente da eventual forma dos elementos. Em geral, são usados os esquemas retangulares.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 150)

Após a criança compreender as noções de frações, ela deverá passar para um estágio simples de cálculo, onde os alunos deverão iniciar os cálculos com numeradores unitários ou não-unitários. Neste novo estágio os alunos já conhecem o significado de frações e partem para as operações, onde o professor deverá auxiliar os cálculos a partir de esquemas, em especial os esquemas retangulares.

Para fechar o início do ensino de fração, da parte de aprendizagem conceitual, Barbosa (1966b) diz que:

FIGURA 30 - Coroamento da aprendizagem conceitual

angulares.

Entendemos como necessário para coroamento dessa aprendizagem conceitual, que devam ser realizados, nessa ocasião, os primeiros probleminhas de frações, inclusive aqueles em que se dá a grandeza eqüivalente a uma fração e pede-se o todo. A prática dos dois tipos de problemas obriga a criança a raciocinar para empregar corretamente o denominador e o numerador.

FONTE: Barbosa (1966b, p.150)

Esses problemas coroam o primeiro estágio do aprendizado de frações, os problemas deveriam ser adequados ao que foi ensinado, buscando levar a criança a raciocinar no emprego correto de denominadores e numeradores.

Percebemos que a categoria *significado* na coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” volume II, não apresenta uma regra para seguir, mas destaca diferentes aspectos das frações, como, por exemplo: parte como de um todo; parte de um grupo; como uma relação e como uma divisão indicada, menciona que o professor deve diversificar nas suas práticas mostrando os diferentes aspectos de uma fração.

Barbosa (1966b) menciona que o ensino de frações deve ser de forma intuitiva, fornecendo os mais variados aspectos das frações, utilizando materiais didáticos que auxiliem os alunos na compreensão das noções de meio, um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo.

Já no volume I da coleção, Barbosa (1966a) menciona que o ensino de frações deve ser realizado de forma intuitiva, baseando-se em considerações geométricas de medição, em confronto de uma grandeza em várias grandezas iguais, após apresentar as frações de forma abstrata e a definição algébrica. Neste volume o autor menciona sobre o método sintético e o método analítico; e apresenta como preferível o método analítico para o ensino de frações.

Nesta seção, buscamos compreender como Ruy Madsen Barbosa entende, apresenta e sugere que seja o ensino das frações. Podemos perceber que o autor enfatiza que o professor deve estar munido de vários aspectos que uma fração pode assumir, como parte de um todo, como parte de um grupo, como uma relação e como uma divisão indicada. Esses aspectos auxiliam a aprendizagem conceitual de frações pelos alunos e permite dar significados para os próximos estágios de aprendizagens das frações.

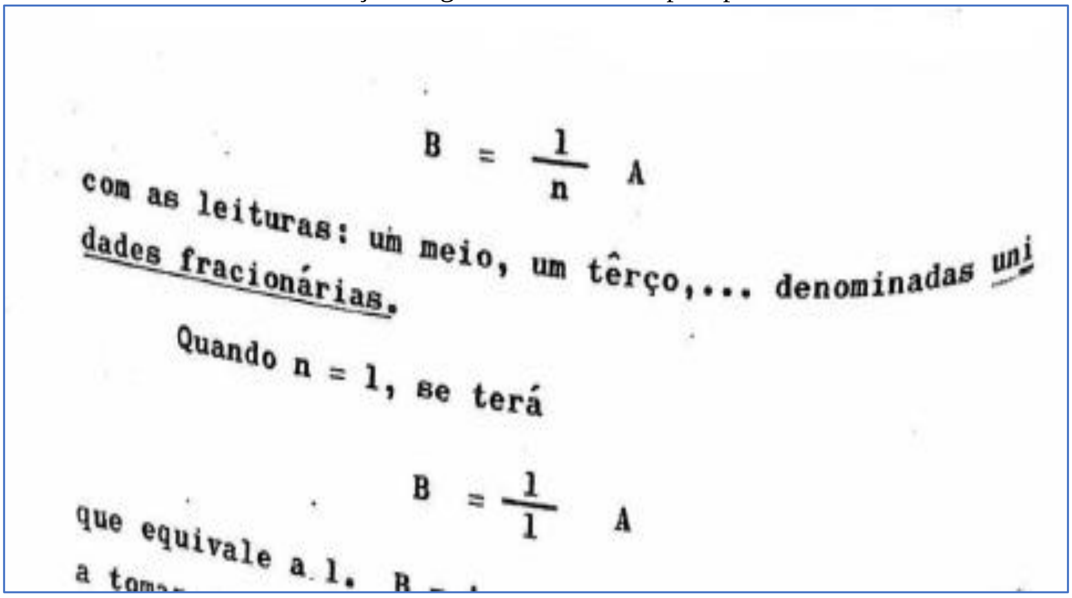
Nas próximas seções, almejamos analisar os conceitos, propriedades, demonstrações, como ensinar os números racionais, em especial os números fracionários, partindo da Teoria dos Conjuntos e articulando com os *saberes a ensinar* e os *saberes para ensinar*.

5.2 FRAÇÕES EQUIVALENTES: UMA MATEMÁTICA ESTRUTURADA A PARTIR DE RELAÇÕES E EQUIVALÊNCIA.

O Movimento da Matemática deu ênfase no estruturalismo, a partir das ideias de grupos estudadas no ensino superior, na disciplina de Estruturas Algébricas. O manual em estudo aborda o estudo dos grupos a partir das noções de relação, e de modo especial das relações de equivalência.

O volume I do manual "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" inicia os estudos das frações apresentando, inicialmente, o estudo sobre os números racionais, definindo a partir do conceito de grandezas submúltiplos, e utilizando a seguinte notação simbólica:

FIGURA 31 - Utilização de grandezas submúltiplos para definir número racional



$$B = \frac{1}{n} A$$

com as leituras: um meio, um têrço,... denominadas unidades fracionárias.

Quando n = 1, se terá

$$B = \frac{1}{1} A$$

que equivale a 1. B = .

a tom...

FONTE: Barbosa (1966a, p. 198)

Menciona ainda neste volume, as dificuldades inerentes ao desenvolvimento teórico, recorrente do método sintético. O autor julga importante e preferível, ao formador, utilizar e desenvolver a teoria das frações por meio do método analítico, “para cujas definições laçaremos mão dos dados instrutivos dos leitores, em particular dos normalistas, futuros professores primários.” (BARBOSA, 1966a, p. 199)

Os números racionais no volume I, é introduzido a partir de uma equação b. x = a, que nem sempre há solução. O autor utiliza um exemplo da vida prática, a saber: “ter 9 doces para repartirmos por 3 meninos”, neste caso há solução (x= 9: 3 => x = 3).

Apresenta também um segundo exemplo, a saber: “2 doces para repartir por 3 meninos”, não há uma solução inteira, pois x = 2 : 3, não possui uma solução inteira. A partir disso, o autor apresenta a seguinte justificativa e a definição:

FIGURA 32 - Definição e justificativa de números racionais, parte I

Sabemos então que a equação possui sempre solução, não com um inteiro, mas de qualquer forma, utilizando os dois inteiros: 9 e 3 ou 2 e 3, de onde a sugestão para definirmos um nôvo tipo de número, ao qual denominamos <u>número racional</u>, ampliando o conceito de número.

B.2. <u>DEFINIÇÃO 1</u>

Número racional, ou número fracionário x, é o número que satisfaz a equação $bx = a$, onde "a e b" são inteiros, e $b \neq 0$.

Nós adotaremos as seguintes notações simbólicas, para o número racional, isto é, o seu <u>numeral</u> é:

$$(a,b) \quad \text{ou} \quad a/b \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b}$$

onde, a primeira componente do par é denominada <u>numerador</u>, e a segunda <u>denominador</u>, do número racional. Deno-

FONTE: Barbosa (1966a, p. 200)

FIGURA 33 - Definição e justificativa de números racionais, parte II

minamos também fração ao numeral do número fracionário.

O leitor observa que a referencia à equação nos indica somente um ponto de apôio mais concreto; entretanto, na verdade, estamos definindo número fracionário de um par de números inteiros, com o segundo não nulo, de onde a definição equivalente mais abstrata:

<u>Definição 1!</u>

Número racional, ou número fracionário, é um número representado por um par ordenado de números inteiros, com a segunda componente não nula, satisfazendo determinadas condições.

Estas condições nós iremos fornecendo por intermédio de novas definições.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 101)

Nas figuras acima, observamos que o autor utiliza a forma simbólica e a forma abstrata de enunciar a definição de números racionais, sendo considerado um número fracionário como um número representado por um par ordenado de números inteiros, com o segundo componente não nula. Essa definição nos remete ao período da Matemática Moderna, o qual nos leva a refletir sobre o estruturalismo, utilizando o par ordenado como a definição de uma fração.

As frações equivalentes são apresentadas no volume I, de forma intuitiva, através de um exemplo: “9/12 equivale a 6/8, utilizando a noção de equação, 12x = 9 e 8x = 6. A partir da solução desta equação o autor apresenta a seguinte justificativa:

FIGURA 34 - Justificativa dos exemplos e definição de frações equivalentes

Sabemos portanto que as frações 9/12 e 6/8 não são iguais mas se eqüivalem; representam o mesmo número racional, o mesmo número fracionário; são numerais do mesmo número, são representantes do mesmo número.

Estas noções nos levam a tomar a seguinte definição de frações eqüivalentes:

B.4.2. <u>DEFINIÇÃO 2:</u>

Definimos para as frações a relação " $\sim$ " por (*)

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

se e somente se: $a \times d = b \times c$, com $b \neq 0$, $d \neq 0$.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 208)

No capítulo de números racionais do volume I, o autor faz uma revisão do conceito de produto cartesiano de dois conjuntos, para explicar as relações:

> Dado dois conjuntos A e B, chamamos de produto cartesiano dos conjuntos, nessa ordem, ao conjunto de todos os pares ordenados que possuem a primeira coordenada pertencente ao conjunto A e a segunda coordenada pertencente ao conjunto B.
>
> Indica-se A X B
>
> Assim, se temos:
>
> A = { a, b }
>
> B = { a’, b’, c’, d’ }
>
> Teremos: A X B = {(a, a’), (a, b’), (a, c’), (a, d’), (b, a’), (b, b’), (b, c’), (b, d’)} (BARBOSA, 1966a, p. 203)

A partir da noção de produto cartesiano, podemos encontrar dentre alguns pares uma ligação, seja ela de comparação, social, de preferências, de dominâncias, de operações, etc., como mostra o exemplo a seguir:

> Seja o conjunto:
>
> A = {Segismundo, João}
>
> B = {Lúcia, Maria, Eurico, Pitico, Filipin}
>
> A X B = {(Segismundo, Lúcia), (Segismundo, Maria), (Segismundo, Eurico), (Segismundo, Pitico), (Segismundo, Filipin), (João, Lúcia), (João, Maria), (João, Eurico), (João, Pitico), (João, Filipin)}
>
> Admite-se que Segismundo seja gordo, ou baixo, ou rico, etc; é possível que o conjunto de pares:
>
> {(Segismundo, Eurico), (Segismundo, Pitico), (Segismundo, Filipin)}

Seja um conjunto dos pares, para os quais é válida a relação: “é mais rico que”, ou “é mais gordo que”, ou “é mais baixo que”. Portanto, um subconjunto de um produto cartesiano define uma relação, como mostra a figura abaixo:

FIGURA 35 - Verificação da relação entre um par ordenado (x; y)

Assim, se os pares ordenados (x;y) de elementos de um conjunto (*) A satisfazem ou não uma propriedade R, diremos que está definida sôbre o conjunto A uma relação binária R.

Quando a relação R é verificada para um par (x;y), indicamos:

$$x \; R \; y$$

no lugar de $(x;y) \in R$.

Em caso contrário, indicamos:

$$x \; \overline{R} \; y$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 204)

A partir destas definições e da verificação de existência de uma relação entre R e um par ordenado (x; y), podemos inferir sobre a utilização de uma linguagem matemática bem definida, utilizando símbolos, elementos da Teoria de Conjuntos e das Estruturas Algébricas, característicos do MMM. Cabe ressaltar, que Barbosa (1966a) utiliza estes elementos e definições como *saberes a ensinar*, pois, segundo ele, o professor que ensina matemática no ensino primário deve saber o que é uma relação.

Barbosa (1966a) relembra algumas propriedades das relações:

QUADRO 14 - Propriedades das relações

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES		
Propriedade reflexiva	**Propriedade simétrica**	**Propriedade transitiva**
Quando para todo elemento x do conjunto A é verificado x R x, dizemos que a relação R é reflexiva em A.	Quando para todo par (x, y) do conjunto A, se tivermos x R y então se terá y R x, dizemos que a relação é simétrica em A.	Quando para todos elementos x, y e z do conjunto A, se tivermos x R y e y R z, então se terá x R z, dizemos que a relação R é transitiva em A.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 204-205)

Para explicar as propriedades, apresentadas acima, o autor exemplifica cada uma das propriedades, não de forma simbólica, mas de forma escrita para que os leitores entendam.

Dentre as relações, algumas ganham uma nomenclatura especial, chamadas relações de equivalência, para que uma relação receba esse nome ela deve satisfazer às três propriedades de relações.

