UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

KLEBER RAMOS GONÇALVES

ELABORAÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA E DE UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA OS INTEIROS RELATIVOS INFLUENCIADO POR UM GRUPO DE ESTUDOS COM PROFESSORES

Campo Grande - MS
2022

KLEBER RAMOS GONÇALVES

ELABORAÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA E DE UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA OS INTEIROS RELATIVOS INFLUENCIADO POR UM GRUPO DE ESTUDOS COM PROFESSORES

Tese apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Dra. Marilena Bittar.

Campo Grande - MS

2022

KLEBER RAMOS GONÇALVES

ELABORAÇÃO DE UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA E DE UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA OS INTEIROS RELATIVOS INFLUENCIADO POR UM GRUPO DE ESTUDOS COM PROFESSORES

Tese apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de doutor em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Dra. Marilena Bittar.

Campo Grande, 22 de fevereiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA:

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
Universidade Federal de Pernambuco

____

Profa. Dra. Rute Elizabete de S. Rosa Borba
Universidade Federal de Pernambuco

____

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes
Universidade Federal de Campina Grande

____

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo rico dom da vida, pelas promessas já cumpridas e pela força que me impulsionaram a vencer todos os desafios enfrentados.

Aos meus pais, pelo incentivo aos estudos e pela formação do meu caráter dado pelos exemplos de vida.

À minha mãe, tutora das minhas primeiras tarefas escolares, mas também por tantas outras lições gravadas em meu coração.

Ao meu pai, pelos conselhos, pelo exemplo de pai e de avô, pela honestidade e pelo caráter imaculado.

À minha esposa, por compreender minhas ausências físicas, de espírito e de mente, quando estava envolvido na escrita da tese, pelo companheirismo, pelas conversas e pelos conselhos que me permitiram deixar o desânimo de lado, focando em meu sonho de findar mais esse desafio. Por todas as demais ações, mesmo sem nenhuma palavra, foram minha força nos momentos de angústia. Sempre foi exemplo de mulher, de esposa, de filha e de mãe. Sou grato a Deus e a você, por ter tornado minha vida mais abençoada.

Ao Arthurzinho, meu filhão, “Digo do papai”, que se mostrou compreensivo, carinhoso e afetuoso, tantos e tantos gestos que também me impulsionaram a superar os desafios.

À minha sogra, pelas palavras que me fizeram continuar, também me confortando nos momentos de angústia, fazendo com que eu confiasse na promessa de Deus.

À equipe de Avaliação da SEMED, pelo apoio emocional, pelo incentivo, pelo auxílio em todos os momentos, pelas palavras e pelo ambiente de trabalho.

Aos colegas e aos professores do PPGEduMat/UFMS, por todas as contribuições para a finalização da tese.

À banca, que de maneira especial, me ajudaram e me auxiliaram em todos os processos da pesquisa e da escrita final da tese. Correções pontuais e certeiras, característica do peso de suas carreiras brilhantes. Também agradeço por proporcionarem um ambiente tranquilo, pois me deixaram à vontade, entendi que estávamos em uma roda de conversa, embora eu estivesse entre aqueles professores que os conhecia dos livros e dos artigos.

À minha orientadora, prof.ª Marilena, pois, como dito por muitas vezes, não esperava que me aceitasse como orientando uma vez, quiçá, duas vezes. Agradeço por tudo, conversas, orientações e conselhos, por suportar as reclamações e as queixas, devidamente transformadas em palavras de incentivo.

A Deus, pois Ele foi o princípio e será o fim de tudo, em Suas mãos entreguei minha vida, crente que meu caminho de peregrinação nesta Terra é totalmente guiado por Ele.

RESUMO

Esta pesquisa respondeu a seguinte questão geratriz: *Que proposta de ensino para Z é possível construir por meio da interação com um grupo de estudos de professores na perspectiva do PQM?* Para tanto, construímos um *Modelo Epistemológico de Referência* que nos permitiu analisar o *Modelo Dominante* do conteúdo em questão. O referencial teórico mobilizado foi a *Teoria Antropológica do Didático* mais especificamente aspectos do *Paradigma Questionamento do Mundo*. Também mobilizamos *condições* e *restrições* identificadas a partir das conclusões da formação continuada com o grupo de professores dos laboratórios de matemática da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS, desenvolvida com princípios do *Paradigma Questionamento do Mundo*. Essas conclusões também nos permitiram complementar o *Modelo Epistemológico de Referência*. Esse trabalho se fundamentou também em estudos sobre o *Percurso de Estudo e Pesquisa* analisados por meio das dialéticas *Questão/Resposta*, *Mídia/Meio* e *Coletivo/Individual*. Dessa forma, coerentemente, apresentamos o texto da tese em formato de *mapa de questões e respostas* em que duas *respostas corações* são apresentadas, sendo uma resposta referente ao grupo de estudos e outra à tese. As análises realizadas evidenciaram, entre outros aspectos, um ensino pautado em modelos concretos, cujo *bloco tecnológico-teórico* é dado por criações didáticas. Nesse sentido, as atividades da proposta alternativa se basearam em um ensino dado pela entrada dos inteiros relativos via estudos da álgebra escolar, combinados com os modelos concretos, particularmente, nas propriedades que justificam as técnicas para esses números, bem como na mobilização de diversos contextos para que esses números sejam compreendidos além da ideia de medida.

Palavras-chave: Inteiros Relativos. Modelo Epistemológico de Referência. Paradigma Questionamento do Mundo. Proposta de ensino. Percurso de Estudo e Pesquisa. Dialéticas.

ABSCTRACT

This research answered the following generatrix question: What teaching proposal for Z can be built through interaction with a group of teachers from a PQM perspective? To do so, we built an *Epistemological Model of Reference* that allowed us to analyze the *Dominant Model* of the content in question. The theoretical reference mobilized was the *Anthropological Theory of the Didactic*, more specifically aspects of the *Paradigm of Questioning the World*. We also mobilize *conditions* and *restrictions* identified from the conclusions of a continuing education with the group of teachers of mathematics laboratories of the Municipal Teaching Network of Campo Grande/MS, developed with principles of the *Paradigm of Questioning the World*. These conclusions also allowed us to complement the *Epistemological Model of Reference*. This work was also based on studies about the of *Study and Research Course* analyzed through the dialectics, *Question/Answers*, *Media/Milieu* and *Collective/Individual*. Thus, coherently, we present the text of the thesis in the format of a question and answer map, in which two heart answers are presented, one answer referring to the study group and the other to the thesis. The analyses performed evidenced, among other aspects, a teaching based on concrete models, whose technological-theoretical block is given by didactic creations. In this sense, the activities of the alternative proposal were based on a teaching given by the entrance of relative integers via studies of school algebra combined with concrete models, particularly in the properties that justify the *techniques* for these numbers, as well as the mobilization of various contexts so that these numbers are understood beyond the idea of measure.

Keywords: Relative Integers. Epistemological Reference Model. Paradigm of Questioning the World. Teaching proposal. Study and Research Course. Dialectics.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

MAPA DE QUESTÕES E RESPOSTAS

Q^Z: QUE MODELO É POSSÍVEL CONSTRUIR CONSIDERANDO CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES DO SISTEMA DE ENSINO BRASILEIRO E AS REFLEXÕES DE PROFESSORES PARA O ENSINO DE Z?

O início do nosso processo de doutoramento ocorreu por meio da tentativa de resposta à questão Q^Z, que tratou da possibilidade de construção de um modelo para os inteiros relativos a partir das *condições* e *restrições* do nosso sistema de ensino e, principalmente, das reflexões de um grupo de estudos com professores. Desenvolvemos assim, um *Percurso de Estudo e Pesquisa*, dado por meio dos pressupostos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999), para construirmos uma resposta a *Resposta Coração da Tese,* R^Z. Por uma escolha metodológica, mobilizamos uma das ferramentas da TAD, o *mapa de Questões e Respostas*, para a organização da escrita deste relatório final de tese. E, para explicar a construção desse mapa, organizamos a escrita de um Prólogo, seção inicial e explicativa das escolhas teóricas e metodológicas, das justificativas e de toda a divisão das demais partes da tese. Nessa jornada, buscamos construir uma resposta para algumas inquietações, como as incorporadas pelos novos questionamentos advindos de todo o processo de escrita, pesquisa e análise do *corpus* da tese.

PRÓLOGO

Segundo o dicionário Houaiss (2009), dentre outras definições, Prólogo[1] é um substantivo masculino que nas peças teatrais, indicava "cena ou monólogo iniciais, em que geralmente são dados elementos precedentes ou elucidativos da trama que se vai desenrolar". Nesse sentido, o propósito dessa escrita, não a primeira que realizei, mas uma das primeiras que o leitor terá contato, é justamente explicitar e justificar algumas escolhas, a organização de questões que suscitaram e me[2] colocaram em processo de reflexão, consequentemente, me impulsionaram ao doutorado.

O início desse caminho se deu com o fim de outro, o da escrita da dissertação de mestrado (GONÇALVES, 2016) que teve como objetivo de pesquisa *analisar as aproximações e distanciamentos entre os saberes produzidos na academia e aqueles propostos aos alunos, por meio dos estudos do processo de transposição didática dos números inteiros relativos entre essas instituições*. Esta pesquisa permitiu responder alguns questionamentos, porém tantos outros emergiram desse processo, e o doutorado se apresentou como uma oportunidade para investigar mais de perto esses anseios.

Tais inquietações se transformaram na busca por encontrar elementos de resposta às questões que emergiram do fenômeno didático observado: como ensinar um conteúdo cujas principais justificativas matemáticas vivem em um nível de ensino ainda bem distante dos estudantes dos anos finais do ensino fundamental? Esse fato é um privilégio dos inteiros relativos? Como poderíamos justificar matematicamente que 'menos vezes menos é mais', sem mobilizar alguns modelos retirados do cotidiano? Além disso, algumas justificativas dadas para as técnicas matemáticas para os números inteiros relativos nas praxeologias estudadas no mestrado, pareciam-nos fora de um contexto matemático, tanto da academia quanto da escola.

Nesse sentido, como organizar uma proposta de ensino para os inteiros relativos, contornando esses problemas? De que forma não trazer novas dificuldades de aprendizagem, desnecessárias à aprendizagem? Ou ainda, existe alguma proposta pautada em outros contextos, além daqueles que mobilizam situações concretas?

---

[1] Para retornar ao *Epílogo*, clique aqui.

[2] Grande parte da escrita da tese se dá na primeira pessoa do plural, representando minha parceria com a professora Marilena, minha orientadora. No entanto, há ocasiões em que manifesto minhas vivências e particularidades, expressas, assim, na primeira pessoa do singular.

Ao ingressarmos no doutorado, tínhamos perguntas que esperávamos responder com essa nova etapa, mas desde o início outras tantas indagações foram aparecendo; nosso percurso de doutoramento, ironicamente, estava rodeado de perguntas, de questionamentos. Irônico, pois até esse momento, apesar de o *Paradigma Questionamento do Mundo* (CHEVALLARD, 2013)[3] ser dado nos marcos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), no início do doutoramento, ainda não tinha familiaridade suficiente com as questões relacionadas a ele.

Tratar sobre nossa tese, segundo essa base teórica, deveria ser algo construído por meio da determinação de uma questão inicial, geradora de tantos outros questionamentos e de algumas respostas provisórias a eles. Nesse movimento, outras perguntas são alimentadas, gerando novas respostas, propiciando um *Percurso de Estudo e Pesquisa* (PEP) (CHEVALLARD, 2009), que nos leva à resposta da questão inicial, entendida como a nossa tese. Todas essas experiências nos remetem à definição da minha tese, produção final desse percurso, produzida por todos esses questionamentos, respostas, *mapas de questões e respostas* e por algumas dialéticas.

Em um *Percurso de Estudo e Pesquisa*, a questão inicial é denominada de geratriz, e, como toda pergunta, precisa de uma resposta, ou pelo menos impulsionará a busca por uma. Nessa perspectiva, a questão geratriz de um percurso de uma investigação não pode ser tão específica de forma que a resposta seja encontrada rapidamente e sem esforços, determinando o fim da pesquisa. Ao mesmo tempo, a questão geratriz deve propiciar novos questionamentos, novas e diferentes possibilidades de investigação, que encadeadas possibilitarão a construção de uma resposta final, a resposta coração da investigação, $R^{\heartsuit}$. Esse Percurso investigativo pode ser organizado a partir de um esquema denominado *mapa de questões e respostas*, como o próprio nome indica, um diagrama que contém todas os questionamentos e respostas, iniciado pela questão geratriz e finalizado com a resposta coração.

No início do doutoramento, havia muitos questionamentos, como dito, alguns advindos do mestrado, outros das novas ideias provenientes de leituras, nos ajudando na construção de uma questão geratriz da tese, a questão de pesquisa que denominamos de

[3] Alguns *links* em forma de *hipertexto* são distribuídos ao longo da escrita, para nortear idas e vindas, com algumas informações, indicando outros locais que se articulam ou justificam alguns aspectos, possibilitando uma leitura, dentre as muitas possíveis. Alguns desses *links* estão ancorados diretamente na palavra, nesse caso, em destaque azul; em outros casos, deixamos o *link* em uma nota de rodapé. Algumas dessas notas de rodapé também terão a finalidade de auxiliar no retorno à parte original dos *links*.

‘Questão Z’, ou simplesmente, ‘Q^Z’, onde ‘Z’ indica os inteiros relativos. Nosso percurso foi construído a partir dos anseios em respondê-la.

Um dos primeiros movimentos de resposta foi a necessidade de se construir um *Modelo Epistemológico de Referência* para os inteiros relativos. Ressaltamos que, para a formulação do problema de investigação, também denominado problema didático, segundo Gascón (2011), faz-se necessário mobilizar elementos de um MER, e, reciprocamente, tal MER faz parte de uma possível resposta à dimensão *epistemológica*, que juntamente com as dimensões *econômico-institucional* e *ecológica* formam o padrão heurístico das dimensões fundamentais[4] dos problemas investigados pela Didática da Matemática. A dimensão *epistemológica* é tida como básica, pois elementos do MER são usados para responder as outras duas. Grosso modo, na dimensão *econômica* trata-se das questões produzidas em decorrência dos processos de *transposição didática* (CHEVALLARD, 1991) observados num período da história bem determinado, aplicados sobre as praxeologias investigadas.

> De uma forma coloquial, podemos dizer que a dimensão económico-institucional de um problema didático inclui questões que giram em torno da questão: como estão as coisas (as OM e OD) na contingência institucional? [...] Vale a pena mencionar que qualquer resposta que pretendemos dar à questão acima referida deve basear-se num MER e no modelo de referência didático (MDR) apoiado por este MER (GASCÓN[5], 2011, p. 213, tradução nossa)[i].

Ainda de acordo com este autor, para investigar como estão as coisas, como elas estão postas, para se obter respostas, há necessidade de tentar mudar tais coisas. Refletindo sobre esse fato e baseando-nos no *Paradigma Questionamento do Mundo* e nas *condições* e *restrições* do sistema de ensino, percebemos ser imprescindível interagir com professores da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS. Assim, poderíamos refletir com eles sobre uma proposta alternativa para o ensino dos números inteiros relativos. Dessa forma, não se trataria de apresentar algo pronto aos professores, suas contribuições seriam primordiais para que o modelo epistemológico desenhado contemplasse suas crenças e seus desejos. Nesse sentido, vimos elementos da dimensão *ecológica*, pois segundo Gascón (2011, p. 217)

> De uma forma muito simplificada, pode-se dizer que a dimensão ecológica de um problema didático contém as questões que giram em

---

[4] Para retornar à página 157, *Diagrama de Ações* ..., clique aqui.

[5] A versão original dos excertos traduzidos foi inserida nos anexos como *notas de fim*.

> torno da seguinte pergunta: *porque é que as coisas (OMs e ODs) são como são na contingência institucional e que condições seriam necessárias para que estivessem de outra forma dentro do universo do possível?* [...] Por conseguinte, é necessário levar em consideração as condições e restrições impostas às praxeologias a todos os níveis de co-determinação didática, desde as mais genéricas, como a sociedade e a civilização, até às mais específicas, como o tema e a questão matemática específica.[ii]

Para responder à questão geratriz Q^Z, outra foi estabelecida, a que denominamos de "Questão zero", Q_0: *Que Proposta de Ensino para Z é possível construir por meio da interação com um grupo de estudos de professores na perspectiva do PQM?* Para respondê-la, buscamos por uma proposta de ensino para os inteiros relativos, dada pela interação em um grupo de estudos com professores e pautado nas ideias do *Paradigma Questionamento do Mundo*. A escolha pela escrita deste relatório de pesquisa em forma de um *mapa de questões e respostas*[6] (BOSCH, WINSLØW, 2016) foi motivada pela configuração natural de desenvolvimento da pesquisa, baseada no esquema *herbartiano* (CHEVALLARD, 2013). A resposta à questão Q^Z não foi dada de maneira rápida; ao contrário, ela gerou outra questão, Q_0. Essa questão, Q_0, não teve um fim em si mesma e também não respondeu totalmente Q^Z. Para responder à questão de pesquisa (a fim de chegar à resposta coração), o que foi preciso fazer? Um primeiro movimento foi a constituição de um grupo de professores o que nos levou à resposta R_0, a constituição de um grupo de professores dispostos a discutir propostas de ensino para os números inteiros relativos.

Um dos primeiros desafios provenientes da resposta R_0 foi o de como constituir um grupo de estudos com professores da rede de ensino e, mais ainda, baseado nos princípios do *Paradigma Questionamento do Mundo* (CHEVALLARD, 2013). Desafio, pois, esse paradigma é uma subversão aos moldes e aos modelos de ensino vivenciados no tempo presente.

Grosso modo, nesse novo paradigma educacional poucas mudanças são propostas, porém bem radicais. Pelos fundamentos propostos pelos pesquisadores da TAD, há uma necessidade de quebra de paradigma, do paradigma escolar vigente nas instituições de ensino, o *Paradigma Visita às Obras* para o *Paradigma Questionamento do Mundo*[7].

[6] *Mapa de Questões e Respostas* é um diagrama que manifesta as relações entre as questões e suas respostas, bem como elas surgiram no *Percurso de Estudo e Pesquisa*.
[7] Não esgotaremos nossas concepções acerca desses aspectos teóricos nessa parte da escrita.

Todos nós vivenciamos nossos processos escolares no primeiro paradigma, no qual "os assuntos a serem estudados são designados por um programa *a priori* estabelecido sem sua razão de ser, ou seja, as questões às quais estes assuntos vêm a responder, estando explicitamente presentes no programa ou tendo sido acordados socialmente (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 131). O *Paradigma Questionamento do Mundo* é baseado na necessidade de produzir respostas às mais diversas questões, principalmente para as mais problemáticas, dadas pelos desafios da sociedade escolar. Tais questionamentos auxiliaram em "nossa compreensão do mundo quanto as formas de viver coletivamente. Neste novo paradigma, o estudo de obras pré-estabelecidas não desaparece, mas é condicionado pela necessidade de utilizá-las para resolver problemas e questionar o mundo ao nosso redor". (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 131, tradução nossa).

A resposta R_0, *constituir um grupo de professores ...*, fomentou um novo questionamento, Q_1: *Como constituir um grupo de estudos à luz do Paradigma Questionamento do Mundo?* Seria possível ou não constituir esse grupo de estudos? Ou mais especificamente, quem seriam esses professores? Isto posto, a escolha foi convidar professores dos laboratórios de matemática da Rede Municipal de Campo Grande/MS (Reme), cuja função era trabalhar junto com os professores regentes de todos os anos escolares. Esse trabalho se dava por meio de projetos, jogos e atividades que proporcionavam aos estudantes serem mais ativos durante as atividades em seus processos de aprendizagem. Dessa forma, acreditamos que tais professores, pela posição que ocupavam, poderiam auxiliar nos primeiros esboços de resposta à nossa questão Q_1. Construímos assim nossa segunda resposta, R_1, que trata do convite aos professores responsáveis pelos laboratórios de matemática da rede de ensino de Campo Grande/MS.

Nesse contexto, ainda na busca pela *resposta coração* à questão de pesquisa, outros movimentos apareceram. Por exemplo, a partir da constituição do grupo e em função do desejo de construir com eles propostas de ensino para os números inteiros relativos, outros questionamentos surgiram: Q_2*: Que aspectos do Paradigma Questionamento do Mundo mobilizar com o grupo de professores?* Q_3*: Quais discussões iniciais devem ser levadas para o grupo de professores?* Estas questões subsidiaram minha participação, meu papel e algumas escolhas técnicas durante os encontros com esses professores. Dessa forma, percebemos que o *mapa de questões e respostas* passou a ser constituído de dois ramos: um voltado ao grupo de estudos com os professores e outro direcionado aos meus estudos teóricos e metodológicos.

Uma vez constituído o grupo de estudos, o que ocorreria nos primeiros encontros suscitou novos questionamentos: *Q_4: Como ensinar os números inteiros relativos considerando o que dizem as pesquisas? Q_5: Qual a importância de se construir um Modelo Epistemológico de Referência? Q_6: Por que ensinar os inteiros relativos?* Todas essas questões compuseram o ramo do mapa direcionado ao grupo de estudos, portanto, inicialmente o *mapa de questões e respostas* teve a seguinte configuração:

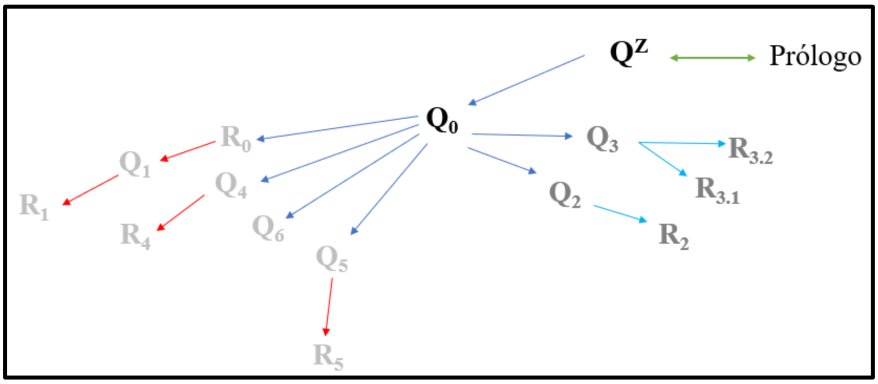


Figura 1- Primeiro Mapa de Questões e Respostas
Fonte: autor da pesquisa

Nesse primeiro esboço do *mapa de questões e respostas* a questão de pesquisa Q^Z, originou Q_0. Na busca pela resposta à Q^Z, a partir de Q_0, originou-se, além da primeira resposta R_0, outras seis questões, quatro do ramo do grupo de professores, Q_1, Q_4, Q_5 e Q_6 e duas do ramo dos estudos teóricos Q_2 e Q_3. Dada a importância das discussões com os professores dos laboratórios de matemática, também definimos uma resposta coração para esse ramo da investigação. Juntamente com o outro ramo do mapa, o dos estudos teóricos, construímos os elementos constituintes da resposta R^Z, esta, sim a resposta coração da questão geratriz.

Q_0: QUE PROPOSTA DE ENSINO PARA Z É POSSÍVEL CONSTRUIR POR MEIO DA INTERAÇÃO COM UM GRUPO DE ESTUDOS DE PROFESSORES NA PERSPECTIVA DO PQM?

A questão Q_0 foi pensada como desdobramento da questão geratriz, Q^Z, pois o propósito inicial, com o processo de doutoramento, foi o de construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER) para os inteiros relativos que levasse em consideração a realidade brasileira.

O MER é um dispositivo que pode ser mobilizado para "guiar" a elaboração de propostas alternativas de ensino e, para que tais propostas sejam viáveis, este MER precisa, de certa forma, conter elementos da realidade. Nesse contexto, necessitávamos de elementos advindos de momentos de discussões com professores para compor nosso modelo. Sendo assim, a ideia ou esboço de resposta à Q_0 foi constituir um grupo de professores para discutir propostas de ensino, em particular, propostas para os inteiros relativos.

Como professor de matemática, e atualmente, em posição privilegiada como membro da equipe da Divisão de Avaliação da Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande/MS, pude pensar e pôr em prática uma formação com os professores dos laboratórios de matemática.

R_0: CONSTITUIR UM GRUPO DE ESTUDOS COM OS PROFESSORES DOS LABORATÓRIOS DE MATEMÁTICA

A proposta de elaborar e constituir[8] um grupo de estudos com professores dos laboratórios de matemática da rede de ensino de Campo Grande/MS teve por fundamento os preceitos de uma formação baseada nas ideias de um *Percurso de Estudo e Pesquisa* (CHEVALLARD, 2009a, 2009b). Organizamos os estudos do grupo pensando nas seguintes questões:

I – Que proposta de ensino para os inteiros relativos é possível de ser construída a partir dos estudos de um grupo professores, tidos como experientes?

II – A segunda questão retiramos dos estudos de Bosch e Gascón (2009),

> Quais conhecimentos ou habilidades são necessários (ou pelo menos úteis) para que os professores possam intervir de forma efetiva e relevante na formação matemática dos alunos (desta ou daquela fase educacional) e o que pode ser feito para ajudar os professores construir

[8] Para mais informações da constituição do nosso grupo, *c.f.* $R_{10.2}$: *Metodologia e procedimentos da pesquisa*. Clique aqui para acessar essa resposta.

> ou adquirir esses conhecimentos ou habilidades? (BOSCH, GASCÓN, 2009. p. 91, tradução nossa)[iii].

A metodologia mobilizada para a constituição e condução dos debates no grupo foi baseada no *Paradigma Questionamento do Mundo*, em aspectos do PEP, mais particularmente, na dialética *Questão/Resposta*. Os conceitos e definições dessa parte da Teoria Antropológica do Didático são apresentados ao longo das partes que compõem este relatório de tese.

A questão docente apresentada para os estudos iniciais do grupo de estudos foi:

Como podemos ensinar os conceitos, procedimentos e técnicas dos inteiros relativos?

Essa pergunta parte do pressuposto que o professor está diante de uma turma de sétimo ano de ensino fundamental, instituição em que os documentos oficiais preveem para se iniciar o estudo dos números inteiros relativos. (CAMPO GRANDE, 2020). Além de analisarmos a parte introdutória dos inteiros relativos, outro aspecto relevante, pensado para as discussões, foram as justificativas matemáticas para as tarefas estudadas. Como justificar que menos vezes menos é mais, sem mobilizar os conceitos de estruturas algébricas?

Pensar na constituição do grupo revela muitas variáveis, quem serão os participantes? Como poderão dispor de seu tempo para participar? Os temas a serem debatidos serão propostos por nós? Ou pelos professores? Esse grupo terá aspectos de uma formação em serviço? Enfim, várias foram as possibilidades para pensarmos e definirmos esse grupo.

Decidimos por um grupo de professores tidos como experientes e em uma posição privilegiada, professores atuantes nos laboratórios de matemática[9], alguns pós-graduados em educação matemática, professores participantes das equipes do currículo da Rede Municipal de Ensino (Reme), enfim, um grupo com algumas características particulares para aprofundarmos os estudos dos inteiros relativos e com possibilidade de discutirmos mais abertamente os preceitos do *Paradigma Questionamento do Mundo*, bem como de colocar em prática aspectos que confrontam algumas *restrições* provenientes dos níveis da Sociedade, Escola e Pedagogia. O estudo desses níveis de *codeterminação*[10] nos

---

[9] Para retornar à página 16, *Prólogo*, clique aqui.
Para retornar à página 145, $R_{10.2}$: *Metodologia e procedimentos da pesquisa*, clique aqui.

[10] Os *níveis de codeterminação* podem ser separados em dois: níveis superiores (*Civilização, Sociedade, Escola e Pedagogia*) e níveis inferiores (*Disciplina, Domínio, Setor, Tema e Objeto*). Os níveis superiores podem ser considerados as *condições* e *restrições* provenientes de outras esferas para além das salas de

permite investigar as influências das *condições* advindas dessas outras esferas e que, diretamente, impõe *restrições* ao sistema de ensino. Por exemplo, o fechamento dos laboratórios de matemática, em meio aos encontros do grupo de estudos, foi uma *restrição* do nível da *Sociedade*, dada pelas decisões políticas do Poder Executivo do município de Campo Grande/MS.

O primeiro desafio foi o de conseguir com que esse professores se dispusessem em participar, pois, geralmente a disponibilização desse tipo de formação é dada em horários alternativos, fora do horário de trabalho ou em contraturnos. Essa é uma *condição* que pode se tornar *restrição*, pois a motivação para os estudos pode ser prejudicada por outras demandas diárias, pessoais e familiares. Como professor cedido à Secretaria Municipal de Educação (Semed) de Campo Grande/MS, e, por ocupar uma posição privilegiada, pude propor um projeto que permitisse aos professores participarem da ação sem que fosse uma atividade extra, em seus horários de trabalho, ou seja, propusemos algo para contornar *restrições* das formações em serviço. Então, meu projeto foi enviado para o superintendente e para a coordenadora da Gerência do Ensino Fundamental e Médio, gestores responsáveis pelos processos de formação continuada, de organização do currículo e de algumas políticas públicas.

A princípio, tentei contornar algumas dificuldades que poderiam tornar-se *condições* ou *restrições* para o desenvolvimento do grupo de estudos. Por exemplo, pode-se pensar que estamos agindo de forma preconceituosa, não valorizando os demais professores da nossa rede, privilegiando um grupo para atender nossas demandas. Pelo contrário, queremos debater novas possibilidades e as *restrições* institucionais provenientes do nível da *Sociedade* e assim, se possível, deixar algumas contribuições para o desenvolvimento de propostas de formação continuada e de ensino pautadas nas discussões do *Paradigma Questionamento do Mundo*. Portanto, para a constituição do grupo de estudos, várias decisões foram tomadas, bem como, muitas questões definidas e outros problemas enfrentados e contornados e partir de tudo isso, um novo questionamento surgiu, denominado de Q_1,

---

aula, porém, tem influência direta sobre as ações docentes. E os níveis inferiores relacionados aos estudos das praxeologias, buscando formas de se desprender do *Paradigma Visita às Obras*, ou seja, dedicando-se "silenciosamente em substituir uma tradição secular, onde o aluno espera sem piscar, segundo o imemorial problema de copiar as obras e mimetismo cultural, que o professor ensina - isto é, mostra o que é, como fazê-lo e o porquê fazê-lo dessa maneira". (CHEVALLARD, 2002a, p. 1).

Para retornar à página 42, R_2: *Estudar textos de Chevallard* ..., clique aqui.
Para retornar à página 79, R_4: *Comparar o ensino de Z* ..., clique aqui.
Para retornar à página 83, R_5: *Identificar e descrever Modelo Dominante* ..., clique aqui.
Para retornar à página 98, R_6: *Razões de ser: cotidiano* ..., clique aqui.

Q_1: COMO CONSTITUIR UM GRUPO DE ESTUDOS À LUZ DO PARADIGMA QUESTIONAMENTO DO MUNDO?

Para a construção do *Modelo Epistemológico de Referência* para os inteiros relativos, e, consequentemente, de uma proposta de ensino alternativa às do Modelo Dominante, a constituição de um grupo de estudos foi fundamental. Porém, sua constituição requereu a superação de desafios, alguns já mencionados nas questões e respostas anteriores. Nesse sentido, descreveremos a seguir o caminho percorrido para construção dessa questão.

Mobilizamos todas as leituras e estudos anteriores à composição do grupo de estudos, como momento de análise inicial, semelhante ao ocorrido em um *Percurso de Estudo e Pesquisa* (PEP). Momento que o pesquisador organiza os materiais, no caso da pesquisa, nos debruçamos sobre aspectos históricos, epistemológicos, construções e justificativas matemáticas, principais propostas vigentes, modelos de ensino dos inteiros relativos, além de alguns elementos dos *contratos escolares, pedagógicos e didáticos* (CHEVALLARD, BOSCH, GASCÓN, 2001). Questões mais técnicas também são importantes, os recursos materiais, tecnológicos, locais, horários, entre outros fatores também foram planejados e tratados como primordiais.

Na resposta acerca da metodologia, detalhamos algumas escolhas, mas, especificamente, a fase da constituição do grupo de professores se deu em um quarto movimento de pesquisa. Pensando em uma perspectiva qualitativa, as idas e vindas são naturais da investigação, e ainda, uma pesquisa cuja embasamento teórico se dá pelo *Paradigma Questionamento do Mundo*, as mudanças de trajetória também fazem parte da constituição tanto da pesquisa quanto dos pesquisadores. Uma das prerrogativas desse novo paradigma didático é a de que tanto os cidadãos atuais como os do futuro, nesse caso inserimos o papel do pesquisador, devem se portar como um cidadão *herbartiano* com *atitudes procognitivas.*

Nas análises iniciais, foi possível identificar que a maioria das propostas de ensino para os inteiros relativos se fixavam em atividades dadas por meio de modelos concretos. As pesquisas mostravam também que propostas amparadas nestes modelos poderiam acarretar novas dificuldades à aprendizagem dos estudantes (CID, 2000, 2002, 2003, 2015; CID, BOLEA, 2010). Algumas dessas dificuldades estão presentes devido à aparição dos obstáculos epistemológicos, além de um ensino com características tecnicistas (GASCÓN, 2003), pois para cada novo elemento estudado há necessidade de se criar uma nova regra ou uma nova técnica.

Amparados em nossa experiência em sala de aula podemos afirmar que geralmente as maiores dificuldades aparecem na transição das operações de adição e subtração para as de multiplicação e de divisão de inteiros relativos. Os estudantes mobilizam as técnicas da 'regra de sinais' da multiplicação, também para as adições. Por exemplo, quando adicionamos dois inteiros negativos o resultado é um número negativo, assim, inicialmente, os estudantes transportam essa ideia para a multiplicação de dois inteiros negativos, ou seja, pensam que 'menos vezes menos é menos'. Porém, no decorrer dos estudos, com a aprendizagem das regras das multiplicações, essas também são mobilizadas para as adições:

<u>Inicialmente,</u> como '– 2 – 2 = – 4', '(– 2) (– 2)' também é '– 4'.

<u>No decorrer dos estudos</u>, como '(– 2) (– 2) = + 4', '– 2 – 2' também é '+4'.

As dificuldades também estão no fato de que quando se tenta justificar que o resultado da multiplicação de dois inteiros negativos é um número positivo, o que é usado é "problemático". Por exemplo, as ideias monetárias ou os deslocamentos em um termômetro, ou ainda o jogo de baralho, as confusões e as respostas equivocadas certamente aparecerão:

i. Monetariamente, se tenho duas dívidas não é possível multiplicá-las e obter um saldo positivo;

ii. Pensando em um termômetro, como representar uma multiplicação onde os fatores são negativos? CARAÇA (1951) apresenta uma alternativa para essa problemática);

iii. E, para o caso das regras usando os naipes vermelhos (positivo) e pretos (negativo), para as adições e as subtrações se mobiliza a regra de neutralização (um valor positivo elimina um valor negativo), mas para as multiplicações e divisões, há que se criar uma nova regra. Por exemplo, na multiplicação '2 x 3', a interpretação é: multiplicar o número 3 duas vezes. E, se os fatores fossem negativos, '– 2 x (– 3)', a interpretação (regra) seria: como '2 x 3 = 6' e '+ 6 – 6 = 0', reescrevendo o zero, obtém-se, três de copas e de três de ouros, (+ 6), e, três de espadas e três de paus, (– 6). Logo, retirando dois grupos (interpretação de – 2) de '– 3' (as três cartas de espadas e as três de paus), restarão dois grupos de '+3' (as três cartas de copas e as três cartas de ouros), ou, '+6'. Esse procedimento é representado pela seguinte operação,

'(– 2) x (– 3) = + 6'.

Se ‘2’ fosse positivo e ‘3’ negativo, teríamos a ideia de acrescentar dois grupos negativos. Logo, se não tenho nada e acrescento dois grupos de ‘– 3’, três de copas e de ouros, obtenho ‘– 6’. Esse procedimento pode ser representado pela seguinte operação,

$$‘2 \text{ x } (-3) = -6’$$

Nesse sentido, a possibilidade da aparição de novos equívocos ou o fato da compreensão de novas regras para cada novo aspecto do conteúdo, apontam para mais dificuldades de aprendizagem, além das que fazem parte do conteúdo.

Isso posto, vemos que a mobilização de algumas propostas pode ocasionar o aparecimento de problemas didáticos, como, as *restrições* que impedem os que desenvolvem as propostas de ensino de mobilizar outros modelos, como o algébrico, descrito em nosso modelo de referência, além dos fenômenos didáticos estudados.

Os preceitos do *Paradigma Questionamento do Mundo* apontavam para um caminho bem diferente daquele vivenciado na Rede Municipal de Ensino (Reme) de Campo Grande/MS. As *condições* de trabalho em sala de aula, a organização das disciplinas e a nossa experiência em formações continuadas realizadas pela Secretaria Municipal de Educação (Semed), se aproximam do que Gascón (2003) denomina Modelo de Ensino Tecnicista. Víamos uma preocupação com ‘receitas’ prontas, professores almejando ao final de cada formação uma proposta de ensino para serem aplicadas em suas salas de aula, formações pré-definidas em todos os seus detalhes, um currículo e uma organização das aulas preocupados em cumprir conteúdo, metas estabelecidas para alcance de notas em avaliações externas. Enfim, um cenário cujas ideias do *Paradigma Questionamento do Mundo* talvez não fossem bem aceitas. Nossa preocupação, era iniciar o grupo e, por alguns desses motivos, não conseguir continuar com os encontros. Para além de acreditarmos na proposta como uma forma de formação continuada, o trabalho em grupo era parte essencial da nossa investigação e para construir alguma alternativa ao ensino proposto, cremos ser essencial refletir com professores.

Não tínhamos intenção de criticar os moldes das formações realizadas, nem desaprovar as práticas de ensino da Reme de Campo Grande/MS, mas, sim, de realizar um trabalho diferenciado com os professores, que os levassem a questionar os modelos vigentes. Como estamos ainda inseridos num outro paradigma, acreditamos que ações como essas são potentes para se questionar os Modelos vigentes. Ressaltamos que, a quebra de paradigma é dada pela necessidade de se mudar aspectos tidos como problemáticos, nesse sentido, compreendemos esse paradigma como algo em construção, com ideias de um modelo subversor da ordem colocada em prática em nossos dias.

Subverter os modelos de ciência, de mundo e de escola, num sentido de "modificar (algo estabelecido), realizando transformações profundas; revolucionar" (HOUAISS, 2009, p.?).

As formações na Reme[11] de Campo Grande/MS acontecem em dois momentos, as ofertadas pela Semed, geralmente uma por bimestre, e as que ocorrem nas unidades de ensino, promovidas pela própria equipe técnico-pedagógica. Então, para debatermos com os professores aspectos dos inteiros relativos e construirmos uma proposta alternativa de ensino, pensamos em constituir um grupo de estudos. Como professor lotado na Secretaria de Educação, eu poderia propor tais encontros e constituir uma nova formação para os professores. Porém, esbarrei em algumas dificuldades: haveria necessidade de mais encontros? Na conjuntura política do momento, poderia retirar os professores mais vezes das salas de aulas? Proporia em horários alternativos? Questionamentos que se mostraram, por nossa experiência com esses processos, algo infrutífero; nossa proposta fugia dos objetivos já relatados nessas formações, pois os estudos formativos oferecidos estavam totalmente mergulhados no *Paradigma Visita às Obras*.

A solução foi propor um projeto à Semed que envolvesse os professores dos laboratórios de matemática que tinham um papel diferenciado nas unidades de ensino: eles eram os responsáveis por todos os projetos matemáticos desenvolvidos pela escola, atendendo todas as turmas daquela escola. Estes professores, responsáveis por organizar os horários de estudo no laboratório de cada turma, de planejar também as aulas com jogos, com materiais manipuláveis, *softwares*, problemas e desafios, orientados pelos planejamentos dos professores regentes, promoviam novos momentos de aprendizagem aos estudantes. Sendo assim, um dos elementos de resposta à Q_1 foi a resposta R_1, pois acreditávamos que esse profissional teria uma maior oportunidade de participação no grupo, pois além do seu papel diferenciado, a mobilidade de seus horários, de planejamento e de currículo era um fator primordial.

R_1: CONVIDAR PROFESSORES RESPONSÁVEIS PELOS LABORATÓRIOS DE MATEMÁTICA[12].

O projeto levado à Semed de Campo Grande/MS visava a criação do grupo de estudos com professores dos laboratórios de matemática da Reme de Campo Grande/MS,

[11] Para retornar à página 145, $R_{10.2}$: *Metodologia e Procedimentos da Pesquisa*, clique aqui.
[12] Para retornar à página 82, R_5: *Identificar e descrever o Modelo Dominante*, ... clique aqui.
Para retornar à página 132, $R_{10.1}$: *Objetivos de pesquisa*, clique aqui.

seguindo os preceitos das formações continuadas, pois ocorreria mais ou menos a cada quinze dias, no momento dos planejamentos dessas aulas. Dessa forma, nossos encontros serviriam também para pensar novas possibilidades para as aulas nos laboratórios, não necessariamente em forma de atividades, mas as concepções de como trabalhá-las, pautadas nos estudos do *Paradigma Questionamento do Mundo* e da dialética *Questão/Resposta*. O projeto foi avalizado pela Superintendência das Políticas Educacionais da Secretária (Suped) e encaminhado para a Gerência do Ensino Fundamental e Médio (Gefem), mais precisamente, para a equipe de matemática. Dois professores/técnicos dessa equipe, responsáveis pelas formações ofertadas aos professores dos laboratórios, também participaram dos encontros.

Planejamos 28 encontros no decorrer do ano de 2019. Porém, ao apresentarmos o projeto para os professores/técnicos da equipe da Semed, houve uma redução para nove encontros no primeiro semestre. Essa mudança nos preocupou bastante, principalmente, em relação ao tempo que a proposta alternativa à formação ofertada pela Semed demandaria. No primeiro semestre, houve corte de cinco encontros, dois em março e um para abril, maio e junho, respectivamente. Uma das justificativas para essa redução, por parte dos técnicos/professores da Semed, foi a quantidade de atividades constantes no calendário escolar: avaliações mensais e bimestrais, conselhos escolares (fechamento das médias bimestrais dos estudantes), formações continuadas das escolas e da Semed. Outra justificativa foi o fato que os professores se ausentariam das escolas em torno de três vezes por mês.

Assim, pensamos que essas *condições* poderiam ser superadas pelo fato de termos possibilidade do grupo também ocorrer no segundo bimestre, com mais nove ou dez encontros. Isso ficou acordado nas reuniões para organizarmos os detalhes burocráticos do grupo de estudos.

Sendo assim, tinha a convicção que conseguiria alcançar meus objetivos, por exemplo, a simples aceitação do projeto de organização do grupo de estudos, os professores serem dispensados duas vezes ao mês, bem como os demais aspectos que permeariam a constituição do grupo foram aprovados, me impulsionaram a continuar o projeto.

O Cronograma inicial e o com as reduções ficaram assim definidos:

Quadro 1– Cronograma do projeto apresentado à Semed

MARÇO	ABRIL	MAIO	JUNHO	JULHO	TOTAL
11	1	10	4	22	60 horas
20	15	22	17	31	
27	29	28	28		
3 dias	3 dias	3 dias	3 dias	2 dias	14 dias
AGOSTO	**SETEMBRO**	**OUTUBRO**	**NOVEMBRO**	**DEZEMBRO**	**TOTAL**
5	5	8	8	2	60 horas
13	13	16	11	10	
21	23	24	19		
3 dias	3 dias	3 dias	3 dias	2 dias	14 dias

Fonte: Autor da pesquisa

Quadro 2– Cronograma do primeiro semestre de 2019, pós reduções sugeridas

MARÇO	ABRIL	MAIO	JUNHO	JULHO
26 terça-feira	02 terça-feira	16 quinta-feira	11 terça-feira	23 terça-feira
	22 segunda-feira	28 terça-feira	26 quarta-feira	31 quarta-feira

Fonte: Autor da pesquisa

Pensamos em produzir ao final uma proposta de ensino compatível com as realidades de nossa rede de ensino, elaborada a partir das discussões com os professores dos laboratórios de matemática. Essa proposta também deveria auxiliar os docentes em seus planejamentos, como uma ferramenta a mais para as suas práticas. Esses objetivos delimitados nos permitiram construir os problemas didáticos descritos anteriormente, bem como o seguinte fenômeno didático: o desejo de trabalhar em uma perspectiva que permitisse tratar uma proposta de ensino para os inteiros relativos concomitante ao ensino da álgebra e algumas justificativas matemáticas para as suas técnicas matemáticas.

Após a constituição do grupo de estudos, novos desafios surgiram: pelo fato de esse grupo trabalhar na perspectiva do *Paradigma Questionamento do Mundo*, quais desses aspectos deveriam ser mobilizados? Quais textos sobre o PQM discutir com esses professores? Quais discussões, tanto sobre questões teóricas quanto questões de ensino deveriam ser trabalhadas? Dessa forma, surgiram as respostas e questionamentos do ramo dos demais estudos, pois esses seriam temas para minha preparação referente aos encontros, escrita do *Modelo Epistemológico de Referência*.

Q_2: QUE ASPECTOS DO PQM MOBILIZAR COM O GRUPO DE PROFESSORES?

A segunda questão do *mapa de questões e respostas*, Q_2, em que tratamos os aspectos do *Paradigma Questionamento do Mundo* a serem mobilizados com o grupo de professores, surgiu a partir da busca por superar os desafios impostos pela constituição do grupo e pela fundamentação teórica mobilizada tanto nesse grupo quanto para as demais partes do *corpus* da tese, ou seja, tanto do processo formativo para esses professores quanto para mim, como pesquisador e formador. Sendo assim, pretendemos aprofundar alguns aspectos desse paradigma, bem como de um *Percurso de Estudo e Pesquisa* (PEP).

Partimos de uma questão geratriz, a primeira questão, aquela que orientou todo o trabalho, na qual sua solução demarcou o fim do PEP da tese, pois todos os outros questionamentos e respostas construídos, inclusive as do grupo, foram questões e respostas parciais para o esboço da resposta coração da tese. Dizemos esboçar, pois não se trata de uma resposta definitiva, e sim a resposta possível produzida pelas pessoas envolvidas e os elementos estudados. Além disso, as investigações nunca têm um fim em si, sempre haverá desdobramentos a serem apontados, outras ligações e articulações, permitindo novas pesquisas e outras problemáticas.