A partir do estudo das relações, o autor, apresenta um teorema provando as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva, como mostra as figuras abaixo:

FIGURA 36 - Teorema e propriedades

B.4.3. TEOREMA 1

A relação " ~ " é uma relação de equivalência, como provaremos a seguir:

a) Reflexibilidade:

Como a X b = a X b , então $\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}$

(*)- Usa-se também o símbolo " ≡ ", ou E , ou ⇆ .

209

b) Simetria

Se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ temos pela definição da relação "~" que: a X d = b X c; pela simetria da igualdade de inteiros, podemos escrever: b X c = a X d; e, novamente pela definição da relação, podemos escrever:

$$\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b} ,$$

que prova a simetria.

c) Transitividade:

Se $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$ então a X d = b X c

e se $\frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}$ então c X f = d X e

Multiplicando a primeira igualdade por f obtemos, usando a associatividade e a comutatividade:

a X f X d = b X c X f

e, considerando a segunda igualdade, podemos escrever:

$$a \times f \times d = b \times d \times e$$

ou

$$a \times f \times d = b \times e \times d$$

e, como $d \neq 0$, pela lèi do cancelamento da multiplica - ção, podemos escrever:

$$a \times f = e \times b$$

de onde, por definição de " ~ ":

$$\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}$$

210

Com êste teorema passamos a ler a expressão

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$$

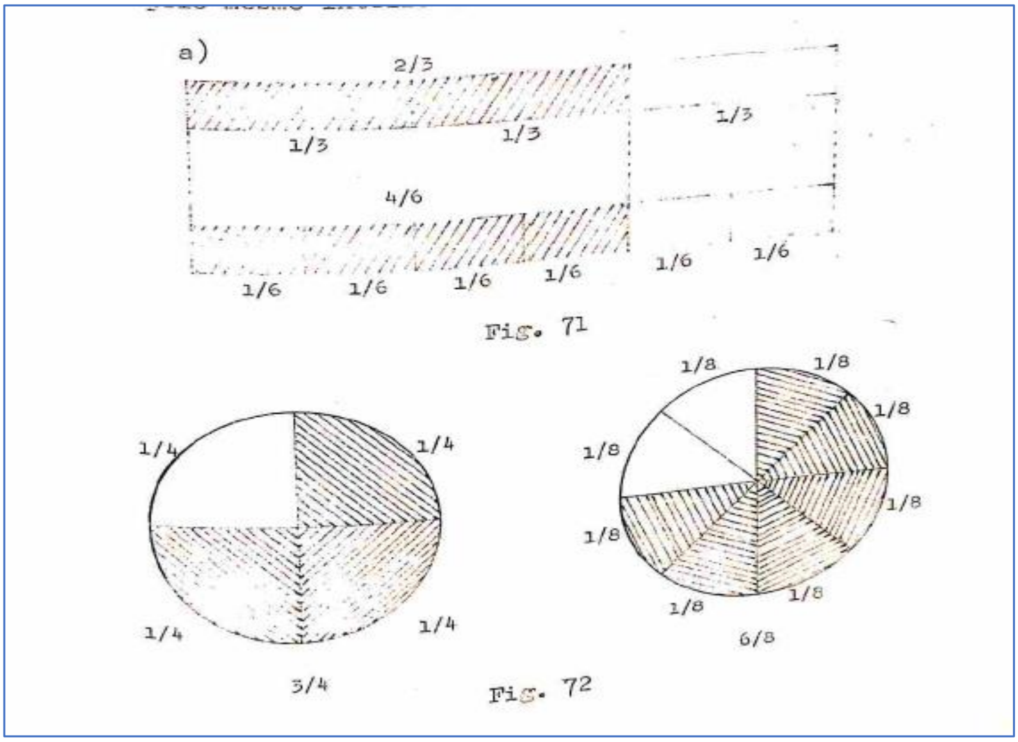
como: a fração a/b é eqüivalente à fração c/d.

FONTE: Barbosa (1966aa, p. 208; 209; 210)

A partir desses excertos do manual volume I, podemos verificar a definição de equivalência de frações, que gozam das três propriedades (transitiva, reflexiva e simétrica). As frações equivalentes deste manual são utilizadas como *saber a ensinar*, pois, o autor mostra/ensina o que o professor deve saber sobre equivalência de frações.

Já no volume II autor introduz o conceito de frações equivalentes, para aquisição da aprendizagem e das propriedades, por intermédio de cálculos ou de figuras. O autor diz que inicialmente os alunos fariam cálculos sobre uma mesma grandeza ou então, hachuras ou coloridos sobre uma figura, como mostra as figuras abaixo:

FIGURA 37 - Exemplos de primeiros cálculos utilizando figuras geométricas



FONTE: Barbosa (1966b, p. 151)

FIGURA 38 - Exemplos de utilização de cálculos de frações equivalentes

A organização de quadros ou cartazes, mostrando equi valências, auxilia a fixação da propriedade. Exemplo:

<table>
<tr><td colspan="24">1</td></tr>
<tr><td colspan="12">1/2</td><td colspan="12">1/2</td></tr>
<tr><td colspan="6">1/4</td><td colspan="6">1/4</td><td colspan="6">1/4</td><td colspan="6">1/4</td></tr>
<tr><td colspan="3">1/8</td><td colspan="3">1/8</td><td colspan="3">1/8</td><td colspan="3">1/8</td><td colspan="3">1/8</td><td colspan="3">1/8</td><td colspan="3">1/8</td><td colspan="3">1/8</td></tr>
<tr><td colspan="8">1/3</td><td colspan="8">1/3</td><td colspan="8">1/3</td></tr>
<tr><td colspan="4">1/6</td><td colspan="4">1/6</td><td colspan="4">1/6</td><td colspan="4">1/6</td><td colspan="4">1/6</td><td colspan="4">1/6</td></tr>
<tr><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td><td colspan="2">1/12</td></tr>
</table>

Fig. 73

Exercícios de cálculo mental deverão ser feitos, trans formando frações em frações eqüivalentes, como as seguintes:

1. Quantos quartos tem um meio?
2. Quantos oitavos tem um quarto?
3. Quantos oitavos têm três quartos?
4. Quantos quartos são nove doze avos?

FONTE: Barbosa (1966b, p. 152)

A partir das figuras apresentadas anteriormente, podemos verificar algumas categorias de nossa análise, a saber: *dispositivos didáticos*, o autor utiliza exemplo com figuras geométricas, coloridas/hachuradas, quadros e cartazes com frações equivalentes; *exercícios e problemas*, podemos verificar a utilização de exercícios de cálculo mental transformando uma determinada fração em frações equivalentes.

A partir dessas duas categorias (*dispositivos didáticos e exercícios e problemas*), podemos inferir que agora o autor está utilizando os *saberes para ensinar* frações equivalentes, ou seja, mostrando ao professor como ensinar tal conteúdo. Percebemos também uma articulação entre os *saberes a ensinar* (frações equivalentes, o conceito) e os *saberes para ensinar* (frações equivalentes, dispositivos didáticos e exercícios e problemas).

Além disso, o professor deve conduzir os alunos a obterem classes de frações equivalentes, e a perceberem que qualquer fração de uma dessas classes, representa a classe. Ele menciona a importância deste conhecimento:

FIGURA 39 - Importância do estudo das frações equivalentes no estudo das frações

Êsse fato é primordial no estudo das frações, e deverá ser relembrado em tôdas ocasiões oportunas, fazendo com que os alunos empreguem a técnica de cálculo de multiplicar (ou dividir) o numerador e o denominador (par ordenado de números que determina o número fracionário) que simplesmente transforma a fração numa fração equivalente, por outro numera[illegible]e também representará o número

FONTE: Barbosa (1966b, p. 152)

Para finalizar a parte das frações equivalentes no volume II, o autor enumera dois aspectos importantes para o estudo dessas frações, como:

a) A operação denominada simplificação, o qual justifica como:

FIGURA 40 - Operação de simplificação, justificativa e conselhos

Na prática elementar a operação se faz mudando sucessivamente o representante até que se obtenha a fração irredutível, denominação perigosa, reduz-se os números que compõem a fração, simplificando-a, o número fracionário não é reduzido, é o mesmo.

Aconselha-se operar utilizando os critérios de divisibilidade por divisores primos, mas o professor deve dar oportunidade aos alunos para descobrirem simplificações mais bruscas; o que não é aconselhado é a pesquisa do máximo divisor comum em separado, a prática da simplificação por divisores primos coincide com o algorítmo de coluna única.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 153)

b) A operação chamada redução ao mesmo denominador, ou do denominador comum, o qual justifica como:

FIGURA 41 - Operação de redução ao mesmo denominador, justificativa e conselho

Na prática elementar deve-se encaminhar o procedimento inicialmente com múltiplo comum qualquer, de preferência o produto dos denominadores, para depois passar ao menor denominador comum com a operação de minimização.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 154)

Nestes dois aspectos apresentados por Barbosa (1966b), o estudo das frações equivalentes é um suporte para introduzir novos conceitos como: a simplificação e a redução ao mesmo denominador ou denominador comum. Na seção de frações equivalentes, observamos a utilização de materiais como figuras, cálculos mentais para o ensino de frações equivalentes, e após o aluno compreender o conceito dessas frações o professor pode introduzir as operações de simplificação e de redução ao mesmo denominador.

Outra relação importante utilizada pelo autor é a classe de equivalência, o qual o defini: “se um conjunto é separado em subconjuntos por meio de uma relação de equivalência, então cada subconjunto é denominado classe de equivalência" (BARBOSA, 1966a, 207), o qual é definido da seguinte maneira:

FIGURA 42 - Classe de equivalência

Separando o conjunto de frações em sub-conjuntos, sendo que em cada sub-conjunto colocamos as frações eqüivalentes a uma dada fração sob a relação de eqüivalência " ~ ", formamos, conforme vimos anteriormente, classes de eqüivalência.

Em outras palavras, formamos conjuntos de frações eqüivalentes; assim, a classe de eqüivalência, correspondendo à fração 3/4, por exemplo, é dada por:

$$\left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \ldots\ldots\ldots \right\}$$

que indicamos com $\{3/4\}$ ou $\boxed{\frac{3}{4}}$, isto é:

$$\{3/4\} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \ldots\ldots\ldots \right\}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 210)

Ou seja, a classe de equivalência é formada por subconjuntos de frações equivalentes de uma fração a partir de uma relação de equivalência. É importante ressaltar que qualquer fração de uma classe de equivalência representa o mesmo número racional ou número fracionário. Desta classe de equivalência obtém-se um novo teorema:

FIGURA 43 - Teorema

B.4.5. TEOREMA 2

Multiplicando-se o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número inteiro, não nulo, obtém-se uma fração eqüivalente.

Seja a fração: $\frac{a}{b}$.

Multiplicando ambos os têrmos pelo inteiro k, não nulo, obtemos a fração:

$$\frac{k \times a}{k \times b}$$

e, como

$$a \times (k \times b) = (k \times a) \times b$$

temos, por definição da relação de eqüivalência definida, que:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}}$$

Nota: Êste simples teorema permite de maneira fácil passar de uma fração a uma fração eqüivalente, isto é, permite transformá-la, trocando o <u>representante</u> da classe de eqüivalência , ou multiplicando ou dividindo por um inteiro.

<u>Exemplos:</u>

a) $\frac{2}{3} = \frac{5 \times 2}{5 \times 3}$ isto é: $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$

b) $\frac{12}{28} = \frac{12 : 4}{28 : 4}$ isto é: $\frac{12}{28} = \frac{3}{7}$

FONTE: Barbosa (1966aa, p. 211-212)

Podemos verificar nesta nova relação, apresentada por Barbosa (1966a), a utilização de um *saber a ensinar* classe de equivalência, ensinando o que o professor em formação deve saber sobre este conceito.

No volume II, destinado a como o professor primário em formação pode ensinar os conteúdos apresentados no volume I, mas o autor não apresenta maneiras de ensinar classes de equivalência.

Em resumo, nesta seção podemos perceber alguns elementos importantes para nossa pesquisa, a saber: a utilização de figuras geométricas, quadros e cartazes de equivalência de frações, ou seja, a utilização de *dispositivos didáticos*; cálculo mental para a resolução de *exercícios e problemas*; ambos resultando nos *saberes para ensinar* frações equivalentes. Percebemos também, a utilização de teoremas, definições, provas auxiliando o professor, no sentido de ensinar o que o professor deve saber sobre frações equivalentes, ou seja, a utilização dos *saberes a ensinar*. Verificamos também uma articulação entre os *saberes a ensinar* frações equivalentes e os *saberes para ensinar* frações equivalentes.

Nesta seção observamos a utilização de uma linguagem simbólica, a utilização de conceitos e elementos da Teoria dos Conjuntos e das Estruturas Algébricas, advindas do campo do ensino superior para o ensino primário, característico do Movimento da Matemática Moderna. Na próxima seção apresentaremos uma análise de como Ruy Madsen Barbosa, mobiliza os saberes em relação ao conteúdo de frações impróprias, aparentes e número misto.

5.3 FRAÇÕES IMPRÓPRIAS, APARENTES E NÚMERO MISTO

Nesta seção buscamos apresentar como Ruy Madsen Barbosa mobilizou e articulou os *saberes a ensinar*, os *saberes para ensinar* os conceitos de fração imprópria, fração aparente e número misto, utilizando características do MMM (estruturalismo, ênfase na Teoria dos Conjuntos, a utilização de uma linguagem simbólica, etc.) em seus manuais para a formação e o ensino de professores.

Barbosa (1966a) defini isomorfismo, partindo do intuitivo, como:

FIGURA 44 - Definição de isomorfismo

Dadas frações equivalentes do tipo $\frac{a \text{ X } x}{x}$, para qualquer a, sabemos que forçosamente segue a igualdade dos números inteiros "a", isto é:

$$\frac{a \text{ X } x}{x} = \frac{a' \text{ X } x}{x} \Longrightarrow a = a'$$

Destas considerações verificamos que podemos por em correspondencia (*) que conserva as operações, os números fracionários do conjunto A com o conjunto dos números inteiros:

$$\left. \begin{array}{l} \left(\frac{a}{1}\right) \longleftrightarrow a \\ \left(\frac{b}{1}\right) \longleftrightarrow b \end{array} \right. \Longrightarrow \left(\frac{a}{1} + \frac{b}{1}\right) \longleftrightarrow a + b$$

234

$$\left[\,\frac{a}{1}\,\right] \longleftrightarrow a$$

$$\Longrightarrow \left|\,\frac{a}{1} \times \frac{b}{1}\,\right| \longleftrightarrow a \times b$$

$$\left[\,\frac{b}{1}\,\right] \longleftrightarrow b$$

Observemos que:

1. A correspondência é de tal forma que a cada número fracionário corresponde um só número inteiro.

2. A correspondência é também no outro sentido, a um número inteiro correspondente um só número fracionário, do conjunto A.

3. Todo número inteiro é correspondente de um número fracionário.

Em vista dessa notável correspondência, podemos dizer que os dois conjuntos de números, de um ponto de vista abstrato, possuem a mesma estrutura, a estruturação aritmética é a mesma; dizemos ainda que existe um Isomorfismo, ou que os dois conjuntos munidos das operações elementares são isomorfos.

Aceito êste isomorfismo entre o conjunto dos números fracionários, que um dos representantes possui denominador igual à unidade, e o conjunto dos números inteiros, é justificável convencionarmos que:

$$\boxed{\left[\,\frac{a}{1}\,\right] = a}$$

e, escrevemos também:

$$\frac{a}{1} = a \quad \text{ou} \quad \frac{a \text{ X } x}{a} = a$$

Exemplos:

$$\frac{3}{1} = 3 \qquad \frac{0}{1} = 0$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 233-234)

No excerto acima, podemos perceber a linguagem simbólica, utilizada durante o MMM, também percebemos que o autor utiliza da intuição para definir o que é isomorfismo, mostrando as estruturas, estruturação aritmética e considerações sobre um subconjunto dos números fracionários, os números inteiros.

Barbosa (1966a) defini, a partir das considerações de elementos isomorfos, as frações aparentes como uma consequência destas considerações, como vemos na figura abaixo:

FIGURA 45 - Consequência I: fração como quociente indicado

Consequência I: Fração como quociente indicado

Consideremos dois inteiros a e b, b = 0.

Como:

$$a = \frac{a}{1} \qquad b = \frac{b}{1}$$

teremos:

$$a : b = \frac{a}{1} : \frac{b}{1}$$

ou:

$$a : b = \frac{a \times 1}{1 \times b} \qquad \text{(Def.6)}$$

ou:

$$\boxed{a : b = \frac{a}{b}}$$

Exemplos:

$$3 : 5 = \frac{3}{5}$$

$$8 : 4 = \frac{8}{4} = 2$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 235)

Destas considerações sobre os isomorfos, podemos inferir serem um *saber a ensinar*, no sentido de mostrar aos professores em formação o que deve ser ensinado sobre fração aparente.

No volume II, volume destinado a como ensinar os conteúdos explicitados no volume I, Barbosa (1966b) menciona que:

FIGURA 46 - Vantagem da utilização da aritmética

O professor pode levar as crianças a verificarem - que é outra grande vantagem da Aritmética, pois permite trabalhar com números fracionários e números inteiros de uma só maneira: representando, quando convier, um número inteiro por uma fração. E na prática, a mais simples representação de um inteiro, por um numeral fracionário é aquela com o segundo número do par igual à unidade, o que se pode ter em mente.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 154)

Percebemos aqui, o autor mostrando as vantagens de se trabalhar com os números aparentes, ou seja, os *saberes para ensinar*. Verificamos ainda que o autor menciona que "as frações aparentes servem didaticamente para despertar a atenção do aspecto do quociente indicado" (BARBOSA, 1966b, p. 154)

No volume I não é apresentado discussões sobre frações impróprias, por alguma razão desconhecida, o autor não apresenta essa definição no volume I, mas já no volume II o autor menciona sobre frações impróprias.

Barbosa (1966b) diz que as frações impróprias devem ser introduzia de forma intuitiva, quando se considerará exemplos reais, onde o número de partes é igual ou superior ao número de partes da unidade, ou seja, o numerador pode ser igual ou maior que o denominador. O autor menciona que:

FIGURA 47 - Frações impróprias, considerações para o professor

O aluno deverá observar, neste caso, o primeiro número do par, o numerador, é igual ou maior que o segundo número do par, o denominador, e perceber, intuitivamente, que se tem um número fracionário maior que a unidade, de onde a denominação sugerida "fração imprópria" e "número fracionário impróprio" e, em particular, aquelas em que se tem um número inteiro: "fração aparente" e "número fracionário aparente".

FONTE: Barbosa (1966b, p. 154)

Nesta passagem percebemos os *saberes para ensinar* frações improprias, onde o autor menciona que o professor deve fazer inferências de modo a levar os alunos a observarem que o numerador é maior que o denominador, e fazer com que os alunos compreendam que esse numerador pode se transformar em outro tipo de fração.

Barbosa (1966a) apresenta o conceito de número misto como sendo uma consequência do estudo dos isomorfos:

FIGURA 48 - Consequência II: número misto

Conseqüência II: Número misto.

Da identificação surge a necessidade de se operar

236

com números inteiros indicados e frações; assim:

1. De $\frac{a}{1} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c}{d}$.

surge: $a + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + c}{d}$

e, à soma indicada: $a + \frac{c}{d}$, passamos a indicar mais simplesmente:

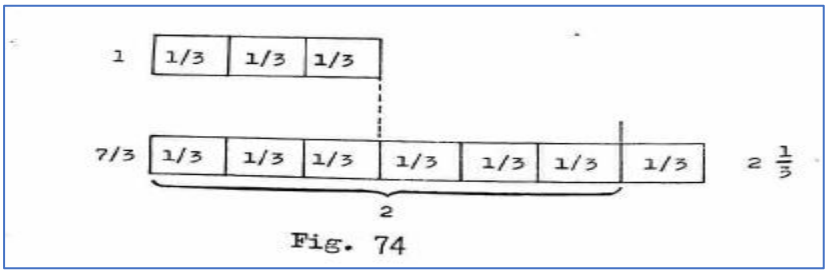
$a \frac{c}{d}$ ou a c/d.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 235-236)

Neste excerto, percebemos o *saber a ensinar* números mistos, a partir de consequências dos estudos de elementos isomorfos. Podemos destacar a utilização da linguagem matemática, característica do MMM. Esta consequência é apresentada pelo autor interessar-se dar sentido à regra usual de transformação de números mistos em fração impropria e vice-versa.

No volume II, o autor menciona que os números mistos não apresentam dificuldades para os alunos, pois os esquemas gráficos auxiliam o aluno a descobrir a regrinha de dividir o numerador pelo denominador, segundo Barbosa (1966b). Vejamos o exemplo abaixo:

FIGURA 49 - Exemplo de número misto



FONTE: Barbosa (1966b, p. 156)

A figura acima é um exemplo sugerido por Barbosa (1966b), o qual o aluno deve encontrar o número misto a partir de uma fração impropria (7/3). O professor deverá pedir para os alunos dividirem um inteiro em 3 partes iguais, após essa divisão o professor pedirá que construa um retângulo com 7 partes de 1/3, como mostra a figura. Após estes dois passos, é pedido para que o aluno marque, no retângulo de maior, tomando como unidade 3 partes de 1/3, assim o aluno perceberá que foram marcadas 2 partes inteiras restando uma parte de 1/3, obtendo assim o número misto 2 1/3.

A partir da figura acima podemos perceber o *saber para ensinar* números mistos, e podemos inferir que esse esquema gráfico é um *dispositivo didático* sugerido pelo autor aos professores para o ensino de tal conceito no ensino primário. Este exemplo resulta na seguinte regra: divida o numerador pelo denominador, o quociente é o número inteiro; o resto é o novo numerador e o denominador permanece o mesmo.

O autor ressalta ainda, que na aprendizagem dos números mistos os alunos devem entender que a notação é para simplificar, escrevendo o inteiro próximo à fração, mas que o número misto é uma adição de um número inteiro, dois inteiros mais 1/3.

Nesta seção verificamos que Ruy Madsen Barbosa, em seus manuais, busca dar aos professores, seja em formação ou para aqueles que estão em sala de aula, o suporte necessário para ensinar as frações impróprias, frações aparentes e números mistos, primeiramente utilizando o *saber a ensinar* (as consequências do estudo do isomorfismo), e utilizando a linguagem simbólica característica do MMM; e o *saber para ensinar* (exemplos e esquemas gráficos) como *dispositivos didáticos* para o ensino de tais conceitos.

5.4 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES: ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Após apresentar a definição de fração e os alunos entenderem a noção de frações equivalentes, Ruy Madsen Barbosa aborda o tema de operações com os números fracionários, no volume I do seu manual. As primeiras operações são: adição e subtração, das quais partem das considerações intuitivas dos números fracionários que fornecerão o processo para adicionar e retirar.

Assim, o autor inicia apresentando um problema onde menciona duas frações com as mesmas grandezas, 3/7 e 2/7, e pede para fazer a grandeza-soma. Facilmente o resultado é obtido 5/7 da grandeza fundamental.

Após esse exemplo intuitivo, o autor aborda a adição de duas frações considerando dois aspectos: caso de frações com os mesmos denominadores e caso de frações com denominadores desiguais (reduzir ao mesmo denominador).

O primeiro caso parte de uma equação do tipo, bx = a (b≠0). Supõe que x é a solução de um número fracionário (bx = a) e que y é a solução de um número fracionário (by = a’). Igualando às duas equações se tem (bx + by = a + a’). Evidenciando o b se tem [b (x + y) = a + a’)]. Provando que:

FIGURA 50 - Demonstração de soma de duas frações com o mesmo denominador

Esta equação nos indica, também, que o número fra
cionário soma dos números fracionários x e y, deve ser
dado pelo par (a + a', b) , ou com a notação fracioná
ria:

$$\frac{a + a'}{b}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 213)

Para o segundo caso é utilizado o mesmo raciocínio, com as equações (b.d.x = a.d) e (b.d.y = b.c). Provando que a soma de números fracionários com denominadores diferentes é dada por:

FIGURA 51 - Demonstração da soma de dois números fracionários com denominadores diferentes

que sugere a soma dos números fracionários x e y por

$$(ad + bc\ ,\ db), \quad \text{ou} \quad \frac{ad + bc}{db}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 214)

Chegando assim na seguinte definição:

FIGURA 52 - Definição da soma de dois números fracionários

DEFINIÇÃO 3:

Dados dois números fracionários representados pelos pares (a,b) e (c,d), ou $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, definimos soma dos dois números fracionários a uma terceiro número fracionário dado pelo par

$(axd + bxc, dxb)$, ou $\frac{axd + bxc}{bxd}$

Escreveremos:

$$(a,b) + (c,d) = (a \times d + d \times c, b \times d)$$

ou:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{axd + bxc}{bxd}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 214)

Partindo desta definição, Barbosa (1966a), apresenta o seguinte teorema da estabilidade da operação de adição:

FIGURA 53 - Teorema da estabilidade da adição

Teorema 3: Estabilidade da operação de adição.