Nossa questão geratriz, como apresentado anteriormente foi a seguinte: *Q_0: Que proposta de ensino para Z é possível construir por meio da interação com um grupo de estudos de professores na perspectiva do PQM?* A partir dela elaboramos nossa primeira resposta: *R_0: Constituir um grupo de professores dispostos a discutir um modelo para os inteiros relativos*, que deu origem à uma nova questão: *Q_1: Como constituir um grupo de estudos à luz do Paradigma Questionamento do Mundo?*

Essas primeiras questões e respostas não foram construídas de forma simples. Para chegarmos a elas, realizamos estudos de algumas o*bras* e recorremos à pesquisadores com mais experiência no assunto. E, a partir desse movimento, construímos nossas questões e respostas. Não mobilizamos algo que já estivesse posto, simplesmente adaptando à nossa realidade, necessitamos juntar alguns materiais seguindo nosso projeto de pesquisa (por sua vez, também construído no decorrer da investigação) para então articular todas essas ideias de forma a obtermos um todo coerente.

Nossa proposta inicial para a constituição do grupo de estudos, era experienciar aspectos do *Paradigma Questionamento do Mundo*, de um *Percurso de Estudo e de Pesquisa* e da *dialética Questão/Resposta*. Dessa forma, uma das minhas primeiras atividades reflexivas foi confrontar as práticas desses professores, para estabelecer diálogos constituintes das nossas análises iniciais, agora para a construção da proposta de ensino alternativa àquelas constantes no Modelo Dominante. Sendo assim, a determinação do tema, os inteiros relativos e a escolha dos primeiros textos se deu a partir das minhas escolhas. A preparação dos dois primeiros encontros foi feita sem os professores, uma vez que o grupo ainda não estava efetivamente funcionando.

Nesse início do grupo de estudos, pensamos que a formação pudesse funcionar por meio de alguns aspectos do um PEP, com características de Formação de Professores (PEP-FP), pois a nossa questão geratriz, didática, estava enraizada em um conteúdo, os inteiros relativos.

Nesse período de transição entre os paradigmas *Visita às Obras* e *Questionamento do Mundo*, as formações de professores devem conter aspectos desse último, pois uma das dificuldades, por exemplo, de se mobilizar o dispositivo didático, PEP, é justamente a aceitação e a compreensão por parte dos professores (RUIZ-OLARRÍA, 2015). Nesse sentido, Ruiz-Olarría (2015) propôs um novo dispositivo, o *Percurso de Estudo e Pesquisa* para a formação de professores, PEP-FP.

> A motivação para este tipo de dispositivo é dupla. Por um lado, a pesquisa sobre a ecologia do PEP destacou o problema de formar professores para se adaptarem ao novo paradigma de questionar o mundo. Além disso, se o objetivo é preparar para uma transição efetiva do paradigma monumentalista para o Paradigma Questionamento do Mundo, a própria formação de professores requer dispositivos didáticos que não se baseiam unicamente no paradigma monumentalista e, portanto, devem fazer uso de uma ou outra forma de dispositivos com uma estrutura do tipo PEP (estudo de questões, meios de comunicação e meios didáticos, etc.). Portanto, propomos um dispositivo didático com uma estrutura de PEP focada na formação dos professores, o PEP-FP[iv]. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 136)[13].

A questão inicial para os professores foi "*Como ensinar os números inteiros relativos?*", ou seja, questionar as formas, os modelos e as ferramentas necessárias para se ensinar, uma das atribuições do fazer pedagógico desses professores. Acreditávamos em um trabalho com aspectos do *Paradigma Questionamento do Mundo*, pois observamos uma grande diferença de objetivo, caso a questão inicial dada a eles fosse: "*Como adicionar dois inteiros relativos?*" No entanto, o fundamento de um PEP é questionar coisas em geral, desde a vida cotidiana à construção de um carro de corrida.

---

[13] Para retornar à página 132, *$R_{10.1}$: Objetivos de pesquisa*, clique aqui.
Para retornar à página 144, *$R_{10.2}$: Metodologia e procedimentos da pesquisa*, clique aqui.
Para retornar à página 157, *Diagrama de Ações ...*, clique aqui.

Parece que conseguir uma questão geratriz que atendesse a todas as dimensões do paradigma é algo ainda longe de ser alcançado no modelo de ensino atual.

Em resumo, um PEP-FP pode ser dividido em cinco módulos: I: Como ensinar determinado conteúdo, C? II: Viver um PEP; III: Analisar o PEP vivenciado; IV: Construir um PEP; V: Gerenciar e experimentar um PEP (RUIZ-OLARRÍA, 2015).

No primeiro, a partir de uma questão didática, de origem em um domínio ou conteúdo matemático, cria-se uma questão geratriz do tipo de formação, como ensinar ou como organizar determinado conteúdo, C?

> Este módulo contém tanto a construção do Q_0 (sua escolha e suposição) quanto as primeiras explorações com vistas à elaboração dos primeiros elementos de resposta, geralmente a partir dos meios mais comuns para professores: currículos, livros didáticos, revistas para professores, revistas de pesquisa, centros de recursos, websites, etc. O papel dos formadores Y neste processo não é fornecer elementos de resposta para torná-los conhecidos dos professores, mas guiá-los na busca destes elementos e, sobretudo, introduzi-los nos gestos básicos do questionamento didático: O que é C? De onde vem? Em que campos matemáticos e não matemáticos é ou foi usado? Por que deveria ser ensinado? Quais são suas razões para estar na matemática escolar (aquelas explícita ou implicitamente estabelecidas e potenciais)? Que propostas de ensino existem? O que é dito ou conhecido sobre elas, etc.?[v] (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 137-138).

Esse módulo pode ser considerado o da problemática dos professores, pois o gatilho das investigações está amparado no âmbito da sala de aula, das questões das quais lidam os professores, enfim, àquelas características da profissão de professor (RUIZ-OLARRÍA, 2015).

No segundo módulo, os professores envolvidos na formação devem vivenciar um PEP. Sua posição será a de um aluno, pois no primeiro módulo muitas das respostas encontradas, bem como dos estudos organizados podem não proporcionar um espírito mais investigador, elemento fundamental para o PQM. Uma das ferramentas mobilizadas para tais questionamentos é o *Modelo Epistemológico de Referência* (MER) e suas diferentes estruturas. Sendo assim, Ruiz-Olarría (2015) propõe a estrutura de PEP para colocar de maneira direta aos professores.

No terceiro módulo, deve-se realizar uma análise do PEP vivenciado, bem como dos elementos do MER em que tal PEP está amparado. Nesse sentido, pode-se comparar a *razão de ser* constante nos documentos oficiais com a *razão de ser* alternativa proposta pelo PEP vivenciado. Pode-se ainda, analisar as *praxeologias matemáticas*, as *organizações didáticas*, em que todas essas análises devem ter por objetivo a construção de uma proposta de ensino alternativa, bem como "é essencial para delimitar e interpretar adequadamente a atividade matemática em questão" (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 140).

No quarto módulo, Ruiz-Olarría enuncia a necessidade de construção de um PEP por parte dos professores. Essa pesquisadora descreve alguns questionamentos que podem nortear essa fase do PEP-FP:

> Como realizar a tarefa de construir um PEP para os alunos em uma determinada etapa educacional, análogo àquele experimentado e analisado nas fases anteriores? [..] Que elementos compõem o desenho de um PEP? Qual é a ordem mais razoável para o desenho de cada um desses elementos? Como esses elementos do PEP devem ser expressos materialmente? Os critérios básicos para responder a estas perguntas e explicitar um projeto didático *a priori* de um PEP análogo ao que experimentamos surgem diretamente das respostas fornecidas nos dois módulos anteriores, embora se deva ter em mente que a aplicação dos critérios matemáticos-didáticos obtidos não é imediata[vi]. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 141).

No quinto módulo, os professores terão por tarefa gerenciar e experimentar um PEP. Segundo Ruiz-Olarría (2015), dois objetivos devem ser alcançados: dar subsídios aos professores que são novos no programa de gestão dos PEP e, por outro lado, obter, catalogar e analisar "os problemas, dificuldades e obstáculos que possam ter surgido durante o gerenciamento dos PEP. Este trabalho experimental deve fornecer uma base sólida para a modificação do projeto do PEP para posterior experimentação". (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 141).

Nesse sentido, nossos primeiros encontros tiveram aspectos do primeiro módulo de um PEP-FP, debatemos algumas questões, realizando um estudo crítico acerca dos inteiros relativos: O que são os inteiros relativos? Qual a origem histórica e epistemológica desses números? Quais as dificuldades de ensino enfrentadas pelos professores? Quais as dificuldades de aprendizagem por parte dos estudantes? Quais as propostas de ensino atuais? E, as "antigas"? Quais as diferenças entre elas? Qual a *razão de ser* dessas propostas? Qual a importância das justificativas das técnicas ensinadas?

Essas foram algumas das questões que, entre outros elementos, nos permitiriam compreender melhor os inteiros relativos e o seu ensino, ou como nos diz Borba (2009) "é preciso ter um bom conhecimento do que constitui um conceito e de como este se desenvolve [...] do que compõe conceitos e de quais aspectos deles mesmo estão sendo avaliados nas questões propostas aos alunos". (p.59). Assim, conhecer os conceitos com mais detalhes possibilita elementos teóricos e metodológicos que evitam criar novas dificuldades, compreender possíveis consequências de determinadas opções didáticas.

Nesse contexto, o grupo de estudos teria o papel de discutir questionamentos, tais como: de que maneira podemos conhecer o conceito? O que é preciso ser mobilizado? Fórmulas, algoritmos, procedimentos? Quais problemas devem ser resolvidos? Portanto, planejamos uma ação que funcionasse como formação de professores e fosse pautada nos princípios de um PEP-FP.

Sabemos da dificuldade de mudar a forma de trabalhar, pois o que está sendo proposto é uma mudança de paradigmas, e isso não é algo simples, que ocorre em poucas horas de estudo. Essa mudança/revolução, em sua "totalidade" seria algo para o futuro, pois a ideia é plantar a semente do PQM. E, provavelmente, o elemento de construção dessa formação, a partir da análise e da comparação com outras experiências e propostas já vividas são os aspectos mais impactantes, quem deve ser o formador? Quem deve propor os problemas docentes? Vemos, que na Reme de Campo Grande/MS, geralmente, os professores nas formações assumem o papel de aluno e, assim, propor novos questionamentos, construir uma nova proposta não parece algo fácil de se realizar, diante do cenário que vivemos em Campo Grande/MS.

Os aspectos iniciais propiciaram classificar nossa proposta do grupo de estudos como Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP)[14], poderíamos ter ou ser constituídos com as ideias de um PEP. Propus a pergunta inicial, as leituras dos primeiros textos, assim, os caminhos para a formação foram todos orientados por mim. Nos primeiros encontros, na semana que nos reuniríamos, enviei para os professores um questionamento acerca do tema daquela semana. Nesse sentido, alguns aspectos do "PEP com características de um Formação de Professores" (PEP-FP) eram cumpridos, mas outros se assemelhavam aos de uma Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), por todas as dificuldades já relatadas. Porém, almejávamos que nos demais encontros, os professores propusessem outras perguntas, que vivenciassem as atividades semelhantes ao de um PEP.

Houve um momento de comparação entre nossa formação inicial e as propostas do *Modelo Dominante*, que nos proporcionou iniciar a construção de uma nova proposta. Mais uma vez, nos aproximamos das ideias de um PEP-FP, no entanto, os últimos encontros do primeiro semestre não foram possíveis de serem realizados, devido ao fechamento dos laboratórios de matemática[15]. Na realidade, esses cortes não atingiram

---

[14] Mais informações em CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD, 2009e. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em agosto de 2020.

[15] Para retornar à página 118, Q_9: *Que atividades, problemas e estratégias*, ..., clique aqui.
Para retornar à página 147, $R_{10.2}$: *Metodologia e Procedimentos da Pesquisa*, clique aqui.
Para retornar à página 163, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

apenas esses professores, outros profissionais foram prejudicados devido a essa política municipal. Os professores que atendiam os alunos especiais foram substituídos por assistentes com salários menores, alguns com grau de instrução e preparação bem menor do que os professores do atendimento especializado.

Os professores que atendiam aos laboratórios de informática também foram demitidos, retornando ao seu cargo original. Alguns laboratórios continuaram abertos, com o atendimento de um técnico e, em outras unidades de ensino, eram abertos para os professores regentes usarem os materiais, como *datashow*, *notebooks*, ou quando o regente era apto a conduzir sua turma em atividades nos computadores dos laboratórios.

A justificativa para esse retrocesso foi a crise financeira e o fato de que alguns desses profissionais estavam nesse cargo devido à indicação política. Sem juízo de valor, mas todos esses profissionais se submeteram a processos seletivos e foram chamados por causa da sua classificação e competência demonstrada na seleção. Enfim, os últimos encontros do primeiro semestre, e a possível continuação no segundo semestre, foram ceifados da nossa pesquisa.

R_2: ESTUDAR TEXTOS DE CHEVALLARD SOBRE O PQM, MER E PEP

Para Chevallard (1992), toda *instituição* de certa forma possui características de ensino, ou seja, é uma *instituição* didática. Os processos de ensino e de aprendizagem são inerentes à raça humana, vivemos numa sociedade em que as ações, os pensamentos, os traços culturais, as histórias, as lendas e as formas de realizar “coisas” são ensinadas por alguém para os seus. Obviamente, algumas *instituições* são construídas com esse propósito, por exemplo, as escolas e as suas salas de aula, as autoescolas, entre outras. Nesse sentido, essa intenção didática, a ação de ensinar algo, se dá pelo que Chevallard denominou de sistema didático (SD). Esse sistema didático, pautado no *Paradigma Questionamento do Mundo*[16], é constituído por um professor (Y), os estudantes (X) e as questões a serem respondidas (Q), simbolizado por SD: (X, Y, Q) (CHEVALLARD, 2009a).

> X é o grupo de alunos (esta palavra é usada genericamente aqui), Y é a equipe assistentes e diretores de estudo e Q designa a questão estudada (por X sob a direção de Y ou com sua ajuda), uma questão que pode consistir em perguntar o que é, como "funciona", para que fins, etc., tal e tal *obra* O, por exemplo, digamos, o "cálculo tensorial". A questão Q, seja ela qual for, é a aposta didática do sistema considerado.[vii] (CHEVALLARD, 2009a, p. 2, grifos do autor, tradução nossa).

[16] Para retornar à página 13, *Prólogo*, clique aqui.

É importante observar que Y não necessariamente será um professor[17]. Mesmo na sala de aula, outras pessoas podem assumir a função de Y. Por exemplo, quando um estudante tenta ensinar a outro alguma coisa ou quando um grupo prepara e apresenta um seminário.

No dia a dia, poderia ser qualquer pessoa com intenção de ensinar algo a alguém. Por exemplo, em um supermercado quando alguém está aprendendo a função de ‘caixa’, observamos sempre ao seu lado outra pessoa mais experiente o acompanhando, até que possa exercer sua função sozinho. Nesse exemplo, a pessoa experiente está na posição de Y, e o aprendiz à caixa na posição de X. Nesta situação, o objeto de ensino é a postura de atendimento, a forma de realizar os pagamentos, o funcionamento da máquina registradora, os códigos do sistema, enfim, trata-se das atribuições que um caixa deve possuir para exercer seu cargo. Uma das questões a ser respondida poderia ser: o que preciso aprender para iniciar o trabalho como ‘caixa’ de supermercado?

Nesse contexto, surge outro aspecto dos estudos da didática, o conceito de “*meio* didático M”. Tal *meio* é composto de diferentes tipos de objetos ou ferramentas que auxiliam na investigação. Assim, desenvolve-se um sistema didático para se obter uma resposta R à questão Q, dado pelo esquema:

[S (X; Y; Q) ➦ M] ↪ R

No caso do *Paradigma Questionamento do Mundo*, o *meio*[18] didático é formado por um conjunto de questões Q_K (derivadas da questão geratriz Q), pelas respostas $R_K^{\Diamond}$(respostas oficiais à Q_K), pelas obras O_i (já elaboradas e estudadas e que justificam $R_K^{\Diamond}$ e podem ser analisadas, desconstruídas para a construção da resposta coração, $R^{\heartsuit}$), e por

[17] Diante do cenário pandêmico, vivenciado nos anos de 2020 e 2021, e das nossas experiências em sala de aula remotas, a função de Y também foi assumida por irmãos mais velhos, tios, primos, pais e colegas. A pandemia reforçou o fato do meio didático ser dinâmico, mas não entendíamos que poderia ser tanto. Acreditamos que as teorias da didática não previam uma dinamicidade tão grande e, portanto, carecem ser retomadas e revistas com objetivo de discutir os seus limites e formas de avançarmos teoricamente.

[18] “A palavra mídia será usada aqui para designar qualquer sistema de representação de uma parte do mundo natural ou social para um determinado público: o 'curso' do professor de matemática, um livro de química, um diário de apresentador de televisão, um jornal diário regional ou nacional, um site da Internet etc., todos pertencem ao sistema de mídia neste sentido. [...] Um *meio* é compreendido aqui num sentido semelhante ao do meio *adidático* na teoria das situações didáticas. Um meio é qualquer sistema que pode ser considerado como *não tendo intenção* na resposta que pode dar, explícita ou implicitamente, a uma determinada pergunta. O sistema então considerado, comporta-se a este respeito como um fragmento da "natureza". Em contraste, com relação a muitas das perguntas às quais elas pretendem responder, as mídias geralmente são movidas por uma certa intenção, por exemplo, a intenção de “informar”. Naturalmente, uma mídia pode, sobre um determinado assunto, ser vista como um meio e ser usada como tal”. (CHEVALLARD, 2007, p. 344).
Para retornar à página 85, R_5: *Identificar e Descrever Modelo Dominante ...*, clique aqui.
Para retornar à página 93, Q_6*: Por que ensinar Z?* Clique aqui.

outras informações e dados mais gerais, D_i (necessários aos processos de investigação, dados tanto inicialmente quanto no decorrer dos estudos).

Assim, o esquema anterior, denominado de *herbartiano*[19] terá uma nova representação $[S\ (X;\ Y;\ Q) \rightarrowtail M] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, com

$M = \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, \ldots, R_m^{\diamond}, O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_n, Q_{n+1}, Q_{n+2}, \ldots, Q_p, D_{p+1}, D_{p+2}, \ldots, D_q\}$.

No exemplo do aprendiz à caixa de supermercado, a pessoa mais experiente mobilizará sua prática, sua perícia e técnicas como caixa de supermercado para auxiliar o seu aprendiz, além das ferramentas, códigos e demais instruções do sistema de compras e vendas daquele estabelecimento. A pessoa ocupante da posição Y, que pode ser o responsável por todos os aprendizes ou colocada esporadicamente para exercer tal papel, não recebeu um treinamento especial para exercer tal função. Uma questão que podemos levantar seria: qual capacitação essa pessoa deveria receber?

> O que é importante enfatizar acima de tudo é esse fato secular de que o trabalho de Y é considerado um *trabalho pequeno*, que quase não *requer treinamento*. Tanto em Roma como na Grécia, observa o historiador Henri-Irénée Marrou (em sua *História da educação na Antiguidade*, Le Seuil, Paris, 1948, pp. 66-67), o mestre de escola é "um homem pobre", cujo trabalho é "o último dos ofícios, *rem indignissimam*[20]", "cansativo e doloroso, mal pago", "bom para escravos, libertos ou pessoas comuns: *obscura initia*[21] disse Tácito de um arrivista que havia começado lá ". Uma profissão que praticamos por falta de melhor, enquanto esperamos pelo melhor. É daí que viemos; e essa "indignidade" original ainda pesa muito. (CHEVALLARD, 2009a, p. 3 – 4, grifo do autor, tradução nossa)[viii].

Vale ressaltar, que se o aprendiz apenas reproduzir a praxeologia ensinada por seu instrutor, ou seja, não construir sua própria forma de trabalhar como caixa teremos uma nova constituição do SD, S (X; Y; $\wp$), onde $\wp$ é a praxeologia a ser aprendida.

[19] I- "O *esquema herbartiano* indica os principais elementos do processo de investigação. Sua dinâmica é capturada em termos de algumas dialéticas que descrevem a produção, validação e divulgação da resposta coração". (BOSCH, 2018b, p. 4040).
II- "O *esquema herbartiano* foi proposto como uma ferramenta para a análise dos processos de estudo e pesquisa. Através da descrição dos temas ou domínios matemáticos como uma árvore de questões e respostas [ou mapa de questões e respostas], ele oferece uma alternativa à visão comum dos conteúdos matemáticos como uma estrutura hierárquica de conceitos e resultados." (BOSCH, WINSLØW, 2016, p. 33, tradução nossa).
III- O *esquema herbartiano* é um possível "sistema de referência [a ser] utilizado pelo didata para observar, descrever, analisar e avaliar sistemas didáticos existentes em instituições sociais ou sistemas teoricamente possíveis. Também pode ser considerado o *Modelo Didático de Referência* (MDR), que fornece seu próprio ponto de vista e um modelo geral do que se entende na TAD por *estudar uma questão* e, mais genericamente, por *estudar uma obra*. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 134, tradução nossa, grifo do autor).
Para retornar à página 15, *Prólogo*, clique aqui.

[20] *Rem indignissimam*, do latim, o indigno.

[21] *Obscura initia*, do latim, origens sombrias.

A diferença primordial entre esses sistemas didáticos são seus objetivos: enquanto um se preocupa em responder e criar novas questões, o outro se detém no ensino de praxeologias, nos estudos dos conteúdos. Essa diferença, grosso modo, é determinante entre os *Paradigmas Questionamento do Mundo* e *Visita às Obras*. (CHEVALLARD, 2009c)

> No atual paradigma escolar, o da visita às obras, o que conta é $\wp$ e não *Q*. E o professor é julgado pelas obras - o saber - cujo estudo ele terá estimulado em sala de aula. No que eu nomeio o Paradigma Questionamento do Mundo, o professor é julgado pelas questões que dirigiram o estudo. (CHEVALLARD, 2009c, p. 27 – 28, tradução nossa)[ix].

Pensando na possibilidade de o aprendiz à caixa de supermercado ser capaz de organizar uma forma de particular de trabalho, não poderia mobilizar apenas aos ensinamentos de seu instrutor, deveria, por exemplo, pesquisar melhor sobre o sistema que manuseará, conversar com outros caixas em relação às dificuldades enfrentadas, observar os principais problemas enfrentados por aqueles que exercem essa função, enfim, realizar uma busca minuciosa acerca dessa profissão.

Entretanto, essa hipótese parece quase absurda para uma pessoa iniciante naquele trabalho. A lógica do dia a dia aponta para um aprendizado mais pragmático, ou seja, reproduzir o que o instrutor orientou e continuar aprendendo ao trabalhar na prática. Com certeza, se entrevistássemos vários caixas de um supermercado cada um construiu sua forma própria de trabalho, seus 'macetes' e estratégias para se desvencilhar dos problemas e para potencializar sua função. Neste caso, trazendo esse exemplo para a escola, muitas vezes, os estudantes, ocupantes da posição X, apenas reproduzem os ensinamentos de seus professores.

Em geral, não terão a oportunidade de construírem suas estratégias, ou questionarem aspectos do conteúdo ou do seu cotidiano, seu aprendizado está focado na reprodução das técnicas dadas pelos professores. A função do professor, posição Y do SD, observando a história dessa profissão, sempre foi dada como auxiliar dos estudos, por exemplo,

> a palavra pedagogo designada pela primeira vez - na antiguidade greco-latina - o escravo que conduzia a criança à escola e que, aos poucos, viu expandir seu campo de ação, a ponto de às vezes ser o tutor de seu protegido. Generalizemos: a função de Y sempre foi ocupada por auxiliares de estudo ocasionais, às vezes regulares, para os quais isso poderia, a longo prazo, tornar-se uma profissão, da qual derivamos uma remuneração. (CHEVALLARD, 2009a, p. 3, tradução nossa)[x].

Para Chevallard (2009a), durante muito tempo, o professor reproduziu nas salas de aula a chamada “pedagogia regente”, ou seja, ele reproduziria tudo aquilo apresentado nos livros didáticos, todos os conteúdos ali dispostos. Os conceitos são apresentados, tal como estão nas páginas dos livros, e sua função se detém em fazer todos os ocupantes da posição X compreendê-los, sem nenhuma alteração naquilo que foi exposto, além de questionar e corrigir as respostas erradas ou com problemas. Na pedagogia regente, a função do professor está bem próxima ao que víamos na Antiguidade, ou seja, auxiliar dos estudos. Nessa perspectiva, Chevallard (2099c) define também a “pedagogia de estudo”.

> O desenvolvimento da pedagogia regente conduziu no século XIX ao que chamarei de pedagogia do estudo, expressão em que a palavra estudo designa “trabalho em estudo”. A historiadora Françoise Mayeur (1933-2006) uma vez deu esta breve descrição do que era feito em sala de aula. Enquanto lê e assina os cadernos de correspondência, ele tem as lições recitadas. Em seguida, um aluno lê as lições do dia seguinte. O professor então distribui as cópias corrigidas dos dias anteriores. Vem a correção do dever de casa: este é o exercício principal, que leva mais tempo. Assim que essa correção for concluída, o professor dita uma tarefa de casa; a última meia hora é gasta traduzindo a página em latim ou grego que os alunos tiveram que preparar com antecedência. (CHEVALLARD, 2009c, p. 2, tradução nossa)[xi].

Na “pedagogia de estudo”, o professor corrige as tarefas, propõe as novas atividades do dia, distribui as tarefas corrigidas e propõe novas tarefas.

Chevallard (2009c) também discorre sobre a “pedagogia do professor”, uma ‘ampliação’ da “pedagogia regente”, na qual os professores não apenas reproduzem os conteúdos dados nos livros didáticos, sua prática se aproxima das ideias de uma palestra, ou seja, as aulas tipo palestra substituem os livros e os textos. Segundo Chevallard (2009c, p. 3, grifo do autor, tradução nossa),

> Em todos os casos - pedagogia regente, pedagogia do estudo, pedagogia do professor - o que deve ser feito é na verdade limitado, ainda que, ao contrário do regente de outrora, o professor, laureado da agregação ou titular da licença, é considerado "acadêmico" e se considera como tal. Em vez de ir buscar as respostas às questões que propõe a X estudar no “livro” (do mestre), o professor deve retirá-las de seus próprios recursos: são estes que ele expõe em seus “cursos”[xii].

Cada uma dessas formas de exercer o papel de Y têm características particulares, enquanto na primeira o professor é responsável por corrigir as respostas erradas dos alunos, na segunda ele tem a função de fazer os estudantes compreenderem aquilo posto nos livros e na última, substitui os livros por seus planos de cursos e as aulas por palestras. Essa situação começou a ser modificada em meados do século XX, com a constituição do "método ativo". Em tal método, as "instruções visam abrir um espaço para o aluno, dando-lhe a palavra em nome da transição para o 'método ativo', 'cujo valor não está em contestar'. É necessário mudar a maneira como você ensina". (CHEVALLARD, 2009c, p. 4, grifo do autor, tradução nossa).

Na "pedagogia do método ativo", o professor não é o detentor do conhecimento estudado nas aulas, ou aquele que auxiliará seus estudantes a aprenderem o que está nos livros didáticos, as respostas para as perguntas não mais serão avaliadas apenas por seu conhecimento. As perguntas e os questionamentos não mais virão apenas dos professores; quem ocupar a posição Y ajudará seus estudantes na tarefa de enfrentar os novos desafios, aumentando o tempo em que os estudantes estarão ativos, construindo as respostas para as questões dadas pelo professor e para aqueles que o coletivo de estudantes construiu.

> Boa parte da atividade dos alunos deve ser dedicada ao estudo e à busca da solução de "problemas", a partir do simples exercício de aplicação proposto para ilustrar um teorema, dar vida a uma fórmula, até o "dever de casa", exigindo maior esforço pessoal, redigido fora da sala de aula e dando origem a um relatório preciso e detalhado. (CHEVALLARD, 2009c, p. 5, tradução nossa)[xiii].

Nesse contexto, a formação de equipes de estudos é fundamental. A cada grupo de estudantes é dada a tarefa de construir e "apresentar uma questão específica, ao mesmo tempo em que apresenta alguns exercícios elaborados ou escolhidos por eles" (CHEVALLARD, 2009c, p. 5-6, tradução nossa). Cada grupo, ao final, deve apresentar seu relatório de pesquisa à classe toda. Nesse movimento de construção desse relatório, no transcorrer dos estudos coletivos, supervisionados pelo professor, se as atividades forem "bem-preparadas e bem conduzidas, são a oportunidade [de] [...] 'estudar as reações e comportamentos de cada um, diante de uma tarefa proposta e dar, individualmente, o conselho adequado". (CHEVALLARD, 2009c, p. 6, tradução nossa).

O foco agora é que os estudantes sejam ativos em seus processos de aprendizagem, as respostas não virão apenas dos livros didáticos ou dadas pelos professores. Os trabalhos de pesquisa não serão mais individualizados, as equipes de alunos serão desafiadas a construírem seus relatórios do trabalho desenvolvido, isto é, mostrar como chegaram às respostas das atividades que realmente causaram dificuldades, e as orientações serão também coletivas em prol da construção de novos questionamentos.

A pedagogia inserida no "método ativo" aglutina alguns elementos das demais pedagogias,

> integra, portanto, dispositivos específicos emprestados da pedagogia do regente - o livro didático -, da pedagogia do estudo - o dever de casa e

> sua correção -, bem como do ensino do professor - a lição. Mas os "corrige" para dar em cada um deles um lugar "ativo" para X. [...] O trabalho fica complicado: Y não é mais regente (exceto às vezes) e, na verdade, é professor apenas de forma intermitente, o que alguns lamentam. Pode-se dizer que ele se tornou um "impulsionador do estudo", que deve ter muitas cordas em seu arco - um pequeno regente, um pequeno professor, um pequeno auxiliar de estudo. (CHEVALLARD, 2009c, p. 7, tradução nossa)[xiv].

Porém, esta "pedagogia híbrida moderna", proveniente da pedagogia do "método ativo" tornou-se dominante, com suas diversas variações, mais espontâneas que deliberadas. "A pedagogia escolar do método ativo se estabeleceu assim dentro de uma fronteira que, durante trinta anos, não conseguiu atravessar. Este é o grande problema". (CHEVALLARD, 2009c, p. 6, tradução nossa).

Segundo Chevallard (2009c), essa fronteira está alicerçada na falta de dedicação, estudo ou até conhecimento sobre os fundamentos da pedagogia das AEP (Atividades de Estudo e Pesquisa). Nessas AEP, grosso modo, há necessidade de resolver tarefas de um determinado tipo, daí, surge o questionamento Q: como realizar de forma "(inteligível e justificada) as tarefas t* de um certo tipo T*?" (CHEVALLARD, 2009c, p. 8). É a partir de questões dessa natureza que as AEP se desenvolvem. Novamente, um questionamento surge, qual a infraestrutura necessária para o desenvolvimento das AEP? Segundo Chevallard (2009c, p. 8), o principal desafio para o seu desenvolvimento "é a falta de infraestrutura didática (ou seja, didático-matemático) adequada". Nesse sentido, os elementos dessa infraestrutura, que geralmente necessita, parcialmente, ser criada, se darão pela necessidade de organizar uma situação na qual sua solução propiciará o encontro com a obra a ser ensinada, destacando *as razões de ser* de uma vasta lista de conteúdos, obras, a serem ensinados.

Diante desse cenário, Chevallard (2009c) nos apresenta outro elemento importante, a profissão do professor. Segundo esse autor, para a pedagogia das AEP há que se ter uma infraestrutura adequada, e um dos obstáculos para a sua construção, dentre outros, encontramos a profissão docente, ou ainda, a ideia de semiprofissão[22]. Tal ideia

---

[22] Critérios de uma semiprofissão: 1. Mais baixo em status ocupacional; 2. Períodos de treinamento mais curtos; 3. Falta de aceitação da sociedade de que a natureza do serviço e/ou o nível de especialização justificam a autonomia que é concedida às profissões; 4. Um corpo de conhecimentos e habilidades menos especializados e menos desenvolvido; 5. Marcadamente menos ênfase em bases conceituais e conceituais para a prática; 6. Uma tendência para que o indivíduo se identifique com a instituição de emprego mais e com a profissão menos; 7. Mais sujeitos a vigilância e controle administrativos e de supervisão; 8. Menos autonomia na tomada de decisões profissionais, com responsabilidade aos superiores em vez da profissão. 9. Gestão por pessoas que foram preparadas e servidas em semiprofissão. 10. Preponderância de mulheres; 11. Ausência do direito de comunicação privilegiada entre cliente e profissional e 12. Pouco ou nenhum envolvimento em assuntos de vida ou morte. (CHEVALLARD, 2009c, p. 17).

nos ajuda a compreender melhor esses problemas, Chevallard (2009c, p. 19) nos fala que “este estado semiprofissional não permite [...] atravessar a fronteira em que a profissão de professor estagnou durante décadas” (CHEVALLARD, 2009g, p. 19), ou seja, organizar ações para o desenvolvimento da infraestrutura didática das AEP, sem estar vinculado ao mito do pequeno (grupo) produtor(es) independente(s). E foi diante desse cenário, que Chevallard (2009d) propôs o paradigma didático, o *Questionamento do Mundo*.

No exemplo da função do caixa do supermercado ou diante do estudo de uma questão na escola, há necessidade de visitar obras, consultar pessoas mais experientes, procurar outras mídias auxiliadoras da construção da resposta para o questionamento. Por incorporar aspectos do antigo paradigma, há possibilidade de se pensar que o novo paradigma fosse uma ampliação do antigo, porém, Chevallard (2009d)[23] apresenta-o como opositor ao antigo. Obviamente, não se pode organizar uma nova pedagogia descartando totalmente os aspectos da anterior, mas, um dos objetivos é a mudança em relação à posição do sistema didático nos níveis de codeterminação.

Nessa constituição, os processos de ensino e de aprendizagem são caracterizados e construídos em torno de praxeologias, do currículo a ser cumprido. Elas são mediadas por visitas às obras, sempre orientadas pelos professores, para se estudar um conjunto de praxeologias. Por outro lado, no novo paradigma, os processos de ensino e de aprendizagem se dão pelo estudo de questões geratrizes não pertencentes a organizações dadas *a priori* em uma disciplina, domínio, setor ou tema específico, por exemplo os inteiros relativos.

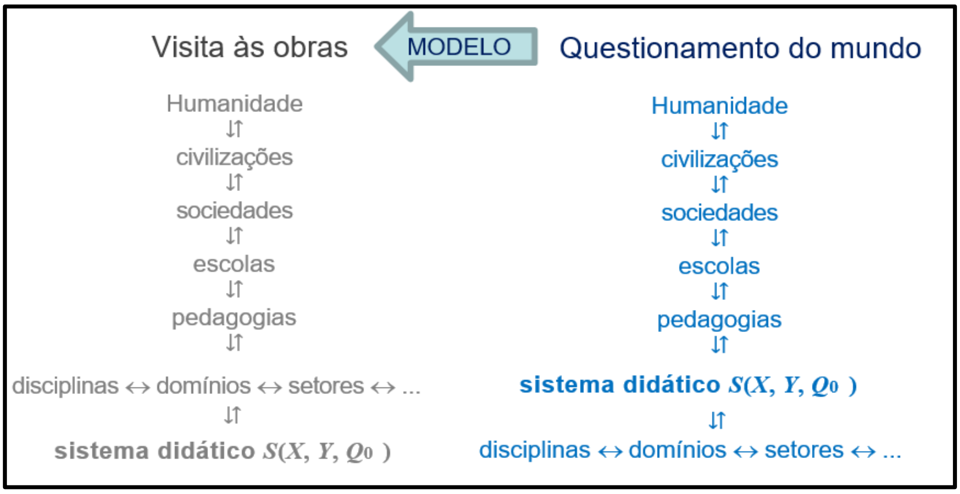


Figura 2- Comparação entre os sistemas didáticos
Fonte: Bosch, 2018a

[23] Para retornar à página 19, R_0: *Constituir um grupo de estudos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 137, $R_{10.2}$: *Metodologia e procedimentos da pesquisa*, clique aqui.

Nessa nova organização, as perguntas constituintes do sistema didático são as geradoras das necessidades de acessar as disciplinas, os domínios ou os setores auxiliares e integrantes do meio didático para a construção da resposta desejada. Dessa forma, não se parte de uma praxeologia específica, e sim, de um questionamento; as praxeologias aparecerão a partir das necessidades de se construir as respostas, as visitas às obras se darão no sentido de auxiliar nessa busca.

Na figura 2, temos uma comparação realizada entre os esquemas dos modelos didáticos de cada paradigma; à esquerda, *visita às obras*, os níveis inferiores de codeterminação correspondentes aos estudos das praxeologias são anteriores à organização do sistema didático, ou seja, as obras a serem estudadas em cada disciplina já foram selecionadas e serão guiadas pelo professor. À direita, temos a modelização do sistema didático do *Paradigma Questionamento do Mundo*, no qual há uma inversão: a organização do sistema didático é anterior a determinação do nível de estudo das praxeologias, ou seja, constitui-se primeiro o sistema didático, desta vez guiado por questões, e as disciplinas, domínios, setores, temas e assuntos se darão a partir da necessidade desse sistema.

Para a implementação desse novo paradigma didático, algumas *restrições* devem ser superadas. Segundo Chevallard (2002), *restrições* são *condições* que não podem ser alteradas. No decorrer da história ou em outras *instituições*, as mesmas *restrições* podem e devem ser modificadas, pois alguma *restrição* pode vir a ser apenas uma *condição* (podendo ser modificada) e uma *condição* pode se tornar restrição.

Bosch (2018a) apresentou *restrições institucionais* desde o nível da Sociedade até o das Pedagogias. Por exemplo, no nível Sociedade, algumas *restrições* são provenientes do fato de o currículo ser pensado como sequências de *praxeologias*, justamente o que o novo paradigma tenta se opor.

Nesse sentido, como implementar uma escola inserida nesse novo paradigma se os documentos curriculares caminham em sentido contrário? Na rede municipal de ensino da cidade de Campo Grande/MS, essa é uma realidade, pois toda a organização curricular se deu pela reestruturação prevista pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017), ou seja, os conteúdos foram dispostos em forma de habilidades, descritas ano a ano. Os inteiros relativos, por exemplo, estão previstos para serem ensinados a partir do sétimo ano do ensino fundamental. Vejamos como essas habilidades estão descritas nesse novo referencial.

Quadro 3– Habilidades descritas no Referencial Curricular de matemática

Unidade temática	Objeto do conhecimento	Habilidade relacionada	Conhecimentos Específicos
Números	Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	(CG. EF07MA03.s) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.	- Associa número inteiro a um ponto da reta numérica e vice-versa; - Ordena números inteiros em diferentes representações; - Compara números inteiros em diferentes representações; - Representa números inteiros na reta numérica; - Identifica sucessor e antecessor de um número inteiro; - Utiliza a reta numérica na resolução de situações que envolvem adição e subtração.
Recomendações: (CG. EF07MA03.s) Explorar a utilização de recursos que possibilitem a comparação e ordenação de números inteiros, em diferentes contextos. Propor situações-problema nas quais os números inteiros possam ser associados a pontos na reta numérica e que envolvam as operações de adição e subtração.			
		(CG. EF07MA04.s) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.	- Resolve problemas com números inteiros, envolvendo as operações fundamentais; - Elabora problemas com números inteiros, envolvendo as operações fundamentais.
Recomendações: (CG. EF07MA04.s) Propor atividades de investigação que possibilitem a resolução e a elaboração de problemas que envolvam operações com números inteiros (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação, com base inteira e expoente natural).			

Fonte: Campo Grande, 2020, p. 122

A análise desse quadro remete a outra *restrição* descrita por Bosch (2018a), a questão da temporização. Os processos de ensino se dão de forma cronometrada, com tempos para começar e terminar, bimestres para cumprir, enfim, além de conteúdo para serem cumpridos, há tempos bem determinados para serem ensinados. Nesse sentido, os estudos dessas obras só podem ocorrer como sínteses, respostas prontas e acabadas, algoritmos e procedimentos. O ensino é realizado de modo a favorecer que o estudante seja capaz de aplicar o que estudou em problemas.

Essas são algumas *restrições* do nível da *Sociedade*, o nosso sistema de ensino funciona dessa maneira há muito tempo e, para alterarmos esse funcionamento, não basta propiciar condições a nível institucional, há que se ter toda uma reorganização no sistema de ensino brasileiro, a nível noosférico.

Analisando o nível de codeterminação[24] das Escolas, Bosch (2018a) apresenta outras *restrições*, como "horários, tipos de aula, equipamentos, fronteira entre as disciplinas e os exames finais." (BOSCH, 2018a). E, o nível da Pedagogia, podemos descrever *restrições* provenientes das concepções referentes aos atos de se transmitir conhecimentos, semelhante ao observado nas pedagogias regente, de estudo e do professor. Ou ainda, há falta de uma prática para auxiliar os estudantes a construírem suas próprias perguntas, bem como poder solucioná-las por meio de suas próprias investigações e validações pelos testes dos dados obtidos. Para tais testes, há necessidade de compartilhar os resultados, trabalhar em equipe e planejar suas investigações. (BOSCH, 2018a).

No sistema de ensino atual, esses processos se dão no caminho contrário ao proposto no *Paradigma Questionamento do Mundo*, as perguntas e as respostas já estão prontas, bem como são validadas pelos professores e por meio dos seus procedimentos. O planejamento, as ações e as atividades de investigação também são dadas pelos professores. Assim, muitos são os desafios para tal mudança de paradigma, porém muitas são as potencialidades. Exploramos algumas dessas potencialidades com os professores dos laboratórios de matemática de Campo Grande/MS. A condução das discussões e das preparações dos conteúdos estudados seguiu os preceitos de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

Essa nova ferramenta, o PEP, serve de organização das atividades, dos processos de ensino e de aprendizagem inseridos nesse novo paradigma. Como discorremos anteriormente, a constituição do sistema didático se dá para a construção de uma resposta para a questão geratriz. Nesse sentido, as idas e vindas, as respostas preliminares e as novas questões derivadas que surgem, as novas pesquisas, a mobilização das dialéticas *Mídia/Meio*, *Questão/Resposta*, as visitas às obras, as consultas às pessoas mais experientes, a concatenação de todos esses processos para a apresentação da resposta desejada para a questão geratriz, todo esse caminho, esse percurso, grosso modo, é denominado de PEP.

Anteriormente à pedagogia do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), mobilizava-se a pedagogia das Atividades de Estudo e Pesquisa (AEP). As bases das AEP estão no conceito de *situação fundamental* dada na Teoria das Situações Didáticas (TSD)

[24] Para retornar à página 31, Q_2*: Que aspectos do PQM mobilizar* ..., clique aqui.
Para retornar à página 38, R_2*: Estudar Textos de Chevallard sobre PQM* ..., clique aqui.
Para retornar à página 79, R_4*:Comparar o ensino de Z por meio dos modelos* ..., clique aqui.

(BROUSSEAU, 1999). A mobilização de uma situação fundamental "[...] é uma exigência epistemológica bem fundamentada, que define um projeto para o desenvolvimento de uma infraestrutura matemática que seja didaticamente adequada para uma pedagogia AEP. No entanto, uma pedagogia AEP requer condições menos radicais. (CHEVALLARD, 2009c, p. 7).

Note-se que, uma pessoa ou um grupo de pessoas empenhado em realizar uma tarefa terá que enfrentar questionamentos, como dito anteriormente, do tipo: como realizar (de forma inteligível e justificada) as tarefas t* de um determinado tipo T*? Esta pergunta Q é, portanto, o princípio de uma certa atividade de estudo e pesquisa. (CHEVALLARD, 2009c, p. 8).

As pedagogias retratadas anteriormente apresentavam suas fragilidades e proporcionavam muitas lacunas nos processos de aprendizagem. Muitas destas pedagogias estavam ancoradas em modelos didáticos espontâneos. Modelos que permaneceram obscuros, sem serem questionados, sobretudo, "na medida em que as formas de organizar o ensino da matemática se apresentam como se não precisassem de nenhum tipo de justificativa ou fundamento explícito para além de critérios genéricos que emanam principalmente do senso comum". (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 56). Por exemplo, na pedagogia clássica, os processos de ensino se dão pela apresentação de vários elementos teóricos que, por sua vez, são aprofundados a partir de exercícios de aplicação. (BOSCH; GASCÓN, 2010). Os problemas estudados resolvem situações da própria matemática ou dos contextos escolares, as necessidades do dia a dia não têm espaço nessas discussões.

Com as reformas educacionais, ocorridas a partir da década de 1960, tais modelos mais tradicionais são contestados, e as justificativas dos seus preceitos e fundamentação são inquiridas. Nesse sentido, criou-se uma obrigação de expor as suas justificações. "Desse modo, os modelos de ensino propostos, desde meados do século passado, são mais 'deliberados' e menos 'espontâneos', pois são propostos com base em critérios mais abertos e potencialmente questionáveis." (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 56).

Na atualidade, um modelo bastante comum, é a chamada pedagogia das competências

> que atribui à Escola a missão de dotar os alunos das competências necessárias para resolver problemas de todos os tipos: acadêmicos, profissionais, pessoais e sociais. Dado que esta pedagogia não propõe uma organização detalhada do processo de estudo que permita desenvolver eficazmente estas competências, o problema da gênese e justificação do modelo didático permanece em aberto, aparecendo, no

> máximo, formulado em termos surpreendentemente simplistas. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 57)[xv].

Essa pedagogia é fundamentada em princípios psicopedagógicos que deixam de lado aspectos, especificidades e considerações próprias das atividades matemáticas e, por consequência, fundamentos dos *Modelos Epistemológicos* da matemática mobilizados implicitamente (BOSCH, GASCÓN, 2010). Esses autores postulam que, na grande maioria das inovações trazidas pelas reformas educacionais o procedimento, usual e rápido, é o de "não disseminarem discursos técnico-teóricos suficientemente 'resistentes' [...] para manter vivas, desenvolver e dar sentido às diferentes práticas didáticas que[...], tendem a funcionar de forma muito rígida, perdem eficácia e acabam sendo abandonados. (BOSCH, GASCÓN, 2010, p. 58).