Sejam outros represxntantes:

$$\frac{a'}{b'} \quad e \quad \frac{c'}{d'}$$

Sendo também representantes das mesmas classes de eqüivalência, devemos ter as relações de eqüivalência:-

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \qquad (I)$$

e:

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \qquad (II)$$

Aplicando a definição 3, teremos:

$$\frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'} = \frac{a' x\ d + b' x\ c'}{b' x\ d'}$$

Êste resultado precisa ser eqüivalente ao resultado anterior

$$\frac{a'\times d' + b'\times c'}{b'\times d'} = \frac{a\times d + b\times c}{b\times d}$$

Mas, pela Definição 2, é necessário, para que seja verdadeira esta solução de eqüivalência, que:

$$(b\times d)\times(a'\times d' + b'\times c') = (b'\times d')\times(a\times d+b\times c)$$

e, pela associatividade e comutatividade:

$$(a'\times b)\times(d\times d') + (c'\times d)\times(b\times b') =$$
$$= (a\times b')\times(d\times d') + (c\times d')\times(b\times b')$$

e, como pela eqüivalência I:

$$a'\times b = a\times b'$$

e, pela II:

$$c'\times d = c\times d'$$

a igualdade de fato se verifica.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 215-216)

A demonstração deste teorema, partindo da definição da operação de adição, é verificada a estabilidade, utilizando o conceito de equivalência, as propriedades de associatividade e comutatividade. Ao final desta demonstração o autor apresenta uma nota:

FIGURA 54 - Nota advinda do teorema da estabilidade da adição

Nota: Com esta demonstração fica provada a estabilidade da operação de adição definida, com a relação de eqüivalência; em outras palavras, provou-se que a operação de adição está <u>bem-definida</u>. O leitor verifica ainda que êle pode operar trabalhando com o par que lhe convier:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 216)

Podemos observar que o autor deixa destacado a palavra “bem-definida”, podemos nos remeter a uma passagem de Búrigo (1989) em que a autora menciona que no Movimento da

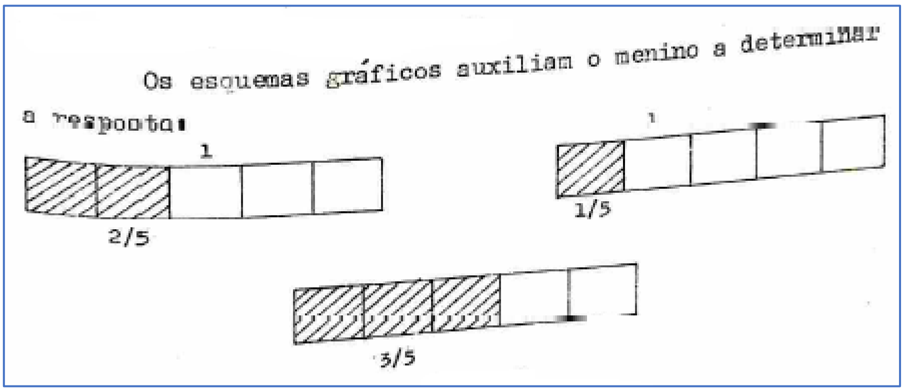
Matemática Moderna uma das características era a linguagem matemática bem definida, no sentido de utilizar a simbologia e as notações algébricas.

A partir destas considerações, podemos inferir que o autor Ruy Madsen Barbosa utiliza em seu manual pedagógico uma linguagem simbólica e algébrica, características do MMM, para definir o que os professores em formação devem saber sobre a adição de fração, ou seja, podemos inferir que a utilização desta linguagem e as definições são os *saberes a ensinar* adição de frações no ensino primário.

No Volume II dos manuais da coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", Ruy Madsen Barbosa menciona: "é costume iniciar-se a aprendizagem da adição (ou subtração) de números fracionários com o caso de frações com denominadores iguais, ditas frações homogêneas" (BARBOSA, 1966b, p. 157), ou seja, podemos concluir que o autor entende que o ensino das operações de adição e subtração deve iniciar partindo de frações homogêneas, essas frações auxiliarão o aluno a aprender o conceito de adição, e as outras operações serão consequências.

Segundo Barbosa (1966):

FIGURA 55 - Auxilio de esquemas gráficos para determinar resposta



FONTE: Barbosa (1966b, p. 157)

Aqui podemos verificar a utilização de um *dispositivo didático* para ensinar adição, os esquemas gráficos, o qual, segundo o autor, auxilia o aluno a determinar a resposta da soma de frações homogêneas. Sobre frações homogêneas o autor menciona que "permite estabelecer, com sua leitura, certa analogia com a união de conjuntos (adição de objetos, etc.), o que auxilia a aceitação e a fixação da regra" (BARBOSA, 1966b, p. 157).

Considerando a citação acima, podemos concluir que Barbosa utiliza as frações homogêneas como um *saber para ensinar* a adição de frações, e ainda, podemos verificar a intenção de trazer os elementos de um conjunto, característico do MMM, para o ensino das frações.

Percebemos, também, a *graduação* que o autor utiliza para o ensino de adição de frações. O professor deve iniciar partindo de frações com o mesmo denominador, frações homogêneas e a 'posteriori', ensinar frações com denominadores diferentes.

Após introduzir a adição de frações com o mesmo denominador, deveria ser ensinado a adição de frações com denominadores desiguais, ou frações equivalentes. O autor já alerta a dificuldade deste novo cálculo, pois mostra que não é possível adicionar ou subtrair apenas os numeradores. No volume II os denominadores desiguais podem ser percebidos por dois modos: raciocínio ou por gráficos. Por raciocínio, tem-se um exemplo:

FIGURA 56 - Verificação que não pode somar duas frações com denominadores diferentes, por raciocínio

a) Por raciocínio:

Dará $\frac{4}{5}$? Dará $\frac{1}{10}$?

Quatro quintos não é possível, pois nós temos 3/5 mais 1/10, e 1/10 é menor que 1/5; logo não temos $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}$, e sim 3/5 mais um número fracionários menor que 1/5.

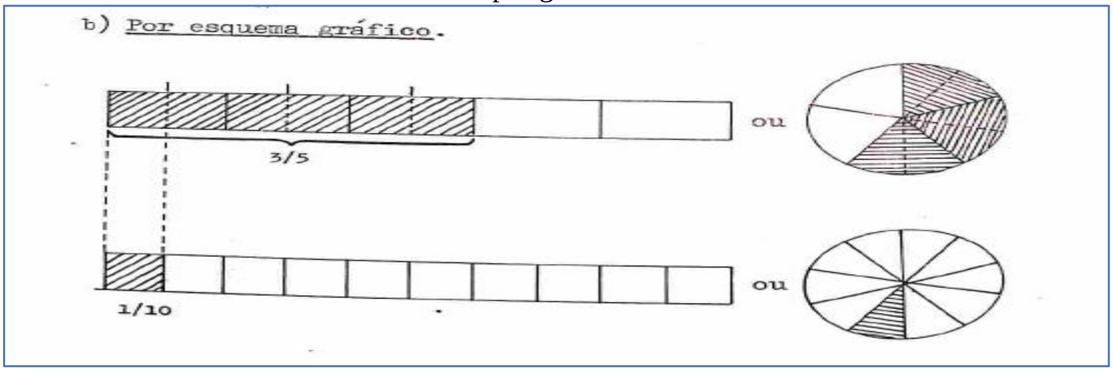
Quatro décimos também não é possível, pois nós temos 3/5 mais 1/10, e 3/5 é maior que 3/10, pois 3/10 são três partes de um inteiro dividido em dez partes, e 3/5 são três partes de um inteiro dividido só em cinco partes, portanto, maiores que as primeiras.

Utilizar só o raciocínio com grandezas homogêneas, não é recomendado; assim, "só se adicionam grandezas homogeneas", poderá trazer confusões; 5 petecas com 2 petecas são 7 petecas, mas também é possível reunir, juntar (adicionar, no sentido comum) grandezas não homogêneas aparentemente, co

FONTE: Barbosa (1966b, p. 159)

Por gráfico, tem-se um exemplo:

FIGURA 57 - Verificação que não pode somar duas frações com denominadores diferentes, por gráfico



FONTE: Barbosa (1966b, p. 160)

Os dois exemplos acima levam os alunos a perceberem que não é possível adicionar e subtrair frações com denominadores desiguais, o primeiro exemplo é um pouco mais abstrato, já o segundo auxilia na visualização deste problema. O importante é que os alunos percebam que este problema se deu por fato de os denominadores serem desiguais.

A partir disso, o professor deve encaminhá-los para a obtenção de frações com denominadores iguais, a partir de mudanças do representante, como, por exemplo: encontrar uma fração equivalente com o mesmo denominador que a primeira fração. Para isso acontecer, o professor deve aplicar vários cálculos dessa natureza, o que nos remete ao ideário do MMM, o qual estava ligado a repetição e a aplicação de exercícios de repetição. Agora nos remetemos à nossa categoria de análise, *exercícios e problemas*.

Após esses exercícios de repetição, o autor menciona a inserção de novos exemplos, mas com denominadores não múltiplos (1/6 + 3/4) levando os alunos a perceberem a necessidade de substituir as duas frações equivalentes, para obter frações com denominadores iguais.

Agora é inserido a noção de múltiplos comuns, como no exemplo citado acima (1/6 + 3/4), o 24 é múltiplo do 6 e múltiplo do 4. E após introduzir essa noção do múltiplo comum, o professor deverá sugerir que os alunos façam cálculos utilizando os menores múltiplos comuns, ou seja, o mínimo múltiplo comum. Após várias repetições os alunos obterão a regrinha prática:

FIGURA 58 - Regra do mínimo múltiplo comum

"para se adicionar (ou subtrair) frações, com denominadores desiguais, determina-se o mínimo múltiplo comum dos denominadores, o qual será o denominador comum das frações".

FONTE: Barbosa (1966b, p. 163)

A subtração é abordada de forma separada da adição, no volume I, mas é utilizada a mesma ideia e raciocínio da adição, então, abordaremos apenas a definição de subtração.

FIGURA 59 - Definição de subtração de frações

Definição 5:

Dados dois números fracionários pelos pares (a,b) e (c,d), ou a/b e c/d, definimos diferença dos dois números fracionários, nessa ordem, a um terceiro fracionário dado pelo par

$$(a \times d - b \times c,\ b \times d), \quad \text{ou} \quad \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}$$

Escrevemos:

$$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \times d - b \times c}{b \times d}}$$

Condição de

FONTE: Barbosa (1966a, p. 224)

A subtração, por ser a operação inversa da adição, os seus encaminhamentos e demonstrações foram realizadas de formas análogas, apresentando a definição de subtração de números fracionários; a estabilidade da operação de subtração de números fracionários; e a redução ao mesmo denominador.

No volume I, o autor apresenta algumas propriedades importantes para a operação de adição de números fracionários, estas propriedades nos dão indícios da utilização do ideário do MMM, como vemos:

FIGURA 60 - Propriedades da adição

G.3. PROPRIEDADES

G.3.1. DA ADIÇÃO

A adição de números fracionários goza das mesmas propriedades da adição de inteiros:

a. Comutatividade:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

b. Associatividade:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

c. Existência do neutro:

A adição de número fracionário goza da existência do elemento neutro.

Como:

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0 + a}{1 \times b} = \frac{a}{b} =$$

$$= \frac{0}{b} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

FONTE: Barbosa (1996a, p. 230-231)

Podemos concluir, com essas propriedades, a utilização de uma linguagem estruturalista que aproxima a matemática do ensino superior no ensino primário, característico do MMM. Ruy Madsen Barbosa apresenta, em seu manual, como o professor deve ser formado seguindo o ideário do movimento.

Nesta seção podemos fazer algumas inferências importantes para nossa pesquisa, Ruy Madsen Barbosa aborda o ensino das operações de adição e subtração de forma análoga, buscando utilizar uma linguagem matemática bem definida, estruturada, simbólica e algébrica, características do movimento. Apresentando definições, propriedades, teoremas e consequências, como *saberes a ensinar*, ou seja, o que o professor, que ensina matemática no ensino primário, deve saber sobre o ensino de frações.

Percebemos os *saberes para ensinar*, quando o autor menciona que o professor deve utilizar frações homogêneas para iniciar o ensino de adição de números fracionários. Apontamos também algumas categorias de análise propostos para esta dissertação, como: a *graduação* (iniciando o ensino de adição de fração partindo de denominadores iguais, para após apresentar a adição de frações com denominadores diferentes).

Já os *dispositivos didáticos*, são percebidos no momento em que o autor menciona que o professor poderá usar os esquemas gráficos e o raciocínio, como formas de entender somar ou subtrair frações com denominadores iguais e diferentes. A categoria *exercícios e problemas*, são percebidos no momento em que, ao final das discussões sobre o que ensinar e o como ensinar, o autor apresenta exercícios que os alunos apenas repetem um determinado processo ensinado pelo professor.

Nas próximas seções discutiremos multiplicação e divisão de números fracionários no ensino primário, tentando identificar os *saberes a ensinar*; os *saberes para ensinar* e as nossas categorias de análises propostas para esta dissertação.

5.5 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES: MULTIPLICAÇÃO

No volume I do manual, a multiplicação de frações é iniciada com as considerações intuitivas, pois fornecem sugestões para definir a operação de multiplicação. O autor logo apresenta a definição de multiplicação de fração como:

FIGURA 61 - Definição de multiplicação de frações

DEFINIÇÃO 4

Dados 2 números fracionários representados pelos pares (a,b) e (c,d), ou a/b e c/d , definimos produto dos dois números fracionários a um terceiro fracionário dado pelo par

(a x c, b x d), ou a x c / b x d.

Escrevemos:

$$\boxed{(a,b) \times (c,d) = (a \times c,\ b \times d)}$$

ou:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 218-219)

Nesta definição de multiplicação, observamos a presença de notações de conjuntos e notação matemática, como é observado no ideário do MMM, desde os primeiros anos do ensino primário. Podemos inferir que a definição de multiplicação é um *saber a ensinar*, pois, o autor enuncia e o que o professor deve ensinar sobre multiplicação no ensino primário.

A partir da definição de multiplicação de fração, o autor enuncia teorema estabilidade da multiplicação:

FIGURA 62 - Teorema da estabilidade da multiplicação

Teorema 4: **Estabilidade da multiplicação**

Sejam outros representantes: a'/b' e c'/d'.
Sendo também representantes, temos:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \qquad \text{(I)}$$

e:

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \qquad \text{(II)}$$

Aplicando a definição 4, teremos:

$$\frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'} = \frac{a' \times c'}{b' \times d'}$$

Deveremos provar que:

$$\frac{a' \times c'}{b' \times d'} \sim \frac{a \times c}{b \times d}$$

mas, pela definição 2 é necessário, para que está equivalência se verifique, que:

$$(a' \times c') \times (b \times d) = (a \times c) \times (b' \times d')$$

Aplicando a associatividade e a comutatividade da multiplicação de inteiros:

$$(a' \times b) \times (c' \times d) = (a \times b') \times (c \times d')$$

o que de fato se verifica, pois pela relação I:

$$a' \times b = a \times b'$$

e, pela II:

$$c' \times d = c \times d'$$

o que prova que a operação de multiplicação também está bem-definida:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} \times \frac{c'}{d'}}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 219-220)

Percebemos a utilização de pares ordenados, advindo da teoria dos conjuntos, na demonstração deste teorema, a utilização das propriedades associativa e comutativa para provar a estabilidade da operação de multiplicação de números fracionários.

Ainda no volume I, Ruy Madsen Barbosa apresenta as seguintes propriedades da multiplicação de números fracionários:

FIGURA 63 - Propriedades da multiplicação

C.3.2. DA MULTIPLICAÇÃO

a) Comutatividade:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

b) Associatividade:

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$

c) Existência do neutro:

A multiplicação de números fracionários goza da existência do elemento neutro.

De fato:

$$\frac{a}{b} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times 1}{b \times 1} = \frac{a}{b}$$

o que nos mostra que o número fracionário que possui como um dos representantes a fração 1/1, é o elemento neutro.

O leitor observa que o elemento neutro na multiplicação possui os representantes com numerador e denominador iguais.

d) Existência do inverso:

Chama-se elemento inverso de outro em relação a uma operação, o elemento que, operando com êle, obtenha-se para resultado o elemento neutro da operação.

Mostraremos que os números fracionários não nulos, possuem inversos em relação à multiplicação (*):

Seja um número fracionário dado pela fração $\frac{a}{b}$; sendo não nulo é $a \neq 0$, portanto existe um número fracionário dado pela fração $\frac{b}{a}$.

Façamos a multiplicação:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = \frac{a \times b}{b \times a}$$

mas, como $a \times b = b \times a$, temos:

$$\frac{a \times b}{b \times a} = \frac{1}{1}$$

(*) Em relação à adição só com os números negativos.

o que mostra que o produto dos números fracionários $\frac{a}{b}$ e $\frac{b}{a}$ é o elemento neutro, de onde $\frac{b}{a}$ ser o inverso (ou recíproco) de $\frac{a}{b}$; bem como, $\frac{a}{b}$ é o inverso de $\frac{b}{a}$; dizemos que a fração é inversa.

Exemplo:

O inverso de $\frac{3}{5}$ é $\frac{5}{3}$.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 221; 222; 223)

Destas propriedades (associativa, comutativa, elemento neutro, existência do inverso), percebemos a utilização de uma linguagem bem definida e estruturada, buscando justificar/provar cada uma das propriedades, para que o professor em formação se aproprie da linguagem condizente com o Movimento da Matemática Moderna, partindo do ensino intuitivo de multiplicação para a abstração desta operação em conjunto com suas propriedades.

Outra propriedade que Ruy Madsen Barbosa aborda em seu manual, é a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, a qual o autor apresenta da seguinte forma:

FIGURA 64 - Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição

C.3.3. PROPRIEDADE DISTRIBUTIVA DA MULTIPLICAÇÃO EM RELAÇÃO À ADIÇÃO.

De fato:

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c \times f}{d \times f} + \frac{e \times d}{f \times d} \right)$$

$$= \frac{a}{b} \times \left(\frac{c \times f + e \times d}{d \times f} \right) =$$

$$= \frac{a \times (c \times f + e \times d)}{b \times d \times f}$$

$$= \frac{a \times c \times f + a \times e \times d}{b \times d \times f}$$

e, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f} = \frac{a \times c}{b \times d} + \frac{a \times e}{b \times f} =$

$$\frac{a \times c \times f}{b \times d \times f} + \frac{a \times e \times d}{b \times f \times d} = \frac{a \times c \times f + a \times e \times f}{b \times d \times f}$$

isto é:

$$\boxed{\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f} \right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 223)

As demonstrações e enunciações são sempre abordadas de forma simbólica, partindo de fatos. No volume II, a multiplicação de fração é abordada considerando dois aspectos, um dos fatores é inteiro e ambos os fatores são fracionários. Para o primeiro aspecto o autor diz que a explicação pode ser baseada na adição, como, por exemplo: 2/3 x 4:

FIGURA 65 - Multiplicação com um dos fatores inteiros, baseado na adição

pode-se tomar o inteiro como multiplicador e o fracionário como multiplicando.

Encontrar-se-á:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3},$$

de onde procurar-se-á mostrar que 8 é obtido multiplicando 2 por 4, de onde a regra:

$$\frac{2}{3} \times 4 = \frac{2 \times 4}{3}$$

FONTE: Barbosa (1966b, p. 168)

Aqui podemos perceber um *saber para ensinar* a multiplicação de frações, onde a base é a adição de parcelas iguais com o mesmo denominador, como mostra o exemplo acima.

Outra forma de ensinar a multiplicação de fração com um número inteiro é baseado na ideia das formas verbais, como, por exemplo: “2 livros multiplicados por 4, ou 4 vezes 2 livros, é igual a 8 livros, então 2 terços multiplicados por 4, deve ser igual a 8 terços, isto é, 8/3.” (BARBOSA, 1966b, p. 168).

Barbosa (1966b) destaca ainda, que o professor pode conduzir os alunos à interpretação da multiplicação por um número fracionário como equivalente à forma verbal “de”, por exemplo: ¼ de 12 ou ¼ x 12.

Para o segundo aspecto, ambos fatores são fracionários, o autor destaca a importância de o aluno já saber a correspondência entre a multiplicação e a palavra “de”, como explicação apresenta um exemplo partindo de um retângulo como inteiro. Esta forma verbal nos remete ao *dispositivo didático* que o professor pode utilizar em suas aulas, observe:

FIGURA 66 - Exemplo de multiplicação com ambos fatores fracionários

83); divide-se o retângulo em 3 colunas, e toma-se 2 delas, obtendo-se 2/3; em seguida, para se determinar 1/4 de 2/3, divide-se em 4 faixas com linhas horizontais, mas prolonga-se as linhas dividindo todo o retângulo.

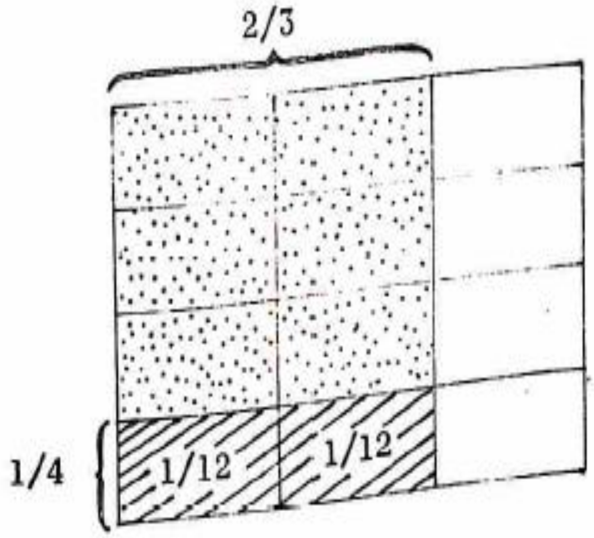


Fig. 83

Temos $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$ igual a 2 retângulos pequenos, mas cada, como o retângulo todo, possui 12 retângulos pequenos, cada retângulo pequeno é 1/12 do todo, logo 1/4 de 2/3 é igual a 2/12; de onde a regra:

$$\frac{1}{4} \text{ de } \frac{2}{3} = \frac{1 \times 2}{4 \times 3}$$

... com a utili

FONTE: Barbosa (1966b, p. 171)

Neste exemplo, percebemos a utilização da linguagem simbólica e a utilização de figuras geométricas para ensinar a multiplicação de frações, onde ambos fatores são fracionários. Nesta figura podemos inferir sobre a utilização de *dispositivos didáticos* para ensinar a multiplicação de frações, ao ter dois números fracionários.

Nesta seção observamos que a multiplicação é abordada de formas distintas nos dois volumes, no volume I é abordado com propriedades, teoremas, definições exclusivamente simbólicas, o que inferimos ser os *saberes a ensinar*. Já no volume II, é abordado com dois aspectos, um número fracionário e um número inteiro e; ambos os fatores são fracionários, o qual inferimos ser os *saberes para ensinar*. Desta seção, também, concluímos a utilização de figuras geométricas e a utilização da forma verbal "de" como *dispositivos didáticos*, que o professor pode utilizar em suas aulas.

5.6 OPERAÇÕES COM FRAÇÕES: DIVISÃO

Ruy Madsen Barbosa, no volume I, apresenta o assunto de divisão de números fracionários, partindo da definição desta operação, veja a figura abaixo:

FIGURA 67 - Definição de divisão de frações

C.5. DIVISÃO

DEFINIÇÃO 6:

Dados dois números fracionários, pelos pares (a,b) e (c,d), ou a/b e c/d, o segundo não nulo, definimos a quociente dos dois números fracionários, nessa ordem, um terceiro número fracionário dado pelo par

$$(a \times d,\ b \times c), \quad \text{ou} \quad \frac{a \times d}{b \times c}$$

Escrevemos:

$$\boxed{(a,b) : (c,d) = (a \times d,\ b \times c)}$$

ou:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 228)

Percebemos que o autor não mais utiliza a intuição para apresentar um novo conceito, apenas apresenta a definição (na forma de conjunto e na forma simbólica), e após a apresentação da nova operação é aplicado exercícios. Podemos inferir que o autor utiliza concepções do MMM, pois para definir o que é divisão de números fracionários, ele explicita o uso de um par ordenado, que advém da Teoria dos Conjuntos, o qual foi dado destaque neste movimento.

Após definir o que é uma divisão de números fracionários, Ruy Madsen Barbosa, demonstra o teorema da estabilidade da divisão, a qual podemos verificar na figura abaixo:

FIGURA 68 - Teorema da estabilidade da divisão

Teorema 6: Estabilidade da divisão

Sejam representantes dos números fracionários outras frações:

$$\frac{a'}{b'} \quad e \quad \frac{c'}{d'}$$

Teremos as eqüivalências:

$$\frac{a'}{b'} \sim \frac{a}{b} \qquad (I)$$

$$\frac{c'}{d'} \sim \frac{c}{d} \qquad (II)$$

Sendo o segundo número fracionário não nulo, então o numerador $c \neq 0$, e, como $c' \times d = d' \times c$, obrigatòriamente, $c' \neq 0$; o que de fato deveria acontecer, pois $\frac{c'}{d'}$ também é representante do mesmo número.

Aplicando a Definição 6:

$$\frac{a'}{b'} : \frac{c'}{d'} = \frac{a' \times d'}{b' \times c'}$$

Para que a divisão definida seja estável com a relação de eqüivalência, é necessário que:

$$\frac{a' \times d'}{b' \times c'} \sim \frac{a \times d}{b \times c}$$

Mas, pela Definição 2, para que haja esta equivalência, é suficiente que:

$$(a' \times d') \times (b \times c) = (a \times d) \times (b' \times c')$$

ou, aplicando a associatividade e a comutatividade da multiplicação de inteiros:

$$(a' \times b) \times (d' \times c) \doteq (a \times b') \times (d \times c')$$

igualdade que de fato se verifica, levando em conta as equivalências I e II.

Logo: $\boxed{\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} \sim \dfrac{a'}{b'} : \dfrac{c'}{d'}}$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 229-230)

Nesta demonstração, podemos perceber a utilização de uma linguagem simbólica bem definida, utilizando elementos da Teoria dos Conjuntos, a aplicação de propriedades já conhecidas (associativa e comutativa) e a relação de equivalência. A partir desta demonstração, concluímos serem *saberes a ensinar* divisão de frações no ensino primário, pois permiti-nos visualizar o que o autor deseja que os professores em formação saibam para ensinar divisão de números fracionários.

Apresenta também, logo depois da definição e do teorema da estabilidade da divisão, duas consequências deste teorema, o qual é chamado de: Consequência I – Redução ao mesmo denominador e Consequência II – Divisão com operação inversa, ver figura abaixo:

FIGURA 69 - Consequência I - redução ao mesmo denominador

Consequência I: Redução ao mesmo denominador:

Tomemos dos números fracionários, dados pelas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, outros representantes, mas com denominadores iguais:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a'}{m} : \frac{c'}{m}$$

Pela definição 6:

$$\frac{a'}{m} : \frac{c'}{m} = \frac{a' \times m}{m \times c'}$$

Mas, pela Definição 2:

$$\frac{a' \times m}{m \times c'} = \frac{a'}{c'}$$

ou que:

$$\boxed{\frac{a'}{m} : \frac{c'}{m} = \frac{a'}{c'}}$$

que nos fornece uma regra(*) para operar com frações de denominadores desiguais:

Transforma-se as frações em frações eqüivalentes com denominadores iguais, e toma-se para quociente a fração constituída dos numeradores.