Na busca por inquerir tais modelos, "a integração de dispositivos didáticos baseados em AEP promove uma epistemologia 'funcionalista' que concebe a matemática como um instrumento para fornecer respostas a problemas que surgem no mundo (e não apenas na escola)". (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 79). Além disso, há que se considerar que o objetivo das AEP é o de construir uma organização local, estabelecida e organizada previamente pelo professor. No processo de construção das questões geratrizes, não há participação dos estudantes semelhante ao *monumentalismo*. Essa função é exclusiva dos docentes. As questões atendem às necessidades didáticas, e como tal, correm risco de perder sua *razão de ser*, subordinando ao ato em si de construir tal organização local.

Nesse sentido, também atribui tanto aos professores quanto aos alunos novas funções em suas práticas habituais. Ao professor, necessidade de conhecer alguma funcionalidade para as organizações matemática locais; ao aluno, possibilidade de participar mais ativamente "na gestão de quase todos os momentos (teórico-tecnológico, síntese, avaliação) que, na pedagogia monumentalista tradicional, ficavam sob a responsabilidade exclusiva do professor". (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 80).

Essas mudanças nos *topos* das "atividades" tanto dos alunos quanto dos professores, constituem, por um lado, uma renovação trazida pela pedagogia das AEP, por outro lado, promove um choque com os processos de regulação e de equilíbrio dos sistemas de ensino vigentes, o que, por sua vez, dificulta a implementação de forma mais geral das AEP. (BOSCH; GASCÓN, 2010).

Nesse processo evolutivo das formas de ensino, e, consequente, implementação mais generalizada das Atividades de Estudo e Pesquisa esbarra-se nas suas limitações.

> Com efeito, dado que as AEP se situam no nível local (do "tema"), não constituem uma ferramenta eficaz para questionar aqueles aspectos da

> epistemologia escolar monumentalista que operam, pelo menos, no nível da disciplina e mais além. Em particular, não permitem a superação do "autismo temático" do professor, que é, na realidade, um "autismo temático" do sistema de ensino de matemática (Chevallard, 2001). Isso se deve ao fato de que muitas vezes as questões que constituem a razão de ser de um OM local encontram-se não apenas além do nível local, mas também além dos níveis regional, setorial e mesmo disciplinar. Além disso, a transição de uma AEP para outra AEP não pode ser funcionalmente "motivada" pela própria AEP. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 80, tradução nossa)[xvi].

Partindo dessas necessidades, em particular, das fragilidades e limitações das Atividades de Estudo e Pesquisa, é que se deu o desenvolvimento da pedagogia dos Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP).

> Até agora consideramos as praxeologias ou organizações didáticas em si mesmas, sem levar em consideração que elas sempre fazem parte de um projeto educacional mais amplo dentro de uma sociedade. Nesse sentido, as atividades de estudo e pesquisa (AEP) são definidas em relação a um projeto educacional que determina os conteúdos de ensino em um programa de estudos que podemos interpretar (ou "redigir") em termos de organizações matemáticas locais ou regionais mais ou menos articulados entre si. Assim, a cada AEP pode ser atribuído o objetivo de reconstruir uma OM local específica, previamente estabelecida por um programa de estudos concreto de um determinado projeto educacional. Portanto, o modelo AEP não nos permite questionar esse nível superior de codeterminação didática em que os projetos educacionais são formulados em termos de conhecimentos previamente determinados ou conhecimentos praxeológicos. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 81, tradução nossa).

Portanto, a pedagogia dos Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) [25] é construída visando suprir as lacunas deixadas pela pedagogia das Atividades de Estudo e Pesquisa, ou seja, questionar e investigar as *condições* e *restrições* provenientes dos níveis superiores de *codeterminação*, aqueles justamente que nos permitem compreender os programas de estudos, os motivos de serem orientados previamente pelos projetos educacionais e pelas políticas públicas. Outro ponto a se destacar, suprido pela pedagogia dos PEP, é a falta de motivação para as questões geratrizes. Como dito anteriormente, nas AEP, as questões geratrizes são previamente construídas pelos professores e atendem as suas necessidades didáticas.

No caso dos PEP, não há necessidade de um professor preparar uma aula para que seus alunos estudem, reconstruam, tornando todos os conceitos, procedimentos e algoritmos de uma Organização Matemática Local (OML). Sendo necessário assim,

---

[25] Para retornar à página 13, *Prólogo*, clique aqui.
Para retornar à página 27, *Q_2: Que aspectos do PQM mobilizar ...*, clique aqui.
Para retornar à página 54, *$R_{3.1}$: Estudar o desenvolvimento histórico ...*, clique aqui.

constituir estudos de uma questão geradora capaz de reconstruir “os principais elementos da OML inicial. Dessa maneira, é gerado um sistema didático que podemos designar como S (X; Y; Q) cujo desenvolvimento deve levar, de alguma forma, a uma resposta final na forma de praxeologia”. (BOSCH, GASCÓN, 2010, p. 81).

A resposta construída para a questão inicial, que podemos denominá-la de questão geratriz Q, é dada simbolicamente pela resposta coração $R^{\heartsuit}$. No caso das AEP, essa resposta almejada é previamente definida e manifesta, ou seja, a resposta procurada já é de certa forma, conhecida pelo professor, pelo sistema escolar, enfim, pela instituição escolar. (BOSCH, GASCÓN, 2010). Tal resposta parcial é representada por $R^{\lozenge}$. Nesse sentido, Chevallard (2009a) define o sistema didático das AEP: $S(X; Y; Q) \hookrightarrow R \approx R^{\lozenge}$. E, inserindo o conceito de meio didático, será descrito por: $[S(X; Y; Q) \curvearrowright M] \hookrightarrow R^{\heartsuit} \approx R^{\lozenge}$.

Sendo assim, como os processos de estudo são previamente determinados, algumas dificuldades aparecerão. As respostas às questões Q, mesmo que veladamente, acabam enfraquecendo-as,

> fazendo-a aparecer como meio e não como o próprio fim do estudo. Na medida em que um programa de estudos é definido ou determinado por um conjunto de “conteúdos” ou conhecimentos a serem ensinados e aprendidos, é difícil que as questões Q que poderiam motivar e justificar a reconstrução desse conhecimento possam atuar como o motor principal do processo didático. Sempre acabará se impondo a lógica do ensino secular mais dedicada a fazer um inventário dos saberes que devem ser estudados (“monumentalismo”) do que questionar o mundo e tentar dar novas respostas aos problemas colocados. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 82, grifo do autor, tradução nossa)[xvii].

Como explicitado no excerto, por se tratar da reconstrução de Organizações Matemáticas Locais; os conteúdos são ensinados um após o outro, atendendo as necessidades didáticas dos professores. Na pedagogia dos *Percurso de Estudos e Pesquisa*, as respostas à questão geratriz são frutos dos estudos do objeto pesquisado. Naturalmente, nesse processo de estudo, algumas respostas prontas serão consultadas e aprendidas, porém, cabe ao estudante ou ao ocupante de X, “avaliar se as respostas são relevantes - o que também difere do costume da escola, onde as respostas fornecidas pelo professor são sempre garantidas pelo próprio professor”. (CHEVALLARD, 2013, p. 170, tradução nossa).

Avaliar a relevância de uma resposta produzida pelo professor, pelo grupo, ou retirada de um livro, requer uma nova postura de todos os envolvidos. Esse cenário foi pensado por Chevallard (2013) para a constituição de um novo paradigma didático, esse contraparadigma, não tem por objetivo fazer com que o seu predecessor desapareça, mas sim, propõe algumas mudanças bem radicais. No sistema didático constante no *Paradigma Visita às Obras*, S (X; Y; ℘), os representantes de X, geralmente, são estudantes até a fase da adolescência. Nesse sentido, no novo paradigma, a mudança proposta é que os esforços didáticos sobre o que sabemos, e mais, sobre como podemos aprender e como aprendemos, deve se dar para toda a sociedade, crianças, jovens e adultos. (CHEVALLARD, 2013).

Outra mudança fundamental é que para aprendermos algo devemos estudá-lo. Comumente, ao se depararem com perguntas sem resposta imediata, os *cidadãos pré-herbartianos*, as abandonam. Os novos cidadãos do *Paradigma Questionamento do Mundo* são denominados de *herbartianos* com *atitudes procognitivas* (CHEVALLARD, 2013)[26], e deles é exigida uma atitude muito diferente, que chamaremos de procognitiva (em um sentido alheio ao uso desta palavra se referindo a uma droga que "reduz o delírio ou a desorientação"), e que nos empurra a nos comportarmos como se o conhecimento estivesse essencialmente para ser descoberto e, ainda, para ser conquistado - ou para ser descoberto e conquistado novamente. Portanto, na interpretação retrocognitiva, conhecer é "conhecer para trás", enquanto na procognitiva, conhecer é "conhecer para frente". (CHEVALLARD, 2013, p. 169 - 170, tradução nossa). Por outro lado, os cidadãos pré-herbartianos são regidos

> pelo quase postulado de que, depois de terminar a escola e a universidade, se não se sabe a resposta a uma pergunta de antemão, é melhor desistir de qualquer pretensão de obter uma resposta sensata. Isso, é claro, se correlaciona com a propensão de se esquivar de perguntas nunca feitas, [...]. (CHEVALLARD, 2013, p. 169-170, tradução nossa)[xviii].

O filósofo alemão Johann Friedrich Herbart (1776-1841), fundador da pedagogia, segundo Chevallard (2013), almejava que as pessoas desenvolvessem um espírito cientista, pondo-se em marcha para construir respostas às perguntas não triviais. Chevallard (2013) nos diz que essa deve ser a postura de qualquer cidadão, incluindo não

[26] Para retornar à página 13, *Prólogo*. Clique aqui.
Para retornar à página 19, R_0*: Constituir um Grupo de Estudos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 21, Q_1*: Como constituir um grupo de estudos* ...? Clique aqui.
Para retornar à página 25, R_0*: Constituir um Grupo de Estudos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 27, Q_2*: Que aspectos do PQM* ..., clique aqui.
Para retornar à página 53, Q_3*: Que discussões iniciais devem ser levadas* ...? clique aqui.
Para retornar à página 88, R_5*: Identificar e descrever modelo dominante*, ..., clique aqui.
Para retornar à página 93, Q_6*: Por que ensinar Z?* Clique aqui.
Para retornar à página 113, R_8*: Dificuldades e erros, sinais, reta numérica* ..., clique aqui.
Para retornar à página 134, $R_{10.2}$*: Metodologia e Procedimentos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 144, $R_{10.2}$*: Metodologia e Procedimentos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 150, $R_{10.2}$*: Metodologia e Procedimentos* ..., clique aqui.

somente os cidadãos do futuro, mas também os atuais, ou seja, a pretensão dessa pedagogia é que todos se tornem ou se convertam em *cidadãos herbartianos* com atitudes *procognitivas*.

Nessa perspectiva, esse novo cidadão, ao se colocar em marcha para construir uma resposta, se deparará com algumas respostas prontas, em seguida, as avaliará, observando sua relevância para os estudos. Terá que lançar mão de algumas ferramentas, geralmente, dadas em algumas obras, livros didáticos, disciplinas entre outras. "É a partir do estudo combinado das respostas "prontas" $R^{\lozenge}$ e das obras O (usadas como ferramentas para estudar as respostas $R^{\lozenge}$ e construir uma resposta $R^{\heartsuit}$) que o processo de encontrar uma resposta coração será colocado em movimento". (CHEVALLARD, 2013, p. 170, grifo do autor, tradução nossa).

Esse movimento de encontrar a resposta coração, a resposta produzida pela pessoa, ou pelo grupo de pessoas, que está tentando resolver o problema, se dará por meio de PEP. Esses estudos podem ocorrer por meio de algumas ferramentas denominadas de dialéticas[27], mobilizadas para descreverem toda produção realizada no percurso, bem como validar e até mesmo auxiliar nos processos de disseminação. Consideraremos aqui três delas, semelhante ao trabalho realizado por Bosch (2018b).

A dialética *Questão/Resposta*[28] nos dará o primeiro detalhamento do processo. Geralmente, essa dialética é explicitada por meio de *mapas de questões e respostas* e, o confronto dos mapas, o estudo das questões que surgiram, as que não surgiram, as justificativas e os motivos para que isso ocorra são passos importantes para a gestão do tempo.

> O caráter dialético das questões e respostas está relacionado às noções de estudo e pesquisa: para abordar uma questão Q, geralmente se busca as respostas prontas $A_i^{\lozenge}$ e tem que estudá-las: isto é, desconstruir e reconstruir para adaptá-las a Q. Este estudo gera novas questões sobre a validade e as limitações de $A_i^{\lozenge}$, sua adequação a Q, as adaptações necessárias, etc. A dialética questão-resposta é aquela que fornece uma prova visível do progresso da investigação e contribui para o que é chamado de cronogênese do processo. (BOSCH, 2018b, p. 4040, tradução nossa)[xix].

[27] Para retornar à página 13, *Prólogo*. Clique aqui.
Para retornar à página 93, *Q_6: Por que ensinar Z?* Clique aqui.
Para retornar à página 111, *R_8:Dificuldades e erros: sinais* ..., clique aqui.
Para retornar à página 134, *$R_{10.2}$: Metodologia e Procedimentos* ..., clique aqui.
[28] Para retornar à página 19, *R_0: Constituir um Grupo de Estudos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 25, *R_1: Convidar professores responsáveis pelos laboratórios* ..., clique aqui.
Para retornar à página 27, *Q_2: Que aspectos do PQM* ..., clique aqui.
Para retornar à página 144, *$R_{10.2}$: Metodologia e Procedimentos* ..., clique aqui.

A segunda dialética, *Mídia/Meio*, auxilia nos estudos da evolução do *meio*, dada pelos processos de validação das respostas parciais, pelo estudante ou grupo de estudantes. As fontes de pesquisa são analisadas e, também, validadas pelos estudantes. Bosch (2018b) afirma que para colocar a dialética *Mídia/Meio* em jogo é fundamental que

> qualquer mensagem da mídia deve ser confrontada com o meio para testar sua validade e coletar elementos críticos que forneçam novas informações. Em certo sentido, as respostas fornecidas pela mídia devem ser integradas ao meio - transformando-se em conhecimento "seguro" - e os elementos do meio devem ser trabalhados para que enviem novas mensagens - para se tornar uma mídia. A evolução do meio pela incorporação de novos objetos e respostas parciais constitui a mesogênese da investigação (a geração do meio). (BOSCH, 2018b, p. 4040 – 4041, tradução nossa)[xx].

A terceira dialética, *Coletivo/Individual*, auxilia nos estudos da geração das diferentes posições tanto dos professores quantos dos estudantes. Segundo Bosch (2018b, p. 4041, tradução nossa) nesta dialética

> os inquiridores X agem em conjunto e em cooperação com Y, enquanto a produção do grupo dependerá também da capacidade de cada membro x e y de contribuir para o projeto. A forma como as responsabilidades são compartilhadas no processo e como cada membro assume diferentes funções é chamada de topogênese do inquérito (a geração de diferentes lugares ou topos para professores e alunos).

Dessa forma, a *cronogênese*, a *mesogênese* e a *topogênese* podem ser mobilizadas como as principais dimensões de uma investigação, alcançando assim, "um esboço do processo de estudo e pesquisa. Sua primeira descrição pode tomar a forma de uma árvore ou arborescência de perguntas derivadas levantadas e respostas parciais obtidas até a elaboração da resposta coração." (BOSCH, 2018b, 4041). Chevallard (2009d) as resume:

> Cronogênese: Gênese do tempo didático, ou seja, o tempo da construção praxeológica. (p. 2).
> Mesogênese: Gênese do meio didático, isto é, do sistema de recursos utilizados no processo de construção praxeológica. (p. 3).
> Topogênese. Gênese dos equipamentos praxeológicos (e relações institucionais associadas) de acordo com as posições do aluno e do professor durante a construção praxeológica. O topos (o lugar, em grego antigo) do aluno (respectivamente do professor) é aquela parte da posição do aluno (respectivamente professor) em relação às entidades praxeológicas construídas ou em processo de construção na sala de aula. (p. 5)[xxi].

Nesse contexto, mobilizamos alguns aspectos dessas dimensões com o grupo de estudos. O objetivo do grupo de estudos foi de construir uma proposta de ensino alternativa às vigentes, utilizando principalmente a dialética *Questão/Resposta*.

Estudamos os inteiros relativos, buscando algumas respostas prontas e parciais, inclusive consultando outros professores mais experientes. Procuramos que todos fossem ativos nas discussões, na definição das novas perguntas, na evolução do meio e nas decisões do grupo. Em nossa pesquisa, de maneira geral, também nos colocamos como cidadãos *herbartianos* com atitudes *procognitivas*, buscamos construir a resposta coração da tese, sendo que, nosso *Percurso de Estudo e Pesquisa* foi retratado por meio de um *mapa de questões e respostas*, descrevendo tanto as ações desenvolvidas no grupo de estudos quanto as provenientes dos demais estudos da tese.

Q_3: QUE DISCUSSÕES INICIAIS DEVEM SER LEVADAS PARA O GRUPO DE PROFESSORES?

Segundo Chevallard (2013, p. 163, tradução nossa), "o antigo paradigma didático ainda florescente em muitas instituições escolares está destinado a dar lugar a um novo paradigma, mesmo em seus inícios". Sendo assim, iniciamos os estudos na busca por compreender o que seria um paradigma didático. Essa escolha foi fruto da constituição do grupo de estudos, pautado no PQM, cujo objetivo foi o de construir uma proposta alternativa àquelas encontradas no Modelo Dominante dos inteiros relativos.

Para Chevallard (2013, p. 163, tradução nossa), "podemos definir um paradigma didático como um conjunto de regras que prescrevem, mesmo implicitamente, o que é estudado - quais podem ser as apostas educacionais *O* - e que formas de as estudar pode haver". Nesse sentido, quando nos inquietamos com a maneira de ensinar os inteiros relativos, nossas angústias devem ir além do ensino dos inteiros relativos, nossos estudos iniciais apontam para uma mudança na forma de se pensar a escola de maneira geral. Porém, em nossa investigação, o nosso recorte será os inteiros relativos, buscando referências nesse novo paradigma de ensino.

Assim, realizamos um exercício anterior aos estudos dos paradigmas, que foi o de compreender a ideia de paradigma. Em uma busca por definições da mobilização desse termo, bem como das implicações históricas e epistemológicas de seu uso, encontramos além da definição dada por Chevallard (2013), a do dicionário filosófico[29] *on-line* que mobiliza por referência Thomas Kuhn em 'The Structure of Scientific Revolutions' (1962). Assim, paradigma é "um conjunto de crenças científicas e metafísicas que constituem um quadro de referência teórico dentro do qual podem ser testadas, avaliadas e, se necessário, revistas teorias científicas". Uma das ideias dos pensamentos de Kuhn, organizadas nesse dicionário, remete ao fato que as mudanças ocorridas nas teorias científicas se dão por movimentos que revolucionam as 'estruturas' de um paradigma, que por consequência são trocadas por outro quadro de referência.

Analisando ambas as definições, compreendemos paradigma como um modelo que embasa, justifica, sendo representativo das ações que os grupos e as pessoas de uma instituição colocam em prática nos mais variados contextos. Em nosso cenário de

---

[29] GREGÓRIO, Sérgio Biagi. Paradigma. ______ (Coord.). Dicionário de Filosofia. Disponível em: https://sites.google.com/view/sbgdicionariodefilosofia/paradigma. Acesso em: 20 nov. 2019.

pesquisa, baseado nos estudos de Chevallard (2013), nos interessamos por investigar as praxeologias postas em prática para que os estudantes alterem suas relações pessoais com o conceito dos inteiros relativos ou que possam vir a ter algum tipo de relação com esse objeto matemático.

Chevallard (2013) se preocupa com os moldes atuais da educação de maneira geral, em que o ensino das obras das mais variadas disciplinas escolares, nas mais diversas etapas de escolaridade, é “apresentado como um monumento com valor em si mesmo, que os estudantes devem admirar e desfrutar, [...] não sabem quase nada sobre suas razões de ser, nem atuais e nem passadas” (CHEVALLARD, 2013, p. 164, tradução nossa).

O exemplo canônico trazido por esse pesquisador é o do visitante de um museu. Nele as pessoas são guiadas a caminhar por corredores, observando e admirando as obras de arte dos mais diversos artistas. Nessa caminhada, são realizados alguns comentários acerca da beleza, da criatividade e de tantos outros aspectos cabíveis aos apreciadores das obras de arte. Com certeza, os mais entendidos, os especialistas em arte, tecem algumas críticas e/ou algumas sugestões, mas tais comentários não alteraram aquela obra, ela está pronta, acabada, o que nos resta é admirá-la ou não. Porém, mesmo se não a consideramos bela, não podemos modificá-la, não há mais possibilidade de interagirmos com o artista e sugerirmos as modificações que nos deixariam felizes.

Esse exemplo do visitante de um museu, o ato de ‘visitar as obras’, é trazido para o contexto educacional, no sentido que, ao ensinarmos, como os inteiros relativos, somos o guia turístico dos nossos estudantes: estamos guiando-os pelos corredores das disciplinas, da história da matemática, dos procedimentos, dos algoritmos em que eles apenas observam, admiram, detestam, esse amontoado de conteúdos matemáticos. Semelhante ao observador da obra de arte, o estudante não é participante, apenas um ‘mero’ visitante, no sentido que a obra está acabada, pronta, as críticas e sugestões não alteraram o resultado final. “Os estudantes são reduzidos a serem meros espectadores, mesmo quando os educadores os incentivam a ‘apreciar’ o puro espetáculo das obras de matemática”. (CHEVALLARD, 2013, p. 164, grifo do autor, tradução nossa)[30].

O *Paradigma Visita às Obras* modeliza algumas praxeologias atuais de ensino, em que o foco está no conteúdo, nas fórmulas, nos procedimentos, algoritmos, sendo o currículo um conjunto de conteúdos. As *razões de ser* não são debatidas, os questionamentos já possuem respostas prontas. Nesse sentido, todos que reproduzirem

[30] Para retornar à página 15, *Prólogo*, clique aqui.

fidedignamente os aspectos do conteúdo ensinados pelo professor serão considerados ‘bons sujeitos’ dessas ‘instituições’. Não há espaço para questões abertas, os corredores a serem visitados, bem como as obras a serem observadas, já estão determinados, há um roteiro de estudos bem definido e planejado. Não há espaço para novos desafios, questionamentos, não há oportunidade de os estudantes construírem seus percursos de estudos, tudo está pré-determinado pelo professor.

Obviamente que estamos descrevendo um novo mundo, um mundo ainda utópico para a realidade brasileira[31], que enfrenta muitos desafios institucionais de cunho político, estrutural e financeiro. Para essa quebra de paradigma, muitas batalhas ainda serão travadas. Porém, cada um de nós pode escrever uma página nessa história, cujo objetivo é uma Educação mais democrática e acessível a todos os cidadãos.

Diante desse contexto, Chevallard (2013) propõe uma mudança de foco; em nossa sociedade atual é necessário questionar os motivos, as *razões de ser*, seus contextos sociais, enfim, questionar o mundo ao nosso redor. Tais mudanças não são óbvias e nem simples de serem realizadas, visto que quando estamos submersos em algo fica difícil enxergar o todo. Mudar a forma de ensino no qual estamos acostumados e vivemos desde nossa infância não é tarefa que se realiza em um dia. Para essa mudança de paradigma, há necessidade de disparadores, necessidade de aprendizados, de estudos, de frustações, de avanços, enfim, um processo árduo.

Na profissão professor, muitos são os desafios a serem encarados, como em meio a uma revolução tecnológica, em que algo criado hoje pode estar ultrapassado em seis meses, lecionar conteúdos matemáticos que façam ‘sentido’ de serem aprendidos está cada vez mais desafiador. Assim, é fundamental pensar em desafios que não sejam enfrentados isoladamente, pois na ‘profissão professor’, os profissionais da educação podem mobilizar-se conjuntamente, em prol de se ter um ‘porto seguro’ para ancorar as tomadas de decisões. Pretendemos assim, em nosso movimento de pesquisa, propiciar um ambiente para essas ideias serem debatidas, por meio dos estudos acerca de uma nova metodologia de ensino, marcada por questionamentos do cidadão que o novo século exige.

[31] Citamos a realidade brasileira por ser a que temos maior contato e estudos, mas acreditamos que em outros países esse novo paradigma ainda não seja possível de ser posto em prática com todos os seus preceitos. Muitas são as restrições dos níveis superiores que impedem a mudança total de paradigmas didáticos, porém, seria preciso aprofundar nossa pesquisa para fazer afirmações mais contundentes sobre o que ocorre fora do Brasil.

Muitas das mudanças em nossa sociedade se dão devido ao advento das novas tecnologias digitais da informação e da comunicação. Pensando, por exemplo, no cenário das profissões, algumas mudaram pouco no século passado, e no atual, com as próprias mudanças na sociedade, novas profissões estão aparecendo e algumas desaparecendo. Nesse novo cenário, o das mudanças repentinas, das atualizações quase que diárias, qual será o papel da educação? Dos professores? Dos conteúdos matemáticos? Obviamente não temos respostas para esses e nem para outros que o leitor está 'concebendo nesse momento', mas queremos propiciar um ambiente para discutirmos, colocarmos em evidências os acertos e, principalmente, os erros detectados há tanto tempo que ainda perduram em alguns atos didáticos.

Todo esse cenário, "pode-se dizer que [é composto] de uma série heterogênea de situações sociais nas quais uma pessoa faz algo - ou até expressa uma intenção de fazê-lo - para que alguém possa 'estudar' - e 'aprender' - algo". (CHEVALLARD, 2013, p. 162, grifo do autor, tradução nossa). Nesse caso, teríamos a seguinte questão didática: "dado um conjunto de restrições K impostas a uma terna didática (x, y, O), que *condições* podem ser criadas ou modificadas - ou seja, que gestos didáticos eles podem fazer - de modo que x estabeleça algum tipo de relacionamento com O?"

Assim, para compreendermos as relações que os estudantes podem ter com os inteiros relativos, fez-se necessário melhor compreendê-los, analisando sua história, sua construção matemática, entre outros aspectos tratados na escrita das respostas $R_{3.1}$ e $R_{3.2}$.

$R_{3.1}$: ESTUDAR O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO DOS INTEIROS RELATIVOS

Os estudos e aprofundamentos sobre o desenvolvimento histórico dos números inteiros relativos são foco de várias pesquisas, por exemplo, Schubring (2005, 2012), Sá e Anjos (2011), Pommer (2010), Queiroz (2006) e Glaeser (1985). Algumas com mais ênfase do que outras, mas, todas buscando descrever o desenvolvimento histórico e epistemológico dos inteiros relativos.

Na perspectiva trazida para a construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa, apresentada na resposta R_2, assim como, nos estudos de Borba (2009), que apresentaremos na seção R_{II}^{Z}- O desenho do Modelo Epistemológico de Referência para Z, propõe-se a necessidade de conhecer os diversos aspectos do conteúdo para realizarmos e construirmos propostas de ensino e de avaliações em prol da aprendizagem dos estudantes. Nesse sentido, é importante compreender como, no decorrer da história, esse conceito se desenvolveu, em que situações foi mobilizado e quais necessidades supriu. Estes foram aspectos norteadores para os estudos nesta tese.

Dentre as várias referências primordiais, destacamos Glaeser (1985) e Schubring (2012), em nossa dissertação. E, neste trabalho de tese, Glaeser (1985) e Caraça (1951). Escolhemos apenas esses dois autores por atenderem melhor aos nossos objetivos. Para mais informações acerca dos estudos de Schubring (2012), indicamos nossa dissertação (GONÇALVES, 2016), na qual os estudos deste pesquisador são apresentados de modo mais detalhado.

Iniciaremos pelo Livro Conceitos Fundamentais da Matemática, no qual Caraça (1951)[32] apresentou os conceitos fundamentais da matemática a partir de contextos históricos, aspectos epistemológicos e filosóficos, dados como base na perspectiva do materialismo histórico-dialético. Tratou de características de outras Ciências, das Religiões, articuladas e sistematizadas com aspectos humanos e da sociedade, além de muitas informações da Cultura em Geral, cujo pano de fundo é a Matemática. Esse livro foi dividido em três partes: Números, Funções e Continuidade. A primeira parte, por sua vez, foi dividida em seis capítulos: *Problema de Contagem*, *Problema de Medida*, *Crítica ao Problema de Medida*, *Um Pouco de História*, *O Campo Real* e *Os Números Relativos*. Nesses capítulos, são apresentados os conjuntos numéricos relacionados a cada um desses tópicos. Por exemplo, o estudo das frações é inspirado no problema clássico das medidas; os números relativos, dados pela mobilização do *Princípio de Extensão* ou das justificativas das regras de sinais da adição e da subtração por meio de um modelo geométrico.

A segunda parte, Funções, foi dividida em quatro capítulos: *Estudo Matemático das Leis Naturais*, *Pequena Digressão Técnica*, *Equações Algébricas* e *Números Complexos* e *Excursão Histórica* e *Filosófica*. Já a terceira parte, Continuidade, foi dividida em três capítulos: *O Método dos Limites*, *Um Novo Instrumento Matemático*: *as Séries* e *O Problema da Continuidade*. Como o foco da tese está nos problemas em torno dos conjuntos numéricos, nos ateremos à parte que trata dos Números. Deixamos algumas referências[33] em que se realiza um trabalho mais detalhado dos estudos de Caraça (1951).

---

[32] Para retornar à página 22, *Q_1:Como constituir um grupo de estudos* ... ?, clique aqui.
Para retornar à página 140, *$R_{10.2}$: Metodologia e Procedimentos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 159, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui

[33] Para mais informações, *c.f* Pommer (2010), Caraça (1951) e Teixeira (2010).

A criação dos números naturais é dada pela necessidade de resolução de algumas perturbações e algumas impossibilidades:

I. A partir da inserção do "zero como dado operatório", se concebe duas "perturbações": impossibilidades, por exemplo, no caso da divisão por zero; e, situações em que as definições dadas não são contempladas, exemplos: a multiplicação por zero ou elevar um número ao expoente zero. Esses dois casos geraram uma falta de sentido, "mas que significado tem, em face a definição de produto, uma multiplicação em que zero seja multiplicador, isto é, uma soma de zero parcelas, cada uma delas igual a *a*? Nenhum! (CARAÇA, 1951, p. 26, grifo do autor). Ou ainda, "em face a definição a^0 não tem significado – não há produtos com nenhum fator. (CARAÇA, 1951, p. 26, grifo do autor).

II. Como as operações inversas "apresentam casos de impossibilidade, por vezes mesmo mais frequentes que os de possibilidade. Aplicações sucessivas do *Princípio de Extensão* levarão a reduzir todas essas impossibilidades; para isso foi preciso criar novos campos numéricos." (CARAÇA, 1951, p. 28). Nesse contexto, o *Princípio de Extensão* forçou a busca por novas definições e, segundo o autor, quando há dois caminhos diferentes que permitem chegar às mesmas respostas, a melhor solução é buscar aquele mais trivial, *Princípio de Economia*.

O início dessa construção é dado por um estudo sobre os processos e os problemas sobre contagem. As contagens são inerentes à vida cotidiana e podem ser mais ou menos desenvolvidas, a depender das necessidades e das relações em grupo. Nesse sentido, a vida social gerou maiores necessidades do conceito de contagem e, na medida que ela se intensificou e sua complexidade foi ampliada, as operações mentais ganharam caráter de mais urgência. Todos esses contextos geraram problemáticas em torno dos processos de contagem: Como contar? Com os dedos? Como registrar? Qual operação mental mobilizada no processo de contagem? O que são correspondências biunívocas? Essas são questões que podem ser criadas com os conceitos atuais, porém, muito desses aspectos permearam a problemática dos processos de contagem no decorrer do seu desenvolvimento e, que por sua vez, foram tratados por Caraça (1951).

Como solução à problemática das contagens foi apresentada a criação dos números naturais, por meio de dois resultados. Primeiro, "A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independente da experiência [...] os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens" (CARAÇA, 1951, p. 4). E, segundo, "as condições da vida econômica [...]; quanto mais intensa é a vida de relação, quanto mais frequentes e ativas são as trocas comerciais dentro e fora da tribo, maior é conhecimento dos números" (CARAÇA, 1951, p. 4).

A criação de um símbolo para o zero também foi um fato muito importante da história da humanidade que permitiu a inserção dos estudos das ideias de correspondência. Tal correspondência se dá pela operação mental ou associação mental desses dois entes, números e os objetos de contagem.

> A correspondência ou associação mental de dois entes [...] exige que haja um *antecedente* (o objeto) e um *consequente* (o número); a maneira pela qual o pensar no *antecedente* desperte o pensar no *consequente* chama-se *lei da correspondência*. (CARAÇA, 1951, p. 7, grifo do autor).

As ideias de correspondência biunívoca, de coleções equivalentes e prevalentes e o conceito do *Princípio de Extensão* também foram primordiais para o desenvolvimento dos números naturais, além dos primeiros aspectos da noção de infinito. Porém, o que seria esse *Princípio de Extensão*? Caraça (1951, p. 10, grifos do autor) explica que quando se verifica

> como um dado real que não pode ser posto de lado, que o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações, pela exploração metódica de todas as suas consequências.

As operações aritméticas fundamentais, adição, subtração, multiplicação e divisão, também foram estudadas. E, a estas foram acrescidas mais três, potenciação, radiciação e a logaritmação, por meio da ideia das operações inversas. A adição é tratada como já conhecida, pois foi mobilizada para determinar a sequência dos números naturais. A multiplicação é definida com a soma de parcelas iguais. E, a potenciação, como a multiplicação de fatores iguais. A esses fatos, Caraça (1951), acrescenta o estudo das propriedades, dos nomes, dos símbolos e dos papéis dos números a serem operados.

Um desafio é lançado: "Em relação a cada uma das operações anteriores, pode pôr-se o seguinte problema: - dado o resultado da operação e um dos dados, determinar o outro dado." (CARAÇA, 1951, p. 20). E, as operações que resolvem esses problemas são denominadas de operações inversas. Esse autor explica que tanto para a adição quanto para a multiplicação deveria haver duas inversas, porém como a propriedade comutativa é válida, suas respectivas inversas são únicas, a subtração e a divisão. Agora, como a potenciação não é comutativa são apresentadas a radiciação, inversa quando dada a potência e o expoente, se determina a base; e a logaritmação, quando dada a potência e a base, e se determina o expoente.

Como já mencionado, as impossibilidades das operações inversas e a consequente aplicação do *Princípio de Extensão* auxiliaram na construção de novos conjuntos numéricos. Assim como os processos de contagem, Caraça (1951) apresenta a tarefa de medir e contar como inerentes ao viver dos seres humanos. Medir significa comparar duas grandezas de mesma espécie, por exemplo, podemos determinar que um segmento de reta é maior, ou menor, do que outro. Ou ainda, pode-se determinar quantas vezes um certo comprimento cabe dentro de outro. Para resolver os problemas de medição, houve necessidade de se criar a ideia de unidade de medida, um valor, a medida, que permite expressar tal comparação.

Nesse sentido, em todo processo de medição, deve-se primeiro escolher a unidade, depois realizar a comparação mobilizando-a e, por último, expressar essa comparação por um número. Tal procedimento parece ser simples, no entanto, alguns cuidados são necessários. Por exemplo, como realizar a medição de um tecido mobilizando a unidade quilômetros? Ou ainda, como medir a distância entre duas cidades mobilizando os centímetros? Na realidade, essas medições são possíveis, porém, se tornariam muito custosas. (CARAÇA, 1951). Aliás, por nossa experiência em sala de aula, muitas atividades de conversão de unidades de medidas seguem esse modelo, ou seja, técnicas para converter uma medida em quilômetros em centímetros e vice-versa.

A escolha e a definição da melhor unidade de medida a ser mobilizada, potencializou a construção das subdivisões da unidade, justamente para que a escolha fosse a mais adequada ao contexto. Porém, um novo problema surgiu: nas subdivisões pode ocorrer o caso em que uma unidade não caiba um número inteiro de vezes dentro de outra. Assim, Caraça (1951) explica que há duas possibilidades. Na primeira, simplesmente, abandona-se a medição com tal subdivisão. Na segunda, pelo *Princípio de Extensão*, reconhece-se que os números naturais acrescidos do zero são insuficientes para realizar essa tarefa em que a impossibilidade é dada pelo fato de uma unidade não caber um número inteiro de vezes dentro de outra, não sendo divisível por outro. (CARAÇA, 1951).

Para resolver essa nova problemática, Caraça (1951) apresenta a construção dos números racionais, em particular os fracionários, exemplo mobilizado por esse autor para mostrar quando um número não é divisível por outro ou quando não cabe um número inteiro de vezes dentro de outro. Para tal, Caraça (1951) apresenta o raciocínio da

Negação da Negação. No caso de um número ser ou não divisível por outro, ou seja, não existe um número que representa o quociente entre eles, a negação da negação seria dizer que existe tal número, que será chamado de fracionário, generalizando, um número racional.

Para a construção desse campo numérico, Caraça (1951) mobilizou o seguinte caminho: "o estudo das suas propriedades – igualdade, desigualdade, operações; só depois disso ficará completo o conhecimento do *campo racional*." (CARAÇA, 1951, p. 38, grifo do autor). O *Princípio da Economia* foi novamente mobilizado, pois buscou-se por "*analogia* de definições com as dadas nos números Naturais; *manutenção* das leis formais das operações. (CARAÇA, 1951, p. 38, grifo do autor). Para o caso das operações, na subtração, semelhantemente, aos números naturais acrescidos do zero, quando o minuendo é menor que o subtraendo, há uma impossibilidade, que será resolvida pela construção dos números relativos, sendo que para as demais operações mantêm todas as propriedades válidas para os inteiros. Segundo o autor, há possibilidade de serem acrescidas novas propriedades, que por sua vez, não devem contrariar as existentes e devem ampliá-las. Para a radiciação e logaritmação as mesmas impossibilidades dos naturais são mantidas.

Na sequência dos acontecimentos históricos e a partir do desenvolvimento das civilizações, a sequência da construção se deu com os naturais construídos a partir da necessidade das contagens, primitivamente para o controle e manutenção de objetos gerais ou quando da evolução da humanidade, em pequenos negócios. Com a evolução dos seres humanos, outras problemáticas surgiram, por exemplo, o cálculo de áreas e de comprimentos, na Grécia e no Egito antigos, cujos povos trataram, à sua maneira, de alguns aspectos da Geometria. As questões de medida, conceitos dos racionais, foram anteriores à necessidade dos números negativos, e mais, eles sequer eram pensados.

Outro fato interessante se deu pela comparação dos segmentos de unidades diferentes, pois quando relacionados, particularmente, como exemplificado por Caraça (1951), alguns casos geravam incomensurabilidade, o exemplo clássico, a incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Essa impossibilidade, gerou a construção de novos números, os irracionais. Dessa forma, os números naturais acrescidos do zero, os racionais e os irracionais dão origem aos números reais.

Para a solução do problema dos racionais e as incomensurabilidades, revelado por Caraça (1951) pela *relação não biunívoca* entre os pontos dos números racionais e os pontos da reta, tal autor propõe um estudo das propriedades: *infinidade, ordenação,* *densidade* e *continuidade*. Para as três primeiras, o autor afirma que, "ainda não encontramos a negação da biunivocidade". (CARAÇA, 1951, p. 57). Portanto, a solução do problema está na continuidade, o autor realiza uma explanação sobre essa noção, apresentando alguns exemplos. Então, a partir da noção de corte e dos estudos de Dedekind, apresenta-se à seguinte conclusão: "o conjunto (R) [racionais] não satisfaz ao axioma da continuidade de Dedekind-Cantor; o conjunto (R) não é contínuo, finalmente, encontramos a razão da não biunivocidade da correspondência $(R) \leftrightarrow (P)$ $[pontos\ da\ reta]$; topamos o motivo íntimo da negação." (CARAÇA, 1951, p. 62). Sendo assim, esse autor define os números reais:

> Chama-se número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer, no conjunto dos racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincide com esse número racional; se não existe tal número, o número real diz-se *irracional*. (CARAÇA, 1951, p. 83).

Outra problemática resolvida pela construção dos reais foi sobre a operação de radiciação ser, em geral, impossível nos racionais. "A $\sqrt[n]{a}$ será aquele número b tal que $b^n = a$. No campo racional, a questão põe-se assim – o número b em geral não existe". (CARAÇA, 1951, p. 84), já no campo dos reais desaparece a problemática da radiciação.

Ainda sobre as operações no campo dos reais surgem alguns novos resultados e outros permanecem, como já havia ocorrido anteriormente para os demais. Mantêm-se as propriedades dos racionais, desaparece a impossibilidade da radiciação, porém para as potenciações é gerada uma impossibilidade, $a^{\sqrt{n}}$, qual seu significado? Nos racionais, algumas igualdades têm significados apenas para alguns valores, agora, nos reais esses significados são para qualquer valor, exemplo, $(\sqrt[n]{a})^n = a$. (CARAÇA, 1951). E, para a subtração continua a impossibilidade, quando o subtraendo é menor que o minuendo, fato que impulsionou a construção dos números relativos. Mais precisamente, ele apresenta os números relativos por meio das grandezas e da necessidade de indicar dois sentidos opostos, além da impossibilidade da subtração, mobilizando novamente o *Princípio da Negação da Negação*.

Nosso objetivo com essa parte da tese não foi resumir os estudos de Caraça (1951) e, sim, de construir um caminho na qual esse autor nos possibilitasse explicitar histórica e epistemologicamente o contexto de construção desses sistemas numéricos, em particular, os inteiros relativos. Na realidade, esse autor mostra muitos outros aspectos epistemológicos, históricos, políticos, filosóficos, entre outros, mas, nos ativemos àqueles relacionados mais diretamente ao nosso objetivo de pesquisa.

A mobilização das grandezas que podem ser tomadas em dois sentidos foi o ponto de partida dos estudos dos números relativos. A partir de alguns exemplos cotidianos tratou-se da mobilização dos sinais indicativos dos sentidos dos movimentos, de um objeto sobre a reta, por exemplo, permitindo identificar suas posições. As mudanças de direção são exploradas para o trabalho do aspecto aritmético desses deslocamentos. Nesse caso, a operação de subtração é mobilizada para se encontrar os resultados de problemas como o do exemplo a seguir:

> Se o ponto móvel tem uma velocidade tal que, em cada segundo, percorre uma unidade de comprimento, sabemos que ao fim, por exemplo, de 5 segundos, ele percorreu 5 unidades [...]. Suponhamos agora que ele muda o sentido do movimento e continua com a mesma velocidade durante mais três segundos. Ao fim desses três segundos, ele estará [...] a uma distância 2 da origem. (CARAÇA, 1951, p. 95 – 96).

Porém, um questionamento é levantado, proveniente das impossibilidades já debatidas, sempre será possível encontrarmos um resultado para essas subtrações? Segundo Caraça (1951, p. 97), "que fazer? Como das outras vezes, impõe-se a criação de um novo campo numérico. [...] O método de criação vai ser o método, já duas vezes experimentado com sucesso, da *negação da negação*." Nesse contexto, os números relativos foram construídos, e o novo elemento incorporado foi os números negativos. Quando, a partir dos naturais, ampliou-se para os racionais, o novo elemento foi a ideia que entre dois racionais há infinitos racionais, a ideia de densidade. E, quando a partir dos racionais, ampliou-se para os reais, a impossibilidade da radiciação foi superada. (CARAÇA, 1951)[34]. Para o campo dos relativos, também é dada a definição de módulo e da ordenação entre esses números, definindo-se outras propriedades estruturais. As operações também receberam um tratamento especial, por exemplo, as adições e as subtrações são unificadas e denominadas de adições algébricas, tratou-se também das regras de sinais para as multiplicações e para as divisões. Por sua vez, para a potenciação, se o expoente é um real positivo, os mesmos resultados do campo dos reais são válidos. Agora, se for negativo, uma nova definição é construída, sempre buscando a manutenção das leis formais anteriores estudadas: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

> O critério é, como sempre, a manutenção das leis formais [...]. Faz-se o seguinte raciocínio: seja qual for o valor que a^{-n} venha a ter, *queremos* que sobre esta potência se opere como se opera no campo real; em particular, deve ser, portanto, $a^n . a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0$. Mas

[34] Para retornar à página 99, *R*$_6$*: Razões de ser: Cotidiano ...*, clique aqui.

> [...] a esta potência fomos já levados a atribuir o significado $a^0 = 1$, donde $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. (CARAÇA, 1951, p. 102).

Dessa forma, segundo Caraça (1951), muitas das impossibilidades já haviam desaparecido com a construção dos números racionais, reais e relativos. A impossibilidade das operações inversas no campo dos naturais foi, assim, resolvida: a da subtração superada por meio da construção dos relativos, a da divisão com os racionais e da radiciação com os reais. Porém, com o campo dos relativos uma nova impossibilidade surgiu, o cálculo de algumas raízes negativas, ou seja, se "o índice do radical sendo par, o radicando é negativo; com efeito, $\sqrt[2k]{-a}$ seria aquele número x tal que $x^{2k} = -a$, e não existe número *x* que satisfaça a esta igualdade." (CARAÇA, 1951, p. 103). Assim, o campo dos relativos é concluído abrindo a possibilidade de construção de um novo campo numérico, porém, segundo o autor até àquela altura dos estudos ainda não seríamos capazes de fazê-lo, necessitando de outros conteúdos, que por sua vez, foram apresentados na sequência e que não fazem parte dos nossos objetivos.

Toda a construção realizada por Caraça (1951) até chegar aos números relativos, dada a partir dos números naturais, pode se dar por meio da identificação da relação de equivalência e dos métodos axiomáticos, ou pela redescoberta investigativa dada pela gênese histórica, ou ainda pelas necessidades humanas de resolver algumas problemáticas advindas do seu cotidiano. Alguns desses aspectos foram tratados por Caraça (1951) e outros fomos buscar em Glaeser (1985)[35], no artigo "Epistemologia dos Números Relativos", que originalmente é datado de 1981, publicado na 'Recherches en didactique des mathématiques'. Mobilizaremos a versão publicada em 1985, pelo Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM), traduzido por Laura Tinoco.

Para desenvolver seus estudos sobre dificuldades com os inteiros relativos, Glaeser (1985) mobilizou algumas fontes deixadas por matemáticos em épocas variadas da nossa história: Diofantes, Simon Stevin, Descartes, MacLaurin, Euler, d´Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy e Hankel. Assim, ele apresentou um estudo minucioso sobre os inteiros relativos, abordando questões históricas e de ensino, propondo, principalmente, a descrição de alguns obstáculos epistemológicos vivenciados pelos matemáticos durante a história: *inaptidão para manipular quantidades isoladas*; *dificuldade em dar um sentido*

---

[35] Para retornar à página 89, R_5: *Identificar e descrever modelo dominante*, ..., clique aqui.
Para retornar à página 110, R_8:*Dificuldades e erros: sinais* ..., clique aqui.
Para retornar à página 160, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.
Para retornar à página 188, R_{II}^{Z}: *O desenho do MER para Z*, clique aqui.
Para retornar à página 199, R_{II}^{Z}: *O desenho do MER para Z*, clique aqui.

a quantidades negativas isoladas; *dificuldade em unificar a reta numérica*; *ambiguidade de dois zeros*; *estagnação no estágio das operações concretas* e *desejo de um modelo unificador*. Esta lista, por si só, já seria significativa na discussão do tema.

Glaeser (1985, p. 41) analisou a compreensão dos matemáticos citados anteriormente acerca dos inteiros relativos, pois, "ainda que manipulassem os números relativos com uma engenhosidade digna de admiração, enquanto todos os obstáculos não foram vencidos, subsistiram vastas áreas de incompreensão", este autor construiu um quadro no qual indicou a superação de um obstáculo, pelos matemáticos investigados, por meio do sinal de "+", e a não superação com um sinal de "–". Havia também a marcação com um sinal "?", representativo da falta de evidências ou informações para determinar se o obstáculo em questão foi ou não superado por aquele matemático.

OBSTÁCULOS / AUTORES	1	2	3	4	5	6
DIOFANTES	—					
SIMON STEVIN	+	—	—	—	—	—
RENÉ DESCARTES	+	?	—	?		
COLIN MACLAURIN	+	+	—	—	+	+
LÉONARD EULER	+	+	+	?	—	—
JEAN D'ALEMBERT	+	-	—	—	—	—
LAZARE CARNOT	+	-	—	—	—	—
PIERRE DE LAPLACE	+	+	+	?	—	?
AUGUSTIN CAUCHY	+	+	—	—	+	?
HERMAN HANKEL	+	+	+	+	+	+

Figura 3- Relação entre obstáculos epistemológicos e sua superação
Fonte: Glaeser (1985, p. 43)

Matemáticos como Descartes, Euller, D'Alembert e Cauchy superaram apenas alguns deles, sendo que, apenas Hankel foi capaz de superar todos. Glaeser (1985) afirma que os trabalhos realizados por Hankel consistiram "em abordar o problema de uma perspectiva totalmente diversa. Não se tratava mais de extrair da natureza exemplos práticos que 'expliquem' os números relativos de modo metafórico. Tais números não são mais descobertos, mas inventados, imaginados". (GLAESER, 1985, p. 105, grifo do autor). Como já relatado no trabalho realizado por Caraça (1951), Hankel mobilizou contextos internos à própria matemática para formalizar os números complexos e, também, os números inteiros relativos.

Hillesheim e Moretti (2016), estabelecendo comparações com outros matemáticos, explicam que Hankel usou uma abordagem diferente para os números relativos. Segundo esses autores, Laplace "acreditava na existência de uma explicação para a multiplicação dos relativos na natureza, [por sua vez, Hankel] aborda a questão numa outra dimensão, os números não são descobertos, são imaginados e a regra de sinais é pura invenção da mente humana, uma convenção". (HILLESHEIM, MORETTI, 2016, p. 233).

Outro matemático famoso em que Hillesheim e Moretti (2016) estabeleceram comparação foi Leonardo Euler (1707-1783). Ele se mostrou incomodado sobre a existência das regras de sinais dos inteiros relativos, dedicando algumas páginas de sua obra 'Elementos da Álgebra' a elas. Encontramos em Glaeser (1985) a descrição realizada por Euller:

> A intenção pedagógica o fez sentir-se obrigado a fornecer explicações, tentando, especificamente, justificar a regra dos sinais. Sua argumentação pode ser dividida em três partes:
> 1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma dívida de 3a escudos'. Logo b × (– a) = – ab. Observa-se, neste exemplo, que a multiplicação é uma operação externa. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.
> 2. Por comutatividade, Euler deduz daí que (– a) × b = – ab.
> Argumento sem valor para uma lei externa. Que significa (– 3) ganhos de a escudos?
> 3. Resta determinar o que é (grifo nosso) o produto (– a) pelo (– b). É claro, diz Euler, que o valor absoluto é ab. Trata-se, portanto de decidir entre + ab e – ab. Como (– a) × b já vale – ab, a única possibilidade restante é de que (– a) × (– b) = + ab. (EULER, apud GLAESER, 1985, p. 64, grifos do autor).

Os textos analisados desses dois matemáticos datam de 1867, Hankel e Euller, 1770, tendo, portanto, uma diferença de aproximadamente 100 anos. Entretanto, este desenvolvimento não durou apenas 100 anos, perdurou por 1 500 anos.

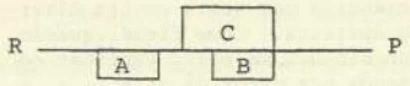
> A introdução conceitual dos números relativos foi um processo surpreendentemente lento. Durou mais de 1 500 anos, da época de Diofantes aos nossos dias! Durante todo esse tempo, os matemáticos trabalharam com números relativos, tendo deles apenas uma compreensão parcial, com espantosas lacunas. (GLAESER, 1985, p. 35, grifo do autor).

De posse dessas informações, como os professores podem mobilizá-las em prol da aprendizagem dos seus estudantes? Não queremos estabelecer uma relação direta entre história e a aprendizagem em que as dificuldades enfrentadas pelos matemáticos serão as mesmas para os estudantes. No entanto, os professores devem estar atentos que algumas atividades desenvolvidas podem reproduzir cenários propícios a recriação desses obstáculos. Se compreendermos tais fenômenos, podemos pensar em ações mais efetivas ou pelo menos teremos consciência das dificuldades que enfrentaremos nos processos de ensino.

Glaeser (1985) retrata uma situação similar a essa, ao relatar as análises dos estudos de Hans Freudenthal (1973) e Piaget. Nessa comparação é citada a falta de um tratamento mais específico à regra de sinais por parte de Freudenthal, mesmo dedicando-se ao estudo da aprendizagem dos inteiros negativos. A justificativa dada para esse fato é relativa à análise de situação do seu cotidiano. Nesse período, segundo Glaeser (1985), nenhum matemático tinha se dedicado às dificuldades com o ensino dessas regras de sinal. Por outro lado, Piaget é citado como exemplo de uma compreensão mais aprofundada, mesmo se baseando em sua didática ou filosofia pessoal, as dificuldades em relação aos inteiros relativos foram alvo de seus estudos. "Limita-se a afirmar que a <u>única</u> dificuldade se prenderia ao caráter fixo do número, como se concebia então. Tal obstáculo desapareceria, para Piaget, ao se entender que um número simboliza <u>uma ação</u>, não <u>um estado</u>". (GLAESER, 1985, p. 35, grifo do autor).

Nesse caso, Piaget concebe a ideia de aspecto dinâmico do número inteiro negativo, todavia, outras características lhe escapam, como a questão da ambiguidade dos zeros. O zero absoluto foi algo que impediu uma compreensão da ideia de origem. A determinação de velocidade negativa, a construção de uma escala termométrica sem valores para as temperaturas negativas são exemplos da dificuldade encontrada por alguns pesquisadores e matemáticos, por ainda apresentarem lacunas de compreensão em relação aos números inteiros negativos.

Vejamos o exemplo da vida de Henri Brulard (STENDHAL, 1835), autobiografia de Henri Beyle ou como mais conhecido, Stendhal (1783 – 1843). Uma das histórias relatadas conta sua aventura na intenção de compreender melhor as regras de sinais dos números inteiros relativos. Ao indagar dois professores sobre os motivos de 'menos' vezes 'menos' resultar em 'mais', eles não lhe apresentaram respostas convincentes, dizendo, por exemplo, "Euler e Lagrange, que aparentemente valiam tanto quanto o senhor, admitiam-na muito bem". (GLAESER, 1985, p. 45). Aparentemente, tanto Stendhal quanto ambos os professores se esbarravam nos obstáculos 4 e 5, *ambiguidade dos dois zeros e estagnação no estágio das operações concretas*. Dois exemplos:



Suponhamos que RP seja a linha que separa o positivo do negativo, tudo que está em cima é positivo, como negativo é tudo que está em baixo; tomando o quadrado B tantas vezes quantas são as unidades no quadrado A, como posso fazer o quadrado C mudar de lado ?

E, fazendo uma comparação desajeitada, que o sotaque arrastado de Grenoble do Sr. Chabert tornava ainda mais desajeitada, suponhamos que as quantidades negativas são as dívidas de um homem. Multiplicando-se 10.000 francos de dívida por 500 francos, como esse homem possuirá, ou conseguirá obter, uma fortuna de 5.000.000 ?"

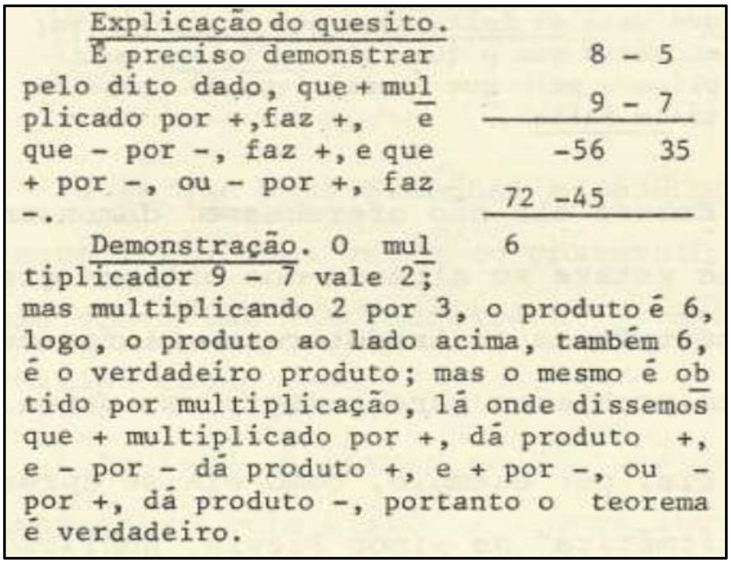
Figura 4- Exemplos de atividades apresentadas por Stendhal (1895)
Fonte: Glaeser (1985, p. 44)

Esses problemas podem se repetir nas salas de aula da atualidade muito mais frequentemente do que imaginamos. Não queremos dizer que os obstáculos observados no decorrer da história são tal e qual replicados, mas algumas atividades, conduzidas por algumas metodologias de ensino podem propiciar um ambiente em que certos aspectos desses obstáculos podem ser observados, principalmente, quando se trata dos modelos concretos e das metodologias mais tradicionais.

Os números inteiros negativos tiveram sua formalização completa, a partir da compreensão das ideias de que foram construídos, inventados pelos matemáticos para resolver seus problemas, principalmente, das equações. Enquanto se procurava explicações em seu cotidiano, os obstáculos descritos por Glaeser (1985) não foram superados. Nesse sentido, quais serão os efeitos na aprendizagem dos estudantes, se nossa abordagem inicial estiver ‘ancorada’ apenas em situações do cotidiano, como temperatura, ideia monetária, altitudes, entre outros modelos mobilizados para se introduzir as ideias dos inteiros relativos?

O desenvolvimento histórico pode nos ajudar a responder essas perguntas, pois podemos evitar atividades, como dito anteriormente, facilitadoras da reprodução de contextos propícios aos aspectos desses obstáculos. Pode-se construir atividades que permitam, por parte dos estudantes, compreender melhor como se deu a história dos inteiros relativos, as *razões de ser* estudadas naquele momento de sua vida acadêmica, entre outros aspectos que discutiremos no decorrer da pesquisa.

Alguns matemáticos mobilizaram as regras de sinais como ação transitória para obter resultados tidos como verdadeiros em seus trabalhos. Vejamos o exemplo de Simon Stevin (1634).



Explicação do quesito.

É preciso demonstrar pelo dito dado, que + multiplicado por +, faz +, e que − por −, faz +, e que + por −, ou − por +, faz −.

Demonstração. O multiplicador 9 − 7 vale 2; mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6, logo, o produto ao lado acima, também 6, é o verdadeiro produto; mas o mesmo é obtido por multiplicação, lá onde dissemos que + multiplicado por +, dá produto +, e − por − dá produto +, e + por −, ou − por +, dá produto −, portanto o teorema é verdadeiro.

$$\begin{array}{rr} 8 & -\ 5 \\ 9 & -\ 7 \\ \hline -56 & 35 \\ 72 & -45 \\ \hline 6 & \end{array}$$

Figura 5- Demonstração de Simon Stevin (1634) para a regra de sinais
Fonte: Glaeser (1985, p. 44)

Essa demonstração, realizada por Stevin, não pode ser generalizada, apenas uma constatação dada por exemplos numéricos. Porém, a partir daí, outros matemáticos começaram a usar os ‘falsos números’ para obter soluções verdadeiras, números positivos. Realizando um comparativo com os dias atuais, se os estudantes mobilizam as regras sem compreendê-las, sem entender as justificativas, apenas pelo motivo de seus professores terem os ensinado, os objetivos são diferentes, mas o contexto criado nessas salas de aula é bem similar ao vivido por esses matemáticos. Temos um agravante, a depender das atividades introdutórias, os estudantes podem ter grandes dificuldades em construir a ideia de número inteiro negativo, tendo a compreensão de um conjunto de procedimento para resolver seus problemas.

Glaeser (1985, p. 50) afirma que “a prática ‘clandestina’ do cálculo dos números relativos antecedeu em 1600 anos sua compreensão. Eis uma lição que a didática da Matemática jamais deveria esquecer!”. Nesse sentido, a lição está no fato de usarmos regras e procedimentos sem a preocupação de mostrar os motivos de sua validade: em termos da TAD, apresentar o discurso *tecnológico-teórico* das tarefas matemáticas. Em muitas propostas, como analisamos em nossa dissertação (GONÇALVES, 2016), esse discurso não está presente ou esse discurso não é de cunho matemático, e sim, de criações didáticas derivadas das situações cotidianas.

Alguns estudantes não escrevem o sinal de menos ao resolverem as operações com inteiros relativos. Na história, os matemáticos que procederam dessa forma, manifestaram o que Glaeser (1985) chamou de “sintoma de evitação”. Atualmente, nas salas de aula, quais seriam os motivos para esse fato? Como já mencionado, não queremos classificar as dificuldades dos estudantes em obstáculos epistemológicos ou didáticos, mas pensar em possibilidades de como o estudo do desenvolvimento histórico dos inteiros relativos pode auxiliar na construção de uma proposta de ensino com atividades que não gerem mais dificuldades, além daquelas já próprias desses números e desnecessárias à aprendizagem dos estudantes.

Nessa perspectiva, quando um estudante não 'coloca' o sinal de menos', uma das justificativas, claramente, não tem relação com o "sintoma de evitação", porém, pode ser atribuída à não construção da ideia de número inteiro negativo. Cito um exemplo ocorrido comigo. *Ao iniciar a antiga 7ª série (8º ano atual), indaguei minha nova professora de matemática se os números com sinais deveriam ser usados nesse novo ano ou era um conteúdo apenas da 6ª série (7º ano). Eu tinha realizado todos os procedimentos, algoritmos, estudado as ideias dos inteiros sem o zero, só os positivos, os inteiros negativos, mas, eu não tinha o conceito de número inteiro negativo bem definido.* O estudo do desenvolvimento histórico, por parte dos professores, pode auxiliar em situações como essa que relato. Agora, o estudo desse desenvolvimento, por parte dos estudantes, pode auxiliar em outros aspectos, inclusive de contextualização para a parte introdutória. Não adentraremos nessa seara, pois não é um dos nossos objetivos.

O "sintoma de evitação" pode ser observado nos estudos de outros matemáticos, por exemplo, Fermat (1891), "fez com que seu amigo Jacques de Billy (Fermat 1891) redigisse conselhos sobre o comportamento a adotar diante de uma raiz <u>falsa</u> em uma equação diofantina. Ele propôs um método para obter dela, em alguns casos, uma solução <u>aceitável</u>" (GLAESER, 1985, p. 54 – 55, grifo do autor).

O exemplo de René Descartes (1596 - 1650) também é muito interessante, pois é atribuída a ele a criação do sistema de coordenadas cartesianas. "Na verdade, ele jamais utilizou um eixo sobre o qual a abscissa de um ponto varia de $-\infty$ a $+\infty$. Simplesmente ele considerou separadamente duas semirretas opostas, sabendo que as linhas negativas devem se dirigir em sentido oposto ao das linhas positivas". (GLAESER, 1985, p. 56).

Glaeser (1985) nos apresenta outros célebres matemáticos da história que se embaraçaram com um ou mais obstáculos epistemológicos. Poderíamos citar: Jacques Ozanan (1691) e sua incompreensão dos inteiros ao mencioná-los como números e como raiz falsa de uma equação; Colin MacLaurin (1742), confundido e preso aos obstáculos, dificuldade em unificar a reta e ambiguidade dos dois zeros; Euller (1770), também enlaçado ao obstáculo de unificação da reta; Gabriel Cramer, contemporâneo de Euller e suas dificuldades e incoerências de linguagem; D'Alembert (1717 – 1783) e Carnot (1753

– 1823) “que não hesitaram em ostentar sua incompreensão sem a menor inibição” (GLAESER, 1985, p. 72, 73); “Os problemas com a reta numérica, significações do zero” (GLAESER, 1985, p. 89); As unidades e os números Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827), Duhamel (1866), Augustin Cauchy (1789 – 1857), confusão entre as ideias dos sinais de ‘+’ e de ‘–’, operatórios e predicativos, entre outros autores.

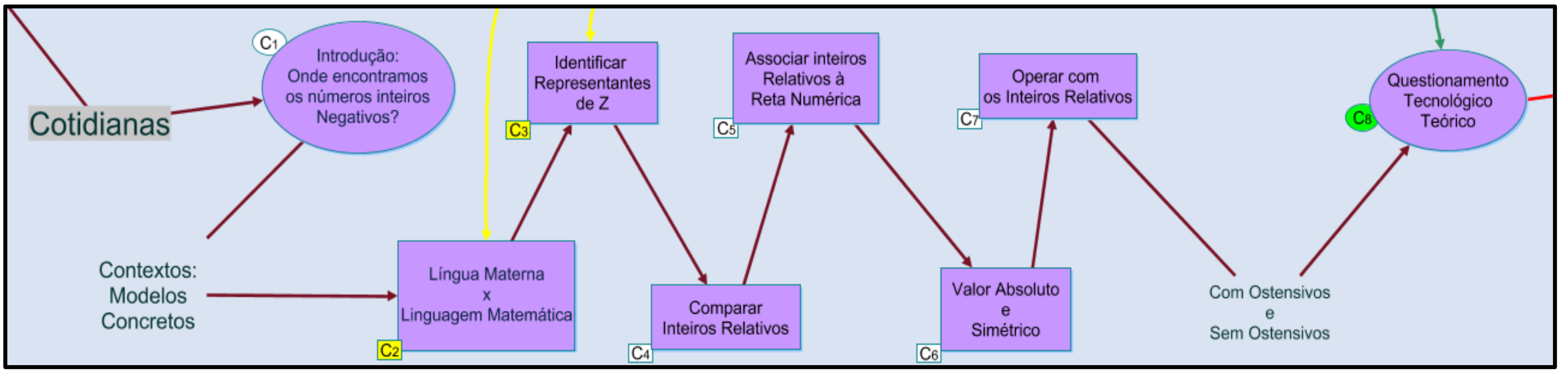
Nosso objetivo não era de esgotar ou de ampliar os estudos de Glaeser (1985) e, sim, apresentar algumas reflexões para a importância do desenvolvimento histórico dos inteiros relativos. Como último exemplo, para ‘fecharmos’ esta escrita, citamos os problemas com os significados dos sinais de ‘+’ e de ‘–’, muito caro à aprendizagem dos estudantes: interpretar se o significado é de oposto, de operação ou que representa uma quantidade negativa pode gerar muitas dificuldades de aprendizagem. Como a *razão de ser* dos inteiros relativos é dada em um contexto algébrico, como observado em seu desenvolvimento histórico, buscamos pesquisas que apresentassem uma introdução dos números inteiros relativos também em contextos algébricos.

R3.2: ESTUDAR PROPOSTAS DE ENSINO E GÊNESES ESCOLARES PARA OS INTEIROS RELATIVOS

Na busca por problematizar o ensino dos inteiros relativos, realizamos estudos de algumas pesquisas, (CID, 2002; CID; BOLEA, 2010; CHEVALLARD, 2013; CID, 2015, GONÇALVES, 2016; GONÇALVES; BITTAR, 2017), que apontaram para a falência do modelo vigente em nossas escolas. Nesse sentido, pretendemos promover uma discussão acerca das principais 'fragilidades' desse *Modelo Dominante*, apontando uma forma alternativa de abordar esse tema. Ressaltamos que não queremos propor uma nova forma de ensino, propor algo que rompa totalmente com o que é feito, mas sim, propor um tipo de abordagem 'mista'. E, assim, por meio da discussão dessa proposta alternativa (de ensino via contextos internos à matemática), refletir sobre o *Modelo Dominante* e resultados de pesquisas.

Um fazer pedagógico cristalizado associado às jornadas excessivas de trabalho podem favorecer a criação de "hábitos" em que as práticas não são mais questionadas. Tais processos, por estarem contidos nos *Modelos Dominantes* vigentes, 'parecem' livres de qualquer avaliação. Nesse sentido, propusemos, neste trabalho de tese, levantar questionamentos e reflexões que pudessem movimentar e instigar os professores a perceberem alguns aspectos do Modelo em que estão inseridos, aspectos que auxiliem na emancipação desse Modelo e para construirmos uma proposta de ensino para os inteiros relativos.

Para a continuação da escrita, descrevemos nossas ações por meio de um Diagrama de Ações (neste link há explicações mais detalhadas sobre o Diagrama), que juntamente com o *mapa de questões e respostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada ação será identificado por "**X_n**" e o final por **"X_n – Fim"**. Apresentamos o contexto concreto/cotidiano (C).



C_1 – Onde encontramos os inteiros negativos?

Nesta ação, buscamos algumas pesquisas que nos permitissem determinar aspectos do *Modelo Dominante* dos inteiros relativos. Assim, o *Modelo Dominante* de ensino descrito por Cid (2015)[36] e, parcialmente, por Gonçalves (2016), está pautado na mobilização de modelos do cotidiano em geral, que auxiliam no seu ensino, consequentemente, são os contextos do ensino atual onde encontramos os inteiros relativos. Esse suposto auxílio pode ser justificado pelo fato de que é comum os professores do ensino médio, por exemplo, 'reclamarem' que os seus estudantes erram com maior frequência quando o sinal de menos está presente nos problemas propostos. Outra situação é o 'abandono' das soluções negativas das equações: os estudantes "geralmente só levam em consideração o domínio positivo das variáveis e tendem a identificar o termo 'número' como 'número positivo', e mesmo com 'número natural'". (CID, 2015, p. 1, grifo do autor, tradução nossa). Além disso, para 'solucionar' as dificuldades de aprendizagem, alguns autores tendem a concentrar-se "na busca de um bom modelo introdutório concreto dos números negativos, [...] [para em seguida construir] um novo modelo concreto, ou uma nova versão de um já conhecido, garantindo que seu uso resolva essas dificuldades". (CID, 2015, p. 1, 2, tradução nossa).

Os autores que mobilizaram esses modelos concretos afirmam que eles são "capazes de estimular o interesse e a atividade do aluno, pois são familiares e, aparentemente, possuem um grau de abstração adequado à sua idade". (CID, 2015, p.2, tradução nossa). Assim, uma suposta familiaridade com esses modelos, por parte dos estudantes, é a garantia que eles poderão "entender e aceitar suas regras de operação e, posteriormente, por analogia, estendê-las ao campo de números positivos e negativos. Assim, [...] permite [...] dar sentido aos números negativos e suas regras de cálculo e, [...] serve como apoio à reconstrução dessas regras". (CID, 2015, p. 2, tradução nossa).

Outro fator a ser considerado trata do conceito de obstáculo epistemológico. O estudo mais aprofundado dos conceitos a serem ensinados pode propiciar um maior entendimento se os erros mais cometidos estão ou não, ligados a uma determinada concepção conhecida. Cid (2015, p. 15, tradução nossa) afirma que "se a concepção não

---

[36] Para retornar à página 89, R_5: *Identificar e descrever Modelo Dominante ...*, clique aqui.
Para retornar à página 161, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.
Para retornar à página 165, R_{II}^{Z}: *Desenho do Modelo Epistemológico de Referência ...*, clique aqui.
Para retornar à página 204, R_{IV}^{Z}: *Desenho da proposta de ensino para Z*, clique aqui.

é um obstáculo[37], o trabalho do professor deve se concentrar em apresentar situações de ensino que favoreçam sua evolução, enquanto, se for, será necessário atacar essa concepção até que o aluno a rejeite".

Gonçalves (2016) mostra que as propostas presentes em um livro didático favorecem a aparição de possíveis equívocos nas aprendizagens, fato que nos permite inferir que essas dificuldades são provenientes das escolhas didáticas do professor, ou seja, dificuldades de aprendizagem de cunho didático. Um exemplo é quando se mobiliza as ideias do sistema monetário para que os alunos identifiquem quantidades positivas e negativas, bem como para as adições algébricas, as multiplicações e as divisões. Quando adicionamos duas quantidades positivas, o resultado é positivo, porém, quando multiplicamos duas quantidades negativas, pensando no sistema monetário, a interpretação se daria no contexto que a multiplicação de duas dívidas gera um valor positivo.

Inferimos que, diferente de outras definições e pelo fato de um obstáculo ser um conhecimento ao invés da sua falta, a motivação do abandono desse conhecimento antigo – que auxiliou na resolução de muitas tarefas até o momento da aprendizagem desse novo aspecto do conceito ou, simplesmente, de um outro conhecimento – deve ser guiada por resoluções de situações em que o aluno não pode resolvê-las mobilizando-o, ou seja, situações em que esse conhecimento 'antigo' será inteiramente ineficaz.

Sendo assim, os procedimentos, habituais nas práticas de ensino – que grande parte delas tivemos acesso por meio das leituras e da escrita da nossa dissertação –, devem ser 'renovadas' no sentido de que se construa novas proposições de ensino, que vão além da modificação de aspectos tidos como superficiais, nas quais o conhecimento aprendido é bem-sucedido.

Por outro lado, Brousseau (1989, p. 2, tradução nossa) propõe que nos atentemos ao chamado 'salto informacional[38]', isto é, "modificações bruscas das variáveis didáticas

---

[37] Brousseau (1989) define obstáculo por meio de cinco condições: i) Um obstáculo será um conhecimento, uma concepção, não uma dificuldade ou falta de conhecimento; ii) Esse conhecimento produz respostas adaptadas em um determinado contexto, frequentemente encontradas; iii) Mas gera respostas falsas fora deste contexto. Uma resposta correta e universal requer um ponto de vista significativamente diferente; iv) Além disso, esse conhecimento resiste às contradições que enfrenta e ao estabelecimento de um melhor conhecimento. Não basta ter um melhor conhecimento para que o anterior desapareça (o que distingue a passagem de obstáculos da acomodação de Piaget). Portanto, é essencial identificá-lo e incorporar sua rejeição no novo conhecimento; v) Depois de tomar consciência de sua imprecisão, continua aparecendo prematuramente e obstinado. (BROUSSEAU, 1989, p. 2, tradução nossa).

[38] Uma mudança significativa nos valores assumidos por certas variáveis, é chamada salto informacional, e pode levar a uma mudança qualitativa nas estratégias pertinentes para resolver o problema. A

que implicam uma modificação qualitativa do conhecimento necessário para se adaptar à nova situação".

No quadro, apresentamos um resumo com os principais elementos do Modelo Dominante.

Quadro 4– Principais elementos do Modelo Dominante

Principais Elementos	Resumo
Modelos introdutórios	Estimulam interesse, proporcionam familiaridade, propostos para resolver as dificuldades de ensino, construção dada para contemplar os conhecimentos prévios dos estudantes.
Dificuldades de aprendizagem	Presença do sinal de menos, abandono de soluções negativas, identificação apenas de números como positivos ou naturais, ideia de medida.
Criações Didáticas	Analogias, aceitação das regras e resolução das dificuldades de aprendizagem.
Modelos concretos	Deslocamento e Neutralização: baralhos, saldo de gols, temperaturas, sistema monetário, altitudes, entre outros. Bons para o trabalho introdutório e o trabalho com as operações de adição e subtração. Acarretam mais dificuldades para as operações de multiplicação e divisão, bem como para os estudos de ordem.

Fonte: Elaborado pelo autor

Discorremos até aqui sobre alguns elementos importantes da resposta $R_{3.2}$, consequentemente, do *Modelo Dominante* dos inteiros relativos. Assim, para além desse estudo, discutimos, aprofundamos e refletimos sobre outros dos seus aspectos fundamentais, gerando assim, um novo questionamento, a questão Q_4, marcando nosso retorno ao ramo do *mapa de questões e respostas* do grupo de estudos. **C1 – Fim**[39]**.**

determinação dessas variáveis e o "valor" do salto a ser efetuado para potencializar a aprendizagem são pontos marcantes na construção das situações. Uma primeira escolha da(s) variável(eis) e os valores a serem assumidos por elas pode servir à devolução do problema e ao encaminhamento de uma estratégia básica. Novas escolhas se farão necessárias (tanto de valores das mesmas variáveis já em jogo como de outras variáveis) para o desenvolvimento da situação adidática pretendida. (ALMOLOUD, 1989, p. 36 – 37).

[39] Para ir à C_2 – *Início*, clique aqui.
Para retornar à página 97, Q_6: *Por que ensinar Z?* Clique aqui.

Q_4: COMO ENSINAR OS INTEIROS RELATIVOS CONSIDERANDO O QUE DIZEM AS PESQUISAS?

Para a elaborar a resposta à questão Q_4, além dos estudos e das análises de questões históricas e epistemológicas, investigamos algumas propostas de ensino com objetivo de organizar pensamentos sobre a elaboração de uma proposta alternativa às propostas vigentes dos números inteiros relativos.

Dentre outros textos, mobilizamos a tese de Eva Cid Castro que trata dos 'Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos'. (CID, 2015). Nosso foco em tal pesquisa se deu por nela encontrarmos uma proposta estruturada em contextos algébricos, alternativo às dificuldades dada pelo ensino via modelos concretos, encontradas em seu *Modelo Dominante*. Nesse sentido, a busca por elementos que nos auxiliassem a comparação de ambas as abordagens, via modelos concretos e via modelo algébrico, foi o foco para construirmos elementos de respostas à Q_4, descrito por meio da resposta R_4.

R_4: COMPARAR O ENSINO DOS INTEIROS RELATIVOS POR MEIO DOS MODELOS CONCRETOS COM O ENSINO POR MEIO DO MODELO ALGÉBRICO

Iniciamos a construção da Resposta R_4, descrevendo algumas ideias importantes sobre a pesquisa 'Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos'. (CID, 2015)[40]. Este estudo trata de um problema de ensino dado pela dificuldade que os professores encontram no ensino dos números inteiros negativos, buscando usá-los corretamente tantos nos cálculos matemáticos quanto em outras atividades e raciocínios. Há um trabalho inicial de revisão bibliográfica que busca algumas contribuições desse tema, na tentativa de determinar e categorizar os erros e dificuldades dos estudantes, bem como da apresentação de novas propostas de ensino.

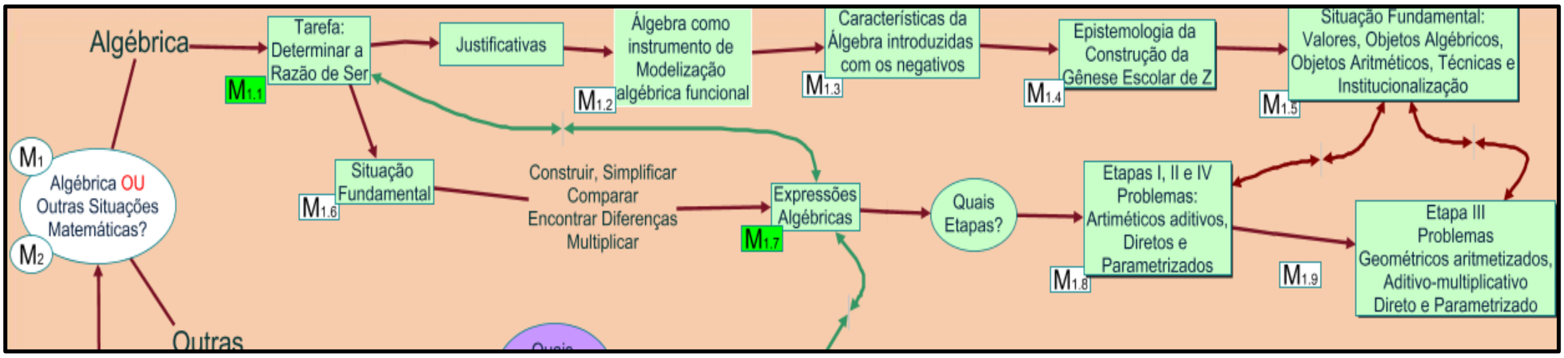
Segundo a pesquisadora, as propostas apresentadas têm por objetivo uma procura por 'bons modelos concretos', introdutórios aos estudos dos números negativos. Ela também encontrou propostas em que seus autores buscaram retratar a história dos números negativos, passando pelo seu surgimento ao longo dos séculos, concepções que dificultaram sua aceitação pelos matemáticos e a existência, identificação de obstáculos epistemológicos ao longo do tempo e no atual ensino.

---

[40] Para retornar à página 135, $R_{10.2}$: *Metodologia e Procedimentos da pesquisa*, clique aqui.
Para retornar à página 136, $R_{10.2}$: *Metodologia e Procedimentos da pesquisa*, ..., clique aqui.

O seu movimento de pesquisa buscou construir um problema didático em torno das considerações sobre a existência dos obstáculos epistemológicos, bem como as formas que influenciaram os processos de ensino. Mobilizou-se como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1999), como tentativa de se construir uma gênese escolar do número negativo que pudesse tratar e evitar o surgimento dos obstáculos didáticos, na busca por permitir que os estudantes construíssem uma concepção inicial de número negativo. Essa pesquisadora também analisou os processos transpositivos dos inteiros relativos, desde os obstáculos epistemológicos, até a construção de outros possíveis obstáculos didáticos. Cid (2015) concluiu que as propostas a partir de modelos concretos, embasados no campo da aritmética não possibilitariam a superação dos obstáculos epistemológicos; em muitos casos, os enfatizariam, inclusive contribuindo com a criação de obstáculos didáticos. Por fim, ela desenhou uma gênese escolar do número negativo em resposta ao problema didático/de investigação construído, a partir do trabalho da passagem da aritmética para a álgebra.

Para a continuação da escrita, descrevemos nossas ações por meio de um Diagrama de Ações (neste *link* há explicações mais detalhadas sobre o Diagrama), que juntamente com o *mapa de questões e respostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada ação será identificado por "**X_n**" e o fim "**X_n – Fim**". Apresentamos o contexto matemático/algébrico (M).



$M_{1.1}$- Determinar a Razão de ser:

Segundo Cid (2015) [41], a *razão de ser* dos inteiros relativos é dada em contextos semelhantes aos encontrados no ensino brasileiro, estando mais voltada para uma espécie de "contextualização numérica, uma fragmentação da sequência das operações, sendo assim, desnecessário um simbolismo mais formal, bem como representações e algoritmos

[41] Para retornar à página 158, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

das técnicas estudadas”. (CID, 2015, p. 267, tradução nossa). Cid (2015) propõe, então, que a álgebra é o campo ideal para se introduzir os números negativos, pois “a razão de ser inicial dos números negativos é dada pelas necessidades de cálculo algébrico e pela solução das equações. Este é o primeiro objeto matemático escolar que surge na educação básica por razões internas à matemática. (CID, 2015, p. 256).

Organizando um comparativo entre o cenário aritmético, modelo atual de ensino, e o contexto algébrico proposto por Cid (2015), os sinais de ‘+’ e de ‘–’, aritmeticamente podem ser considerados sinais operatórios binários que representam as operações aritméticas de adição e subtração. Já para o contexto algébrico, além desta interpretação, eles podem ser analisados pelo significado operatório unitário (usado para se determinar o simétrico de um número inteiro relativo) e pelo significado predicativo (usado para se determinar se um número inteiro relativo é positivo ou negativo). Há também mudanças para o significado do sinal de ‘=’ e dos parênteses, por exemplo, ‘– 1 + 2’ representa uma adição e ‘(– 1) (+ 2)’ representa um produto. ‘[2x + 2 = 2(x + 1)]’, igualdade entre expressões algébricas ‘4 + 3 = 7’, interpretação do contexto aritmético, indicativo do resultado de uma operação. A subtração aritmética também ganha destaque nessa comparação, pois no contexto algébrico ela pode indicar o que deve ser adicionado ao subtraendo para coincidir com o minuendo, por exemplo, para a subtração ‘– 3 – 5 = – 8’, interpreta-se ‘– 5 + x = – 3’, sendo x positivo, pois ‘– 3’ > ‘– 5’. Ou para a subtração ‘– 5 – 3 = – 8’, interpreta-se ‘– 3 + x = – 5’, sendo x negativo, pois ‘– 5’ < ‘– 3’.

Cid (2015) justifica a introdução dos estudos simultâneos dos inteiros relativos e da álgebra citando algumas ‘vantagens’ dessa nova abordagem de ensino: “maior precisão na escrita, o cálculo algébrico [proporcionando] economia de tempo e outras formas mais simples de executar as tarefas, as técnicas de cálculo algébrico [exigindo] reflexões e tomadas de decisões que dependem da sua funcionalidade” (CID, 2015, p. 257, tradução nossa). **M1.1 – Fim.**

M1.2 – Álgebra como instrumento de modelização algébrica-funcional:

Nesta ação, buscamos descrever o que Cid (2015) denominou de passagem da aritmética generalizada para uma modelização algébrica-funcional. A justificativa trazida por Cid (2015, p. 258, tradução nossa) elencou, primeiramente, os objetivos da álgebra escolar, “visando ultrapassar a visão de um ensino da *aritmética generalizada*”, cujo objetivos relatados por Cid (2015, p. 259, grifo do autor, tradução nossa) foram: “encontrar soluções numéricas de problemas aritméticos, construir modelos algébricos (generalidade), trabalho com letras representando incógnitas, variáveis, parâmetros ou números generalizados". Já para essa nova abordagem de ensino dos números inteiros relativos, a pesquisadora elenca a álgebra como ferramenta funcional, visando atividades de modelagem matemática ou de instrumento genérico de modelagem de todas as matemáticas escolares, também por meio da mobilização de "Programas de Cálculos Aritméticos (PCA[42])" (CID, 2015, p. 259, tradução nossa), contexto desenvolvido por Chevallard (2005).

Dessa forma, no decorrer do ensino nessa nova abordagem, considerada como uma primeira etapa dessa proposta, evolui-se de um PCA retórico[43] para a escrita de expressões algébricas, caracterizando a constituição da primeira organização matemática (M_1): "problemas resolvidos por meio de técnicas de escrita e simplificação de expressões algébricas de uma única variável desconhecida ou parâmetro e cujos dados e soluções nem sempre são números, podem ser relações, justificativas etc.". (CID, 2005, p. 260, tradução nossa). A segunda etapa "surge quando são levantadas questões que relacionam dois PCA que contêm uma ou duas variáveis e cuja resposta deve ser dada em termos de relacionamento entre as variáveis desses PCA". (CID, 2015, p. 260, tradução nossa). Essas relações se dão em termos de igualdades constituindo uma segunda organização matemática (M_2).

> Isso nos apresenta uma nova organização matemática, M2, que é uma extensão do M1, caracterizada por problemas resolvidos através de uma igualdade entre os programas de cálculo, o que leva a um novo significado do sinal = como um indicador de equivalência condicionada e desenvolvimento de técnicas equacionais como cancelamento. (CID, 2015, p. 260, tradução nossa)[xxii].

A terceira etapa é dada novamente por uma ampliação, nesse caso, amplia-se M_2 incorporando atividades que tratam da modificação de duas ou mais variáveis e como isso irá refletir nas alterações nos PCA mobilizados. Sendo assim, M3, que contém M2, trata de problemas que podem ser resolvidos por fórmulas algébricas, sem que se limite a quantidade de variáveis e a diferenciação de incógnitas e de parâmetros. Além disso,

---

[42] Em resumo, esses PCA consistem em resolver um problema por meio de uma série de operações aritméticas realizadas a partir dos dados iniciais. O *bloco do saber* é dado por meio de discursos verbais que irão construir e justificar as operações realizadas para o cálculo da incógnita.

[43] Exemplo: "P0: Gabriel pensa em um número, adiciona 25 a ele, divide o resultado por 2, subtrai 8 e multiplica tudo por 3. Se ele finalmente obtiver 21, que número Gabriel achou? "Se no final ele conseguiu 21, antes de multiplicar por 3 ele tinha 7, antes de subtrair 8 ele tinha 15, antes de dividir por 2 ele tinha 30 e antes de somar 25 ele tinha 5. Então Gabriel pensou no número 5" (RUIZ, BOSCH, GASCÓN, 2010, p. 545, tradução nossa).

"incorpora técnicas algébricas para estudar como depende cada variável das restantes". (CID, 2015, p. 260, tradução nossa).

Dessa forma, percebemos que a intenção dessa autora é que a partir dos estudos das Organizações Matemáticas M2 e M3, desenvolva-se níveis de modelagem algébrica funcional, definindo novas questões praxeológicas para essas organizações matemáticas, ou seja, "reinterpretando as fórmulas e equações como modelos funcionais analisados em termos de crescimento, de diminuição, de continuidade, de derivabilidade" (CID, 2015, p. 260, tradução nossa). **$M_{1.2}$ – Fim.**

$M_{1.3}$ – Características da Álgebra introduzidas com os inteiros negativos:

Cid (2015)[44] afirma que no contexto criado por ela, a álgebra é compreendida como uma 'ferramenta' de modelagem algébrica-funcional, sendo ambiente propício para o estudo dos inteiros relativos. Dessa forma, as seguintes características são apresentadas:

> -mostra a razão de ser dos números positivos e negativos;
> -o ponto de partida são os problemas aritméticos, que permitem relacionar a estrutura de termos da adição e de termos da subtração com a estrutura das operações aritméticas já conhecidas pelos alunos, e
> -apresenta uma álgebra que não se reduz a uma aritmética generalizada, que se manifesta na ruptura epistemológica que envolve a passagem da aritmética para a álgebra. (CID, 2015. p. 260 - 261, tradução nossa)[xxiii].

Cid (2015) afirma que tanto o ensino pautado nas ideias de aritmética generalizada quanto o da modelagem algébrico-funcional se baseiam na resolução de problemas aritméticos via expressões algébricas, o que os difere são os objetivos das propostas de ensino. A proposta algébrico-funcional tem por finalidade mobilizar as expressões algébricas como modelos que descrevem os enunciados do problema como sistemas do qual queremos obter certas informações, o que difere da outra proposta, que tem por objetivo encontrar as soluções dos problemas.

A proposta de Cid (2015) também tem por objetivo encontrar as soluções, mas não somente, tem-se um campo rico para discussões e debates acerca das informações e detalhamentos que podem ser explorados do enunciado dos problemas que foram modelados pelas expressões algébricas.

> Nesse contexto, a expressão algébrica cumpre a função de conservar a memória dos dados e cálculos, mostrando a estrutura do problema e construindo programas de cálculo (BOLEA, 2003). Além disso, a partir do momento em que a expressão algébrica indica as operações a serem executadas nos dados, ela deve ser entendida como um modelo

[44] Para retornar à página 158, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

> algébrico de um programa de cálculo aritmético. Isso tem como consequência que, enquanto na aritmética a atividade matemática consiste em fazer cálculos, em álgebra, os programas de cálculo se tornam um objeto de estudo, e os meios para estudá-los é o cálculo algébrico. (CID, 2015, p. 261, tradução nossa)[xxiv].

De acordo com Cid (2015, p. 262, tradução nossa), o estudo dos inteiros negativos tem por objeto "o interesse inicial no desenvolvimento de técnicas de cálculo entre números com determinação, e não no desenvolvimento de técnicas de resolução de equações, que forçarão a introduzir alguma modificação na modelagem algébrica-funcional". Para uma proposta de ensino que se insira nesse novo cenário, os conceitos algébricos têm sua ordem de apresentação e de ensino alterados. No entanto, um impasse é criado, pois obviamente algumas ferramentas algébricas necessitam de conceitos dos inteiros relativos que ainda não foram trabalhados. Cenário apropriado para que o seu ensino aconteça simultaneamente aos da álgebra escolar.

Diante desse cenário, alguns questionamentos se apresentaram fortemente, pois as *condições* e *restrições* do ensino na Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS, captadas em sua maioria no grupo de estudos, são diferentes das que Cid (2015) construiu sua gênese para os inteiros relativos. Assim, o que é possível de ser realizado com essa nova proposta? Qual a nova ordem de ensino dessas ferramentas? O que isso nos ajuda em relação à aprendizagem dos estudantes? Essa forma de ensino é independente das relações institucionais? Ou do cenário educacional? Ou do nível de escolarização dos estudantes? Essas questões permearam a construção da proposta de ensino preocupada com as demandas institucionais e dos níveis mais elevados de codeterminação, principalmente os da Pedagogia e da Escola.