Exemplo:

a) $\frac{3}{5} : \frac{1}{2} = \frac{6}{10} : \frac{5}{10} = \frac{6}{5}$

b) $\frac{6}{8} : \frac{3}{8} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$

(*) Ver na 2a parte do livro, sugestão metodológica para aplicação desta regra

FONTE: Barbosa (1966a, p. 230)

Esta consequência fornece uma regra para operar com as frações, cujos denominadores diferem e a transformação das frações em frações equivalentes com denominadores iguais, se torna para o quociente a fração constituídas dos numeradores. (BARBOSA, 1966a).

Podemos verificar a diferenciação dos manuais por esse recorte, observando o (*) na figura acima, percebemos que o volume I é destinado aos professores em formação, com o intuito de ensinar o que o professor de matemática deve ensinar no ensino primário. Já o volume II, percebemos que também é um manual para professores em formação, mas com o intuito de sugerir algumas possibilidades metodológicas para o ensino.

FIGURA 70 - Consequência II - divisão como operação inversa

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

FONTE: Barbosa (1966a, p. 231)

O autor menciona esta consequência para retirar a “restrição existente para divisão de números inteiros, que existe para sua possibilidade que o dividendo fosse multiplicador do divisor, generalizando a operação e tornando-a sempre possível” (BARBOSA, 1966a, p. 231), este fato conserva a divisão como a operação inversa da multiplicação. Nesta consequência II, podemos inferir que o aluno chegará à regra usual de divisão de frações, onde mantém o primeiro número fracionário e inverte o segundo número fracionário.

Já no volume II da coleção, o autor inicia a temática de divisão dizendo que:

FIGURA 71 - Introdução da operação de divisão

F.3. DIVISÃO

É útil uma preparação do conceito de fração inversa, mostrando o que poderá ser obtido por simples multiplicações, do que a tôda fração corresponde uma outra que, multiplicada pela primeira, fornece a unidade, que é denominada inversa ou recíproca. É interessante ampliar o conceito, mostrando que se pode obter inversa de número inteiro, e, recìprocamente, existem inteiros que são inversos de números fracionários:

FONTE: Barbosa (1966b, p. 173)

Ou seja, o assunto de divisão é dado inicialmente com o conceito de fração inversa, para isso, é sugerido a aplicação de exemplos e exercícios, para que os alunos pratiquem e entendam o que é fração inversa. Assim, podemos inferir que utilizar o conceito de fração inversa anterior ao ensino de divisão de fração auxiliará os alunos no entendimento desta operação, caracterizando um *saber para ensinar* divisão de frações. Verificamos também uma certa *graduação*, no sentido de ensinar primeiro fração inversa para a 'posteriori' ensinar divisão de fração.

Após esse treino com os exemplos, é aconselhado retomar a noção de divisão, por exemplo: 30 : 5 = 6, porque 6 x 5 =30, e, assim, introduzir a noção de divisão de frações, por exemplo: 2/5 : 3/4 = 8/15, porque 8/15 x 3/4 = 2/5.

O autor apresenta outra forma de ensinar a divisão de frações, utilizando uma balança:

FIGURA 72 - Divisão de frações por meio do uso de balanças de dois pratos

Estas explicações poderão ser melhoradas, e mais fa-
cilmente entendida a multiplicação nos dois membros da igual
dade, esquematizando-se a questão, não em forma de igualdade,
mas em forma de uma balança de dois pratos, de onde a noção
de que, o que se fizer num prato, deverá ser feito no outro.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 175)

Outra maneira de ensinar a divisão de fração é:

FIGURA 73 - Divisão de frações por meio da noção de "quantas vezes está contido"

Algumas divisões poderão ser calculadas raciocinan-
do-se com a noção de "quantas vêzes está contido"; assim, com
o 30 : 5, pode ser pensado quantas vêzes 30 contém 5; pode-
se aplicar o raciocínio para algumas frações:

a) $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = ?$ Quantos sextos possui um têrço?

Possui 2, logo $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 2$, mas calculamos 2 fa-
zendo 6 : 3, portanto:

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 6 : 3 = \frac{6}{3} = \frac{1 \times 6}{3 \times 1}$$

FONTE: Barbosa (1966b, p.175)

Nestas duas figuras apresentadas, anteriormente, podemos verificar a utilização de *dispositivos didáticos* para ensinar a divisão de fração, na primeira a utilização de balanças e na segunda a utilização da noção de "quantas vezes está contida", o que também caracteriza um *saber para ensinar* divisão de frações.

Desta última figura, o autor elabora passos, que tornam o ensino fácil, na percepção do mesmo, esses passos auxiliarão o professor a conduzir os alunos no ensino de divisão de números fracionários, segundo Barbosa (1966b, p. 176-177-178):

1. Recordar a divisão como operação de determinação do número de vezes que o divisor está contido no dividendo;
2. Fazer exemplos cujo resultado é exato e também número misto;
3. Aplicar o conceito à divisão de frações com denominadores iguais, com o primeiro numerador múltiplo do segundo;
4. Aplicar o conceito à divisão de frações com denominadores iguais, sem que o primeiro numerador seja múltiplo do segundo;
5. Mostrar que, para dividir frações com denominadores desiguais é necessário, para aplicar o processo, transformá-los em frações equivalentes com denominadores iguais: primeiro, com transformações só de um denominador, depois com transformações nos dois denominadores.

O autor menciona que este processo é de fácil entendimento, mas que o inconveniente deste processo é o fato de não ser tão prático como aquele de multiplicar pelo número fracionário inverso, o que seria compensado com o entendimento, (BARBOSA, 1966b).

Na divisão de frações, percebemos, no volume I da coleção, uma abordagem do assunto de divisão a partir de definição, teoremas e consequências, o qual caracterizamos como *saber a ensinar* divisão de frações e podemos inferir que o autor utiliza os aspectos da Teoria de Conjuntos, característico do MMM.

No volume II, o autor aborda a divisão de frações apresentando três formas de ensinar tal conteúdo: o primeiro, a partir da noção de fração inversa; o segundo, a partir de utilização de balanças de dois pratos; e por último, um processo de raciocínio a partir da noção de "quantas vezes está contido", a qual caracterizamos como os *saberes para ensinar* divisão de frações.

Estas três maneiras de ensinar diferem daquela que o aluno apenas mantém a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda. O terceiro processo de ensino de divisão de fração, é uma maneira gradual de ensinar os alunos, levando-os a entender a divisão de frações e não apenas apresentar o algoritmo pronto.

5.7 OPERAÇÕES COMBINADAS E PROBLEMAS

O volume II, apresenta uma seção onde é aplicado as operações combinadas ou o cálculo de expressões fracionárias, o autor menciona que este trabalho deve ser realizado com muita prática, principalmente para os alunos do último ano do primário, pois passarão pelo exame de admissão para o curso ginasial. A prática é entendida como ação de resolver exemplos, exercícios e problemas.

Para o cálculo de expressões fracionários o autor faz algumas considerações importantes, segundo Barbosa (1966b, p. 179):

a. A prática não deve ser levada ao exagero, fornecendo às crianças expressões muito extensas ou complicadas. O que se pretende é conseguir dar as crianças uma boa prática de cálculos, ou uma preparação para o cálculo de expressões algébricas do curso ginasial, tão empregadas nas deduções de formulas e cálculos científicos; mas não um trabalho excessivamente longo e pro demais cuidadoso, capaz, sem dúvidas, de afugentar ou amedrontar os alunos.
b. A rigor, não existem expressões como 3/4 – 1/3 – 2/3 ou 3/4 : 1/3 : 2/3 pois, a subtração e a divisão não gozam da propriedade associativa; o bom senso é utilizar as operações na ordem de escrita; entretanto, tal prática não é a empregada em expressões com as seguintes: 3/4 + 1/3 x 2/3 que são calculadas como: 3/4 + (1/3 x 2/3).

Desta última consideração, Barbosa (1966b) faz uma indagação do porquê realizar primeiro o cálculo de multiplicação e divisão primeiro e depois da soma e da subtração, o autor responde o porquê vejamos:

FIGURA 74 - Explicação do cálculo da multiplicação e divisão no início da expressão

Por que? Porque é de uso, simplesmente de uso, considerar a multiplicação e a divisão como operações mais importantes, primordiais, em relação à adição e subtração, de onde seu primeiro cálculo.

FONTE: Barbosa (1966b, p. 180)

O autor continua com suas considerações

c. Fazer com que as crianças percebam a diferença entre número misto e multiplicação de inteiro por um número fracionário.
d. Lembrar às crianças que os números, além das muitas vantagens que apresentam, permitem dividir dois números sem que o primeiro seja múltiplo do segundo, sem desperdício do resto.
e. Lembrar aos alunos que, para os números fracionários, são válidas as mesmas propriedades das operações com inteiros.
f. Aproveitar as frações e dar noções de relação, de razão, inclusive introduzindo a noção de porcentagem, ensinando o numeral correspondente com o símbolo %, e fazendo alguns exemplos simples de cálculos diretos, ligados a questões da vida prática.

Podemos inferir que, estes pontos levantados por Ruy Madsen Barbosa, auxiliam os professores que ensinam matemática no ensino primário a pensar como o aluno vem aprendendo, e ao ensinar as expressões numéricas, o professor deve tomar alguns cuidados, o que podemos concluir serem *saberes para ensinar* as expressões numéricas com números fracionários.

O volume I, não apresenta a temática de cálculo de expressões fracionárias, mas apresenta exercícios, problemas com sugestões e problemas sem sugestões.

FIGURA 75 - Exemplos de exercícios

5. Calcular x em:

a. $\frac{3}{2} = \frac{6}{x}$ b. $\frac{4}{x} = \frac{1}{3}$

c. $\frac{x}{18} = \frac{15}{30}$ d. $\frac{x}{12} = \frac{3}{x}$

6. Forme as classes de eqüivalência:

a. { 1/3 } b. { 2/3 }

c. { 0/4 } d. { 5/6 }

e. { 1/1 } f. { 4/1 }

7. Quais são os representantes das classes de eqüivalência seguintes, com denominador 12?

a. { 1/2 } b. { 1/3 } c. { 2/3 }

d. { 1/6 } e. { 5/6 } f. { 1/1 }

g. { 4/3 } h. { 3/4 } i. { 1/4 }

FONTE: Barbosa (1966a, p. 256)

FIGURA 76 - Exemplos de problemas com sugestões

1. De um barril dom 60 litros de vinho retirou-se $\frac{3}{4}$. - Quanto se retirou?

Sugestão: 1. Resolva reduzindo à unidade fracionária

2. Resolva como simples multiplicação, interpretando a partícula "de".

2. De um saco de feijão de 45 quilos retirou-se $\frac{2}{5}$. - Quanto sobrou?

Sugestão: 1. Resolva calculando $\frac{2}{5}$ de 45 e depois subtraindo.

2. Resolva calculando a fração resto.

FONTE: Barbosa (1966a, p. 262)

FIGURA 77 - Exemplos de problemas sem sugestões

1. Teodoro teria 35 anos se vivesse mais $\frac{3}{4}$ do que já viveu. Qual à sua idade?
2. Zenaide perdeu $\frac{2}{11}$ do que possuia e ainda ficou com $ 270,00. Quanto possuia?
3. Repartir 240 bolinhas entre 2 meninos, recebendo o segundo $\frac{1}{6}$ do primeiro.

FONTE: Barbosa (1966a, p, 265)

Nestas três figuras, podemos perceber que o autor enfatiza a prática, no sentido de resolver exercícios. Os exercícios têm em todos o mesmo aspecto, de ser realizado de forma mecânica, onde o aluno apenas precisa saber a fórmula e a maneira de resolver.

Nos problemas com sugestões, o que se percebe é que o autor já menciona a maneira como o aluno deve responder, quais os passos que ele deve seguir sem deixar o aluno decidir qual caminho seguir.

Já nos problemas sem sugestões, o autor dá uma certa “liberdade” para o aluno escolher o caminho que deseja seguir, mas o aluno deveria seguir um caminho que o professor ensinou, ou seja, um caminho que ele reproduz o que foi ensinado.

No volume I, percebemos a utilização de uma de nossas categorias de análise, *exercícios e problemas*, o qual o autor utiliza nomenclaturas como: exercícios, problemas com sugestão, problemas sem sugestões e exemplos. As figuras anteriores mostram exemplo de como Ruy Madsen Barbosa entende os *exercícios e problemas*, verificamos que o autor utiliza em todo o seu manual muito exercícios de repetição, onde o aluno deveria repetir um exemplo que o professor apresentou.

O volume III da coleção, trata de um manual com complementos, alguns assuntos que não foram abordados nos volumes I e II e alguns “problemas famosos”, para o que nos atemos aqui nesta dissertação o volume III apresenta um “problema famoso” envolvendo frações, vejamos:

FIGURA 78 - Problema das torneiras

C. Problema das torneiras (ou do tanque).

O problema das torneiras, é outro curioso, no qual se dá ás vazões de duas torneiras, ambas enchendo (ou esvaziando), ou uma enchendo e outra esvaziando um tanque. A capacidade do reservatório pode ser dada ou não, cuja influência

no problema é mínima. Pede-se o tempo gasto para se encher (ou esvaziar) o tanque.

O leitor poderá para facilidade de entendimento interpretá-lo como outra forma do problema dos trens. (*)

Façamos exemplos numéricos:

Problema 1: Uma torneira, quando aberta, enche um tanque em 3 horas; outra esvazia-o em 8 horas. Abrindo-se, simultâneamente, em quanto tempo o tanque ficará cheio?(**).