A aparição dos objetos dos inteiros relativos e dos objetos algébricos, "as técnicas de resolução de equações não podem ser iniciadas imediatamente, sendo necessário limitar-se inicialmente às técnicas de simplificar expressões algébricas" (CID, 2015, p. 262, tradução nossa), haja vista a necessidade de se enfatizar o significado da ideia de diferença como resultado de uma comparação, em detrimento do significado de retirar, que deve ser entendido como a ação de subtrair, importante para o trabalho com a diferença entre números com sinais, sendo primordial desde o princípio o ensino da comparação entre os programas de cálculo. (CID, 2015).

Outros objetos que devem sofrer alterações em sua ordem de ensino são as técnicas para a resolução das equações e inequações, que aparecerão bem mais cedo que nas propostas do *Modelo Dominante*. Esses objetos são entendidos como ferramentas algébricos-funcionais e terão suas aparições a partir dos contextos das organizações M2 (problemas resolvidos através de uma igualdade entre os programas de cálculo) e M3 (problemas que podem resolvidos por fórmulas algébricas, sem que se limite a quantidade de variáveis, bem como sem a diferenciação de incógnitas e de parâmetros). **$M_{1.3}$ – Fim.**

$M_{1.4}$ – Epistemologia da construção da gênese escolar dos inteiros relativos:

Nesta ação, estudamos alguns aspectos da gênese escolar construídas por Cid (2015)[45], buscando elementos e aspectos que pudessem ser debatidos com os professores, bem como compor a proposta de ensino alternativa às vigentes no *Modelo Dominante*. Nessa gênese, as expressões algébricas serão trabalhadas, num primeiro momento, somente com aquelas que envolvam as operações de adição e subtração, ainda pela falta da aprendizagem de algumas técnicas com os números inteiros negativos, bem como a mobilização de expressões de grau superior a um. Nesses estudos, não se considera "inicialmente a simetrização aditiva de números racionais positivos, porque o tratamento de sinais em números racionais incorpora aspectos complexos que entendemos que precisam ser trabalhados após a consolidação de Z". (CID, 2015, p. 263, tradução nossa). Sendo assim, tem-se os estudos de uma álgebra desenvolvida nos naturais, que passará pela aprendizagem da simetrização aditiva de N, que promoverá uma passagem para uma álgebra em Z, porém os estudos e o desenvolvimento de uma álgebra em Q será aprofundada em estágios superiores. (CID, 2015).

Assim, há uma mudança de postura em relação ao ensino dos inteiros relativos, pois na maioria das outras propostas o foco estava na mobilização de recursos concretos e em situações do dia a dia. Nessas propostas, são identificados aspectos que reforçaram alguns obstáculos epistemológicos e outros didáticos, propiciando o aparecimento de erros de compreensão e de novas dificuldades. Todavia a análise da gênese descrita por Cid (2015), nos indicou que as *condições* e as *restrições* da nossa realidade educacional exigem outros aspectos não abordados por Cid (2015). As adaptações construídas estão descritas na resposta R_{IV}^{Z}, bem como no decorrer das demais partes da tese. **$M_{1.4}$ – Fim**[46]**.**

[45] Para retornar à página 158, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.

[46] Para ir à *$M_{1.5}$ – Situação Fundamental: Valores, ... – Início*, clique aqui.

Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.

Q_5: QUAL A IMPORTÂNCIA DE SE CONSTRUIR UM MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA?

Com o objetivo de discutir com os professores do grupo de estudos um processo de desnaturalização dos modelos de ensino vigentes, debatemos com eles o fato de as propostas de ensino vigentes serem fundamentadas por um *Modelo Dominante* e, em nosso caso, o dos inteiros relativos. Nessas propostas, em sua grande maioria, as justificativas às técnicas matemáticas estão implícitas, ou seja, nos processos de ensino e de aprendizagem atuais, geralmente não há necessidade de revelar o *bloco tecnológico-teórico*. Como motivação, enviamos aos professores enquetes disparadoras das discussões que nos auxiliaram no desenvolvimento de um espírito investigativo desses processos.

Descrevemos os sete encontros ocorridos, sendo que os dois últimos não ocorreram devido ao fechamento dos laboratórios de matemática. Antecipamos alguns entendimentos por meio do quadro resumo dos temas debatidos.

Quadro 5– Resumo dos Encontros

Encontros	Resumo
I	Trabalho com o processo de desnaturalização. Elementos da construção de Q_5*: Qual a importância de se construir um MER?* E de R_5*: Identificar e descrever Modelo Dominante, Paradigmas de ensino e crenças de aprendizagem*.
II	Análise de duas propostas de ensino e elementos de construção de Q_6*: Por que ensinar os inteiros relativos?*
III	Estudos da Razão de ser dos inteiros relativos e elementos de construção de Q_7*: Qual a razão de ser dos inteiros relativos?* E, R_6*: Razões de ser: cotidiano, jogos e entorno aritmético x contextos matemáticos, aritmética generalizada e entorno algébrico.*
IV	Estudos das dificuldades, erros, metodologias, jogos, artigos sobre inteiros relativos e a BNCC. Elementos de construção de Q_8*: Quais as dificuldades, os erros mais comuns e as intervenções mais utilizadas nos processos de ensino e de aprendizagem de Z?* E, R_8*: Dificuldades e erros: sinais, reta numérica, operações e comparações. intervenções: jogos e procedimentos do cotidiano.*
V	Palestra – questões teóricas e processos de ensino: I - estudos históricos e epistemológicos, com ênfase nos inteiros relativos; II - definições, conceitos, propriedades, um tratamento mais formal.
VI	Análise da terceira enquete e estudos de Jogos e atividades, por exemplo, “Ideia geométrica” e “Mais positivo e Mais negativo”.
VII	Apresentação das propostas por parte dos professores – introdução. Elementos de construção de Q_9*: Que atividades, problemas e estratégias devem compor uma introdução de uma proposta ... relativos?* E, $R_{9.1}$*: atividades, problemas e exercícios ... e algébricos.* $R_{9.2}$*: Resposta coração do grupo de estudos.* Fim do grupo de estudos.

Fonte: Autor da pesquisa

R$_5$: IDENTIFICAR E DESCREVER MODELO DOMINANTE, PARADIGMAS DE ENSINO E CRENÇAS DE APRENDIZAGEM

Após a aprovação do meu projeto apresentado à Superintendência de Gestão das Políticas Educacionais (Suped), em 26 de março de 2019 ocorreu o primeiro encontro com a presença de 12 professores. Como esses professores trabalhavam em turnos[47] divididos, essa primeira reunião foi dividida também em duas. E, por solicitação da Semed esse encontro também coincidiu com o ofertado pela Gerência do Ensino Fundamental e Médio (Gefem) da Semed em que as questões burocráticas foram tratadas pelos professores/técnicos da Gefem e a parte teórica por mim[48].

Para registrar o que ocorria nas reuniões, utilizamos um diário de bordo e gravações de vídeo autorizadas pelos professores. Como toda a pesquisa seria apresentada aos professores ao final dessa primeira formação, e os participantes não haviam assinado o termo de consentimento, decidimos não gravar a primeira reunião, apenas anotar as principais impressões.

O objetivo traçado foi discutir algumas experiências, dificuldades e expectativas referentes aos processos de ensino e de aprendizagem, principalmente, para os inteiros relativos. Abordei questões elementares dos paradigmas de ensino, uma breve apresentação das ideias de *mapa de questões e respostas*, enfim, uma prévia do que pensei para o grupo de estudos.

Dos 22 professores que participaram desse primeiro encontro, matutino e vespertino, 16 se comprometeram em compor o grupo de estudos "Justificativas, Argumentações e Fundamentações Matemáticas: O Caso dos Inteiros Relativos", título que constou no projeto apresentado para a Semed/Campo Grande-MS.

Para esse encontro, enviamos aos professores uma enquete inicial, mote dos primeiros estudos: "Em poucas palavras, descreva como você ensina o conteúdo os inteiros relativos; e, como você acredita que os alunos aprendem". Apenas um professor

---

[47] Os professores dos laboratórios eram lotados em suas unidades de ensino em período integral (40h) ou meio período (20h). O funcionamento do laboratório se dava em todos os períodos de funcionamento da escola. Assim, em algumas escolas havia três professores lotados, por terem três períodos de funcionamento.

[48] A partir dessa parte, o uso da primeira pessoa se refere às minhas considerações e da professora Marilena (orientadora), pois a terceira pessoa será mobilizada para as considerações que emergirem do grupo de estudos.

respondeu a enquete. Por receio de constrangê-los e consequentemente que abandonassem o grupo, não os inquiri sobre os motivos de não enviarem suas respostas:

> Respondendo as suas questões: Como estou no Laboratório de Matemática da escola 'X' só trabalho com as turmas de Educação Infantil (pré) ao 5º ano. Não exploramos o trabalho com os inteiros relativos. De modo geral, o trabalho que desenvolvo explora, principalmente, os números naturais e, em alguns momentos, os números racionais (foco nas frações e números decimais). Quanto a aprendizagem dos alunos, acredito que a aprendizagem é um processo ativo, logo há necessidade de que o aluno esteja em atividade de estudo, a qual está em estreita relação com a atividade de ensino, desenvolvida pelo professor. Para que haja aprendizagem, há necessidade que o professor organize de modo intencional o ensino, priorizando a apropriação de conhecimentos mais elaborados.

Uma rápida análise dessa resposta nos permite inferir que esse professor acredita que o trabalho com os inteiros relativos não é possível de ser realizado nos anos iniciais do ensino fundamental, o que é referendado por algumas outras falas durante as primeiras conversas: *o conceito de número negativo ligado às ideias do cotidiano, principalmente, monetário, problemas com extratos bancários, pois segundo o grupo são muitos anos estudando somente os naturais e o racionais positivos e atividades que tendam para esse lado podem facilitar a aprendizagem e compreensão por parte dos estudantes*[49].

Os estudos de Borba (2009) apontam para a possibilidade de se trabalhar com os naturais mobilizando os conceitos dos inteiros relativos. A sondagem realizada por essa pesquisadora revelou que "os alunos, muito antes de iniciarem o estudo dos inteiros relativos na escola, já tem um bom conhecimento deste campo numérico" (BORBA, 2009, p. 84). Esse conhecimento relatado pela pesquisadora é referente às ideias de medida desses números, representados de maneira oral ou não explícita. Este tipo de discussão também fazia parte dos temas que pretendia discutir com os professores.

Outra dimensão que pode ser inferida a partir dessa primeira enquete é referente ao papel que cada um mantém em uma formação. Buscando influência dos *níveis de codeterminação,* vemos que as regras das formações continuadas podem ser influenciadas pelas *condições* e *restrições* encontradas tanto no nível da *Sociedade*, quanto da *Escola* ou ainda da *Pedagogia*. Pensando no nível da *Sociedade*, como os currículos são dados por sequências de praxeologias e, geralmente, são essas praxeologias a motivação das

[49] Pensando em uma maior fluidez de leitura, destacarei em itálico as falas dos professores do grupo de estudos. Não haverá denominação dos professores, pois o que decidimos, em grupo, foi nos atermos apenas aos consensos. Dessa forma, em minha escrita constará o que eles expressaram representando os nossos entendimentos.

formações continuadas, a maioria dos encontros tem foco nos tipos de tarefas e nas suas respectivas técnicas. Outra condição bem latente é a divisão das formações em quatro momentos, um em cada bimestre, com assuntos bem definidos e pensados pelos formadores da Semed. Em relação aos níveis da *Escola* e da *Pedagogia*, geralmente, nas formações há um momento teórico, expositivo por parte do formador, seguido de uma atividade – debates, escrita de um texto ou de um exercício. Quase nunca há exposições por parte dos professores em formação no início dos encontros. Provavelmente, esse traço do *Modelo Dominante* das formações continuadas em nossa rede de ensino, influenciou esse primeiro exercício do grupo de estudos.

A desnaturalização dos modelos de ensino vigentes foi outro tema abordado. Compreendê-los e aceitar que são embasados em um *Modelo Dominante* é algo que pode ser questionado por meio das atividades de desnaturalização. Natural no sentido que suas justificativas estão implícitas nos processos de ensino e de aprendizagem, não havendo necessidade de revelá-las ou de justificá-las.

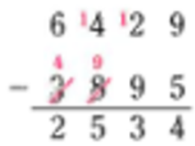
O objetivo com a primeira enquete foi alcançado, pois almejei debater que os principais modelos de ensino dos inteiros relativos podem ser classificados em modelos de 'neutralização' ou de 'deslocamento'. Não que esse fato significasse algo negativo ou positivo, essa é uma realidade das suas propostas de ensino. Essa enquete poderia revelar uma proposta que fosse divergente das demais ou poderia confirmar essa primeira análise. Nesse ponto de vista, poderíamos debater os motivos e as causas que esse tipo de ensino ocasionaria em nossos alunos.

Debatemos também sobre algoritmos da subtração. O primeiro, denominei de técnica tradicional, pois é um dos mais encontrados nos livros didáticos brasileiros atualmente – os números são colocados um embaixo do outro de acordo suas ordens, a subtração é realizada da direita para a esquerda e quando não há possibilidade de se subtrair, por exemplo, a ordem das unidades, troca-se uma dezena por 10 unidades. Por decomposição, acrescenta-se 10 unidades ao valor que antes não se poderia subtrair, possibilitando a realização da subtração.

O segundo algoritmo habitou os livros didáticos brasileiros na década de 1990 e foi perdendo espaço para o tradicional e, pelos menos em minhas buscas, não o encontrei mais. O denominamos por compensação – nele também os números são dispostos um embaixo do outro e, se não há possibilidade de se subtrair, adiciona-se 10 ao número de cima e desse resultado subtrai-se o número debaixo. Deve-se observar que ao acrescentar

10 em qualquer número, há que adicionar 1 ao número da posição que segue na linha inferior, compensando o acréscimo realizado na ordem anterior.

Ao lado, um exemplo do algoritmo por compensação, retirado do Livro Conquista da matemática, edição de 1992 (GIOVANNI, CASTRUCCI, JUNIOR, 1992).



Com essa comparação, além de discutirmos algumas características de ambos os algoritmos e alguns motivos de um deles ter desaparecido do ensino brasileiro, almejei orientar o debate acerca das mudanças que alguns conteúdos sofreram durante os últimos anos e outros não. Esse foi o mote para adentrarmos os estudos dos inteiros relativos, pois eles são um exemplo de conteúdo que seus modelos de ensino resistiram às mudanças e as críticas nessas três décadas, adentrando assim a enquete inicial desse encontro.

Outro ponto interessante foram os comentários sobre a potência dessas propostas que mobilizavam os modelos concretos, os professores afirmaram que valeria a demanda de contornar as novas dificuldades para os problemas com a multiplicação. Nesse cenário, há possibilidade de identificar três papéis exercidos por mim, participante do grupo de estudos, formador da Semed e pesquisador, bem como um conflito gerado pela mudança de paradigma proposta e, consequente, quebra de contrato institucional.

Como pesquisador, o meu planejamento para as formações não contemplou os casos de silêncio. Nos moldes do *Paradigma Visita às Obras*, meu papel seria de apresentar e validar uma solução para o impasse de ensinar algo que provocaria dificuldades de aprendizagem futuras. Porém, no *Paradigma Questionamento do Mundo*, as respostas deveriam ser construídas no coletivo, sendo validadas ou refutadas por todos os professores, por consenso. Como participante do grupo, haveria a possibilidade de exercer a função de alguém com uma maior *expertise*, todavia, para que essas informações fossem incorporadas ao *meio*, o coletivo deveria prevalecer.

No entanto, a quebra do contrato institucional e todas as mudanças provocadas pela perspectiva do *Paradigma Questionamento do Mundo* trazida para o grupo, provavelmente, geraram dificuldades tanto para os professores quanto para mim, principalmente, nos momentos de conflito. E, como formador, a pessoa que planejou a atividade, demonstra um conflito no posicionamento do professor para um PEP. As relações de influência, o poder que poderia impor sobre eles, interferiram no processo de autonomia por parte dos demais professores do grupo. Teoricamente, as soluções parecem claras, porém na prática, não alcancei êxito em alguns aspectos, demonstrando a grande distância a ser percorrida.

Outro fato apresentado aos professores e constante no *Modelo de Referência*, foi a ideia de que o *Modelo Dominante* está tão 'impregnado' nas práticas docentes que não permite ou não favorece questionamentos. Mais uma vez eu não queria criticar os modelos existentes, mas obviamente, alguns deles ocasionariam problemas para o ensino dos inteiros relativos. Nesse sentido, há necessidade de se organizar melhor as atividades a serem trabalhadas com os estudantes. Para que isso ocorra, há que se praticar o questionamento para uma melhor compreensão dos efeitos causados por essas escolhas. No entanto, as mudanças de papéis provocadas pela troca de paradigma me inibiram, pois era integrante do grupo, como tal poderia apresentar meus questionamentos, poderia levar novas informações a serem incorporadas ao *meio* (ou não), no entanto, como pesquisador e orientador dos estudos, as incertezas de qual a melhor forma e de como realizá-la sem replicar posturas características do *Paradigma Visita às Obras* me incomodaram e me impediram de agir de outras maneiras que favorecessem uma melhor interação entre nós.

Outro ponto que surgiu fortemente foi acerca dos materiais concretos e manipuláveis. A fala de alguns professores indicava como solução para os muitos problemas de ensino e de aprendizagem dos inteiros relativos, a mobilização desses materiais. Uma das justificativas para esse fato, com certeza, são as influências das atividades laborais que deveriam realizar em suas unidades de ensino. A preocupação em mobilizar jogos, materiais concretos e manipuláveis, bem como em construí-los foi muito evidente. O fato de exercerem o cargo de professores dos laboratórios de matemática, apontou para a necessidade de apresentarem atividades e sequências didáticas de cunho prático. As atividades de exploração, de organização e debates sobre os conceitos ficaram em segundo plano. Esse, com certeza, deveria ser um ponto explorado nos próximos encontros. Porém, uma dúvida me incomodou muito: como fazer isso sem direcionar a formação? Mais uma vez, percebe-se o conflito gerado pelos papéis de formador pautado no *Paradigma Questionamento do Mundo* e participante do grupo. Se a ideia é que os professores tivessem mais autonomia, como aprofundar certos aspectos sem que eu controlasse as atividades? A que se pensar, que mesmo propondo boas questões, poderia encaminhá-los para a minha resposta parcial, contrariando os princípios do PQM. Como resolver esse impasse?

Outra contradição latente era que proporia estudos sobre os inteiros relativos, um problema docente não proveniente do grupo, todavia, diante do cenário educacional brasileiro, sabia que apenas alguns aspectos desse novo paradigma poderiam ser explorados. Nesse sentido, os conflitos referentes à minha participação foram aumentando. Conflitos saudáveis e com excelentes aspectos para serem estudados, e consequentemente, melhorados para outras experiências com professores, visando trabalhar essas mudanças paradigmáticas.

Portanto, um dos desafios da formação foi a condução das discussões, pois o objetivo era 'plantar' a semente do *Paradigma Questionamento do Mundo*. Nesse sentido, como planejamos algo voltado para os inteiros relativos, em dado momento o assunto poderia ser totalmente diferente. Se isso ocorresse, seria excelente por um lado, pois na busca por responder um questionamento, as obras mobilizadas não podem ser pré-determinadas. Porém, preocupante por outro lado, pois como organizaria todas essas informações em torno do objeto de pesquisa? Nosso primeiro exemplo foi o relato sobre o abandono dos laboratórios, a falta de condições de uso, as reformas realizadas, reconstrução de móveis, de objetos pertencentes ao patrimônio dos laboratórios, bem como da confecção dos mais diversos materiais. Outro relato foi sobre a mobilização das aulas dos laboratórios como reforço escolar. Na visão desses professores, algo ruim, porém, pode-se pensar que esse reforço seria um excelente momento para explorar novas propriedades, provocar novas discussões e propor novos desafios aos estudantes que apresentavam dificuldades de aprendizagem.

Felizmente, as discussões acerca dos inteiros relativos também apareceram. O ensino das operações de adição e subtração, dadas separadamente das de multiplicação e divisão, segundo alguns deles, *vira uma confusão*. Por exemplo: *23 – 15 é simples de resolver até o 6º ano, depois com as regras dos inteiros negativos os alunos não conseguem mais realizar*. Dessa maneira, a proposta que pensei construir com os professores era justamente 'atacar' esse tipo de dificuldade, além de refletir acerca da dificuldade em construir atividades que pudessem suprir tais problemas. Porém, para além das discussões de cunho pedagógico, haveria necessidade de estudos históricos, epistemológicos e matemáticos, mas, como apresentar todos esses processos sem exercer o papel de liderança? Uma das soluções foi assumir o papel de "fornecedor" de mídias, para que o coletivo decidisse se essas informações seriam ou não pertinentes para os objetivos finais. E, para finalizar o primeiro encontro do matutino, relatei minhas intenções de pesquisa, o cronograma e a forma dos demais encontros.

1° Encontro: Vespertino – 26 de março de 2019: 10 professores

Para o encontro com os professores do vespertino segui os mesmos objetivos, propondo discussões semelhantes, no entanto, buscando novos aprofundamentos referentes àqueles realizados com o grupo do matutino. Iniciei com a seguinte indagação: Qual a necessidade dos inteiros relativos para os estudantes do sétimo ano do ensino fundamental? Como resposta, alguns participantes relataram que se tratava dos objetivos de ensino, dos motivos para se ensinar esses números, em outras palavras, determinar a *razão de ser* dos inteiros relativos. Determinar a *razão de ser* dos inteiros relativos nas propostas de ensino dos anos finais do ensino fundamental sempre foi um dos objetivos, tanto que está relatado em nosso *Modelo de Referência*. Nele apresento pelo menos duas possibilidades, a resolução de problemas aritméticos não passíveis de serem realizados com os naturais e os estudos das equações e das expressões algébricas ensinadas também nos anos finais do ensino fundamental. Assim, outra perspectiva se abriu para os estudos do grupo, determinar a *razão de ser* dos inteiros relativos.

Novamente, como era de se esperar, surgiram comentários acerca dos materiais mobilizados em sala de aula, passando para as dificuldades de ensino e de aprendizagem. Essa abordagem mais prática, com discussões sobre possibilidades de atividades que pudessem ser mobilizadas diretamente nas aulas, foram os temas mais pedido pelos professores, constatado nos relatórios das formações, e consequentemente, tema das formações dos professores dos laboratórios de matemática. Essas posturas refletem as influências do *Paradigma Visita às Obras*, particularmente, dos níveis da *Sociedade* e da *Escola*. *Sociedade*, pois quando o currículo é dado por sequências de praxeologias, a necessidade dos professores é a de lecionar e, como muitos professores dizem, *cumprir esses currículos em suas aulas*. *Escola*, pois a obrigação de se cumprir tais ementas curriculares, influencia nos tipos de aulas que serão ministradas, sempre pensadas a partir das fronteiras entre as disciplinas e os tempos escolares, dados por divisões entre as disciplinas. Geralmente, discussões mais teóricas ou investigativas não são bem recebidas pelos professores. A ação de semear aspectos do *Percurso de Estudo e Pesquisa*, de ser um *cidadão herbartiano* com *atitudes procognitivas* foi um dos desafios levados ao grupo e, principalmente para mim, como pesquisador, participante e, em vários momentos, líder do grupo.

Sendo assim, como provocar novas formas de enxergar o mundo a sua volta, as suas aulas, as práticas de ensino propostas, sem questioná-las, ou sem buscar por justificativas, ou ainda tentar compreender a *razão de ser* dos conteúdos ministrados, compreendendo melhor sua epistemologia? E, principalmente, como fazer que isso seja uma necessidade dos professores, que as indagações sejam deles, que eles questionem o modelo de ensino vigente, bem como que essas ações sejam necessidades? Nesse cenário, pensamos no exemplo dos inteiros relativos, que particularmente proporciona muitos debates referentes não apenas aos aspectos didáticos, mas também epistemológicos, políticos, históricos, enfim, há necessidade de se construir um MER.

Debatemos sobre atividades com características do modelo de neutralização, por exemplo, quando um palito azul é eliminado/neutralizado por um vermelho. O ganho dessa classificação paira justamente na possibilidade de categorizar as dificuldades criadas a partir de atividades como essas. Jogos com as ideias de deslocamento, também foram mencionados, por exemplo, os que mobilizam tabuleiros, dados e peças para os movimentos.

Como se daria a formalização dessas ideias na reta numérica? Há necessidade de ter aprendido algo sobre a reta dos inteiros relativos? Esse jogo nos permitiria introduzir esse conceito? Quais deveriam ser os requisitos básicos para a realização dessas atividades? Será que esse jogo traria os mesmos problemas para as operações de multiplicação e divisão? Tenho que ensinar um conteúdo tão conflituoso, quais as atividades que poderiam me ajudar? E quais poderiam me atrapalhar? Se não tiver alternativas melhores, o que adaptar? E como adaptar? Essas perguntas caracterizam os primeiros aspectos de um *cidadão herbartiano* com *atitudes procognitivas*.

O Modelo Dominante indicou que todos esses jogos estão vinculados a exemplos do cotidiano. No trabalho de Glaeser (1985), a busca por modelos do cotidiano foi apontada com um obstáculo epistemológico – *Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais)* –, aparentemente, muitas propostas de ensino carregam esse obstáculo consigo. Assim, esse contexto permitiu determinar a *razão de ser epistemológica*, conhecer as dimensões e os aspectos epistemológicos desse conteúdo, atendendo aos estudos de Borba (2009) e Coquin-Viennot (1985). Novamente, os conflitos pairavam em minha mente, pois como propor todas essas discussões sem impô-las? Como vivenciar alguns aspectos de um PEP-FP? Como favorecer uma emancipação epistemológica a partir da criação de fenômenos didáticos?

Q_6: POR QUE ENSINAR OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS?

A construção da sexta questão se deu em parte pelos resultados das discussões do 2° encontro, ocorrido em 2 de abril de 2019, com a participação de 13 professores. Nesse encontro, propusemos como pauta a retomada da enquete 1 ("Em poucas palavras, descreva como você ensina o conteúdo inteiros relativos"), também propusemos a enquete 2 ("Por que ensinamos os números inteiros relativos? Para que serve este conjunto?"), bem como a análise de duas propostas de ensino, uma retirada do livro didático (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012), e a outra, uma proposta produzida por meio da adaptação das atividades contidas em Berte *et al*. (2008) e Cid (2000).

O intuito da retomada da primeira enquete foi explorar alguns pontos que ficaram pendentes: sequência de ensino baseada em situações do "cotidiano", modelos concretos; uma sequência para adição e subtração e outra para multiplicação e divisão, entre outras.

Iniciei as discussões apresentando uma síntese do primeiro encontro cuja função seria disparadora para os demais debates, provocando-os incômodos que os movimentassem a criar alguns questionamentos. Almejei mais entusiasmo acerca desse novo formato, mas os resultados ainda foram tímidos, assim como os professores em nossas conversas, pois, ao finalizar minha fala, todos os professores se mantiveram em silêncio. Mediante o silêncio, decidi explorar os pontos destacados por meio da análise de duas propostas, pois o objetivo de provocá-los com a fala inicial não foi bem-sucedido.

Criamos dois grupos de análises, um responsável pelo fragmento do livro (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012) e o outro, pela proposta produzida por meio da adaptação das atividades contidas em Berte *et al*. (2008) e Cid (2000). Não participei das primeiras análises, pois me baseei nas possíveis interferências dadas por ter planejado as atividades. Agora, será que essa postura foi produtiva? Porém, nas explanações iniciais, já ocorreram minhas intervenções. Analisando esse fato, percebo que não há possibilidade de me despir dos estudos e das concepções, seja como mediador ou participante. Nesse sentido, se tivesse participado das discussões mais abertamente teria sido bem melhor. Provavelmente, poderia ter construído novos fatos e caminhar para uma maior aproximação com o grupo, mais rapidamente.

Percebo agora que a mudança de paradigma influenciou diretamente minha postura, pois no PQM, as questões deveriam surgir dos professores e naquele momento, pensava que qualquer fala poderia dar direcionamentos aos professores. Vivi um conflito, como falar e tratar de algo, sem poder tratar e falar sobre esse algo? Minhas leituras apontavam que o trabalho com contextos concretos poderia gerar novas dificuldades de aprendizagem aos inteiros relativos, porém, o objetivo não era o de impor esse pensamento, e sim, por meio das discussões do grupo, construir nossas próprias conclusões, baseadas nas *condições* e *restrições* da nossa instituição.

Retornando das análises, um dos grupos (o que analisou a proposta produzida com base em Berte *et al*. (2008) e Cid (2000), levantou como hipótese que os estudantes teriam muitas dificuldades com a interpretação dos problemas e, caso tivesse a intervenção do professor, explicando e detalhando as atividades, assim eles conseguiriam resolvê-las sem maiores problemas. Uma questão que coloquei, nesse momento, foi a seguinte: *os estudantes dos anos finais do ensino fundamental conseguiriam desenvolver outras atividades, por exemplo, as contidas nos fragmentos de (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012) seja qual for a intervenção do professor?* Nesse contexto, mencionei que uma condução das atividades de cunho mais tradicional seria realmente mais difícil, pois essa 'cláusula' não consta no *contrato didático* do *Modelo Dominante*, bem como o trabalho com propriedade e regularidades dos conceitos ensinados.

É possível perceber que, nesse momento, assumi o papel de formador, sem medo de apresentar minhas opiniões, todas minhas informações seriam mídias, ou não, incorporadas ao *meio* do grupo de estudos. A mudança paradigmática, nesse caso, conduziu para uma confusão e insegurança de como proceder diante dos professores. Nesse sentido, deveria ter deixado mais claro que o grupo decidiria quais as informações seriam e de que forma, aceitas por eles. Um dos receios, traço marcante do contrato institucional, é fato de a palavra do formador ter um peso muito grande, mesmo que naquele momento o grupo fosse privilegiado devido às posições dos participantes. Tal fato se revelou nos últimos encontros, como veremos mais adiante. E, para além da construção de uma proposta para os inteiros relativos, deveria construir juntamente com esses professores uma visão mais questionadora, investigativa diante dos modelos e das propostas mais mobilizadas nas salas de aula.

Alguns dos meus objetivos com essa formação se basearam nos escritos de Borba (2009, p. 59), ou seja, "sem um conhecimento mais aprofundado de como se dá o desenvolvimento conceitual, o professor [...] fica limitado na sua mediação, [...] no auxílio que pode proporcionar para que seus alunos, melhor compreendam os diversos conceitos trabalhados em sala de aula". E, como podemos ter um conhecimento mais aprofundado, se não há um espírito investigativo? Se tratamos as propostas com naturalidade? Tal naturalidade pode cegar o professor, e fatos importantes podem passar despercebidos, como a criação de novas dificuldades de aprendizagem. Nesse sentido, dois grandes "aspectos" marcaram nossa proposta de trabalho com os professores: a escolha de trabalho na perspectiva do PQM e a importância do estudo do objeto matemático.

Nesse novo paradigma, as respostas às questões são frutos de construção pessoais, dos estudos de respostas já produzidas e da mobilização de ferramentas, em nosso caso, ocorridas no coletivo do grupo. Pensando em infraestruturas que propiciem aos professores mais momentos formativos que possibilitem tais construções coletivas, há que se ter políticas públicas e infraestrutura pertinentes, cenário contrário em nossa rede de ensino, pois os planejamentos não se dão no coletivo, e as formações têm dias, horas e temas bem demarcados, frutos das *condições* e das *restrições* advindas dos níveis da *Sociedade* e da *Escola*.

Outro ponto interessante foi a busca por questionamentos que conduzissem aos debates sobre os objetivos das atividades, pois a maioria das falas estava mais pautadas em como os estudantes resolveriam as atividades, traço marcante da *Pedagogia* das formações continuadas da Reme de Campo Grande/MS. Entendi naquele momento que deveria ampliar os debates, mergulhado nos propósitos das atividades, aprofundando o contexto didático, propondo uma análise minuciosa dos conceitos a serem ensinados. Por exemplo, o que deveria ser mobilizado para os objetivos serem alcançados? Qual o papel do professor? Entre outros aspectos que possibilitassem construir uma análise em prol da construção da sequência de atividades.

Nesse momento, minha postura estava bem ativa, estava formador ao invés de diretor dos estudos. Algumas questões levantadas por mim demonstram tal fato: Para que serve isso? O que meus alunos irão aprender? Todas as atividades devem ter um propósito? Nesse momento, eu estava, portanto, em um papel de formador numa perspectiva que escapava à do PQM, o que evidenciou aspectos muito fortes do *Modelo Dominante* impregnados em minha condução das discussões, pois não houve influência do modelo teórico da TAD, mas sim, da minha vivência como professor e integrante de uma das equipes da Semed de Campo Grande/MS, vez, formador nas atividades dessa secretaria, e agora, pensando na prática como pesquisador.

Esses apontamentos retirados do meu diário de bordo, retratam que mudar de paradigma não é tarefa fácil, não se dá em poucos encontros. Diante dos aspectos do PQM, vejo que estava exercendo além do papel de participante do grupo, também de diretor dos estudos, expondo meus conhecimentos e informações sobre o assunto debatido. Todavia, poderia ter ficado mais claro ao grupo que todas essas informações necessitariam ser confrontadas com o meio, testando-as e/ou validando-as, permitindo assim, serem integradas ao meio, caso validadas, fenômeno denominado de evolução do meio, pois novos elementos e algumas respostas parciais foram incorporadas, colocando em movimento a mesogênese.

Provavelmente, por uma particularidade minha, reflexo do meu *universo cognitivo* U(x)[50], até essa parte do encontro minhas falas e interrupções foram excessivas, em alguns momentos praticamente não deixei os integrantes finalizarem seus raciocínios. As interrupções, imposições de opiniões ocorreram a todo instante. Assim, ao compartilhar ou questionar os argumentos dos professores, minha forma de falar poderia ser facilmente interpretada como indicativo de que os professores estavam errados. Analisando os encontros agora, um dos motivos da não participação efetiva, provavelmente, reflexo de minha postura mais ativa, pois as pequenas participações eram interrompidas, reforçando a grande dificuldade proporcionada pelas mudanças de paradigma trazidas para o grupo de estudos e pela imersão de alguns professores no *Modelo Dominante* dos inteiros relativos. Meus estudos apontavam para alguns problemas de aprendizagem decorrentes de tal modelo, no entanto, haveria necessidade de investigar mais profundamente esses problemas, porém, essa postura mais investigativa não fazia parte das rotinas de alguns desses professores. Pelo novo paradigma há que se ter uma postura mais questionadora, e os questionamentos devem ser legítimos, assim, esses e outros aspectos "povoavam" minha mente diante dos professores.

Acrescido a esse cenário, pode-se pensar no papel de liderança do grupo, pois retomando os encontros, minhas falas foram com a intenção de criar novos debates, mas, aparentemente, como a liderança estava em minhas mãos, a palavra final estava comigo também. Assim, essa foi a maneira que lidei com todas essas mudanças, o silêncio e a

---

[50] O universo cognitivo U(x) é o resultado dos assujeitamentos nas inúmeras instituições da qual pertencemos, as mudanças de posições institucionais, podendo ser simultâneas ou sucessivas (CHEVALLARD, 2003). O Universo Cognitivo da posição p de I é representado por "UI(p) = {(o, RI (p, o)) / RI (p, o) ≠ ∅}, por extensão, do universo cognitivo de I. Em particular, se existe uma posição p de I tais que RI (p, o) ≠ ∅, é dito que I conhece o. (CHEVALLARD, 2003, p. 2 - 3, tradução nossa). As relações institucionais, RI, podem ser entendidas como as interações que os sujeitos dessa instituição, de determinada posição, possuem com o objeto o, ou seja, tal objeto o existe para essa instituição. Nesse contexto, por mais que estejamos imersos nas leituras e na organização de atividades que possam ser o primeiro contato com o *Paradigma Questionamento do Mundo*, estamos enraizados no 'antigo' paradigma educacional. Tal mudança ou quebra de paradigma requer um processo longo e bem-organizado, todos esses aspectos, das idas e vindas de um paradigma para outro, servirá de aprendizagem para os professores e para que eu vivencie os primeiros passos em um mundo menos monumentalista e mais questionador.

inibição de alguns também foi a forma de lidarem com minha postura, ou seja, bem semelhante aos moldes das formações dadas nos contextos do *Paradigma Visita às Obras*. Seguimos os debates por meio da leitura de algumas atividades das propostas.

Quadro 6– Terceiro problema analisado pelos professores do grupo de estudos

III – Arthur levou suas figurinhas à escola para jogar várias partidas de “bafo”. Na primeira partida perdeu 9 figurinhas e na segunda ganhou 7. Depois dessas partidas quantas figurinhas ele tem a mais ou a menos do que a quantidade que tinha inicialmente?

Fonte: Autor da pesquisa

Uma das observações suscitadas pelo problema do Arthur foi: *os conceitos de positivo e negativo estão vinculados à ideia de ganhar e perder figurinhas*. Geralmente, a associação desse tipo de ideia serve para facilitar o aprendizado dos estudantes, mobilizam-se algumas palavras ou termos representantes da operação, sendo estas o indicativo de qual a operação correta a ser realizada. Porém, para os problemas em que operações mentais exigem um processo inverso, essas palavras ou termos são obstáculos à resolução do problema. Portanto, essa também deveria ser uma preocupação do grupo no momento da construção da proposta de ensino alternativa àquelas constantes no *Modelo Dominante*.

No entanto, havia necessidade de discutirmos outros elementos além dos conceitos de inteiros relativos, porém, um conflito foi gerado, como fazê-lo sem que eu propusesse? Como não conduzir as discussões declaradamente? Naturalmente, por estarem nos laboratórios, o foco estava nas resoluções, na parte prática, todavia, nossos estudos e os dados da pesquisa revelam a necessidade de um estudo mais detalhado, buscando aspectos históricos, epistemológicos, didáticos e matemáticos, um estudo ecológico.

C_7 – Operar com os inteiros Relativos[51]:

Refletindo sobre algumas anotações entregues pelos professores, quando analisaram as propostas e comparando-as, evidenciamos um trabalho mais tecnicista, por parte dos autores das atividades, Andrini e Vasconcellos (2012).

[51] Para a continuação da escrita, descrevemos nossas ações por meio de um *Diagrama de Ações*, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. Apresentamos a continuação do contexto concreto e, nesta ação, buscamos elementos tanto nas análises das propostas realizadas por mim quanto os resultados das discussões com o grupo de estudos. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.
Para retornar à C_6 – *Início*, clique aqui. Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.

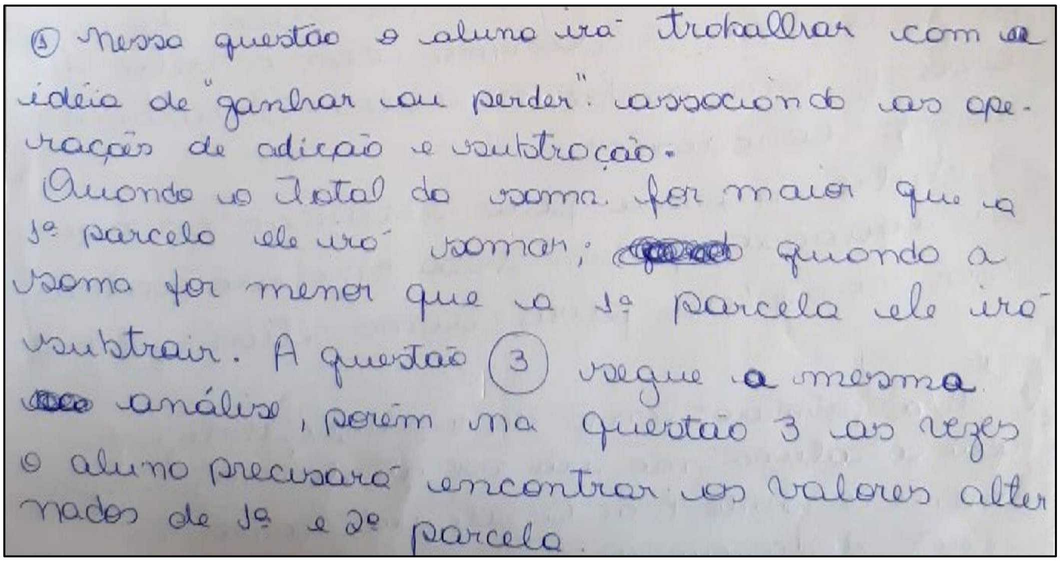

① Nessa questão o aluno irá trabalhar com a
idéia de "ganhar ou perder" associando as ope-
rações de adição e subtração.
Quando o total da soma for maior que a
1ª parcela ele irá somar; quando a
soma for menor que a 1ª parcela ele irá
subtrair. A questão ③ segue a mesma
análise, porém na questão 3 as vezes
o aluno precisará encontrar os valores alter-
nados da 1ª e 2ª parcela.

Figura 6- Registro dos professores ao analisarem as atividades motivadoras I e II
Fonte: Autor da pesquisa.

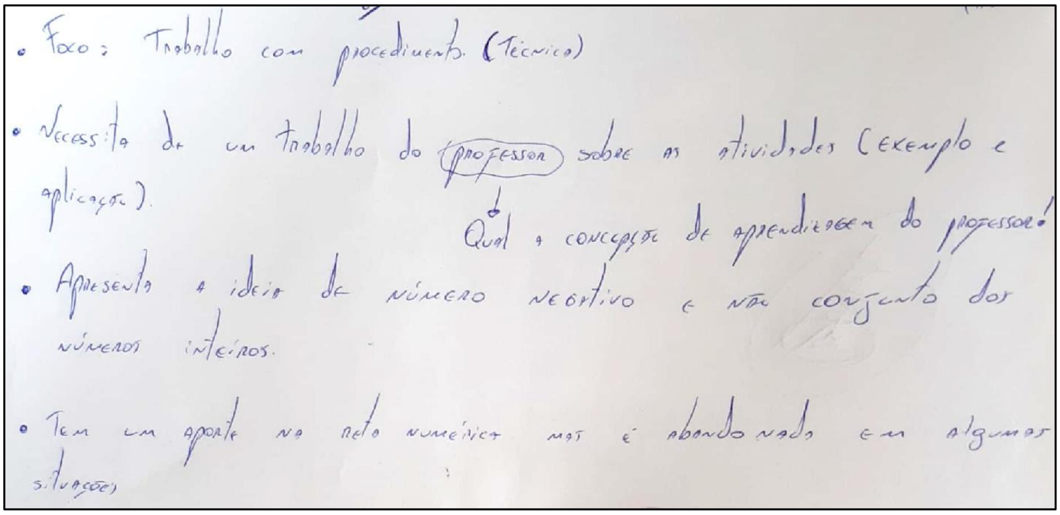

• Foco: Trabalho com procedimento (Técnico)
• Necessita de um trabalho do professor sobre as atividades (Exemplo e aplicação).
Qual a concepção de aprendizagem do professor!
• Apresenta a ideia de número negativo e não conjunto dos números inteiros.
• Tem um aporte na reta numérica mas é abandonado em algumas situações

Figura 7– Registro dos professores: análise do fragmento do livro didático "Praticando Matemática" (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012)[52]
Fonte: Autor da pesquisa

Identificamos que as atividades estavam baseadas na apresentação dos números inteiros negativos, bem como nas possíveis ações do professor regente, perpassando exemplos, aplicações, mobilização da reta numérica de forma superficial, preocupados com a concepção de aprendizagem dos professores regentes.

Debatemos, ainda, o seguinte fragmento do livro didático, interpretando justificativas e os motivos apresentados aos estudantes para o estudo dos inteiros relativos:

---

[52] Transcrição: Foco: Trabalho com procedimentos (técnica).
Necessita de um trabalho do **professor** sobre as atividades (Exemplo e aplicação).
Professor: Qual a concepção de aprendizagem do professor?
Apresenta a ideia de número negativo e não de conjunto dos inteiros.
Tem um aporte na reta numérica, mas é abandonada em algumas situações.

> Você já sabe que números 1, 2, 3, 4, 5 ... surgiram pela necessidade de contar. Sabe também que as frações e os números decimais foram criados para representar certas quantidades não inteiras muito presentes nos problemas de medidas. E os números negativos? Eles vieram para resolver situações do tipo: "3 – 5 quanto dá?", que provavelmente surgiram com o desenvolvimento do comércio e o aparecimento das dívidas, dos prejuízos ... (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012, p. 55).

Estabelecendo um paralelo com as atividades adaptadas de Berte *et al*. (2008), em que nelas são apresentadas três atividades motivadoras, especialmente, a atividade das figurinhas de Arthur, lancei a seguinte pergunta, “Qual a diferença de objetivos entre as duas propostas?”

Apenas uma professora respondeu: *nas duas atividades não temos números negativos*. Reagindo à sua fala, deduzo que no excerto do livro didático, Andrini e Vasconcellos (2012), os negativos aparecerem de forma ‘direta’, sendo uma melhor opção de atividades, pois os objetivos estão mais claros para os professores, contradizendo minhas análises iniciais. Essa reação se deu pelo grande conflito referente a que papel deveria desempenhar perante os professores. Haveria a necessidade de formá-los para serem um *cidadão herbartiano* com *atitudes procognitivas*? Se sim, como fazê-lo? Isso seria possível nos moldes do cenário educacional atual?

Os debates desse encontro revelaram a necessidade de pensarmos as sequências da proposta de ensino para além das dificuldades dos estudantes, não construindo as atividades e os problemas apenas com esse enfoque, todavia, devemos pensar na postura do professor frente às dificuldades de ensino dos números inteiros relativos, investigando as possibilidades de aprendizagem dos estudantes diante aos desafios não resolvidos de imediato, verificando regularidades, criando novas formas de resolução, deixando os modelos dado pelos professores em segundo plano.