FONTE: Barbosa (1966c, p. 39-40)

Este problema não está ligado diretamente ao ensino de fração, mas para a resolução necessita a utilização das definições, propriedades, teoremas e consequências de frações. O nível de dificuldade deste exemplo é elevado, o qual não condiz com o que o autor menciona em seu próprio texto no volume II, quando fala que os problemas, exercícios e expressões não devem amedrontar ou afugentar os alunos.

Para corrigir essa dificuldade e trazer o problema das torneiras para o ensino primário, ele apresenta um novo problema, mas que não utiliza a fração na sua resolução:

FIGURA 79 - Problema das torneiras reformulada para o ensino primário

Problema 3:

Uma torneira joga num tanque 40 litros por hora, outra retira 10 litros por hora; tendo o reservatório capacidade para 90 litros, abrindo-se simultâneamente as torneiras, quanto tempo demorará para se encher o tanque?

Por hora ficam no tanque 40 – 10 = 30, trinta litros; portanto, para encher 90 litros, serão necessárias 90 : 30 = 3, três horas.

Anàlogamente, seria resolvido o problema das duas enchendo (ou esvaziando).

FONTE: Barbosa (1966c, p. 44)

O autor menciona ainda que este problema das torneiras, foi retirado de exames de admissão, com enunciados variados, como, por exemplo: "Uma torneira enche 1/4 de um tanque em 5 horas e outra enche os 2/5 do resto em 12 horas. Em quanto tempo as torneiras, abertas juntas, poderão encher o tanque?" (BARBOSA, 1966c, p. 45).

Menciona ainda que muitos professores já não estão utilizando o problema das torneiras ou parecidos, por algum motivo, em especial: "este eu sei, minha professora ensinou hoje pela manhã como se faz." (BARBOSA, 1966c, p. 45), o problema se tornou conhecido e os alunos que prestariam os exames de admissão já sabiam como resolver.

Em síntese, podemos destacar que os manuais analisados, buscam por uma matemática que produz efeitos na vida social e cultural dos estudantes, pois durante a análise observamos a utilização de exemplo do cotidiano, o ensino dos números racionais é orientado que inicie com os números fracionários e após apresentem os números decimais, partem do concreto para o abstrato, utilizam figuras geométricas, materiais manipuláveis e esquemas gráficos para auxiliar no ensino dos conceitos dos números fracionários. A utilização de aspectos das estruturas algébricas e grupos; a utilização de diferentes significados que uma fração pode assumir, que permanecem na atualidade são indícios desde o MMM.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação temos como objetivo geral: Identificar elementos da *matemática do ensino* de frações presentes nos manuais "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" de Ruy Madsen Barbosa.

Para auxiliar na construção da resposta deste objetivo geral elencamos dois objetivos específicos, a saber: Identificar os *saberes a ensinar* fração nos manuais da coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários"; e Identificar os *saberes para ensinar* fração nos manuais da coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários".

Nos embasamos em elementos da História da Educação Matemática; nos *saberes a ensinar* e nos *saberes para ensinar*; na *matemática a ensinar* e na *matemática para ensinar* e na *matemática do ensino*. Estes elementos nos deram suporte para realizar a representação da história do MMM no Brasil e analisar os saberes constituintes dos professores que ensinam matemática a partir da coleção de manuais de Ruy Madsen Barbosa (1966).

Para o levantamento de fontes, utilizamos um inventário construído a partir do repositório do Ghemat/Brasil. Nesta fase, da construção do inventário, fez-se necessário a elaboração de critérios para a delimitação das fontes para a nossa análise. Os critérios elaborados foram: os manuais deveriam ser publicados entre os anos de 1960 e 1970; deveriam utilizar o ideário do MMM; deveriam ser destinados à formação de professores; e deveriam conter no título a palavra metodologia.

A partir destes critérios, elaboramos quadros onde ao passar de cada etapa de seleção, reduzia-se o número de manuais, até chegar na coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários" de Ruy Madsen Barbosa, publicada no ano de 1966.

Ao final desta etapa do inventário e da seleção das fontes, buscamos caracterizar quem foi Ruy Madsen Barbosa, investigando trabalhos já elaborados que faziam menção ao referido autor, buscar de vestígios na Hemeroteca Digital Brasileira e livros/manuais didáticos.

Nesta busca, concluímos que Ruy Madsen Barbosa foi um personagem influente no MMM no Brasil, integrou o grupo GEEM, componente da primeira diretoria do grupo, sistematizou experiência através de livros e manuais, foi um dos precursores da introdução do conteúdo de matrizes no ensino secundário, o GEEM foi chamado pelo estado de São Paulo para ministrar cursos para professores e como podemos verificar, nos indícios apresentados sobre o "Curso de Férias de Verão", Ruy Madsen Barbosa está presente ministrando esses cursos.

Após as análises dos indícios encontrados sobre Ruy Madsen Barbosa, concluímos que nos faltam elementos que caracterizem o personagem, em estudo, em um expert do período do Movimento da Matemática. Verificamos que Barbosa, sistematizou experiência em livros; seus conhecimentos sistematizados em livros circularam pelo estado de São Paulo, através de cursos; mas não encontramos indícios que ele foi chamado pelo Estado para resolver um determinado problema.

Cabe dizer que estamos considerando Ruy Madsen Barbosa como um indivíduo com expertise, pois, se considerarmos o mesmo como um membro do GEEM, podemos inferir que ele foi chamado pelo Estado. Visto que temos indícios que o GEEM foi chamado.

Ressaltamos ainda, a expertise de Ruy Madsen Barbosa dada por saberes necessários no período em estudo, destinados à formação de professores, na elaboração de materiais didáticos e na disseminação do ideário do MMM. O que fica são questionamentos, Ruy Madsen Barbosa é um expert? Devemos considerar apenas a expertise individual ou também a expertise coletiva? Não se encaixar em apenas um critério, de expert, torna ele um não expert? Esses questionamentos, ainda sem resposta, poderão serviu como inquietações para novas pesquisas sobre os experts.

Retornando ao tema central, de nossa dissertação, um dos manuais que Ruy Madsen Barbosa sistematizou, a partir de experiências com classes experimentais e discussão com os colegas do GEEM, foi a coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários", um dos únicos manuais do autor para o ensino primário. Podemos concluir, então, que Barbosa tinha como foco o ensino secundário e ensino superior.

Nesta coleção de manuais, buscamos identificar elementos da *matemática do ensino* de frações, com isso, o foco desta pesquisa está na articulação entre a *matemática a ensinar* e a *matemática para ensinar* frações, em consequência dos *saberes a ensinar* e *para ensinar*. Dito isto, nosso olhar se voltou para as frações, que discutiremos a seguir.

Nosso primeiro objetivo específico, a saber: Identificar os *saberes a ensinar* fração nos manuais da coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários".

Concluímos que Ruy Madsen Barbosa utilizou o ideário do MMM, partindo de uma linguagem matemática bem definida, orientando os professores como ensinar o conteúdo de números racionais, partindo da ideia de conjuntos, apresentando definições, regras e conceitos para que o professor faça com que seus alunos encontrem as regras utilizadas neste conteúdo, como, por exemplo: a regra da divisão de dois números fracionários com denominadores diferentes.

A utilização de classes de equivalência é evidente em todo o capítulo de frações, e apresenta uma *sequência* para o conteúdo de números racionais, partindo dos números fracionários para depois introduzir os números decimais. A presença do estruturalismo, característicos do MMM, são percebidos nas definições onde são utilizados os pares ordenados e as definições de grupos.

Podemos destacar, também, que o volume I desta coleção, é direcionado aos professores em formação, o que eles devem saber sobre aritmética e, consequentemente, o que esses professores devem saber para ensinar frações, ou seja, os *saberes a ensinar* frações, apresentando teoremas, definições, consequências, demonstrações, partindo do intuitivo para a abstração, e utilizando a linguagem da Teoria dos Conjuntos e das Estruturas Algébricas. A partir destas conclusões sobre o ensino de frações, podemos inferir haver uma *matemática a ensinar* frações nos manuais de Ruy Madsen Barbosa.

No segundo objetivo, a saber: Identificar os *saberes para ensinar* fração nos manuais da coleção "Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários".

Podemos concluir que, Ruy Madsen Barbosa no ensino de frações, parte do concreto para o abstrato, considerando os materiais didáticos para a abstração dos conceitos, utiliza uma linguagem lógica matemática bem definida, aconselha o professor a utilizarem figuras geométricas, objetos e materiais para que os alunos visualizem as frações.

Podemos destacar, também, os diferentes aspectos das frações, como, por exemplo: parte de um todo; como parte de um grupo; como uma relação e como uma divisão indicada, possibilitando assim a escolha, por parte do professor, de como ensinar as frações. Ruy Madsen Barbosa apresenta exercícios de cálculo mental e de repetição, para que o aluno realize um treinamento do que foi aprendido.

Ainda inferimos que o volume II e o volume III, são destinados, também, a formação de professores, mas com a ênfase no como ensinar a aritmética e consequentemente como ensinar frações, ou seja, os *saberes para ensinar* frações, mostrando como ensinar as frações, apresentadas no volume I, com o auxílio de *dispositivos didáticos*, *exercícios e problemas* e com a utilização de uma variedade de significados. O que nos leva a inferir haver uma *matemática para ensinar* frações nos manuais da coleção de Ruy Madsen Barbosa.

Após essas conclusões, sobre os *saberes a ensinar* frações e os *saberes para ensinar* frações, conseguimos verificar a existência de uma *matemática a ensinar* frações e uma *matemática para ensinar* frações.

Essa verificação nos permite concluir haver uma articulação entre a *matemática a ensinar* frações e a *matemática para ensinar* frações, pois o volume I e o volume II caminham juntos a todo o tempo, como verificamos na análise, neste movimento de articulação as obras se complementam, explicando o que o professor deve saber sobre frações e como o professor pode ensinar tal conteúdo.

Nossas categorias de análises (*sequência, graduação, significado, dispositivos didáticos e exercícios e problemas*), também nos auxiliaram na verificação dos elementos da *matemática do ensino* de frações, a partir delas elaboramos as seguintes conclusões:

A *sequência* apresentada por Barbosa (1966), é apresentar os números racionais após o conteúdo de maximização e minimização; no conteúdo de números racionais, prioriza o ensino de fração, apresentando como uma primeira representação dos números racionais. Possibilitando, assim, realizarmos a inferência que no período do MMM, para este autor, o ensino das frações deveria ser o ponto de partida para o conjunto numérico estudado.

Assim, a *sequência* estabelecida por esse autor, é iniciar com o ensino das frações e posteriormente o ensino dos números decimais, mostrando ambos conteúdos, como representações do conjunto dos números racionais.

O *significado* das frações na coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” volume II, não apresenta uma regra para seguir, mas destaca diferentes aspectos das frações, como, por exemplo: parte como de um todo; parte de um grupo; como uma relação e como uma divisão indicada, menciona que o professor deve diversificar nas suas práticas mostrando os diferentes aspectos de uma fração.

Barbosa (1966b) menciona que o ensino de frações deve ser de forma intuitiva, fornecendo os mais variados aspectos das frações, utilizando materiais didáticos que auxiliem os alunos na compreensão das noções de meio, um terço, um quarto, um quinto, um sexto, um sétimo, um oitavo, um nono e um décimo.

Já no volume I da coleção, Barbosa (1966a) menciona que o ensino de frações deve ser realizado de forma intuitiva, baseando-se em considerações geométricas de medição, em confronto de uma grandeza em várias grandezas iguais; para após apresentar as frações de forma abstrata e a definição algébrica.

A *graduação* é um elemento de nossa análise dos *saberes a ensinar* e dos *saberes para ensinar*. Barbosa (1966a) parte da definição de unidades fracionárias e número fracionário, passa pela definição de numeral, enuncia o que é o numerador e o denominador e defini par ordenado. Após está introdução, o autor retoma o assunto de igualdade e equivalência, que já fora apresentado no capítulo deste manual, para definir classes de equivalência e relações de equivalência, dando sequência na definição de frações equivalente.

Após o ensino de frações equivalentes, o autor apresenta a adição de fração, iniciando com um problema para chegar na definição, a partir desta definição surge uma consequência (redução ao mesmo denominador, que resulta na regra – soma os numeradores e mantêm o denominador). Em todas as definições e consequências são realizadas as demonstrações.

Barbosa (1966a) continua apresentando a operação de multiplicação, subtração e divisão de frações de modo análogo à operação de adição. Ao final das operações o autor apresenta a definição de fração própria, fração aparente e número misto.

No volume II da coleção de Barbosa (1996b) ao autor aborda o ensino de frações de forma explicativa, dando ao professor dicas de como ensinar os assuntos propostos no volume I, utilizando problemas, figuras, materiais didáticos, resultando em regras práticas.

Os *dispositivos didáticos* utilizados na coleção “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários” de Ruy Madsen Barbosa, em seu volume I, o autor, utiliza uma escrita matemática bem definida, com inúmeros símbolos, algarismos, definições, propriedades, consequências e demonstrações. Como *dispositivos didáticos* não identificamos a utilização de tal.

Já no volume II de seu manual, o qual trata da prática, o autor, aborda inúmeros *dispositivos didáticos*, podemos citar as diferentes abordagens de frações (de parte para o todo, como parte de um grupo, como uma relação e como uma divisão indicada), apresenta vários aspectos para que o professor utilize as mais variadas abordagens no ensino das frações.

Podemos destacar, também, a utilização de esquemas geométricos, retangulares ou setoriais, o qual o professor utiliza para ensinar as noções de meio, um quarto, um sexto, um oitavo e um doze avos. Este material, também, pode ser utilizado para o ensino de frações equivalentes.

Barbosa (1966b) utiliza esquemas gráficos para representar as frações impróprias e para a transformação em número misto. Usufrui também desses esquemas para o ensino das operações, variadas formas geométricas, como, por exemplo: a forma circular, que representa a pizza. Os *dispositivos didáticos* utilizados por Barbosa (1996b) levam ao aluno visualizar, na prática, as demonstrações das definições de frações.

Focando na análise dos *saberes a ensinar* e dos *saberes para ensinar*, olhamos para a categoria de *exercícios e problemas,* o qual nos deu uma representação de como Ruy Madsen Barbosa (1966) previa quais conhecimentos os alunos deveriam ter ao final do ensino das frações.

Em Barbosa (1966a), percebemos que durante todo o capítulo de teorização, demonstração e aplicação do conteúdo de números racionais, o autor não apresenta exercícios e problemas, focando mais na teoria do ensino de números racionais. Ao final do capítulo, há uma subseção que se chama exercícios, onde o autor apresenta inúmeros exercícios do tipo: verifique que; calcule; prove que; aplique; etc., visando exercitar o que foi ensinado ao aluno no início do capítulo.

Há também uma subseção chamada problemas, essa subseção está subdivida em problemas com sugestões e problemas sem sugestões; no primeiro o autor apresenta um problema e dá uma sugestão de como resolver o mesmo, já no segundo, os alunos devem apenas aplicar as regrinhas ensinadas.

Podemos inferir que no volume I, Barbosa (1966a), aplica os exercícios de repetição, passa para problemas um pouco mais complexos, mas para não desestimular o aluno, ele apresenta sugestão de como resolver, treinando os alunos para solucionar, e por fim, apresentar os problemas sem sugestões. Considerando que este caminhar leva o aluno a treinar todos os tipos de situações, partindo da repetição para a resolução de problemas.

No volume II, Barbosa (1966b), ao contrário do volume I, os exemplos são utilizados durante todo o desenvolvimento do capítulo, principalmente quando o assunto são as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) de frações, neste volume, observamos que o autor utiliza alguns esquemas para o ensino dos números mistos.

O volume III, é um manual que apresenta alguns problemas, chamado pelo autor de “problemas famosos”, Barbosa (1966c) utiliza poucos problemas ligados diretamente ao ensino de frações, a maioria dos problemas são de outros assuntos que utilizam os conceitos de frações na resolução, o que podemos mencionar haver indícios de uma *matemática para ensinar frações*, visto que leva o professor a pensar e manipular as frações com outros assuntos matemáticos e com o contexto social.

Para finalizar, durante a análise dos manuais percebemos essa articulação entre os volumes da coleção de Ruy Madsen Barbosa podem nos informar sobre indícios de *uma matemática do ensino* de frações nos manuais “Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários”.

Assim, com esta dissertação, buscamos compor, em conjunto com outros pesquisadores, um ‘corpus’ de trabalhos que discutem a *matemática do ensino* de frações no período do Movimento da Matemática Moderna, expandindo as discussões do grupo Ghemat/Brasil e da História da Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ALVES, A. M. M. **Matemática Moderna no ensino primário gaúcho (1960-1978): uma análise das coleções de livros didáticos estrada iluminada e nossa terra nossa gente.** Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade de Pelotas. Rio Grande do Sul – RS. 2013. 320 fls. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/189342?show=full. Acesso em 08 mai. 2021.

BARBOSA, R. M. **Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários.** São Paulo. L.P.M. Editora. Vol. I. 1966a. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159302. Acesso em: 10 jul. 2021.

BARBOSA, R. M. **Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários.** São Paulo. L.P.M. Editora. Vol. II. 1966b. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159289. Acesso em: 10 jul. 2021.

BARBOSA, R. M. **Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários**. São Paulo. L.P.M. Editora. Vol. III. 1966c. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/159290. Acesso em: 10 jul. 2021

BORER, V. L. Saberes: uma questão crucial para a institucionalização da formação de professores. *In*: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (org.). **Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, cap. 4, p. 172-200.

BÚRIGO, E. Z. **O Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60**. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre - RS. 1989. 286 fls. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/163050. Acesso em: 08 mai. 2021.

CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; NUNES, T. O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. **Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 1, pp. 125-136, 2006. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/49. Acesso em: 28 jul. 2021.

CORREIO PAULISTANO. **Professores Secundários de Matemática e Inglês**. Edição 30461, página 6, caderno 1 de 1955. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=090972_10&pesq=%22Ruy%20Madsen%20Barbosa%22&pasta=ano%20195&hf=memoria.bn.br&pagfis=27102. Acesso em: 17 nov. 2021.

CORREIO PAULISTANO. **Professores de Matemática escolhem vagas**. Edição 30770, página 3, caderno 2 de 1956. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=090972_10&pesq=%22madsen%20barbosa%22&pasta=ano%20195&hf=memoria.bn.br&pagfis=32431. Acesso em: 17 nov. 2021.

CORREIA, C. E. F. **O Estruturalismo em Livros Didáticos: SMSG e Matemática - Curso Moderno**. 236f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e

Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Rio Claro, 2015. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/handle/11449/132218. Acesso em: 10 jul. 2021.

COSTA, R. R. da. **A Capacitação e Aperfeiçoamento de Professores que ensinavam Matemática no Estado do Paraná ao tempo do Movimento da Matemática Moderna – 1961 a 1982.** Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Curitiba, PR. 2013. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/116743. Acesso em: 08 mai. 2021.

COSTA, D. A. da; VALENTE, W. R. O repositório de conteúdo digital nas pesquisas de História da Educação Matemática. **Revista Iberoamericana Patrimônio Histórico-Educativo**, Campinas (SP), v. 1, n. 1, p. 96-110, jul./dez. 2015. DOI: https://doi.org/10.20888/ridphe_r.v1i1.9231. Disponível em: https://econtents.bc.unicamp.br/inpec/index.php/ridphe/article/view/9231. Acesso em: 08 mai. 2021

COSTA, D. A. da. A emergência da disciplina da história da educação matemática. **Revista Cadernos de História da Educação**. v. 16, n. 3, p. 640-652, set./dez. 2017. DOI: https://doi.org/10.14393/che-v16n3-2017-5. Disponível em: http://www.seer.ufu.br/index.php/che/article/view/40893. Acesso em: 08 mai. 2021

DUARTE, A. R. S.; DIAS, A. L. M.; BORGES, R. A. S.. Tanta gente, tantos autores, professores... os personagens de um movimento aqui e além-mar. In: OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. (coord). **O movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular**. Editora UFJF, 2011, n. 1, cap. 2, p. 52-67.

DUARTE, A. R. S.; FRANÇA, D. M.; VILLELA, L. A.; BORGES, R. A. S.. A Matemática Moderna para crianças. In: OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. (coord). **O movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular**. Editora UFJF, 2011, n. 1, cap. 4, p. 97-111.

FRANÇA, D. M. de. A**. A produção oficial do Movimento da Matemática Moderna para o ensino primário do estado de São Paulo (1960 -1980).** Dissertação defendida no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC – SP, 2007. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/135358. Acesso em: 08 mai. 2021.

FRANÇA, D. M. de A. **Do primário ao primeiro grau: as transformações da Matemática nas orientações das Secretarias de Educação de São Paulo (1961- 1979).** Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo. Guarulhos, SP. 2012. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/135357/DENISE_MEDINA_DE_ALMEIDA_FRANCA_rev.pdf?sequence=1. Acesso em: 08 mai. 2021.

FRANÇA, D. M.; RAMIRES, K.; SANTOS, E. S. C. Büchler (1921, 1923): saberes de referência para ensinar frações. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. São Paulo, v. 12, n. 5, p. 1-21, ago. 2021. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/3070/1598. Acesso em: 19 set. 2021.

FRANÇA, D. M.; SANTOS, E.S.C. Sangiorgi: a sistematização de saberes docentes na formação de professores. Cadernos Cedes. Campinas, São Paulo, v. 41, n. 115, p.215-229, Set. - Dez., 2021. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/227971. Acesso em: 02 fev. 2022.

GEEM. **Matemática Moderna para o Ensino Secundário**. São Paulo. Editora "L. P. M." Editora. 1965, 2ª ed.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWL, B. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (Org.). **Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. cap. 3. p. 113-172.

GHEMAT-BRASIL. **Glossário**. São Paulo – SP. 2016. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/158952 Acessado em 15 mar. 2020.

GODOI, A. J. de. **A aritmética em tempos de matemática moderna: registros em cadernos escolares do ensino primário (1950- 1970).** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Florianópolis, SC. 2020. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/208283. Acesso em: 08 mai. 2021

LIMA, F. R. **GEEM – Grupo de Estudo do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna no Brasil**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11069. Acesso em: 22 dez. 2021.

MACIEL, V. B. **Elementos do saber profissional do professor que ensina matemática: uma aritmética para ensinar nos manuais pedagógicos (1880-1920)**. 2019. Tese (Doutorado em Ciências: Educação e Saúde na Infância e na Adolescência) – Escola de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Paulo, Guarulhos. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/199390#:~:text=Descri%C3%A7%C3%A3o%3A,312%20f. Acesso em: 08 mai. 2021.

MARTINS-SALADIM, M. E. M. **A interiorização dos cursos de matemática no estado de São Paulo: um exame da década de 1960.** Tese (doutorado em Educação Matemática) pelo Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. 2012. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/102107/martinssalandim_me_dr_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 17 nov. 2021.

MARTINS, M. E.; LUIZ, T. C. Organização do acervo pessoal de Ruy Madsen Barbosa: preservando memórias educacionais brasileiras. *In*. **Relações humanas e interculturalidade na educação**. **Coletânea Núcleo de Ensino, Vol. 4.** Eliana Marques Zanata / Vitor Machado (organizadores). São Paulo: Cultura Acadêmica, 2020, 138 p. Disponível em: https://www2.unesp.br/Home/prograd/ne_coletanea_vol_4.pdf. Acesso em: 18 nov. 2021.

MILANEZ, N. C. **A coleção Matemática, Metodologia e Complementos para professores primários, de Ruy Madsen Barbosa: Um estudo**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro, SP. 2020. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/191909/milanez_nc_me_rcla.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 08 jul. 2021.

MORAIS, R. S.; BERTINI, L. F.; VALENTE, W. R. **A Matemática no ensino de frações: do século XIX à BNCC**. São Paulo: Livraria da Física. 2021, 1ª ed.

RIOS, D. F.; BÚRIGO, E. Z.; FILHO, F.O.; MATOS, J. M.. O Movimento da Matemática Moderna: sua difusão e institucionalização. In: OLIVEIRA, M. C. A.; SILVA, M. C. L.; VALENTE, W. R. (coord). **O movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular**. Editora UFJF, 2011, n. 1, cap. 1, p. 14-51.

ROCHA, R. Em busca do tempo perdido. **Correio da Manhã (RJ).** Rio de Janeiro, 1968, edição 23098, pág. 4. 28 de julho de 1968. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=089842_07&pesq=%22Ruy%20Madsen%20Barbosa%22&pasta=ano%20196&pagfis=94165. Acesso em: 08 jul. 2021.

ROMANOWSKi, J. P.; ENS, R. T. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Revista Diálogo Educacional**, vol. 6, núm. 19, septiembre-diciembre, 2006, pp. 37-50. Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Paraná, Brasil. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=189116275004 acesso em: 08 mai. 2021.

SEMANA DA MATEMÁTICA MODERNA. **Informativo do Colégio Municipal (MG).** Minas Gerais. Edição nº. 3, pág. 6. dezembro de 1967. Disponível em: http://memoria.bn.br/DocReader/DocReader.aspx?bib=109223&pesq=%22Madsen%20Barbosa%22&pasta=ano%20196&pagfis=20. Acesso em: 08 jul. 2021.

VALENTE, W. R**. História da Educação Matemática: interrogações metodológicas**. REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V 2.2, p.28-49, UFSC: 2007. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12990/12091. Acesso em: fev. 2021.

VALENTE, W. R. Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. **Revista ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 30 – jul./dez. – 2008a. DOI: https://doi.org/10.20396/zet.v16i30.8646894. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/160373/2518-9617-1-PB.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 24 mar. 2021.

VALENTE, W. R. Osvaldo Sangiorgi e o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional, Curitiba**, v. 8, n. 25, p. 583-613, set./dez. 2008b. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/3724. Acesso em: 26 mai. 2021.
VALENTE, W. R. A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para a formação do educador matemático. *In*: HOFSTETTER, R.; VALENTE, W. R. (org.). **Saberes em (trans)formação: tema central da formação de professores.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, cap. 5, p. 201-227.

VALENTE, W. R. Processos de investigação Histórica da Constituição do Saber Profissional do Professor que Ensina Matemática. **Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. Canoas, Rio Grande do Sul – RS. V. 20. N.3. p.377-385. Maio/jun. 2018. DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss3id3906. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/3906/. Acesso em: 15 fev. 2021.