Assim, sobre o conhecimento do professor, independente das concepções pensadas para as atividades, sua postura perante os estudantes será a mesma. Se os professores não questionarem suas práticas, com a intenção de compreendê-las, de entender as consequências ocasionadas nas aprendizagens dos estudantes, aparentemente, não importa os tipos de atividades trabalhadas por eles. Porém, essa postura mais questionadora requer tempo de planejamento. O que vemos na Reme de Campo Grande/MS e que não se diferencia de outras redes, é o fato de as horas atividades não serem suficientes, os professores as mobilizam para correção de atividades, provas e outras afazeres burocráticos. As políticas públicas deveriam priorizar mais momentos de estudos aos professores. Sendo assim, esse espírito questionador, proposto pelo

Paradigma Questionamento do Mundo encontrará muitas *restrições* para se efetivar em nossa rede de ensino. **C_7 – Fim.**[53]

Vale ressaltar que uma professora desistiu do grupo nesse encontro. Ela nos relatou primeiramente que seus conhecimentos matemáticos seriam empecilhos, pois ela era professora dos anos iniciais do ensino fundamental, e, além disso, à frente do laboratório de matemática atendia apenas alunos desse nível da escolaridade. Essa conversa revelou algumas condições do nível da *Pedagogia*: as possíveis contribuições práticas, metodológicas e de conteúdos dadas por ela, para o nosso grupo. Por outro lado, poderia contribuir com as questões teóricas estudadas por ela, com as formas de abordar os conteúdos, com a maneira de analisar e de construir nossa proposta de ensino, outros conhecimentos pedagógicos poderiam ser compartilhados conosco além do matemático específico.

Para finalizar esse encontro, expus nossas questões motivadoras: *como ensinar os inteiros relativos? O que são os inteiros relativos? Qual a importância do ensino dos inteiros? Por que ensinar os inteiros relativos?* Tais questionamentos visavam que os professores determinassem a próxima demanda do grupo. Nesse momento de adaptação e de uma possível mudança de paradigma educacional, tempo, motivação e determinação são imprescindíveis. Acredito que a semente do *Paradigma Questionamento do Mundo* foi plantada, pois no decorrer das demais discussões, nos outros encontros, vários professores demonstraram um espírito mais voltado para as ideias de um *cidadão herbatiano* com *atitudes procognitivas*.

---

[53] Para retornar à página 73, *$R_{3.2}$: Estudar propostas de ensino* ..., clique aqui.
Para ir à *C_8 – Início*, clique aqui.

Q_7: QUAL A RAZÃO DE SER DOS INTEIROS RELATIVOS?

O 3º encontro ocorreu no dia 22 de abril de 2019, com a presença de 10 professores. A partir desse encontro o grupo foi formado por 14 professores, sendo dois deles os representantes da equipe de matemática da Suped/Semed de Campo Grande/MS. E, foi no contexto desse terceiro encontro, que surgiu a resposta R_6, referente à sexta e à sétima questões. Essa resposta foi marcada pela necessidade de compreensão da *razão de ser* epistemológica dos inteiros relativos. Estudamos aspectos históricos e epistemológicos ligados às análises de algumas pesquisas.

Como um dos objetivos do grupo de estudos era o de propiciar um processo de emancipação dos modelos de ensino vigentes, o estudo da *razão de ser* se tornou algo fundamental, pois além de se questionar as propostas do *Modelo Dominante* e sua construção – observando detalhes que nos auxiliassem na análise dos processos de aprendizagem – tínhamos o intuito de estudar os obstáculos presentes tanto nas descrições praxeológicas quanto nos aspectos referentes ao *bloco tecnológico-teórico.*

R_6: RAZÕES DE SER: COTIDIANO, JOGOS E ENTORNO ARITMÉTICO X CONTEXTOS MATEMÁTICOS, ARITMÉTICA GENERALIZADA E ENTORNO ALGÉBRICO

O início do 3º encontro se deu com a retomada da enquete 2 (“Por que ensinamos os números inteiros relativos? Para que serve estes números?”), enviada por e-mail aos participantes, com a proposta de eles responderem antes desse encontro, pois as discussões seriam iniciadas e orientadas por suas respostas. Recebi uma única resposta e, como nenhum professor justificou o não envio, busquei compreender os motivos pensando nas influências dos *níveis de codeterminação*. Por exemplo, se a justificativa fosse a falta de tempo, entendo, apesar de os professores participarem das reuniões do projeto em horário de planejamento, esse tempo não era suficiente para atender todas as demandas da formação. Por estarem presencialmente no encontro deveriam planejar em outro período. Nesse sentido, apesar de ter conseguido dispor aos professores participarem durante suas horas atividade, não pensei e não consegui organizar esses outros momentos provenientes tanto das obrigações como regente do laboratório de matemática quanto das possíveis tarefas dos nossos encontros. Essas condições não materializadas por nossos governantes, são provenientes dos níveis superiores da *escala* *de codeterminação* (CHEVALLARD, 2002). Retornando ao encontro, apresentei aos presentes a única resposta à enquete 2.

Quadro 7– Resposta à enquete 2

Enquete 2
"Por que ensinamos os números inteiros relativos?" R: "Está no currículo escolar; abre um novo campo de conhecimento na matemática; é necessário para a resolução de diversas situações (criadas e do cotidiano). O conjunto dos números inteiros serve para resolução de situações (criadas e cotidianas) como equações, situações bancárias, entre outras". "Para que serve estes números?" R2: "O universo dos números está preso somente em processos de contagem e de representação de quantidades. Os números negativos são tão importantes quanto os positivos, e saber lidar com eles nos auxiliará na organização de nosso cotidiano. O aluno deve aprender a importância da familiaridade desse conjunto para o cotidiano".

Fonte: Autor da pesquisa

Nossos debates giraram em torno de *praxeologias pontuais*, em que a preocupação de alguns professores era se os estudantes conseguiriam ou não resolver as atividades, ou se possuiriam ou não as ferramentas necessárias para a sua resolução. Pretendia iniciar os estudos pelas justificativas matemáticas mobilizadas nas atividades de cada proposta debatida, ou seja, centrando nas *organizações locais* (dada por uma tecnologia (θ) específica), *Tipos de Tarefas* e *técnicas*, por exemplo, da adição entre dois inteiros relativos. Para, então, avançarmos para as *organizações regionais*, discutindo aspectos do nível do *Setor*, números inteiros relativos. Não queria realizar um estudo acerca dos conceitos da TAD, mas sim, uma *análise praxeológica* inicial. Avançaríamos em outros aspectos, como questões históricas e metodológicas, observando as características apresentadas por Chaachoua e Bittar (2018, p.30), "O que existe e por quê? Mas também, o que não existe, e por quê? E o que poderia existir? Sob quais condições? Inversamente, dado um conjunto de condições, quais objetos podem ali viver ou, ainda, quais objetos são impedidos de viver nestas condições?".

Discutimos que o ensino dos inteiros relativos se dá apenas pelo fato de estarem no currículo, por meio de contagens e das representações de quantidades, cenários construídos para o seu ensino, bem semelhante a apresentação tratada por Caraça (1951). Um dos comentários trazidos do primeiro encontro para justificar esses cenários foi que *as operações com os naturais eram realizadas pelos alunos, mas com a inserção dos números inteiros negativos, os estudantes parecem ter desaprendido. Algumas criações didáticas podem gerar novas dificuldades de aprendizagem vinculadas às ideias de* *obstáculos epistemológicos*. Nesse momento, sugeri aos professores do grupo de estudos discussões sobre esses obstáculos (acatado por eles e aprofundada na palestra ocorrida no 5º encontro, proferida pelos professores José Luiz Magalhães de Freitas e Mustapha Rachidi). Expus aos professores que esse contexto poderia gerar uma compreensão dos números inteiros negativos e dos números de maneira geral, como vinculados apenas aos processos de contagem, se articulados aos processos de ensino mobilizado pelos professores. Em contrapartida, em sua história, os inteiros relativos foram usados nos processos de cálculo dos matemáticos, porém, muitas vezes, não tratados como números, mas como um caminho para obter as soluções das equações.

Um dos objetivos foi o de mostrar outras visões sobre os inteiros relativos, apresentando novas motivações para nossos futuros estudos, a construção de novas questões, aprofundando os conhecimentos como orientado por Borba (2009) ou ampliando as análises praxeológicas dadas pelas organizações locais e regionais. Reforçamos assim, a importância da articulação entre os conhecimentos matemáticos, didáticos-epistemológicos para uma melhor organização das atividades docentes, consequentemente, da aprendizagem dos estudantes.

A segunda proposição pensada para esse encontro foi a de analisar o roteiro da elaboração das atividades adaptadas a partir de Berte *et al*. (2008), observando, em especial, a criação de novas dificuldades de aprendizagem.

Quadro 8– Excerto das explanações das atividades adaptadas de Berte *et al*. (2008)

As Atividades Motivadoras têm por objetivo fomentar discussões acerca da existência de novos números, a introdução dos inteiros relativos. As atividades I e II são complementares, pois ambas têm por objetivo propiciar a compreensão e mobilização das propriedades comutativa e associativa, que serão ferramentas importantes para o momento da construção das técnicas para adicionar e subtrair inteiros relativos. Na atividade I, é solicitado que se resolva o problema de duas maneiras diferentes. O estudante poderia adicionar 12,75 e 4,25 e depois subtrair desse resultado 1,50, dado pela expressão numérica: “(12,75 + 4,25) – 1,50”. Ou, poderia subtrair 1,50 diretamente do valor do pacote de feijão, e depois adicionar o valor do pacote de arroz, dado pela expressão numérica: “12,75 + (4,25 – 1,50)”.

Fonte: Autor da pesquisa

Comentando as explanações do quadro anterior, uma professora disse, *eu não conseguiria trabalhar dessa forma, por exemplo, não consigo justificar essas atividades*. Como contraponto à fala dessa professora, solicitei a análise da questão 3.

Quadro 9– Atividade 3, adaptada de Berte *et al*. (2008)

3. Resolva as seguintes operações:[54]			
16 + ... = 61	.... + 54 = 71	.... + 45 = 81	38 + ... = 85
.... + 30 = 34	50 + 15 = ...	18 + ... = 58	90 + 12 = ...
8 + ... = 0	.... + 7 = 0		
5 + ... = 0; *Resolução:* 0 – 5 = – 5 ou 5 + (0 – 5) = (5 + 0) – 5 = 5 – 5 = 0.			

Fonte: Autor da pesquisa

Diante das análises dessa atividade, comentei que as 8 primeiras poderiam ser resolvidas com um "siga o modelo", técnicas mobilizadas para os números naturais, a depender do nível de aprendizagem da turma, explanada ou não pelo professor. Em contrapartida, para as três últimas seria necessário o uso das ideias de número inteiro negativo, cujas soluções, respectivamente, seriam '– 5', '– 8' e '– 7'.

O conceito de oposto poderia também ser explorado, pois, pela explanação dos autores dessas atividades, baseados na definição, são "números diferentes, mas têm o mesmo módulo, estão a mesma distância do zero (ANDRINI, VASCONCELOS, 2012, p. 61). Fiz referência também à criação de uma espécie de classes de equivalência com várias subtrações com o mesmo resultado, por meio da reorganização dos cálculos para obter essas classes. Os professores não se mostraram muito interessados, pois segundo um deles, *requer um envolvimento e um nível de aprendizagem além daqueles que os estudantes do 7º ano possuem, [...] outras dificuldades mais elementares estão em jogo, antes que essas fossem estudadas*.

Percebi que o julgamento dado por esse professor, de certa forma, foi influenciado apenas pelo fato de a atividade ser diferente do que está acostumado a trabalhar. Não era meu objetivo impor a mobilização dessas atividades em nossa proposta; pensava em criar situações para motivar os professores a pensarem para além das propostas contidas no modelo dominante. Meu intento, exposto a eles, nesse momento, era questionar as atividades alternativas, de contexto interno à matemática, testar sua validade e a capacidade de auxiliar nas dificuldades de aprendizagem. Para isso, haveria necessidade de buscarmos por outros conhecimentos, inclusive em nossas próprias práticas, mas, essa é uma construção, para não apenas se mobilizar algo pronto.

Reagindo às análises, um professor comenta que *essa proposta alternativa está fora dos padrões encontrados, por exemplo, nos livros didáticos. A mobilização das*

[54] Treino da técnica, construção de conjecturas. Para as três últimas atividades, conceito de oposto. Para os debates, deve-se construir a ideia com os alunos, para que se torne mais uma ferramenta mobilizada na técnica da subtração entre inteiros relativos.
Para retornar à página 102, R_6: *Razões de ser: cotidiano* ..., clique aqui.

propriedades associativa e comutativa, praticamente, não é trabalhada nas salas de aula. Talvez estaria por detrás do ensino dessas propriedades a percepção de regularidades que não alteram os resultados.

C_8 – Questionamento tecnológico-teórico[55]:

Meus estudos apontavam para a falta de justificativas para as tarefas propostas aos estudantes, e, justamente, a mobilização dessas propriedades se dava por buscar uma solução para o *bloco tecnológico-teórico*, muitas vezes, não explicitado nas propostas do *Modelo Dominante*. Assim, para a análise praxeológica, por exemplo, como mencionado em minha dissertação (GONÇALVES, 2016), uma das motivações para os novos estudos foi justamente "a ausência" de 'tecnologias' para as tarefas ensinadas para os estudantes do 7º ano do ensino fundamental. As possíveis justificativas matemáticas mobilizadas habitam o rol dos conhecimentos das estruturas algébricas, fora do contexto de ensino dos anos finais. Minha conclusão para esse fato apontou para a necessidade de os autores contornarem essa dificuldade por meio de criações didáticas provenientes do uso de modelos concretos. Assim, entendo que essas propriedades poderiam ajudar no movimento de se justificar as tarefas que serão ensinadas para os números inteiros relativos. Nesse sentido, debater com esses professores uma proposta alternativa àquelas constantes no *Modelo Dominante*, baseada em situações matemáticas de construção de regularidade e de mobilização de algumas propriedades, era justamente para testar sua validade e sua potencialidade em auxiliar na superação das dificuldades já apresentadas. Provavelmente, se tivesse exposto diretamente esse fato aos professores, os resultados seriam diferentes. Porém, naquele momento, estava com medo de exercer o papel de formador "tradicional".

Na sequência desse encontro, foi proposto aos professores, mais especificamente, em relação à alternativa *a*, do quadro 9, '16 + ... = 61', uma análise da possibilidade de a partir da solução '61 – 16', chegarmos ao resultado '0 – 5' na alternativa *i*. A conclusão gerada pelo grupo foi representada pela seguinte frase, *o aluno não saberia ainda como resolver essa situação*. Outra sugestão apresentada aos professores, dada para responder

---

55 Para a continuação da escrita, descrevemos nossas ações por meio de um *Diagrama de Ações*, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada ação será identificado por "Xn" e o fim "Xn – Fim". Apresentamos a continuação do contexto concreto. Para retornar à *C_7 – Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.
Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.

minha pergunta, foi colocar nos espaços vazios as operações realizadas, ou seja, para a alternativa *a*, 16 + ... = 61, realizaríamos os seguintes passos:

‘16 + (61 – 16) = 61’ (associativa)

‘(16 + 61) – 16 = 61’(adição)

‘77 – 16 = 61’ (subtração)

‘61 = 61’

A ideia foi de promover reflexões sobre os dois lados da igualdade. No entanto, o que isso significaria para os estudantes? Como reagiriam? ‘61 – 16’ representaria a mesma ideia que o resultado, ‘45’? Tendo por base a proposta inicial, estudos dos inteiros relativos, pensar de maneira diferente, buscando e propondo novas formas de reorganização e de resolução de problemas deveria ser o objetivo a ser alcançado.

Ao final do encontro, incomodado com minha postura frente aos professores, escrevi no ‘diário de bordo’: *por estar focado nos estudos sobre esses números, deixei em alguns momentos de me atentar às considerações dos demais professores. Minha cobrança era ter uma escuta mais atenta e um maior cuidado com o roteiro daquilo que deveria ser explorado com eles*. A posição de pesquisador se sobrepôs à de participante do grupo de estudos; as preocupações com a qualidade dos dados e das gravações eram enormes. Todos esses aspectos, condicionantes do nosso trabalho frente aos professores, influenciaram nos debates. Falar ou não determinados pontos de vista, intervir ou não no debate dos professores, seguir ou não, adiante com determinada discussão? Vejo agora que foram as *condições* existentes na constituição do grupo de estudos. Outras *restrições*, como deixar de lado estudos sobre os modelos concretos durante as discussões? Ou, como não os influenciar com os conhecimentos já estudados?

Gerou-se assim, um conflito dado pela mudança paradigmática pensada para o grupo de estudos. A parte final foi dedicada à discussão de um artigo (CID, BOLEA, 2010). Acreditamos que os demais compromissos de trabalho e particulares influenciaram no fato de os demais não terem cumprido a tarefa. Contava com empenho de ‘boa-fé’, pois, o tempo de outras atividades deveria ser utilizado, comprovando que muitas atribuições estão sendo incorporadas ao fazer docente sem remuneração. Assim, não podemos taxá-los de maus profissionais ou desmotivados, pois é dever do Estado garantir condições mínimas de trabalho aos profissionais da educação. **C_8 – Fim.**[56]

[56]Para ir à *$C_{8.1}$ – Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.

Q_8: QUAIS AS DIFICULDADES, OS ERROS MAIS COMUNS E AS INTERVENÇÕES MAIS UTILIZADAS NOS PROCESSOS DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM DE Z?

Na busca pela resposta à oitava questão do mapa da tese, também mobilizei as discussões, os resultados e os consensos dados no quarto, quinto e sexto encontros. A construção dessa resposta me auxiliou na solução de Q_0: *"Que proposta de ensino para Z é possível construir por meio da interação com um grupo de estudos de professores na perspectiva do PQM?"* Nesse caminho, outras questões surgiram, pelas quais tratei, respectivamente, dos processos de ensino, bem como da *razão de ser* epistemológica dos inteiros relativos.

As dificuldades tanto de ensino quanto de aprendizagem foram levantadas por meio das leituras dos textos propostos e, também, das experiências, dos erros e das intervenções registradas e entregues pelos professores ao final dos encontros. Para auxiliar no processo de organização desses dados, os organizei para apresentá-los aos professores no 4º encontro e, também, os descrevi como elementos da oitava resposta, R_8.

Esse encontro foi realizado no dia 16 de maio de 2019, com a participação de 10 professores, e nos dedicamos às seguintes ações: finalização da discussão do artigo, leitura da apresentação dos inteiros relativos na BNCC e envio das respostas da enquete 3. Todos esses elementos permitiram a construção de elementos de resposta à oitava questão do mapa de questões e respostas da tese, Q_8.

R_8: DIFICULDADES E ERROS: SINAIS, RETA NUMÉRICA, OPERAÇÕES E COMPARAÇÕES. INTERVENÇÕES: JOGOS E PROCEDIMENTOS DO COTIDIANO

Historicamente o desenvolvimento epistemológico, a *razão de ser* dos inteiros relativos se deu nos processos de resolução das equações, como ferramenta para solucioná-las. Uma das maiores dificuldades pairou no fato de os matemáticos não os reconhecerem como números; o seu uso esteve vinculado às ideias de medida das quantidades negativas que apareciam nos problemas. Quando se compreendeu que esses números foram uma criação matemática e que não provinha de contextos concretos, propiciou-se um cenário para sua formalização, fato ocorrido juntamente com os números complexos. Partindo desse desenvolvimento histórico, procurei[57] discutir com os

[57] O uso da primeira pessoa se refere às minhas considerações e às da professora Marilena (orientadora), pois a terceira pessoa será mobilizada para as considerações dos integrantes do grupo de estudos.

professores as dificuldades tanto de ensino como de aprendizagem dos inteiros relativos. Esses estudos históricos foram os temas gatilhos de algumas situações que podem ser estudadas em sala de aula.

Para o início desse encontro, nosso combinado seria que cada professor realizasse sua pesquisa e trouxesse informações sobre as habilidades apresentadas na BNCC. Porém, prevendo algum imprevisto organizei em *slides* as habilidades[58] que tratavam de forma direta dos inteiros relativos, bem como demais informações relevantes para nosso debate.

Discutimos que a primeira habilidade tratava de todos os conceitos dados na introdução dos inteiros relativos constantes no *Modelo Dominante* mais as operações de adição e subtração. Não houve menção do trabalho a ser realizado para o primeiro contato com esses números. Alguns estudantes, com certeza, já conhecem ou já estudaram alguns dos seus aspectos, provavelmente, não com toda a formalidade exigida a partir do sétimo ano do ensino fundamental. Porém, aqueles alunos que nunca tiveram esse contato, quais são as habilidades que tratam desse 'primeiro contato' com esses números? Quais devem ser atividades, para que realmente os estudantes atribuam *status* de números aos inteiros relativos? Essas foram algumas das indagações que debatemos com os professores dos laboratórios de matemática. Vale ressaltar que, constam no Referencial Curricular da Reme de Campo Grande (CAMPO GRANDE, 2020, p. 122), em sua versão preliminar, duas habilidades[59] que podem ser desenvolvidas com os estudantes.

Outro tema discutido foi sobre o fato de uma habilidade ser composta por *diversos conteúdos*, compilando assim, todos os conceitos, procedimentos e algoritmos em apenas duas habilidades. Na busca por uma articulação com a introdução da álgebra escolar, procurei essas habilidades, organizei algumas informações para o momento dos debates, porém, os dados foram trazidos de forma superficial, pois não havia referência direta aos

---

[58] HABILIDADES: 1. (EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. 2. (EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros. OBJETO DO CONHECIMENTO: Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações.

[59] Habilidade 1: Associa número inteiro a um ponto da reta numérica e vice-versa; Ordena números inteiros em diferentes representações; Compara números inteiros em diferentes representações; Representa números inteiros na reta numérica; Identifica sucessor e antecessor de um número inteiro; Utiliza a reta numérica na resolução de situações que envolvem adição e subtração. Habilidade 2: Resolve problemas com números inteiros, envolvendo as operações fundamentais; Elabora problemas com números inteiros, envolvendo as operações fundamentais.

inteiros negativos e queria ver como os professores tratariam esse fato, se articulariam com o texto das pesquisadoras Cid e Bolea (2010).

Por exemplo, na BNCC, para o Objeto do Conhecimento: Linguagem algébrica: variável e incógnita, temos as habilidades*: (EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita; (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas*. E no Referencial da Reme, para o mesmo Objeto do Conhecimento e para as mesmas habilidades, temos os seguintes Conhecimentos Específicos: *Compreender a ideia de incógnita e de variável; Representar incógnita e variável por letra ou símbolos; Representar a relação entre duas grandezas, utilizando letras ou símbolos*.

A leitura de todos esses dados nos ajudou a organizar novas concepções para a construção da proposta. Por exemplo, na discussão sobre a ideia de reta numérica, bem como seu uso para as operações, uma questão posta em voga pelos professores foi: *como os alunos enxergam os pontos, o que há entre eles?* O consenso do grupo foi que *eles enxergam os naturais na reta, são pontos colocados sobre uma linha.* Porém, será que os estudantes têm a noção de que há espaços entre o 0 e 1, por exemplo? Uma atividade pensada para o ensino dessa noção foi a do varal de frações[60]. No momento da reorganização das distâncias, cabe aos professores proporem discussões sobre os motivos e as técnicas mobilizadas para essas reorganizações, bem como se os números foram pendurados corretamente. Há necessidade de o professor aprofundar melhor essas ideias, estabelecendo a concepção do 'lado positivo' da reta e o 'lado negativo', bem como estabelecer relações entre o jogo e sua formalização no quadro, promovendo a passagem do concreto para o formal.

A mobilização da reta numérica pode se dar para os estudos das operações de adição e subtração. Um dos motivos seria as concepções trazidas da técnica para dividir dois naturais, ou seja, nos números naturais, para o dividendo maior que divisor, o resultado sempre será menor que o dividendo, por exemplo. Para o caso dos inteiros negativos, para uma divisão entre dois inteiros negativos o resultado vai ser positivo, ou seja, maior que o dividendo. Uma solução apresentada pelos professores seria mobilizar

---

[60] Varal de frações: cada estudante recebe uma ficha representante de um número na representação fracionária, um por um, cada um deles pendura seu número no varal. Os primeiros penduram seguindo uma certa distância, a unidade de medida para cada ficha sobreposta. No entanto, a cada número pendurado, o próximo aluno terá que reorganizar essas distâncias, pois a depender da posição, o seu número pode não ter espaço.

as ideias de medida: quantas vezes o ‘menos 3’ cabe em ‘menos 15’, cabe 5 vezes, por exemplo.

Um professor afirmou que essa ideia serviria *apenas para as quantidades de mesmo sinal, falhando para sinais trocados*. Nesse contexto, mais uma vez, as dificuldades de ensino presentes nos modelos concretos e, por consequência, no *Modelo Dominante*, apareceram fortemente. Para as adições e subtrações, há um tipo de ‘regrinha’ diferente das mobilizadas para as multiplicações e as divisões.

Tanto para as ideias de que existem números entre 0 e 1 quanto para o trabalho com a reta numérica, há proximidades e similaridades com os estudos de Caraça (1951). As influências desse autor são bem visíveis nos elementos do *Modelo Dominante,* porém as demais concepções e atividades para a condução dos demais conteúdos não são abordados da mesma forma. No *Modelo Dominante,* há abuso na mobilização dos contextos concretos, enquanto Caraça (1951) avança para estudos matemáticos, mobilizando o *Princípio da Extensão* e a *Negação da Negação*, ou seja, das impossibilidades das operações, cria-se a necessidade de novos sistemas numéricos em que as propriedades dos antigos sejam mantidas. Infelizmente, não debatemos esses conceitos com os professores.

Um questionamento levantado foi: quais os pontos favoráveis de cada proposta de atividades, a de cunho mais aritmético concreto e as de contextos mais matemáticos? Durante o debate, uma das soluções apresentadas e de consenso do grupo foi que houvesse *uma espécie de mescla dos pensamentos*, *pois uma forma única poderia ser muito reducionista ou uma maneira de reproduzir algo pronto*. No momento dessa discussão, fiquei mais calado, sem intervir, deixando que os professores debatessem, sendo que alguns lideraram as conversas, mediando e sintetizando os conteúdos. Alguns professores consideraram esse ensino reducionista, provavelmente, baseados na leitura do texto das pesquisadoras Cid e Bolea (2010). Porém, também poderia ser conhecimento advindo de outras experiências.

Qual seria a importância de compreender essas diferenças de aprendizagem? Pensamos na mensuração do aprofundamento teórico e metodológico propiciados pelas discussões do grupo, entendendo que é fundamental essa dedicação para se organizar uma proposta de ensino, ou atividades para as aulas, ou ainda, atividades para os momentos avaliativos.

No artigo de Cid e Bolea (2010), as concepções sobre Espaço Afim e Vetorial surgem nas discussões sobre os modelos concretos. E, como alguns desses questionamentos demandariam um estudo matemático mais aprofundado, algo que exigiria um tempo muito grande, pois teríamos que estudar questões específicas dessas estruturas algébricas. Como essa demanda não foi de interesse de todos os professores participantes nesse dia, a maioria do grupo decidiu deixar esses estudos para uma próxima reunião. Cid (2003) traz uma articulação entre os modelos concretos, as ideias de modelagem e os conceitos de espaço Afim e Vetorial, discutindo sobre

> a relevância de uma introdução de números inteiros por meio de modelos concretos por duas razões. A primeira é que, no ensino da aritmética elementar, o processo de modelagem matemática é revertido: enquanto no campo científico é usual que o objeto de estudo seja um determinado sistema ou fenômeno do mundo sensível modelado por meio de um sistema matemático, O campo de ensino do objeto de estudo é uma noção aritmética modelada por meio de um sistema físico ou social com o qual os alunos devem estar familiarizados. Além disso, o modelo funciona por analogia, ou seja, permite obter conhecimento sobre a noção matemática porque “parece com ela”; ou “funciona como ela”. Mas, na realidade, a estrutura algébrica que mais se assemelha a um modelo de neutralização é a estrutura unidimensional do espaço vetorial (ou, mais precisamente, a restrição a Z do espaço vetorial R^1), e a mais próxima de um modelo de deslocamento é o espaço relacionado unidimensional (ou melhor, a restrição à Z da linha real). Por outro lado, a estrutura de anel totalmente comutativa com unidade, típica de números inteiros, dificilmente pode ser mostrada através de um modelo específico, daí as dificuldades didáticas colocadas por seu uso. (CID, 2003, p. 12, grifo do autor, tradução nossa)[xxv].

As estruturas que mais se assemelham aos modelos concretos não ‘carregam’ em si todos os aspectos de um anel totalmente ordenado, comutativo e com a unidade, além do processo de modelagem matemática acontecer de uma forma invertida, ou seja, um conteúdo matemático é modelado a partir de uma situação do cotidiano. A análise de todas as falas desse encontro indica a necessidade de explorar melhor esses aspectos matemáticos.

Finalizamos esse encontro com os professores redigindo pequenos textos respondendo a enquete 3: “Quais as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de atividades com os inteiros relativos? Quais os erros mais comuns cometidos pelos alunos? Quais as intervenções mais utilizadas para contornar esses erros e dificuldades?”

Destacamos as principais dificuldades, erros e procedimentos elencados no quadro a seguir:

Quadro 10– Dificuldades e erros elencados pelos professores

Dificuldades dos professores e dos estudantes	Erros dos estudantes
Comparar inteiros relativos, pois mobilizam a comparação entre os naturais.	Erros com as operações e as regras de sinais, por exemplo quando resolvem: '– 4 – (–2)' ou '4 – 7 é 3' (usando o resultado de '7 – 4 = 3).
Dar sentido de número às quantidades negativas.	Os alunos aplicam as regras da multiplicação e divisão para as de adição e subtração.
Localizar e ordenar pontos na reta dos inteiros.	Erros dados pelo fato de os alunos aceitarem que os números estão presos a parte positiva.
Contextos do cotidiano promovem dificuldades com as operações de multiplicação e divisão.	Dificuldade em compreender as regras de sinais, dada pela introdução via ideia monetária.
Compreender os inteiros como extensão dos naturais. Entender as novas regras para os negativos. Associar o sinal ao número.	Trocar as regras de sinais. Respostas sempre positivas.
Reta numérica e as operações de multiplicação e divisão. Outros significados aos inteiros além da ideia monetária.	Não considerar os sinais para as operações (operar como se fossem números naturais) e ordenar os números negativos (obstáculos vinculados aos naturais).
Exemplos práticos e diversificados, novas metodologias para as partes que geram mais dúvidas e erros, diferentes formas de abordagem.	Identificar as operações a serem realizadas.
Trabalhar com jogos.	Mobilizar a reta numérica também na posição vertical e situações bancárias.

Fonte: Autor da pesquisa

Esse encontro me permitiu construir um rascunho para a resposta R_8, que trata das dificuldades e dos erros mais evidenciados pelos professores do grupo de estudos, com suas intervenções, jogos e procedimentos do cotidiano e alguns questionamentos sobre suas posturas.

5° Encontro: 28 de maio de 2020 – 10 professores[61]

No 5º encontro, ocorreu a palestra dos professores José Luiz Magalhães de Freitas e Mustapha Rachidi, ambos, naquela ocasião, professores do Instituto de Matemática da Universidade Federal. O propósito de convidá-los foi para aprofundarmos algumas questões teóricas sobre os inteiros relativos e discutir alguns aspectos sobre ensino e aprendizagem dos inteiros relativos. Esse encontro ocorreu no dia 28 de maio de 2018,

[61] Para retornar à página 100, R_6: *Razões de ser: Cotidiano*, ... clique aqui.

com a presença de 10 professores. A pauta enviada por eles previa que a palestra fosse dividida em duas partes, a primeira referente aos estudos históricos e epistemológicos, com ênfase nos inteiros relativos, e a segunda tratando das definições, conceitos, propriedades, um tratamento mais formal desses números.

Na primeira parte, esses professores discutiram as seguintes questões: O que é um número? Quais representações os alunos têm sobre números em geral? Quais são as funções dos números? As reflexões foram permeadas por alguns exemplos de manuais usados no final do século XVIII, tratando das grandezas, das formas de contagem, de medida, de unidade, de números em geral, de aritmética e, por fim, dos números naturais. Essa contextualização encaminhou as discussões para o ensino dos inteiros relativos, em que foram expostas as formas mais *cristalizadas* de ensino dos inteiros relativos.

Nesse momento, várias das discussões que já havíamos realizado com os professores dos laboratórios de matemática foram retomadas, no entanto, o nível de aprofundamento e de exemplos nos auxiliou nos questionamentos que havíamos deixado em aberto. Inclusive, vários desses questionamentos foram enviados aos professores palestrantes, o que nos levou a crer no sucesso desse movimento.

O contexto cultural das propostas de ensino também foi discutido. O tema foi a busca por atividades que levassem em consideração os conhecimentos dos alunos, como temperaturas positivas e negativas, elevador com andares subterrâneos, datas históricas. Também trataram de alguns obstáculos epistemológicos, aqueles descritos por Glaeser (1985). Os professores palestrantes contextualizaram cada um dos obstáculos, com exemplos de matemáticos, as formas que os obstáculos interferiram na sua compreensão dos inteiros relativos, detalhando cada obstáculo para além das definições dadas por Glaeser (1985).

Na segunda parte da palestra, além da apresentação do tratamento formal dos inteiros relativos, os professores deixaram uma sugestão de proposta de ensino para os inteiros relativos. Primeiramente, eles exploraram dois possíveis contextos, os concretos e os internos à matemática. Nos contextos concretos, exploraram os significados dos inteiros negativos, ideia de estado, de variação, interpretações bem semelhantes as trazidas por Borba (2009). Também trabalharam os contextos de deslocamento na reta, se aproximando da classificação dada por Cid (2015) para os contextos dos inteiros relativos em neutralização e de deslocamento. Nos estudos de Caraça (1951), também encontramos justificativas para o trabalho na reta numérica e que poderiam ter sido incorporadas aos estudos e a proposta de ensino. O contexto introdutório proposto pelos professores José Luiz e Mustapha Rachidi seguiu o descrito por Chevallard (1990, p.18)):

> [...] Os negativos não são então, de início motivados pelo estudo de sistemas de variáveis tomando valores inteiros positivos e negativos, como nós insistimos em querer fazê-lo acreditar, apresentando sistemas raros do tipo altitude, elevador, perdas e ganhos, etc. Eles nascem de exigências internas ao trabalho matemático (exatamente: algébrico). Sem dúvida sua introdução, que estende o domínio do numérico, vai levantar, historicamente, algumas interrogações, que encontram necessariamente um eco no currículo dos anos finais do Ensino Fundamental. (excerto dos slides apresentados pelos professores)[xxvi].

Chevallard (1990) propõe uma introdução dos inteiros relativos a partir da *razão de ser* desse objeto matemático, diferentemente do modo *cristalizado* do sistema de ensino brasileiro, em particular de Campo Grande/MS. Nesse sentido, o objetivo não era de impor aos professores uma proposta alternativa, e sim, por meio da dialética *Mídia/Meio*, construir nossa proposta com *razão de ser*, buscando as principais dificuldades e erros promovidos pelo ensino dado no *Modelo Dominante*.

Eles finalizaram apresentando três opções de escolhas didáticas: dar aos inteiros relativos *status* de número, trabalhando com as propriedades dos naturais para daí então expandir para os inteiros relativos, semelhante ao trabalho de Caraça (1951); introdução dos inteiros relativos a partir da resolução de equações e tratar os três *status* do sinal de menos, mantendo apenas o *status* operatório do sinal de mais, ambas, semelhantes ao trabalho de Cid (2015).

6° Encontro: 11 de junho de 2019 – 11 professores

O 6º encontro teve ainda por objetivo elaborar respostas à questão Q_8 (Quais as dificuldades, os erros mais comuns e as intervenções mais utilizadas nos processos de ensino e de aprendizagem de Z?). Devido ao fato de ter se passado quase um mês da discussão do jogo 'pega-varetas'[62] (VALE, 2009) em que, neste intervalo, também ocorreu a palestra dos professores convidados, foi decidido que os professores reapresentariam o jogo. O principal aspecto relembrado foi sobre o potencial da escrita de expressões numéricas a partir da retirada das varetas e das construções das respostas, movimento ressaltado pelo grupo. Segundo o consenso dado pelo grupo, os alunos poderiam retomar as regras das expressões numéricas. Apesar do consenso, alguns professores ainda indagaram sobre *a possibilidade de que isso realmente iria acontecer*.

[62] Nos anexos estão as descrições, regras e formas de jogar redigidas pelos autores dos jogos.

Por exemplo, cada expressão será estrutura pela retirada das varetas, um problema seria multiplicar um negativo por um negativo. Nesse momento, semelhante a outras situações já discutidas, o problema se dá para as multiplicações com inteiros negativos. Um dos professores afirma que *esse jogo serve assim, para um caso específico da multiplicação e, aparentemente, para a adição e a subtração não temos problemas latentes*. Nesse caso, há evidências dos aspectos já discutidos com os professores sobre as limitações trazidas por Cid (2002, 2003, 2015) a respeito dos modelos concretos.

Para o grupo, o que ficou definido foi o grande ganho em aprendizagem dado pela mobilização das expressões numéricas. Não consegui debater os outros aspectos, a demanda do grupo não me permitiu realizar outras análises, o foco estava em descrever o jogo e verificar seu potencial. Nesse sentido, comentou-se no grupo sobre *criar contextos em que os negativos se fizessem necessários, talvez um jogo fosse um contexto mais lúdico para contornar o problema das temperaturas e da Álgebra*. *Temperatura não faz parte do cotidiano da maioria dos estudantes, e a Álgebra talvez dependesse da turma e do empenho do professor que terá essa proposta em mãos.* Provavelmente, deveríamos *ter estabelecido um critério de análise dos jogos ou de outras atividades, por exemplo, observar se as limitações ou se os objetivos dos jogos não trarão novas dificuldades para o ensino.*

Partindo dessa constatação, passamos para a apresentação do segundo grupo com o '[Jogo de Sinais]' (GITIRANA *et al*., 2013). A dupla responsável o descreveu como *de tabuleiro, representado por uma reta numérica com seis casas positivas, seis negativas e um representante do zero. As peças devem se movimentar nesta reta numérica a partir do lançamento de dois dados, um com valores inteiros positivos e outro com inteiros negativos, dessa forma, para se movimentar o aluno deve realizar uma adição algébrica com os valores dos dados. Esse jogo pode ser relacionado às ideias de transformação dos números inteiros relativos, pois o número retirado em cada dado "transforma" a medida inicial, no caso, por meio do deslocamento. Posteriormente, pode-se registrar os movimentos por meio das operações.* Essa interpretação dada pelos professores antecipa as finalidades educacionais propostas pelos elaboradores do jogo, ou seja, as regras do jogo preveem que os estudantes movimentem as peças seguindo os deslocamentos indicados pelos dados, primeiro o azul, em seguida o vermelho e no decorrer do jogo, aparecerão as adições algébricas.

Continuamos com o debate sobre a institucionalização dos movimentos com os dados, por exemplo, '+3' significa caminhar 3 casas no sentido azul (sentido positivo) e,

'–2', caminhar duas casas no sentido vermelho (sentido negativo). Nesse contexto, como conduzir as discussões para que esses deslocamentos se tornem em conhecimento? Podemos mobilizar as críticas tecidas tanto no artigo (CID, 2003) quanto na tese (CID, 2015)? Podemos mobilizar as justificativas dadas por Caraça (1951)? Qual a relação desses deslocamentos com os conceitos de adicionar e subtrair? Novamente, como institucionalizar? Os questionamentos nos conduziram para outros debates, por exemplo, o realizado sobre os significados dos sinais: as ideias de operação do sinal de menos, bem como a ideia predicativa, mencionada nos artigos de Cid (2003), Cid e Bolea (2010) e Caraça (1951). Alguns deles mencionaram o papel do professor para a compreensão dos conceitos estudados, destacando as situações propostas para que os alunos pudessem analisá-las em decorrência das regras do jogo estabelecidas. Exemplificando esse fato, teríamos, se posicionarmos uma peça em determinada casa e depois indagarmos os estudantes, qual deve ser o próximo movimento para que o jogo fosse finalizado? Qual o movimento para que o meu adversário não ganhe? Nesse sentido, os professores julgaram que os estudantes deveriam explorar todas as possibilidades, incentivados sempre pelo professor regente. E, para finalizar as análises desse jogo, o consenso foi que seria um jogo a ser utilizado em nossa proposta, de acordo o grupo. Com receio de ter uma postura muita ativa diante dos professores, dificuldade gerada pelo fato de não podermos entrar definitivamente no novo paradigma, perdi algumas oportunidades de discutir fatos muito pertinentes para a construção da proposta. No entanto, essa postura mais reservada tinha por objetivo a construção das identidades de um cidadão herbartiano com *atitudes procognitivas*.

A próxima apresentação se deu para o jogo 'Zigue-zague' (KLAUE, 2013). Nela, os professores o consideraram *de estratégia, no sentido que o aluno deve pensar nas possibilidades dos resultados com os números dos dados e escolher a melhor resposta para frente, para esquerda, para direita ou uma das diagonais. Se não houver uma resposta ele ficará parado.* Os professores mencionam que só trabalhariam com a parte positiva dos inteiros. Uma das estratégias possíveis seria a do cálculo mental e, diferentemente do jogo anterior, não apresenta sugestão de atividades exploratórias. Sendo assim, deve-se adaptar ou construir algumas para o trabalho com a parte negativa.

Eles apontaram, como um aspecto interessante, a exploração de todas as possibilidades de respostas, enaltecendo as intervenções do professor regente, fato também destacado nas apresentações anteriores, sendo consenso entre todos. Uma crítica abordada foi referente ao jogo ser monótono. Logo, esses professores acreditam no desinteresse dos estudantes, pela pouca ação que ele provoca, bem como pela falta de atividades e de outros movimentos interessantes. Não houve muitas sugestões, pois segundo a dupla, a descrição dada pelos autores do jogo é bem rápida, deixando a cargo do regente todas as decisões em relação ao que se deve ou não realizar para a aprendizagem dos estudantes. Portanto, não seria um jogo mobilizado em nossa proposta.

No jogo seguinte, 'Desafio das Operações' (GITIRANA, 2013), a dupla responsável relatou sobre *possibilidades de resultados das operações que deveriam ser realizadas entre os três números iniciais. Por exemplo, escolhendo o número 15 e a operação de adição, qual dos três números iniciais adicionados tem por resultados 15? Se os números dados foram '9', '3' e '6', a resposta seria '9 + 6'. Se a resposta for correta, retira-se uma peça, sendo vencedor quem tiver o maior número.* Os professores sugeriram adaptá-lo para os negativos. Eles também mencionaram que *seria um jogo de estratégia*, pois *cada jogador poderia dificultar as jogadas, demonstrando um domínio das operações com os inteiros relativos. Há necessidade de haver um juiz, principalmente para verificar se as respostas ou as operações estão corretas.* Durante a apresentação, outros professores sugeriram que os estudantes confeccionassem seus tabuleiros, investigando assim a compreensão dos conceitos, bem como a proposição de vários tabuleiros para se verificar as possíveis soluções, podendo ser colocadas em uma tabela auxiliar.

Quadro 11– Exemplo das operações possíveis

ADIÇÃO	SUBTRAÇÃO	MULTIPLICAÇÃO	DIVISÃO
3 + 6 = 9	6 – 3 = 3	3 x 6 = 18	6 : 3 = 2
3 + 12 = 15	12 – 6 = 6	3 x 12 = 36	12 : 6 = 2
6 + 12 = 18	12 – 3 = 9	6 x 12 = 72	12 : 3 = 4

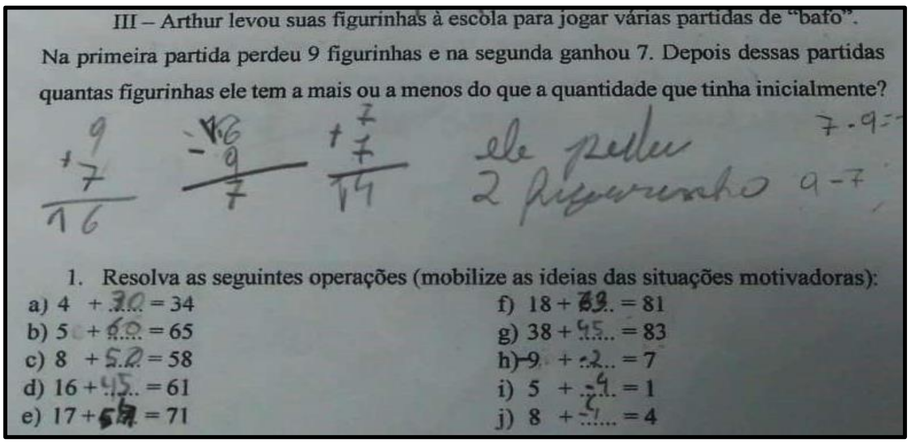
Fonte: Gitirana *et al*. (2013, p. 151).

Analisando a apresentação dos professores e a descrição realizada pelos autores, percebemos algumas divergências. Por exemplo, houve sugestão de adaptação para os inteiros relativos, mas há um nível 2 do jogo, justamente para os inteiros. Os autores também alertam para a possibilidade de adaptação desse jogo para os racionais. Os autores também propuseram para gratificar o vencedor da rodada a entrega de fichas, diferente do relatado pelos professores, ou seja, retirada de peças do tabuleiro. Ressalto que a tarefa de análise dos jogos seria de todos, porém, cada dupla teria a obrigação de detalhá-la melhor.

Analisando os resultados desse encontro, vejo que essas apresentações e discussões não nos permitiram explorar melhor esses materiais. Levanto duas hipóteses, uma pela falta de estudo por parte dos professores, pela falta de tempo ou pela falta de interesse por esse tipo de atividade dada em um grupo de estudos, pois alguns professores comentaram que esses jogos não comporiam suas propostas. A outra, pela minha postura passiva, promovendo mais oportunidades de participação para os professores. Estava de certa forma quebrando as regras das formações, onde o formador detém o conhecimento, geralmente, palestram sobre determinado assunto, promovendo na sequência algumas discussões.

No grupo de estudos, eles teriam que expor suas análises, organizar questionamentos, gerenciar os comentários, teriam novas funções dentro do grupo. Percebemos que essas alterações demandariam mais tempo, mais encontros, mais confiança para que ocorressem naturalmente. Os professores que mais se manifestaram são aqueles que além da sua função nos laboratórios de matemática, já haviam trabalhado em cargos de chefia na secretaria, na direção escolar, bem como, já estiveram à frente de formação pelas equipes da secretaria de educação de Campo Grande/MS. Não estou realizando um juízo de valor, apenas mencionando o perfil dos professores mais participativos (ao menos essa é minha impressão). Para analisar essas posturas, teria que empreender nova pesquisa, fora do objetivo atual. Dessa forma, me ative aos aspectos para a resposta às questões do *mapa de questões e repostas* da pesquisa.

Prosseguimos com as discussões sobre algumas soluções das atividades de contextos matemáticos analisadas nos primeiros encontros e resolvidas pelos alunos de uma professora que se voluntariou em propor essas atividades à sua turma[63].


III – Arthur levou suas figurinhas à escola para jogar várias partidas de "bafo". Na primeira partida perdeu 9 figurinhas e na segunda ganhou 7. Depois dessas partidas quantas figurinhas ele tem a mais ou a menos do que a quantidade que tinha inicialmente?

ele perdeu 2 figurinho

1. Resolva as seguintes operações (mobilize as ideias das situações motivadoras):

a) 4 + 30 = 34
b) 5 + 60 = 65
c) 8 + 50 = 58
d) 16 + 45 = 61
e) 17 + ... = 71
f) 18 + 63 = 81
g) 38 + 45 = 83
h) 9 + ... = 7
i) 5 + ... = 1
j) 8 + ... = 4

[63] Para retornar à página 183, R_{II}^{Z}- *Desenho do MER para Z*, clique aqui.

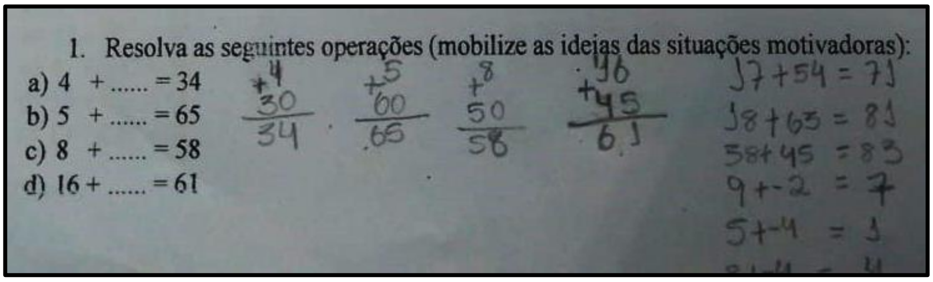


Figura 8- Exemplos de respostas enviadas pela professora voluntária.
Fonte: Autor da pesquisa

Diante dessas e de outras figuras, os professores analisaram que, o*s estudantes têm facilidade em expor oralmente suas respostas, 'perdeu 2', mas o registro é que deve ser ensinado estudado, ou seja, a operação '7 – 9' e toda a sua* classe de equivalência, *principalmente (0, 2). Nessa atividade, os alunos teriam duas situações internas a própria matemática para 'dar sentido' aos números negativos. Como será a representação da ideia de perdeu duas cartas? A intervenção da professora foi fundamental para organizar as ideias da representação '7 – 9' ao invés de '9 – 7', natural da escrita dos alunos.*

Questiono os professores se essa intervenção é ruim? Teria uma forma de deixar o aluno representar sozinho essa operação? Alguns respondem que *as dificuldades de interpretação também atrapalharam na resolução*; *A forma de organização das atividades também indica a intervenção da professora. Se fosse a representação dos alunos seria um emaranhado de números, e o professor deveria identificar as duas formas do aluno; colocaria uma carta para representar a quantidade inicial, depois representaria perdeu nove e ganhou 7. Retiraria a carta fazendo com que os alunos percebessem que o valor inicial não faria diferença. Poderia representar vários valores iniciais e verificar que em relação a esse valor sempre teríamos duas cartas a menos.*

A carta indicada pela professora poderia ser substituída por uma letra, as ideias e os conceitos das primeiras expressões algébricas já poderiam aparecer. Pode-se realizar uma escolha ou caminhamos apenas com resoluções aritméticas ou podemos iniciar os estudos de alguns conceitos da Álgebra escolar, por exemplo, representar os valores desconhecidos por letras. Isso revela um caminho 'natural' entre o ensino concomitante entre os inteiros relativos e a Álgebra escolar. O mais interessante da discussão seria o grupo determinar o objetivo da atividade, porém com minha intervenção, uma das possíveis respostas foi dada e pelas regras implícitas nas formações, dificilmente haveria contestações por parte dos professores, principalmente, se tratando de um assunto em que todos não tinham convicções e certezas bem demarcadas.

Outro ponto bem interessante foi em relação ao acréscimo dos sinais de ‘mais’ e de ‘menos’. Segundo alguns professores do grupo, os alunos conseguiriam realizar. Porém, nesse caso, *a intervenção do professor seria o ponto mais interessante, ele teria que corrigir os erros dos alunos* e, nesse caso, s*erá que procedendo a correção diretamente das atividades daria a possibilidade de os estudantes organizarem seus aprendizados?* Ou *estaria apenas fazendo com que eles reproduzissem as técnicas ensinadas?*

Portanto, segundo o grupo, a correção da professora interferiu nas respostas finais dos estudantes. Em vários registros temos as mesmas soluções, sempre imprescindível mensurar a mediação do professor regente, ou seja, até que ponto suas intervenções impossibilitarão ou possibilitarão à construção dos conhecimentos.

Assim, finalizamos esse encontro determinando como objetivo para o próximo, construir a parte introdutória da proposta de ensino alternativa àqueles presentes no *Modelo Dominante* dos inteiros relativos. Dessa forma, um novo questionamento surgiu: Q_9, bem como suas respectivas respostas, $R_{9.1}$ *e* $R_{9.2}$.

Q_9: QUE ATIVIDADES, PROBLEMAS E ESTRATÉGIAS DEVEM COMPOR UMA INTRODUÇÃO DE UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA Z?

No dia 26 de junho de 2019, com a participação de 7 professores, ocorreu o 7° encontro. A partir dele elenquei alguns elementos que também me permitiram construir a resposta $R_{9.1}$ e acrescentando a esses resultados minhas pesquisas e análises sobre os inteiros relativos, também construí a resposta $R_{9.2}$, resposta coração do grupo de professores. Segundo o cronograma, teríamos mais dois encontros, porém, devido ao movimento político em Campo Grande/MS, essa foi a nossa última reunião.

Iniciamos as discussões a partir de algumas dificuldades.

A primeira apresentada[64] foi sobre a comparação entre inteiros relativos, principalmente por se tratar de dois inteiros negativos. Tal dificuldade foi marcada pela mobilização de técnicas dadas nos números naturais. Por exemplo, como 10 é maior que 5, os alunos afirmariam que '–10' é maior que '–5'. Nesse sentido, o propósito das discussões dessa reunião era propor estratégias, atividades e intervenções para sanar tais dificuldades.

A segunda dificuldade apresentada foi vinculada aos sinais de '+' e de '–'e ao uso dos parênteses nas expressões. Por exemplo, na seguinte operação, '(– 4) – (– 2)', erros de cálculos poderiam surgir, primeiramente pela dificuldade das ideias atribuídas ao sinal '–', bem como pelos estudantes mobilizarem algumas técnicas válidas para os naturais. Segundo os professores dos laboratórios, por eles não compreenderem ainda todos esses novos significados, os estudantes ignoram um dos sinais '–' e realizam a subtração como se operação fosse '4 – 2', apresentando como solução, '2'. Nesse contexto, os professores ainda acrescentaram que *tanto para comparar inteiros quanto para operá-los, algo que surge é o campo de validade da técnica que são mobilizadas, um desafio seria atividades motivadoras e para introduzir os inteiros que visem trabalhar esses aspectos.*

Portanto, o tema abordado por esses professores diz respeito às técnicas mobilizadas para os números naturais, empregadas para as atividades com os inteiros relativos. Nesse caso, as discussões estariam mais voltadas às ideias de obstáculos epistemológicos do que alcance das *técnicas*. Aparentemente, as *técnicas* conhecidas para os naturais estão sendo obstáculos à aprendizagem de outras *técnicas* para os inteiros

[64] Para retornar à página 79, R_4: *Comparar o ensino de Z por meio dos modelos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 202, R_{III}^{Z}: *Elementos e aspectos relevantes da proposta* ..., clique aqui.

negativos. A sugestão apresentada pelo grupo seria a ideia de atividades motivadoras, aquelas em que as situações aparecessem para serem discutidas com os estudantes.

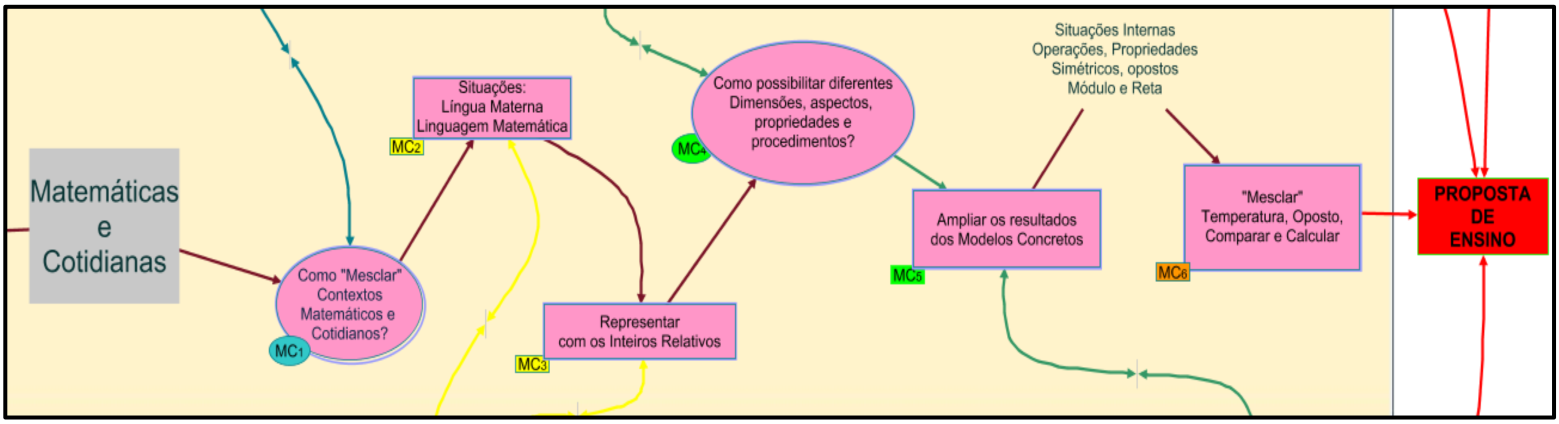
A terceira dificuldade se deu pela compreensão, por parte dos estudantes, que um número inteiro negativo, como '– 2', representa uma medida ou uma quantidade. *Como transpor o pensamento, possuo '– 2 reais'? Ou a distância é de '– 2 metros'?* Caraça (1951) tratou da movimentação de objetos sobre a reta, em que os movimentos em sentidos opostos se davam pela mobilização dos sinais. Nesse sentido, o objetivo da proposta alternativa poderia ser o mobilizado por este autor. Ou ainda, com o objetivo de introduzir os números inteiros negativos como resultado de uma operação, por exemplo, perdi duas figurinhas, mobilizando as ideias transformação ou de relação para os inteiros relativos (BORBA, 2009).

A quarta dificuldade discutida foi sobre o trabalho com jogos matemáticos, *devemos evitar o jogo pelo jogo, ou seja, trabalhar com registros mais sistemáticos, estabelecendo 'pontes' entre o que foi discutido no jogo e os conceitos que serão ensinados.* Esse debate teve por base os estudos da pesquisadora Cid (2015), quando tratou dos processos de modelização matemática, no caso, inverte-se essas ideias, mobiliza-se uma situação cotidiana para modelizar os inteiros relativos, e mais, como se a compreensão das 'regras' de tal situação, por se assemelhar com alguns aspectos do conteúdo matemático fossem suficientes para a sua aprendizagem.

A quinta dificuldade foi relativa às situações do cotidiano: sugeriu-se que fossem trabalhadas outras situações além da monetária. Segundo a crítica realizada por Cid (2015), os modelos concretos, algo criado e pensado para facilitar a aprendizagem, promove em situações futuras novas dificuldades de aprendizagem.

A sexta dificuldade: tabelas com 'jogos de sinais'. O objetivo é que os estudantes não mobilizem as regras dos sinais da multiplicação para as adições algébricas. A crítica levantada pelos professores foi sobre o ensino ser dividido em partes, *ensina-se todas as regras, algoritmos e procedimentos das operações de adição e subtração, todos os problemas e desafios pautados nessas operações, para depois, então, iniciar os estudos das operações de multiplicação e divisão, realizando as mesmas atividades e procedimentos para essas operações.* Por fim, trabalha-se com todas as operações, tal forma de ensino, causa algumas dificuldades já mencionadas.

Para a continuação da escrita, descrevemos nossas ações por meio de um Diagrama de Ações, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada ação será identificado por "**X**$_n$" e o fim "**X**$_n$ **– Fim**". Apresentamos contexto matemático-concreto (MC).



MC$_1$ **– Como mesclar contextos matemáticos e cotidianos**[65]**:**

Nesta ação, buscamos pôr em prática a deliberação consensual do grupo de estudos. A experiência dos professores e o *Modelo Dominante* eram pautados em contextos concretos, e os nossos estudos em modelos internos à matemática. Assim, a busca por construir uma proposta baseada em ambos os contextos foi o desafio.

Iniciamos pela parte introdutória dos inteiros relativos. Nessa parte, os estudantes devem admitir, a partir desses novos estudos, algo menor que zero. Justamente, as novas atividades tratarão dos inteiros relativos. Todo o contexto inicial, as situações trabalhadas e as atividades desenvolvidas devem se pautar na ideia da aprendizagem desses novos números, visto que o conceito de número positivo está muito conectado a sua cardinalidade, ampliando as discussões das ideias de medida e visando a aceitação da representação dos números inteiros negativos, de forma a se contestar a existência, por exemplo, de '– 4' balas. Nesse caso, as ideias de medida e a cardinalidade do número aparecem como um obstáculo.

Pensando que os estudantes compreenderam que existem os inteiros relativos, como realizar operações do tipo, '3 – 5'? Como realizar tal operação? Visto que até então, de três não se podia tirar cinco. Além dos concretos, esse pode ser outro contexto de introdução dos inteiros relativos que, segundo Caraça (1951), seria a impossibilidade da operação de subtração com os naturais. Para resolvê-la, esse autor pôs em prática o conceito da negação da negação, ou seja, admitindo que subtrações desse tipo poderiam ser realizadas. Esse movimento permitiu a construção dos inteiros relativos. Por outro lado, se articularmos essa impossibilidade da subtração nos naturais às situações

[65] Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

motivadoras, como aquelas que geraram a expressão, ‘duas figurinhas a menos’, criamos outro contexto de introdução dos inteiros relativos, caminho seguido para a proposta do grupo. Tal trabalho pode-se dar a partir da mobilização de operações na reta, por exemplo: ‘2 – (–5)’ e ‘–3 – (–7)’ em que o sinal de “–” é apresentado com dois significados, o de operação e o predicativo unitário, indicação de um número negativo. Nesse sentido, o número ‘zero’ pode ser interpretado não apenas como ausência, mas, também como resultado da operação de dois valores opostos. Ou ainda, como valor representante da separação numérica dos valores positivos e negativos, dados na reta numérica dos inteiros relativos.

As justificativas às técnicas ensinadas também devem ser organizadas: como justificar essas técnicas sem demonstrá-las? Sem mobilizar os conceitos matemáticos mais formais de estruturas algébricas? A mobilização de contextos variados e dos diversos aspectos do conteúdo dos inteiros relativos, como as ideias das operações, foram algumas das sugestões mais comentadas, retomando assim, o trabalho da pesquisadora Borba (2009). A *razão de ser* dos inteiros relativos também foi discutida, ou seja, em que ou para que os inteiros relativos fazem parte do cotidiano dos alunos?

Um professor afirmou que, *a forma de introduzir os inteiros pode ‘dar um nó na cabeça’ dos estudantes, eles são trabalhados por meio da aproximação com seu dia a dia, com falsas justificativas e com criações artificiais, não permitindo que os estudantes deem sentido para esses números, os problemas com os naturais ficam maiores ainda, ficando a impressão que aquilo que já aprenderam não conseguem colocar mais em prática.*

Como essa foi nossa última reunião, para a construção da resposta coração do grupo e da proposta de ensino alternativa, pautei-me nos consensos do grupo para a construção da proposta alternativa às constantes no *Modelo Dominante*: *Mesclar os contextos históricos, com atividades internas à matemática, com problemas do cotidiano. Registrar frases do tipo: ‘perdi duas figurinhas’, ‘tenho dois passageiros a menos’, ‘tive um prejuízo de dois reais’, propiciando situações em que os estudantes necessitariam dos inteiros negativos para solucionar problemas.* **MC_1 – Fim.**[66]

[66] Para ir à $MC_{1.1}$ – *Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os links direcionando para os demais locais.

$R_{9.1}$: ATIVIDADES, PROBLEMAS E EXERCÍCIOS DOS MODELOS CONCRETOS E ALGÉBRICO

A resposta $R_{9.1}$, além das discussões ocorridas no grupo de estudos, também foi pautada no *Modelo Epistemológico de Referência*, no qual organizamos[67] os modelos de ensino estudados nos encontros do grupo de professores em dois: Aritmético e Algébrico.

$C_{2.1}$ – Linguagem Materna x Linguagem Matemática[68]:

No modelo aritmético, a aprendizagem dos conceitos, conteúdos e procedimentos dos inteiros relativos é dada pela articulação entre uma suposta familiaridade dos estudantes com o modelo em jogo e o consequente domínio de suas regras de mobilização. Esses aspectos são os que supostamente propiciam e 'facilitam' a aprendizagem dos estudantes.

Por exemplo, para alguns pesquisadores, afirmam Cid e Bolea (2010)[69] que,

> o comportamento de um modelo específico 'se assemelha' ao de números inteiros e, portanto, seu conhecimento nos permite deduzir as propriedades desses números. Para isso, os objetos do modelo concreto são interpretados como 'magnitudes opostas ou relativas' e postula-se que é necessário expressar a medida dessas grandezas de magnitude com um número natural precedido pelo sinal '+' ou pelo sinal '-', que justifica a consideração do número atribuído a esse novo objeto matemático. (p. 576, grifo dos autores, tradução nossa)[xxvii].

Nesse excerto, fica claro que poucas características dos inteiros relativos estão sendo abordadas nos modelos concretos. Obviamente que não se pretende encontrar um modelo que abranja todos os conceitos, definições, procedimentos e propriedades dos inteiros relativos, mas a crítica que as autoras trazem é a respeito da falta de estudos acerca daquilo que os modelos não permitem explorar e, consequentemente, se o ensino está focado apenas nos modelos concretos, outros aspectos importantes podem não ser estudados. Sendo assim, teremos um ensino superficial e demasiadamente interessado nos conceitos possíveis de serem explorados por meio apenas dos modelos concretos mobilizados.

---

[67] Retornamos, a partir dessa parte da tese, usando a 1ª pessoa para representar minhas vivências e a 3ª pessoa para as experiências entre mim e a professora Marilena, minha orientadora.

[68] Descrevemos nossas ações por meio de um *Diagrama de Ações*, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada ação será identificado por "**X_n**" e o fim **"X_n – Fim"**.

[69] Para retornar à *C_2 – Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.
Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.
Para retornar à página 163, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

Outro fato importante é a forma como são conduzidas as atividades, pois, geralmente, nos processos de modelagem matemática, desenvolve-se um modelo matemático para representar algumas características de uma certa realidade a ser estudada, podendo ser intra ou extramatemática. Assim, além de haver uma inversão das características da modelagem matemática, esses modelos concretos não propiciam (obviamente) essa recuperação parcial do sistema a qual se pretende ensinar. Por exemplo, em um modelo que trate os números inteiros relativos como andares de um prédio, não é possível estudar as ideias de simétrico ou de ordenação e, a crítica reside justamente no fato de que se cria outro modelo para fazê-lo ou simplesmente estas ideias são apresentadas sem a ajuda do modelo, gerando conflitos e não favorecendo a aprendizagem dos estudantes.

Outros dois aspectos que devem ser observados são os processos de institucionalização e como são conduzidos os registros das atividades, ou seja, os cuidados nos processos de ensino que podem propiciar novas oportunidades de aprendizagem. Para a institucionalização, percebemos que o simples fato de o aluno dominar as características do modelo concreto, leva alguns docentes e alguns autores de livros didáticos a crerem que eles já aprenderam os conceitos ensinados via modelo e não enfatizam o momento de formalização desses aspectos estudados. **$C_{2.1}$ – Fim.**[70]

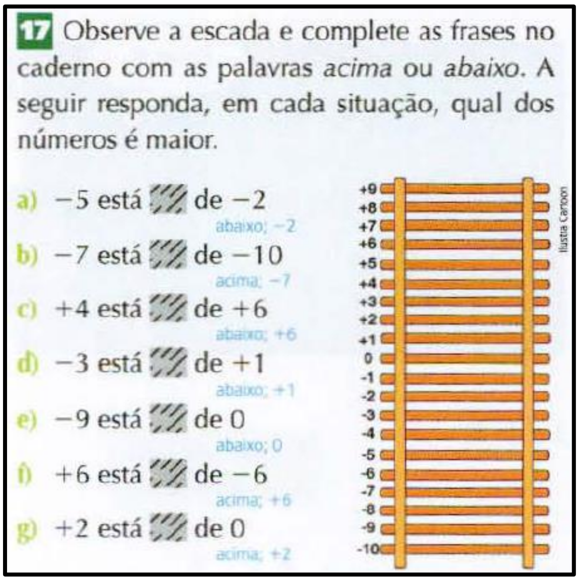
O segundo aspecto – registro das atividades – está intimamente ligado ao primeiro, pois tanto modelos concretos quanto as atividades com jogos demandam exploração de estratégias que permitam registros daquilo que está ocorrendo nas atividades, ou seja, tanto as conjecturas quanto as soluções criadas pelos estudantes. Nesse sentido, os registros farão parte do momento da formalização, da estruturação dos algoritmos e procedimentos, podendo ainda ser mobilizados como justificativas para o estudo de um algoritmo.

C_4 – comparar inteiros relativos, C_5 – Associar inteiros relativos aos pontos da reta e C_6 – Valor absoluto e simétrico:

Os modelos de ensino pautados nas ideias aritméticas, podem ser interpretados como de deslocamento e de neutralização[71]. Uma das justificativas para se mobilizar esses

[70]Para ir à C_3 – *Início*, clique aqui. Para ir à C_2 – *início*, clique aqui.
[71] Para retornar à página 84, R_5*: Identificar e Descrever Modelo Dominante* ..., clique aqui.
Para retornar à página 110, R_8*: Dificuldades e Erros: Sinais* ..., clique aqui.
Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

modelos é atribuída ao fato de algumas dificuldades de aprendizagem serem recorrentes, consequentemente, uma forma de contornar tal fato é a de criar situações mais próximas do conhecimento dos estudantes, do seu cotidiano ou de situações reais. Por exemplo, o sistema monetário e suas operações estão presentes na vida das pessoas de maneira geral. Esse sistema pode ser classificado como um modelo de neutralização. Vejamos: possuir um real é associado ao numeral ‘+1’ e perder essa mesma quantidade ao numeral ‘– 1’. Nesse sentido, quantidades opostas de mesmo valor se anulam ou se neutralizam. Retornando aos modelos de ensino pautados nas ideias de situações cotidianas, o modelo de deslocamento pode ser exemplificado por atividades na reta numérica. Vejamos:



17 Observe a escada e complete as frases no caderno com as palavras *acima* ou *abaixo*. A seguir responda, em cada situação, qual dos números é maior.

a) −5 está ▨ de −2 abaixo; −2

b) −7 está ▨ de −10 acima; −7

c) +4 está ▨ de +6 abaixo; +6

d) −3 está ▨ de +1 abaixo; +1

e) −9 está ▨ de 0 abaixo; 0

f) +6 está ▨ de −6 acima; +6

g) +2 está ▨ de 0 acima; +2

Figura 9- Exemplo do Modelo de Deslocamento
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 62

Os modelos mais utilizados são os que representam termômetros, avanços ou retrocessos ao longo de um caminho, altitudes acima ou abaixo do nível do mar, elevadores ou escadas indicando subidas ou descidas, linhas do tempo que representam períodos antes e depois de Cristo. Um ou mais desses modelos são estudados para o trabalho com a reta numérica e deslocamentos sobre ela. Esse aspecto também caracteriza o *Modelo Dominante* dos inteiros relativos.

A classificação dos modelos de ensino como de neutralização ou de deslocamento geram três novas maneiras de interpretações para os sinais de ‘mais’ e de ‘menos’, são elas:

> sinais ‘predicativos’ quando indicam a ‘positividade’ ou ‘negatividade’ do número, ‘operatórios binários’ quando representam operações binárias de adição ou subtração e ‘operatórios unitários’ quando indicam a operação unitária que afeta o sentido positivo ou negativo do

> número, mantendo-o ou transformando-o na direção oposta. (CID, 2003, p. 5 - 6, tradução nossa)[xxviii].

Em um desdobramento de nossa pesquisa de mestrado, concluímos que o sinal de menos pode representar "três situações: representativo de um negativo, operação de subtração e simétrico". (GONÇALVES, BITTAR, 2017, p. 110). Essas novas interpretações para o sinal de menos, podem gerar dificuldades tanto de ensino como de aprendizagem. Nesse novo contexto, o estudante terá que ser capaz de verificar quando o sinal de menos representa um número negativo, uma operação de subtração e o simétrico de um número inteiro. Para Cid (2003, p. 5, tradução nossa), "nos modelos de neutralização, os sinais predicativos se referem a medidas de quantidades de magnitude de sentidos opostos que se neutralizam; enquanto sinais operatórios binários e unitários são identificados com ações de adição, coleta, remoção, separação etc.". Ambas as interpretações dadas para o sinal de 'menos' são bem semelhantes no tocante à matemática produzida nessa etapa de ensino e a alguns contextos trabalhados por Caraça (1951).

Nessa perspectiva, mostramos dois cenários possíveis para o ensino dos inteiros relativos. Cada qual alocados em seu tempo, espaço e instituição, que os proveem de características provenientes dessa organização ecológica própria. Cada uma dessas características é fruto das relações institucionais e de aspectos que compreendem o nível da *Sociedade*, seus impedimentos oriundos de suas *restrições* e das circunstâncias de existência desses objetos. Nesse sentido, mobilizamos os níveis de *codeterminação* para mostrar que a proposta de ensino alternativa àquelas constantes no Modelo Dominante atende ou pode atender aos professores dessa rede de ensino, uma vez que foi construída a partir de estudos realizados com eles. Incluímos a leitura de outros textos que retratam outras realidades que se aproximam em muitos aspectos ao da rede de Campo Grande/MS.

No tocante aos modelos denominados de algébricos, traremos um exemplo retirado do nosso segundo encontro com os professores, em que foi proposto a eles que analisassem duas formas de ensino, uma retirada do livro didático Praticando Matemática (ANDRINI, VASCONCELOS, 2012) e outra de uma disciplina cursada para os créditos do meu processo de doutoramento. Em nossos estudos iniciais para a preparação dos encontros, essas duas propostas foram consideradas conflitantes, pois suas formas de condução das aprendizagens eram bem diferentes. Enquanto uma é 'modelada' por contextos concretos, mais próxima ao *Modelo Dominante* em que a aparente aproximação de alguns aspectos do modelo ao conteúdo dos inteiros relativos é suficiente para a aprendizagem – que em muitos casos apenas esses aspectos do conteúdo são estudados, ou seja, aqueles que o modelo permite explorar –, outra parte de um contexto interno à própria matemática, como motivação para a aprendizagem dos inteiros relativos. Nesse modelo, os conceitos e definições dos inteiros relativos são explorados a partir de contextos matemáticos que para serem resolvidos há necessidade da mobilização dos inteiros relativos. **C_6 – Fim.**[72] A Figura a seguir retrata um exemplo de atividade mobilizada na proposta alternativa.

3. Resolva as seguintes operações:

a) 16 + ... = 61	b) .... + 54 = 71	c) .... + 45 = 81	d) 38 + ... = 85
e) .... + 30 = 34	f) 50 + 15 = ...	g) 18 + ... = 58	h) 90 + 12 = ...
i) 5 + ... = 0		j) 8 + ... = 0	k) .... + 7 = 0

Resp.: 0 – 5 = – 5, ou,
5 + (0 – 5) (associativa)
(5 + 0) – 5 (elemento neutro)
5 – 5 (simétrico)
0.

Figura 10- Atividade analisada nos encontros com os professores dos LAM
Fonte: Autor da pesquisa

Debatemos que essa atividade poderia criar um contexto matemático para se introduzir os inteiros relativos e elementos da técnica para adicionar dois inteiros relativos, por exemplo, na letra ‘i’. Para o exercício, ‘9 + ... = 7’, a solução seria ‘– 2’, resultado da subtração ‘7 – 9’. Pensando na possibilidade de se verificar que ‘– 2’ é realmente a solução, poderia propor a seguinte justificativa,

‘9 + (7 – 9)’ (associativa)

‘(9 + 7) – 9’ = ‘7’

‘16 – 9’ = ‘7’

‘7’ = ‘7’

Essa é, de fato, uma justificativa possível do ponto de vista matemático, porém, uma questão deve ser levantada sobre o grau de dificuldade que os alunos podem ou não ter. Por exemplo, a última igualdade, nela temos um novo significado para o sinal de igual, fato que deve ser discutido com os estudantes. Nesse contexto, que não é recorrente nas aulas de matemática do *Modelo Dominante*, todo esse tratamento matemático seria um empecilho para o desenvolvimento das atividades desse tipo? Segundo a conclusão

[72]Para ir à C_7 – *Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.

do grupo de estudos, sim, o trabalho com as propriedades e com o novo significado do sinal de igual, traria dificuldades extras para o ensino dos inteiros relativos. Ainda tratando dessas atividades, para uma adição com números relativamente grandes, essa nova ideia de inteiros relativos, um procedimento que facilitaria os cálculos seria o de substituir esses números por uma subtração de sua 'classe de equivalência'. Os participantes argumentaram que essa ideia seria excelente, mas os obstáculos seriam a defasagem de alguns conteúdos basilares e a falta de maturidade em lidar com as propriedades associativa e comutativa.

O número '– 2' pode ser solução das seguintes subtrações, '1 – 3'; '3 – 5'ou '0 – 2', ou seja, em sua 'classe de equivalência' teríamos: '– 2': (1, – 3); (3, – 5); (0, – 2). Durante as discussões nesse encontro, tratamos das ideias de como seria possível criar essas 'classes de equivalência', representadas por diferentes subtrações cujos resultados são o mesmo número inteiro negativo. Claramente, os professores não foram muito adeptos, justificando que isso iria requerer dos estudantes um envolvimento e um nível de aprendizagem além daqueles que possuem no 7° ano. Os professores relataram outras dificuldades mais elementares em jogo, tais como a tabuada, o valor posicional, os algoritmos das operações com naturais, entre outros, antes que essas 'propriedades' fossem estudadas.

Um dos participantes relatou que '*essa proposta alternativa está fora dos padrões encontrados, por exemplo, nos livros didáticos. A mobilização das propriedades não é trabalhada em nossas salas de aula*'. Talvez estaria por detrás do ensino dessas propriedades '*a percepção de regularidades',* comenta um dos participantes. Todavia, nossas análises iniciais indicavam que se trata justamente das propriedades que justificam as tarefas que serão ensinadas durante a aprendizagem dos inteiros relativos. Sendo assim, as discussões no grupo favoreceram o confronto, pelos professores, de propostas constantes no *Modelo Dominante* com as alternativas a elas, por exemplo, do modelo algébrico. Pelas conclusões do grupo, a proposta alternativa ideal seria aquela que mesclasse ambas as concepções, aspectos dos modelos concretos com elementos do modelo algébrico. O fechamento dos laboratórios de matemática não nos permitiu finalizar a proposta juntamente com os professores. Assim, organizei todas as discussões, análises e conclusões do grupo, numa espécie de resposta coração desse grupo. Tal resposta foi primordial para a construção da proposta final alternativa às constantes no *Modelo Dominante* quanto para complementar outros aspectos debatidos e incorporados ao *Modelo Epistemológico de Referência*.

$R_{9.2}$: RESPOSTA CORAÇÃO DO GRUPO DE PROFESSORES

Para a construção da resposta coração do grupo, trouxe um resumo dos principais temas debatidos com os professores alinhados às nossas conclusões referentes aos estudos dos diversos materiais, propostas alternativas, artigos, pesquisas e análises dos encontros. Em meus estudos iniciais sobre a elaboração de uma proposta de ensino para os inteiros relativos e depois com os professores dos laboratórios de matemática, usei alguns textos como fonte de pesquisa. Nessas leituras preliminares, encontrei alguns subsídios para a preparação das atividades e das discussões que foram realizadas com o grupo de estudos como tentativa de nos emanciparmos do *Modelo Dominante*, obviamente, por meio dos estudos promovidos pelos elementos do *Modelo Epistemológico de Referência*.

$MC_{1.1}$ – Como mesclar contextos matemático e cotidianos[73]:

Nesta ação, discuti com os professores algumas justificativas tratadas por Cid (2015) para o ensino dos inteiros relativos se dar ao mesmo tempo que a introdução à álgebra, por estar convencido da importância de mobilizar também esses na introdução dos estudos dos inteiros relativos. Apontei algumas defasagens, problemas e dificuldades que o ensino dado por modelos concretos poderia propiciar à aprendizagem dos estudantes. No trabalho com os professores, chamou a atenção a grande resistência e consequente baixa aceitação do modelo para o ensino de números inteiros relativos. Os motivos apontados pelos professores podem ser interpretados por algumas *restrições* que permeiam a instituição anos finais do ensino fundamental de Campo Grande/MS. *Restrições* provenientes do nível da *Sociedade*, por exemplo, os conteúdos trabalhados sempre em forma de síntese, não favorecendo a mobilização de questionamentos ou do nível da *Pedagogia* em que o modelo de ensino privilegiado é o pautado na transmissão de conteúdo, bem como pelo consenso do grupo: falta de maturidade matemática, por parte dos estudantes, para lidar com propriedades e regularidades; as defasagens referentes aos conteúdos mais básicos influenciariam na aprendizagem dos contextos matemáticos, ou seja, o trabalho com contexto concreto permite os estudantes realizar

---

[73] Descrevemos nossas ações por meio de um *Diagrama de Ações*, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada ação será identificado por "**Xn**" e o fim "**Xn – Fim**". Apresentação da ação MC_1 do contexto Matemático e Cotidiano.
Para retornar à MC_1 *– Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.

analogias entre os modelos concretos e o conteúdo ensinado por meio de seus conhecimentos prévios sobre as situações estudadas.

Para exemplificar essa situação apresentamos um episódio ocorrido nos encontros com os professores dos laboratórios de matemática de Campo Grande/MS. Em uma das conversas, comentou-se acerca da necessidade de criar uma situação de ensino pautada apenas em contextos intramatemáticos, o que causou estranhamento em muitos professores, provocando um conflito entre os participantes. Pudemos identificar dois grupos distintos, um que defendia a proposição de atividades semelhantes às constantes no livro didático, justificado por *estar tudo claro e pronto*, e outro que queria *um meio termo*, que mesclasse as atividades do livro didático com *a proposta motivadora*. Esta, por sua vez, *seria o outro extremo aos contextos propostos no livro didático*.

Após alguns instantes de debate, o consenso foi que a proposta do grupo deveria mobilizar uma espécie de adaptação entre as duas discutidas. Os professores justificaram essa ideia baseando-se no fato que os estudantes estão *em defasagem em relação a alguns conteúdos, além da falta de maturidade com a mobilização das propriedades matemáticas, algo inerente às atividades de cunho matemático*. Nesse sentido, tal consenso foi o resultado da ação $MC_{1.1}$ e norteador para a construção e finalização da proposta de ensino iniciada pelo grupo.

Pensou-se em organizar uma proposta que mesclasse os modelos concretos e os modelos algébricos, ambos debatidos nos encontros. Essa proposta foi contrária às minhas concepções iniciais, fato que me incomodou um pouco, pois meu sentimento como participante e, agora pesquisador, era que as justificativas para essas propostas, mesmo que implícitas, se assemelhavam à ideia de 'educação pobre' para alunos 'pobres'. *Os alunos estão em defasagem em relação a alguns conteúdos, não estão acostumados a trabalhar com as propriedades matemáticas, se com problemas simples as dificuldades são grandes, imagina se trabalharmos com as propriedades*, esses são argumentos que indicam um preconceito com os estudantes que gera uma defasagem de aprendizagem por falta de oportunidades promovidas pelos professores. Porém, na perspectiva teórica e metodológica da Teoria Antropológica do Didático, não se trata de impor pontos de vista ao professor, pois, é preciso quebrar com os paradigmas vigentes, porém, isso não pode ser feito por meio de imposições.

Diante do exposto até aqui, para a organização da proposta, visando o ensino dos inteiros relativos, consideramos aspectos mais relevantes baseados nas *condições* e, principalmente, nas *restrições* identificadas no grupo de estudos. O objetivo era elaborar uma proposta que fosse ao encontro do que acredito, mas que também fosse, de certa forma, viável para os professores, factível, que contivesse algo que eles também acreditavam.

Um dos fatores que ficou bem marcado em nossos encontros, exemplificado anteriormente pelo episódio retratado, foi que a proposta deveria ser uma articulação entre dois modelos, o vigente (modelos concretos) e o proposto por Cid (2015) (modelos algébricos), que propõe uma introdução simultânea dos ensinos da álgebra escolar e dos inteiros relativos. Mais uma vez, reforço que algumas ideias provenientes do grupo foram pautadas em um ensino muito empobrecido, sem propiciar aos estudantes novas formas de aprendizagem e novas oportunidades de superação das defasagens, bem como de aprofundarem seus conhecimentos matemáticos. Não tenho a pretensão de afirmar que tenho a solução para os problemas de ensino dos inteiros relativos, porém, os estudos que realizei apontaram para resultados que alertam sobre as dificuldades de aprendizagem de alguns de seus aspectos.

Com o fim do grupo de estudos, direito usurpado por uma política imposta pela Prefeitura Municipal de Campo Grande, tive por dever finalizar essa proposta e, consequentemente, algumas das minhas convicções se sobressaíram sobre o consenso do grupo, consenso que vai de encontro com verdades defendidas por nós. Umas das justificativas para todas as mudanças é que aspectos que foram consensuais no grupo reforçam obstáculos já apresentados, assim, se queremos elaborar uma proposta que possa auxiliar os professores nas dificuldades que os estudos apontaram, não podemos organizar uma sequência de ensino que favoreça tais dificuldades. Qual o sentido de apresentar uma proposta que repete os mesmos erros apontados pela nossa e por outras pesquisas?

Assim, apresentamos uma proposta baseada em todos esses aspectos citados, ressaltando que foi em parceria com os professores do grupo e que a responsabilidade foi minha, pois a organizei e a preparei seguindo as sugestões cabíveis, aquelas que não fossem contra ao que acreditava e ao que os estudos mostraram. **MC$_{1.1}$ – Fim.**[74]

[74]Para ir à *MC$_2$ – Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.

Q_{10}: COMO ESCREVER UM RELATÓRIO DE PESQUISA QUE DÊ CONTA DE EVIDENCIAR TODO O PROCESSO DE PRODUÇÃO E ISSO DE MODO COERENTE COM A PERSPECTIVA TEÓRICA ADOTADA?

A décima questão foi construída a partir da necessidade de explicitar o movimento da escrita da tese, expondo algumas escolhas mediante a apresentação dos objetivos e da metodologia, bem como dos procedimentos metodológicos construídos e mobilizados no decorrer da pesquisa.

Usamos uma das ferramentas da Teoria Antropológica do Didático, o *mapa de questões e respostas*, como procedimento metodológico para representar nosso *Percurso de Pesquisa*. Acreditamos que as pesquisas podem ser assim expressas, pois a partir de uma questão geratriz, desenvolve-se um caminho investigativo repleto de aspectos do *Paradigma Questionamento do Mundo*. O questionamento disparador não pode ter um fim em si mesmo, muito menos ter uma solução pronta e finalizada em um livro didático, por exemplo. Nesse contexto, a questão de pesquisa também não tem um fim em si mesma, sendo ampla o suficiente para propiciar outros questionamentos, porém, específica de modo a delimitar a pesquisa. Cada uma dessas novas questões gerará respostas que possibilitarão a construção de uma tese, uma dissertação ou uma resposta coração do percurso investigativo.

Assim, cada etapa do processo de doutoramento foi pensada a partir de um questionamento que nos possibilitou a construção de respostas provisórias, que por sua vez, nos encaminharam a construção da resposta coração da tese. Dessa forma, vemos que essa ferramenta foi mobilizada de forma coerente com nossa perspectiva teórica, a TAD e, consequentemente, o *Paradigma Questionamento do Mundo* e o *Percurso de Estudo e Pesquisa*.

$R_{10.1}$: OBJETIVOS DE PESQUISA

A construção dos objetivos de pesquisa junto com as escolhas teóricas nos permitiu escrever um relatório de tese condizente com nossa perspectiva teórica/metodológica. Nossos objetivos foram construídos no decorrer do percurso de doutoramento, ou seja, tínhamos uma questão norteadora, que foi se adequando com a organização e os desdobramentos dos caminhos de pesquisa. Uma das perguntas iniciais, a primeira questão de pesquisa foi: *Como construir uma proposta de ensino para os inteiros relativos, a partir do desenvolvimento de um Modelo Epistemológico de*

Referência, que deu origem a um Percurso de Estudo e Pesquisa mobilizado como metodologia de formação continuada?

Um dos objetivos iniciais era o de construir, juntamente com um grupo de professores dos laboratórios de matemática, uma proposta de ensino para os inteiros relativos, em que a metodologia dessa formação continuada fosse apoiada nos preceitos de *Percurso de Estudo e Pesquisa* pautado em um *Modelo Epistemológico de Referência*, construído no decorrer desse percurso. Assim, pretendíamos que esses professores vivenciassem alguns aspectos de um PEP-FP.

Essa ideia foi reorganizada primeiro, pelo fechamento dos laboratórios de matemática e, segundo, pela organização da formação continuada, ou seja, quantidade e períodos dos encontros, permissão para os professores se ausentarem das atividades, entre outras *restrições* advindas do nível da *Escola*. Essas formações se dão em quatro encontros anuais, sendo um por bimestre ou em reuniões pré-agendadas nos calendários escolares. As demais formações sempre ocorrem em horários alternativos, e minha experiência mostrava que essa configuração das formações quase sempre não era finalizada, além de ter uma grande rotatividade dos professores participantes.

Tentamos contornar alguns desses problemas provenientes dessas *condições*, propondo uma formação dada nos horários de planejamento desses professores, mobilizando a nova configuração dessas quatro formações anuais. A nova gestão da Superintendência de Gestão das Políticas Educacionais (SUPED), órgão responsável por tais formações, abriu precedente e parcerias com universidades e outras instituições para propiciar novos espaços formativos. Assim, nossa proposta de formar um grupo de estudos com esses professores poderia funcionar como um desdobramento dessas parcerias. Assim sendo, apresentamos essa proposta aos gestores da Secretaria Municipal de Educação (Semed) de Campo Grande/MS e iniciamos os nossos estudos acerca dos inteiros relativos, tendo por questão de pesquisa: Q_0*: Que proposta de ensino para Z é possível construir por meio da interação com um grupo de estudos de professores na perspectiva do PQM?*

Para construirmos uma resposta para esse questionamento pensamos e descrevemos alguns objetivos de pesquisa que orientaram a construção da resposta coração da tese, cujo objetivo geral ficou assim definido: *Analisar a construção de uma proposta de ensino para os inteiros relativos, resultante de uma formação continuada para um grupo de professores dos laboratórios de matemática da REME de Campo*

Grande/MS, desenvolvida com princípios do Paradigma Questionamento do Mundo. Para tanto, identificamos e analisamos conceitos, representações, procedimentos e escolhas didáticas propostas para o ensino dos inteiros relativos, aritmeticamente, algebricamente e historicamente em coleções de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental e em coleções do final dos anos 1800. Analisamos dificuldades de ensino e de aprendizagem referentes aos inteiros relativos e os aspectos da emancipação do *Modelo Dominante*, dadas por meio do *Modelo Epistemológico de Referência* construído e identificamos e analisamos *condições* e *restrições* das *instituições* envolvidas por meio das discussões ocorridas no grupo de estudos com os professores participantes, tanto para a complementação do *Modelo de Epistemológico Referência* e do *Modelo Dominante* quanto para a proposta de ensino alternativa àqueles constantes no *Modelo Dominante* para os inteiros relativos.

$R_{10.2}$: METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS DA PESQUISA[75]

A resposta $R_{10.2}$, referente à metodologia e aos procedimentos da pesquisa, está vinculada a praticamente todas as demais questões do nosso percurso de doutoramento. Todas as escolhas e ações realizadas durante os estudos constituíram a metodologia mobilizada nesta pesquisa, bem como os procedimentos escolhidos e construídos para cada etapa. Nossa busca por desenhar uma resposta sobre como escrever um relatório de pesquisa que evidenciasse nosso processo de produção de forma coerente com a perspectiva teórica adotada, sempre foi embasada nos marcos teóricos da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999). Nossa tentativa foi a de ser o que Chevallard (2013) denominou de *cidadão herbartiano* com *atitudes procognitivas*, lançando-nos sobre nossa questão pesquisa, dada por meio de um caminho investigativo denominado por este pesquisador de *Percurso de Estudo e Pesquisa* (PEP).

Uma pessoa inserida no *Paradigma Questionamento do Mundo* sempre será um *cidadão herbartiano* com *atitudes procognitivas*, ou seja, diante de uma pergunta sem resposta, se coloca em marcha para respondê-la, mediante novos estudos e consequente novos conhecimentos aprendidos. Diante desse cenário, em que se pretende construir uma resposta $R^{\heartsuit}$ a uma questão Q, como podemos construir e até mesmo validar tal resposta? Há um duplo movimento, primeiro, a pessoa ou grupo de pessoas, representantes de X no sistema didático S (X, Y, Q), que realizam essa tarefa, devem buscar na literatura

[75] Para retornar à página 18, Q_1*: Como constituir um grupo de estudos* ...? Clique aqui.
Para retornar à página 21, Q_1*: Como constituir um grupo de estudos* ...? Clique aqui.

disponível e relevante respostas já existentes para a questão Q. Essas respostas já produzidas e divulgadas por alguma instituição são denominadas de respostas prontas, conhecidas, $R^{\lozenge}$, aqui se faz a ligação ou relação com o *Paradigma Visita às Obras*. Também são parciais, já que não respondem totalmente à questão geratriz. Por sua vez, essas respostas devem ser validadas, verificando sua relevância para o estudo realizado por X. Esse movimento contraria alguns procedimentos do *Paradigma Visita às Obras* em que movimentos investigativos são praticamente inexistentes e as respostas prontas, geralmente, dadas pelos professores e validadas por eles, nunca são contestadas. Em segundo lugar, para se obter uma resposta R, deve-se mobilizar ferramentas retiradas de trabalhos de diferentes naturezas. A combinação da investigação das respostas prontas e parciais, $R^{\lozenge}$ e das diversas obras O, que são as ferramentas mobilizadas para o estudo e construção de R, definem um movimento denominado por Chevallard (2009d) como *Percurso de Estudo e Pesquisa* (PEP).

Nesse sentido, nossa construção metodológica seguiu os preceitos do *Paradigma Questionamento do Mundo*, mais precisamente de um *Percurso de Estudo e Pesquisa*. Como dissemos algumas vezes no decorrer dessa escrita o início dos nossos estudos para a realização dessa tese se deu a partir de algumas angústias remanescentes de nossa dissertação. Dessa forma, percebemos que diante de uma pergunta nunca antes feita para nós ou por nós, não a deixamos de lado, mas sim, nos propusemos a buscar uma resposta.

Diante de uma ruptura entre os *blocos técnico-prático* e o *bloco do saber*, constatada a partir da análise do processo de transposição didática entre a matemática formal e a proposta em um livro didático, e, pelo fato de diferentemente de outros conteúdos, as justificativas dadas para as técnicas utilizadas no EF estarem mais próximas de modelos concretos ou de criações didáticas do que de conteúdos matemáticos, alguns questionamentos surgiram: Por que o ensino dos inteiros relativos se dá dessa forma? Existem outras formas para ensiná-los? Há alguma de forma de se privilegiar essas justificativas matemáticas para essa etapa de ensino?

Na busca por essas respostas debruçamo-nos sobre alguns artigos, teses e dissertações que tratavam do assunto – os números inteiros – incluindo questões históricas e epistemológicas. Inicialmente, verificamos em que grau essa ruptura ocorreria em outros conteúdos da educação básica. De certa forma, pretendíamos investigar e modelar praxeologias presentes em livros didáticos, buscando identificar outros conteúdos para os quais este fenômeno pudesse ocorrer. Uma busca pela compreensão dos processos de transposição didática entre os conteúdos apresentados formalmente e seus respectivos ensinos na educação básica, identificando possíveis movimentos de criações didáticas semelhantes ao que ocorreram com as justificativas do números inteiros relativos.

Esse movimento nos permitiu verificar, sem entrar em mais detalhes, que, por exemplo, nos anos finais do ensino fundamental, para o esboço de uma parábola é ensinado determinar primeiro o vértice para, em seguida, marcar outros dois pontos simétricos ao vértice, portanto, o esboço é dado pela união desses três pontos. Todavia, não se explica o motivo de esses pontos não serem ligados por retas, por exemplo. Obviamente, as explicações matemáticas para esse fato habitam outro nível de escolaridade que, provavelmente, não são passíveis de serem apresentadas ao final do ensino fundamental. No entanto, não há necessidade de criações didáticas ou mobilização de outras áreas para o ensino das justificativas desse esboço, os conceitos envolvidos são todos matemáticos.

Outro exemplo que investigamos foi acerca dos números irracionais, como a demonstração de que $\sqrt{2}$ é irracional. Existem algumas provas para que se demonstre que ele é irracional, por exemplo, por meio de frações irredutíveis, que a depender da maturidade matemática dos estudantes e o quanto estão familiarizados com as ideias de prova, poderia ser uma boa atividade para desenvolver com os estudantes do ensino médio, pois trata-se de uma prova por absurdo que envolve as ideias de números primos entre si e os conceitos de paridade, além da definição de um número racional.

Outras possíveis demonstrações mobilizariam o teorema fundamental da álgebra, frações contínuas, propriedades geométricas ou ainda, o princípio da boa ordenação, enfim, conteúdos que comumente não são lecionados ao final do ensino fundamental e que demandariam outros conhecimentos.

Não obstante, novamente não há necessidade de criações didáticas, pois, basta usar o fato de que um número irracional não pode ser escrito na forma de uma fração além do conceito de números pares. Esse fato nos parece algo pertinente e que não causa a ruptura que observamos nos inteiros relativos.

No segundo movimento de pesquisa, analisamos propostas de ensino dos inteiros relativos presentes tanto em livros didáticos quanto em produções acadêmicas de outros países, buscando compreender como estes números eram apresentados. Algumas questões nortearam nossa investigação, tais como: existem outras formas para se ensinar os inteiros relativos? Há alguma forma de se privilegiar as justificativas matemáticas para essa etapa de ensino? Iniciamos com análises de algumas propostas em países da América Latina, e podemos dizer, resumidamente, que essas apresentavam aspectos bem semelhantes às que encontramos aqui no Brasil. A única exceção da nossa pesquisa foi o artigo "O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números relativos", propondo uma forma diferenciada de ensino dos inteiros relativos (BORBA, 2009).

Também estudamos algumas propostas provenientes da Europa, em especial da Espanha e da França, e, novamente, deparamo-nos com propostas bem semelhantes às brasileiras. Nesses países, encontramos duas exceções, a gênese dos inteiros relativos da pesquisadora Cid (2015) e a proposta de ensino dos pesquisadores Berte *et al.* (2008). Esses dois textos articulados com o artigo de Borba (2009) foram os mobilizados na escrita da resposta R_{II}^{Z}, parte da resposta coração. Não afirmamos aqui, que apenas esses três textos trazem propostas para os inteiros relativos, mas foram os que em nossa pesquisa apareceram com as características já descritas.

Essa pesquisa que empreendemos por outros países teve por objetivo investigar elementos que caracterizassem a sobrevivência das praxeologias dos inteiros relativos nesses países. Buscamos por um *bloco tecnológico-teórico* presente no ensino obrigatório, diferente ou com aspectos diferentes dos que encontramos nas propostas brasileiras. Entretanto, nossas análises permitiram-nos identificar elementos de um *Modelo Dominante* semelhante ao que encontramos em nossa dissertação, ou seja, as justificativas das técnicas ensinadas se davam por criações didáticas semelhantes às que já havíamos identificado, baseadas em modelos concretos.

Buscamos também por algumas restrições provenientes tanto do *contrato escolar*[76] quanto do *pedagógico* que pudesse influenciar os *contratos didáticos*. Nesse contexto, as características das organizações tradicionais de ensino foram as mais preponderantes, revelando aspectos que já havíamos descrito para o *Modelo Dominante* dos inteiros relativos. Nas atividades matemáticas propostas, não há espaço para formulações de novas questões, aquelas não previstas e para nortear o desenvolvimento das *técnicas* matemáticas a serem estudadas. Segundo Barquero, Bosch e Gascón (2007),

[76] Um *contrato didático* só pode se manter se estiver vinculado a um *contrato pedagógico* e, mais ainda, quando este está vinculado a existência de um *contrato escolar*. Isso se dá, pois os *contratos escolar* e pedagógico, 'impõem' seus conteúdos, regras e as formas de funcionamentos, afetando, em parte, os tipos de contratos didáticos possíveis de sobreviver nas instituições, mas devemos considerar que os contratos didáticos estão ligados principalmente ao conteúdo a ser estudado.
Para retornar à página 21, Q_1: *Como constituir um grupo de estudos ...*, clique aqui.

em contextos com essas particularidades, “não se concebe, [...] nenhuma possibilidade de que a própria atividade científica, ao tentar responder a uma situação problemática, permita fazer perguntas (e causar o surgimento de respostas) que sejam significativamente novas e que não sejam previstas antecipadamente” (p. 532).

> Em resumo, o ensino escolar das ciências é proposto a partir de um paradigma estático (que é bastante transparente) e onde não apenas as respostas, mas também as perguntas, as técnicas permitidas para abordar essas questões e os elementos tecnológico-teóricos que permitem justificar e a interpretar essas técnicas estão completamente predeterminados. (p. 531 – 532, tradução nossa)[xxix].

Nosso terceiro movimento de pesquisa, se deu por minha inquietação proveniente dos estudos e das dificuldades em descrever o *bloco do saber* em nossa pesquisa de mestrado (GONÇALVES, 2016). Assim, buscamos compreender como esse bloco, identificado nas pesquisas, é usado por outros pesquisadores, bem como poderia ser mobilizado. Dessa forma, almejamos compreender o que a mobilização desse bloco poderia nos oferecer, captando alguns motivos, se é que existiriam, em que o uso desse bloco seria importante para as pesquisas.

Nessa etapa da investigação, identificamos algumas *restrições* provenientes do *contrato didático* institucional, algo que aparentemente, estava presente tanto nos livros didáticos quanto nas propostas mobilizadas pelos professores que ensinam matemática, algo que está presente devido ao paradigma didático vigente, operando como uma organização tradicional de ensino. E, por estar presente nos modelos de ensino, muitas vezes, não se questiona as *razões de ser* do ensino dos conteúdos matemáticos.

Percebe-se que em muitos momentos, as *razões de ser* são abandonadas ou até desconhecidas, sendo os conteúdos ensinados com fins em si mesmo. Por exemplo, nos livros didáticos, geralmente, as *razões de ser* dos conteúdos matemáticos não são apresentadas aos professores, no Manual do Professor, e nem aos alunos no Livro do Estudante. Tais *condições* estão situadas nos níveis da *Pedagogia* e da *Disciplina*, requerendo um estudo em nível *noosférico* para determinar possíveis mudanças.

No *Paradigma Visita às Obras*, no nível da *Pedagogia* podemos encontrar *restrições* que agem sobre os processos de ensino e de aprendizagem dados em torno de praxeologias pontuais e locais. O sistema didático é dado para o ensino dessas praxeologias, já determinadas, em que os *níveis inferiores de codeterminação Assunto* e *Tema* são privilegiados. Nesse sentido, nessa representação dos *níveis de codeterminação* os níveis inferiores são anteriores à constituição dos sistemas didáticos, ou seja, aquilo que será estudado, dado pelo nível da *Disciplina*, já foi predeterminado, bastando ao professor conduzir seus alunos no processo de visitar essas obras. Nessa pedagogia, tanto as funções de alunos e professores estão definidas quanto as questões e as respostas referentes às obras a serem estudadas.

Na metodologia de uma análise praxeológica descrita na TAD (CHEVALLARD, 1999), modelamos os *tipos de tarefas* e suas respectivas *técnicas* que formam o *bloco técnico-prático* ou do *saber-fazer*. Cada uma das *técnicas* mobilizadas para resolver os *tipos de tarefas* necessitam de justificativas, informações e conhecimentos, propriedades, definições ou conceitos matemáticos que permitam constituir um discurso racional acerca da técnica empregada. Por sua vez, esses discursos também necessitam ser justificados. Esse papel é descrito pelo quarto elemento desse modelo praxeológico, as *teorias*. Este último possui os mesmos aspectos que as *tecnologias*, porém o elemento *teoria* é mais vasto e completo, pois trata das características dos níveis do *Setor* e até do *Domínio*, quando observados os níveis de *codeterminação*, enquanto as *tecnologias* estão alocadas no *Tema*, referente às *organizações locais*.

Essa analogia entre os níveis de *codeterminação* e as organizações praxeológicas pode ser realizada, pois ambos seguem uma hierarquia que pode ser relacionada. Vejamos, o nível do *Assunto* é o primeiro elencado por Chevallard (2002), sendo o mais elementar dado em torno de um tipo de tarefas, e a organização praxeológica dada em torno de um tipo de tarefas é classificada por Chevallard (1999) como pontual, sendo assim, o nível do *Assunto* pode ser caracterizado por uma *organização pontual*. Seguindo essa lógica, o próximo nível seria o do *Tema*, caracterizado por *organizações locais*, ou seja, *tipos de tarefas* e *técnicas* justificadas por uma *tecnologia*. Por sua vez, o nível do *Setor* é caracterizado pela junção dos vários *tipos de tarefas* e suas respectivas *técnicas*, justificadas por um conjunto de *tecnologias*, formando uma *organização regional*. Por fim, uma *organização global*, combinação das diversas *organizações regionais*, justificadas por diversas *teorias* pode ser associada ao nível do *Domínio*, ou seja, esses dois últimos níveis são bem mais abrangentes, proporcionando tarefas mais motivadoras.

> O principal déficit criado pelo atual estado de coisas que prevalece hoje no colégio e no liceu preocupa primeiro as organizações matemáticas realmente implementadas em classes: esse déficit é sentido na ausência de motivação dos tipos T de tarefas estudadas. Muito geralmente, as tarefas ‘motivadoras’ estão faltando e, no limite, ninguém sabe mais nem onde procurá-las! [...] os tipos de tarefas motivadoras são encontrados em níveis mais altos de determinação de organizações

> matemáticas - setores e domínios. (CHEVALLARD, 2002a, p. 4, tradução nossa)[xxx].

A identificação e a consequente categorização são uma das mobilizações desses aspectos teóricos da TAD, ou seja, as categorias mobilizadas para compor os procedimentos metodológicos que organizaram o *corpus* de análise. Algumas pesquisas identificaram em suas análises praxeológicas de livros didáticos, por exemplo, dificuldades em descrever os elementos que compusessem as justificativas matemáticas das *técnicas* ensinadas. Esse foi um dos resultados que obtivemos com a nossa pesquisa de mestrado que deixou algumas inquietações acerca das análises do *bloco do saber*.

> Na busca por outros pesquisadores que também poderiam ter tido dificuldades semelhantes as nossas, lemos algumas pesquisas produzidas em nosso grupo de estudos, o DDMat[77] . Identificamos nessas leituras, por exemplo, análises que não identificaram 'uma preocupação explícita por parte dos autores em justificar o uso da fórmula do cálculo de uma determinada área. Na maioria das resoluções analisadas o cálculo da área recai apenas na aplicação da fórmula'. (FREITAS, 2015, p. 92). Ainda, para justificar a ausência desse bloco, percebemos que alguns pesquisadores organizaram as justificativas, não em discurso tecnológico e nem em discurso teórico e, sim, em um único bloco, como discurso tecnológico-teórico. Essa organização auxiliou o pesquisador em suas dificuldades para descrever o bloco do saber. (GONÇALVES, BITTAR, 2019, p. 3).

$C_{8.1}$ – Questionamento tecnológico-teórico[78]:

Até esse momento, identificamos dois possíveis usos para alguns elementos da TAD. Eles nos permitiram complementar a tarefa sobre o questionamento tecnológico-teórico, também proveniente da pesquisa de mestrado. O primeiro foi referente à mobilização do quarteto praxeológico, uso como ferramenta metodológica. O segundo referente à organização dos discursos tecnológicos e teóricos, dada pela sua falta de clareza nos livros didáticos, em um único bloco, o *bloco do saber*, uso como ferramenta metodológica e teórica. No entanto, nosso objetivo nessa etapa da investigação foi a de

[77] O Grupo de Estudos em Didática da Matemática – DDMat, vinculado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PPGEduMat/UFMS, tem como foco central de estudo fenômenos didáticos cuja problematização considera como elemento central o saber matemático. Nessa perspectiva, são estudadas teorias da Didática da Matemática – conhecida como Didática Francesa. Para mais informações acessar o site: http://grupoddmat.pro.br/.

[78] Descrevemos nossas ações por meio de um *Diagrama de Ações*, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos.
Para retornar à *C_8 – Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.
Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

buscar além de como esses elementos têm sido mobilizados nas pesquisas e quais questões eles têm permitido responder, verificar os discursos que podem ser produzidos acerca das técnicas e sobre o que pode ser evidenciado quando questionamos os aspectos teóricos das tarefas matemáticas.

Contudo, percebemos que alguns trabalhos não avançaram para além da categorização em tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria, não que seja um problema, mas foi um uso desses aspectos da TAD que mais se mostrou evidente nos trabalhos que realizaram, por exemplo, análise praxeológica em livros didáticos.

Em outros trabalhos, percebemos a mobilização do quarteto praxeológico para analisar processos transpositivos da matemática formal para aquela trabalhada nos anos finais do ensino fundamental (GONÇALVES, 2016). A dificuldade em descrever *tecnologia* e *teoria*, as justificativas das técnicas ensinadas, foi um dos motes para compreender os processos transpositivos, pois identificamos que as justificativas matemáticas mobilizadas na coleção analisada se davam por criações didáticas, e as da matemática formal habitavam conceitos e definições das estruturas algébricas. O uso do *bloco do saber*, nessa pesquisa, favoreceu a compreensão dos motivos das chamadas criações didáticas, termo usado pelo pesquisador para descrever o ensino dado por meio das situações concretas, tais como, jogo de baralhos, ideia dos andares de um prédio, das temperaturas, das ideias monetárias etc.

Nesse sentido, a construção dos números inteiros relativos pode seguir alguns caminhos: extensão dos naturais, aprendizagem das operações com esses números, resolver problemas internos à própria matemática, como equações, com um viés mais algébrico. Caraça (1951), como já dissemos, afirma que diante de uma impossibilidade operatória, criamos algo, algo que amplia o que tínhamos; por meio da negação da negação. Em seu livro os inteiros relativos foram relacionados à necessidade de falar de grandezas em dois sentidos, de dar dois sentidos a certas grandezas e para resolver a impossibilidade da operação de subtração nos naturais.

Outra pesquisa que nos permitiu estudar como o *bloco do saber* foi a de Nogueira (2008), que analisou o estudo de equações lineares de primeiro grau em três coleções do ensino fundamental aprovadas pelo PNLD (2008) e mostrou os usos de diferentes organizações matemáticas e didáticas nessas coleções, indicando um objetivo comum, apresentado em forma de uma mesma praxeologia matemática para a resolução das equações. (NOGUEIRA, 2008). A partir da descrição e análise das escolhas didáticas e matemáticas e da apresentação dos principais tipos de tarefas mobilizados em cada livro didático, inferimos que o papel do *bloco do saber* nessa pesquisa poderia indicar a *razão de ser* do ensino da álgebra. De fato, Nogueira (2008) conclui que os autores das coleções analisadas têm um objetivo comum, justificado pelo *Modelo Epistemológico Dominante* da 'aritmética generalizada', característica marcante do modelo de ensino ou organização didática tecnicista (GASCÓN, 2003).

Oliveira (2010) investigou as relações entre os conhecimentos sobre o ensino de funções estudados na formação inicial e os mobilizados em sala de aula, de um professor de matemática em início de docência. Uma de suas conclusões foi que, prevendo possíveis dificuldades de aprendizagem de seus alunos, o professor realizou adaptações às atividades propostas no livro didático, inspirando-se em atividades vivenciadas durante seu estágio supervisionado. Segundo a pesquisadora, evidenciou-se assim, que é importante que o professor conheça tanto os conteúdos a serem ensinados quanto possíveis abordagens do conteúdo, como técnicas e procedimentos referentes ao seu ensino.

Nessa pesquisa, o uso do *bloco do saber* poderia ser mobilizado em prol da compreensão das justificativas para as escolhas do professor que participou de sua investigação. Oliveira (2010) afirma que muitas das escolhas propostas na *organização didática* desse professor são provenientes da sua formação inicial. Tais fatos poderiam favorecer a compreensão do modelo didático que justifica as ações desse professor, pois os aspectos da componente teórica, muitas vezes, estão implícitos durante as atividades, nesse caso na atividade docente. E as escolhas didáticas também poderiam favorecer as análises da *razão de ser* do ensino de funções proposto por ele. A pesquisadora revela a grande influência do livro didático em suas aulas, mas também a preocupação em corrigir algumas atividades, 'desviando-se' de algumas dificuldades de aprendizagem, mostrando-nos que os objetivos desse professor se assemelhavam aos constantes no livro, com algumas correções das possíveis dificuldades de aprendizagem. Sabemos que esse não era o objetivo da pesquisadora, mas os elementos *tecnológico-teóricos* poderiam ser usados para a construção das justificativas das ações didáticas do professor, pois uma das funções da tecnologia é a de construir discursos que justifiquem e permitam desenhar novas técnicas, nesse caso, técnicas didáticas.

Outro tipo de mobilização foi identificado nos trabalhos realizados por Kaspary (2014) e por Almeida (2015). Essas pesquisadoras mobilizaram a TAD para a descrição e análise das organizações matemática e didática propostas em livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. Kaspary (2014) delimitou como objeto de estudo caracterizar as propostas de ensino das operações da estrutura aditiva dos números naturais. A autora identificou as *praxeologias matemáticas e didáticas* presentes nos cinco volumes de uma coleção de livros didáticos, por meio da investigação de quais conteúdos matemáticos são abordados e quais as formas que essa matemática foi trabalhada. Os resultados permitiram evidenciar a valorização do ensino das técnicas de resolução, tanto as não contextualizadas, mobilizadas nos momentos de ensino quanto as contextualizadas, dadas em situações de práticas dos procedimentos ensinados. Por sua vez, Almeida (2015) teve por objetivo de pesquisa analisar a articulação entre o ensino de polígonos e de poliedros apresentados na proposta de ensino de livros didáticos.

Na apresentação da modelagem das atividades propostas nos livros analisados, Almeida (2015) observou que os elementos do *bloco do saber* aparecem de modo implícito, fato justificado pela pesquisadora como algo compreensível devido ao nível de ensino, o que de certa forma dificultou, por parte da pesquisadora, a identificação do *bloco tecnológico-teórico*. Os resultados descritos indicam que os autores dos livros analisados também priorizaram o ensino das *técnicas* para a resolução dos *tipos de tarefas* apresentados, com ausência das suas justificativas matemáticas, algo esperado para esse nível de escolaridade.

Em ambas as pesquisas, a análise da praxeologia didática, em especial do *bloco do saber* auxiliou as pesquisadoras na identificação de características de um modelo de ensino tecnicista (GASCÓN, 2003), ou seja, uma proposta de ensino que prioriza o trabalho com as técnicas de resolução dos tipos de tarefas ensinados. As autoras poderiam ter mobilizado os discursos *tecnológicos* e *teóricos* para retratarem a *razão de ser* destes conteúdos, em outras palavras o bloco *tecnológico-teórico* propicia compreender os motivos, as justificativas de ‘como se faz algo?’ ou ‘por que se faz algo?’ ou ainda ‘por que motivo isso é realizado?’

O ensino tecnicista é influenciado por um paradigma didático presente nas propostas de ensino atuais.

> A matemática escolar caracteriza-se pelo fato de que o discurso matemático que explica, justifica e interpreta as técnicas, sejam elas algorítmicas ou não, não é integrado à prática matemática dos alunos com o objetivo de torná-la mais eficaz. No máximo, justificativas mais ou menos formais de técnicas matemáticas podem aparecer (em certos níveis educacionais), mas questões relacionadas à interpretação dos resultados obtidos, limitações das técnicas, alcance ou âmbito de sua

> aplicação, e sua confiabilidade e economia estão praticamente ausentes na matemática da escola. (SIERRA DELGADO, BOSCH CASABÓ, 2013, p. 809, tradução nossa)[xxxi].

Nesse contexto, as respostas, as questões e os elementos *tecnológicos-teóricos*, as justificativas e as interpretações das *técnicas* são completamente pré-determinados, organizados em torno do *Paradigma Estático* (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2007), ou seja, tudo está predeterminado, desde as respostas, passando pelas questões até o *bloco do saber*. Nessa perspectiva, as formas predeterminadas de se mobilizar as ferramentas matemáticas e as *técnicas* ensinadas são tidas como um modelo de aplicação, um *aplicacionismo*, pois a preocupação é principalmente ensinar formas para se resolver problemas também determinados *a priori*. Barquero, Bosch e Gascón (2007, p. 534, tradução nossa) denominam de *aplicacionismo* a maneira específica de considerar e usar a modelagem matemática que vem da epistemologia do 'livro-texto'". Essa mesma abordagem pode ser aproximada ao ensino dos inteiros relativos, como identificamos em nossa dissertação. Em muitos dos *tipos de tarefas* descritos em Gonçalves (2016), o *bloco técnico-prático* e alguns aspectos do *bloco do saber* tiveram um comportamento semelhante ao que os pesquisadores chamaram de *aplicacionismo.*

> Portanto, não são feitas perguntas sobre a 'comparação' do grau de adequação de dois ou mais modelos do mesmo sistema, nem sobre a necessidade de modificar progressivamente um determinado modelo para responder a novas questões problemáticas porque *se supõe o sistema construído de uma vez por todas* (não há perguntas 'novas' não previstas antecipadamente), nem sobre a necessidade de modelar os modelos (a recursão da modelagem matemática é completamente ignorada na prática escolar). (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2007, p. 535, tradução nossa, grifos do autor)[xxxii].

Assim, as propostas de ensino dadas nos livros didáticos apresentam estruturas estáticas, pois nos modelos mobilizados "nenhuma pergunta realmente nova aparece ao longo do processo de estudo. Existe uma clara rigidez do problema, os sistemas científicos estudados permanecem estáticos durante todo o processo de estudo". (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2007, p. 536, tradução nossa). Há uma espécie de esquecimento dos processos de questionamento, da construção de novas formas de aprendizagem, tudo parece predeterminado e com a exigência de seguir o 'protocolo', sendo um grande indicador da aplicabilidade existente, pois toda vez que não há tais mudanças, impedindo as modificações dos procedimentos, das atividades e dos modelos em jogo, não há superação das suas limitações e, ainda, muitas vezes que elas até existam. (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2007).

Sendo assim, todos esses movimentos e estudos nos permitiram compreender, ao menos em parte, como o *bloco do saber* é mobilizado nas pesquisas, o que nos levou para o quarto movimento da nossa pesquisa[79]. Nele, partimos dos estudos do que seria um paradigma didático e das consequentes dificuldades de ensino, retratando nossa última mudança de direção, no sentido que os outros três movimentos nos permitiram pensar, organizar e trilhar nosso caminho metodológico, bem como as novas direções analíticas que empreendemos. **$C_{8.1}$ – Fim**[80]**.**

Isto posto, também nos debruçamos sobre os estudos de alguns pesquisadores que tratavam das dificuldades de ensino, de aprendizagem e do conceito de obstáculos epistemológicos. Nesse sentido, devido a importância de se viver um PEP em formações continuadas em serviço, principalmente para a mudança paradigmática proposta por Chevallard (2013), nos baseamos na perspectiva *Percurso de Estudo e Pesquisa de Formação* (PEP-FP). Assim, compreendemos ser essencial constituir um grupo de estudos com professores, sob essa perspectiva. Além de outros objetivos, uma formação baseada nos preceitos do *Paradigma Questionamento do Mundo*, tem como função a constituição de cidadãos *herbartianos* com atitudes *procognitivas*.

No caso do grupo de estudos com os professores, o resultado pretendido seria o desenho de uma proposta alternativa para os inteiros relativos em que a *razão de ser* estivesse bem definida e explícita. Nesse contexto, a proposta de se viver um PEP com características de formação é justamente explorar alguns elementos do *Paradigma Questionamento do Mundo*, como as ideias das dialéticas *Questão/Resposta*, *Mídia/Meio* e *Coletivo/Individual*.

Para os inteiros relativos, como já mencionado, há um *Modelo Dominante* em que atividades, procedimentos e propostas são direcionados pelos modelos concretos, por criações didáticas, enfim, os elementos tecnológicos e teóricos são construídos a partir de situações do cotidiano, promovendo um distanciamento da constituição de uma *razão de ser* epistemológica para esse ensino. Além disso, as propostas de ensino também são embasadas pela ênfase do ensino das técnicas, um ensino ‘tecnicista’ (GASCÓN, 2003) em sua grande maioria ancoradas nos modelos concretos.

Uma questão importante para nós no trabalho com o grupo de professores era que a proposta discutida e produzida com eles atendesse à realidade da nossa rede de ensino,

---

[79] Para retornar à página 21, *Q_1:Como constituir um grupo de estudos* ...? Clique aqui.

[80] Para retornar ao *Diagrama de Ações*, clique aqui.

que pudesse contribuir com o trabalho docente desses professores e que não fosse mais uma ‘reprodutora’ de dificuldades ou obstáculos à aprendizagem dos estudantes.

Assim, a proposta foi a de organizar um grupo de estudos em que os professores pudessem discutir todos esses elementos mencionados acerca do ensino e da aprendizagem dos inteiros relativos, buscando por soluções locais. O grupo foi composto por professores dos laboratórios de matemática, profissional responsável pela organização e elaboração de materiais pedagógicos, bem como pela organização e elaboração de projetos de intervenção pedagógica desenvolvidos em parceria com os professores regentes de todas as turmas das escolas da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS.

A escolha desse grupo foi devido ao maior contato que esses docentes tinham nas escolas tanto com coordenadores pedagógicos quanto com os demais docentes, bem como pela responsabilidade de gerenciar novos projetos para atender todos os estudantes, bem como organizar as mais diversas atividades envolvendo os conceitos matemáticos de forma que pudessem discutir, explorar, conjecturar, enfim, propor atividades em que os estudantes fossem ativos em seus processos de aprendizagem. Vimos, nessa incumbência, oportunidade de plantarmos a semente do *Paradigma Questionamento do Mundo*, visto que algumas características já estavam presentes no modelo de desenvolvimento de formação que prevíamos.

Um dos desafios vivenciados em nossa rede municipal de ensino era (é) a questão do tempo que esses professores têm para se dedicar aos estudos do nosso grupo, pois além do programa de formação já existente da Semed, eles participavam de formações específicas para a sua função. Dessa forma, desenvolvemos um projeto voltado à constituição do grupo de estudos, encaminhado e aprovado pela Semed. Proporcionamos assim, mais um momento formativo, por meio de sua liberação para participarem das reuniões nos períodos de seus planejamentos das atividades para os laboratórios.

Nas primeiras reuniões, discutimos as propostas vigentes, encontradas nos livros didáticos e aquelas praticadas por eles em suas aulas. Criou-se um movimento de questionamento dos modelos de ensino vigentes e dos problemas já apontados sobre os modelos concretos. Outro fato interessante foram os estudos sobre a classificação que os modelos concretos tinham, modelos de deslocamento ou de neutralização, realizados por meio da mobilização das categorias de Cid (2015). Iniciamos assim, as discussões sobre o ganho analítico de tal agrupamento. Percebemos que há semelhanças referentes às defasagens marcadas na aprendizagem dos estudantes, mesmo modificando-se o elemento do cotidiano trabalhado, os obstáculos didáticos são praticamente os mesmos.

Os modelos de neutralização ou modelos de deslocamento foram pensados

> de acordo com o papel que os sinais predicativos e operatórios desempenham em cada modelo de concreto. Nos modelos de neutralização, os objetos manipulados são quantidades de magnitude que podem ter direções iguais ou opostas. Quando duas grandezas de magnitude são iguais em valor absoluto, mas em direções opostas, elas se neutralizam. Nesse caso, os signos predicativos indicam o sentido da quantidade de magnitude e os signos operatórios estão relacionados às ações de somar, retirar, juntar ou separar. [...] Em um modelo de deslocamento, os inteiros indicam deslocamentos ou posições e os sinais predicativos a direção do deslocamento ou a localização da posição em qualquer um dos lados da posição original. Já os sinais operatórios podem significar composição de deslocamentos ou aplicação de um deslocamento a uma posição para obtenção de outra posição. (CID, 2002, p. 531)[xxxiii].

No trabalho com os modelos concretos, cria-se uma inversão das ideias de modelização, pois, uma situação do cotidiano é usada para 'representar' os conceitos. Até esse ponto não vemos problemas, no entanto, os processos se complicam quando por exemplo,

> um aluno[81] pode pensar que (+70) – (–10) = +70 porque 'se eu tenho 70 pesetas e eles me perdoam uma dívida de 10 pesetas, ainda tenho 70 pesetas'. Naturalmente, o professor utiliza outro raciocínio dentro do mesmo modelo, mas deve-se reconhecer que o primeiro é perfeitamente válido do ponto de vista do 'bom senso', que é o que se recorre quando se trabalha com modelos muito familiares aos alunos crianças. Da mesma forma, poderíamos deduzir que (–6) – (–2) = +4, dizendo que 'entre 6 graus abaixo de zero e 2 graus abaixo de zero à 4 graus de diferença e 4 é o mesmo que +4'. (CID, 2002, p. 534)[xxxiv].

Ou ainda, Cid e Bolea (2010) afirmam que os

> modelos concretos não refletem a estrutura do corpo comutativo totalmente ordenado que caracteriza os números reais (ou, mais particularmente, o do anel totalmente ordenado, comutativo e com a unidade dos números inteiros), mas o espaço vetorial unidimensional, no caso dos modelos de neutralização, ou o espaço afim unidimensional, no caso dos modelos de deslocamento. (p. 578, tradução nossa)[xxxv].

Inicialmente, pensei em construir com o grupo uma proposta alternativa às vigentes para os inteiros relativos, bem como buscar novos elementos para finalizar o *Modelo Epistemológico de Referência*, ambos comporiam a *Resposta Coração* da Tese. Assim, além das análises iniciais, os consensos para o esboço da proposta, todos os dados

---

[81] Para Retornar à página 170, R_{II}^{Z}- *Desenho do MER para Z...*, clique aqui.

já construídos seriam mobilizados para a construção e fechamento desses elementos. Infelizmente algumas dessas discussões não foram possíveis de serem finalizadas devido ao fechamento dos laboratórios de matemática.

Assim, como os encontros não foram até a data prevista, foi necessária uma mudança na proposta. Várias foram as alternativas pensadas para contornar essas *restrições*, até aquele momento, pois não tinha nada concreto como solução: construir outro grupo, porém deixaria de lado todo o material já produzido com os anteriores? Construir minha própria proposta, baseado nos elementos do MER já desenhados? Analisar todas essas *condições* e *restrições* impostas pelo nível da *Sociedade* de *codeterminação?*

Enfim, todas essas alternativas não atendiam ao nosso objetivo de elaborar uma proposta que pudesse auxiliar os professores nas dificuldades que os estudos apontaram, alternativa às vigentes. A decisão tomada foi que finalizaria a proposta iniciada com o grupo, consequentemente, meus estudos, em muitos aspectos, seriam preponderantes, porém, a tônica, 'seria sempre levar em consideração os consensos do grupo'. Ressalto que, alguns deles iam de encontro com algumas verdades defendidas por nós, pois enfatizavam algumas das dificuldades já apresentadas. Assim, construímos algo que partisse das discussões do grupo de estudos, no entanto, sem que fosse contra ao que acreditávamos e contra ao que os estudos apontavam.

Portanto, a proposta alternativa, os demais elementos do MER, a *Resposta Coração* do grupo e elementos constituintes da *Resposta Coração* da tese foram produzidos por mim, considerando e ponderando as reflexões do grupo de professores dos laboratórios de matemática, buscando não divergir das concepções consideradas importantes.

R^Z: RESPOSTA CORAÇÃO DA TESE

A resposta coração da nossa tese foi dividida em quatro partes. As duas primeiras referentes ao *Modelo Epistemológico de Referência*, compondo o ramo dos nossos estudos, análises e conclusões. As outras duas partes são referentes à descrição e às atividades da proposta construída a partir dos dados do grupo de estudos. Ressaltamos que, além da proposta, vários elementos do MER para os inteiros relativos são fruto das discussões realizadas no grupo, das ponderações dos professores, das reflexões realizadas por mim (pesquisador) e das conclusões consensuais de todos (professores e pesquisador).

A escrita da tese foi organizada mobilizando a ferramenta *mapa de questões e respostas*, ferramenta, que por sua vez é construída a partir das concepções de um *Percurso de Estudo e Pesquisa*. Assim, a questão de pesquisa tornou-se a questão geratriz do PEP experienciado na tese.

> *Q^Z: Que modelo é possível construir considerando condições e restrições do sistema de ensino brasileiro e as reflexões de professores de matemática para o ensino dos inteiros relativos?*

O fato de nos basearmos no *Paradigma Questionamento do Mundo* e nas *condições* e *restrições* do sistema de ensino do município de Campo Grande/MS, implicou na constituição do grupo de estudos e na necessidade das interações com professores dessa rede de ensino. Acreditamos que não há espaço para apresentação de propostas de ensino prontas aos professores, porém deve haver interação, reflexão e construção conjunta de todos os elementos necessários às propostas. Sendo assim, a partir das discussões com esses professores foi possível construir uma proposta alternativa para os inteiros relativos.

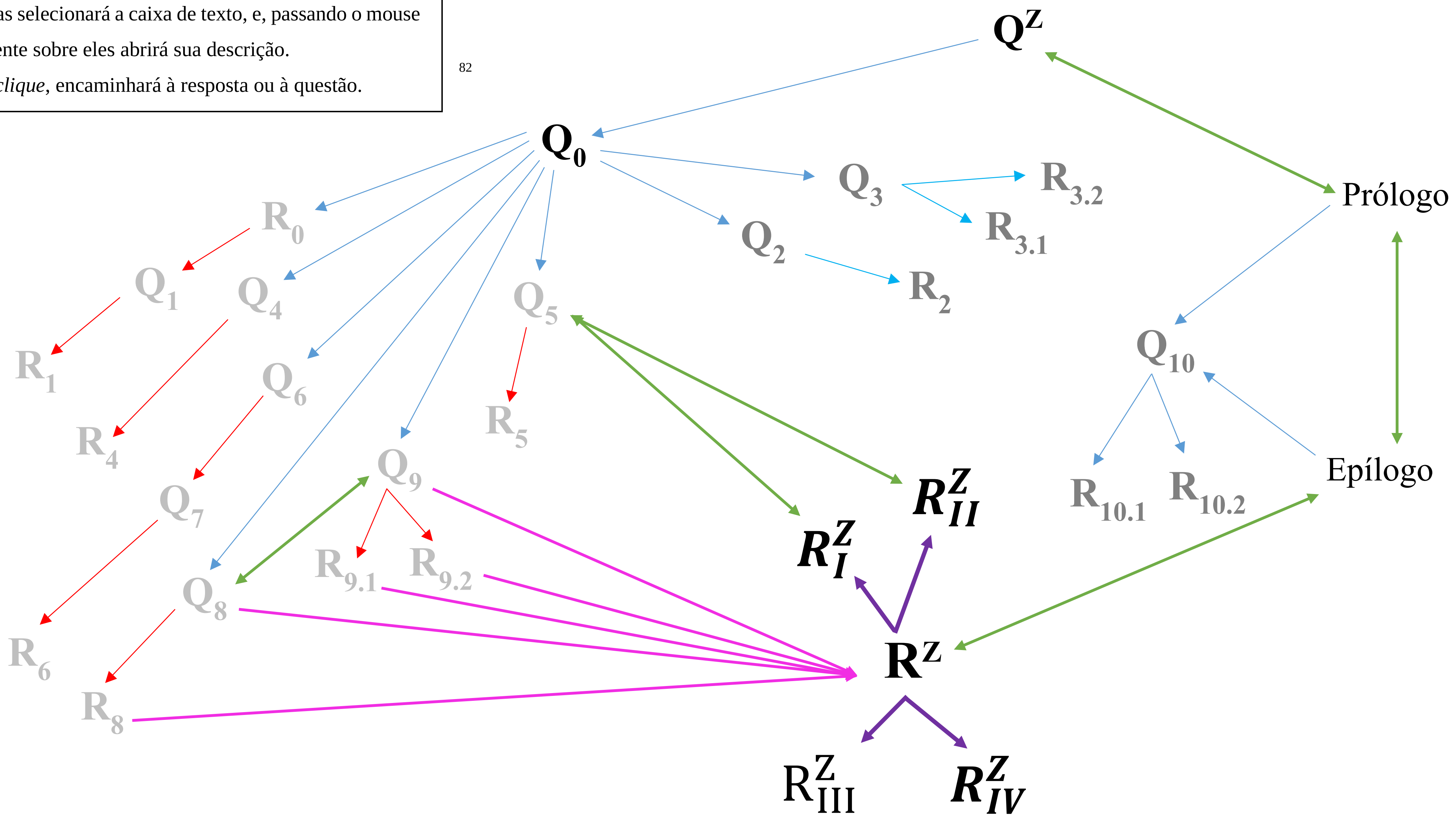
Nesse contexto, para responder à questão geratriz, Q^z, estabeleceu-se uma primeira questão,

Q_0: Que proposta de ensino para Z é possível construir por meio da interação com um grupo de estudos de professores na perspectiva do PQM?

Ressaltamos que todo o percurso desenvolvido buscou elementos de respostas a esses dois questionamentos iniciais. A seguir apresentamos o *Modelo Epistemológico de Referência* para os inteiros relativos e o *mapa de questões* construído na tese.

LEGENDA: Clicando sobre as questões ou sobre as respostas selecionará a caixa de texto, e, passando o mouse novamente sobre eles abrirá sua descrição.
Ctrl + clique, encaminhará à resposta ou à questão.

[82]



[82] Para retornar à página 9, *Sumário: Mapa de Questões e Respostas*, clique aqui.

R_I^Z- MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA POSSÍVEL DE SE CONSTRUIR CONSIDERANDO ASPECTOS DA INTERAÇÃO COM O GRUPO DE PROFESSORES E OS DEMAIS ESTUDOS

O desejo de construir um *Modelo Epistemológico de Referência* para os inteiros relativos advém tanto da dificuldade de se encontrar justificativas para as técnicas matemáticas que compõem as praxeologias encontradas em livros didáticos atuais quanto da necessidade de se questionar os modelos de ensino mobilizados para o seu ensino. Todavia, podemos nos perguntar, o que de inovação teria em um modelo didático para os números inteiros relativos, dado que há diversos trabalhos que se dedicaram ou se dedicam a resolver essa tarefa? Por exemplo, Cid (2003) apresentou como resultado de uma investigação de 200 artigos de diversas naturezas sobre o ensino dos inteiros relativos, que foi feito muito de uma mesma 'coisa'. Também deixou seis indícios que resumem o teor das investigações[83], demonstrando que seu objetivo não foi de tecer críticas, mas de apresentar um novo modelo para o ensino dos inteiros relativos. Além disso, Cid (2015) também construiu um modelo (gênese escolar) para os inteiros relativos focado na sua *razão de ser* epistemológica cujo ensino é dado num contexto algébrico.

Segundo Bosch e Gascón (2010, p. 56, grifo dos autores, tradução nossa), "um *modelo epistemológico*[84] [é] estritamente relacionado com uma conceitualização concreta do que se entende por 'ensinar e aprender matemática' em cada momento histórico, em cada tradição cultural e em cada instituição". Alguns desses modelos por muito tempo se mantiveram implícitos, livres de questionamentos, sendo que as metodologias de ensino não careciam de qualquer tipo de fundamentação. O fato de as justificações serem baseadas em aspectos genéricos, dados pelo senso comum, tornava-se irrelevante por se

[83] i. apresentação de problemas observados nos processos de ensino dos inteiros ou crítica a um único modelo de ensino, seguidos de um novo modelo de ensino ou uma nova versão de algum existente; ii. propostas de ensino cujos estudos priorizam apenas a estrutura aditiva ou apenas a estrutura multiplicativa, e consequente, não apresentação da estrutura ordinal; iii. mobilização de diversos modelos de ensino, cada um destinado a um momento de ensino; iv. não apresentação de propostas de ensino para se formalizar, descontextualizar as noções que inicialmente seriam ensinadas por meio de modelos concretos.

[84] Para retornar à página 14, *Prólogo*, clique aqui.
Para retornar à página 18, Q_0: *Que Proposta de ensino para Z é possível construir* ..., clique aqui.
Para retornar à página 29, Q_2: *Que aspectos do PQM mobilizar* ..., clique aqui.
Para retornar à página 70, $R_{3.2}$: *Estudar propostas de ensino* ..., clique aqui.
Para retornar à página 75, R_4: *Comparar o ensino de Z* ..., clique aqui.
Para retornar à página 94, Q_6: *Por que ensinar Z?* Clique aqui.
Para retornar à página 102, R_6: *Razões de ser: Cotidiano* ..., clique aqui.
Para retornar à página 119, Q_9: *Que atividades, problemas e estratégias* ..., clique aqui.

manterem implícitas nas praxeologias mobilizadas pelos professores, garantindo sua sobrevivência nas instituições de ensino.

Esse cenário começou a mudar a partir da década de 1960, período do surgimento de algumas reformas educacionais, advento que proporcionou duras críticas às formas tradicionais de ensino e aos modelos didáticos espontâneos. (BOSCH, GASCÓN, 2010). Bosch e Gascón (2010) dizem que tal modelo deve estar articulado com as tradições de certa instituição, com o momento histórico em que foi produzido e com aquilo que se acredita que seria ensinar e aprender matemática, bem como Gascón (2011, p. 208, grifos do autor, tradução nossa) afirma que "com base no MER, o didata pode *desconstruir* e *reconstruir* as praxeologias cuja difusão intra institucional e interinstitucional pretende analisar". Além disso,

> na formulação de qualquer problema didático, o didata sempre utiliza, mesmo que apenas implicitamente, uma descrição e uma interpretação - ou seja, um modelo epistemológico - do domínio matemático que está jogo. Desde o início, a TAD tem enfatizado a necessidade de *explicitar* este modelo e usá-lo como *referência* para analisar fatos didático-matemáticos (GASCÓN, 1993, 1994, 1994, 1998, 1999a, 2001a). Atualmente é chamado de *Modelo de Epistemológico de Referência* (MER) e tem sempre um *caráter provisório*. (GASCÓN, 2011, p. 208, tradução nossa, grifos do autor)[xxxvi].

Portanto, também desenhamos um *Modelo Epistemológico de Referência*, pois, todos os MER têm como característica serem provisórios, devendo ser questionados, revisados e, se necessário, modificados. De acordo com o fenômeno da *Transposição Didática* descrita por Chevallard (1991), nenhum sistema de referência é absoluto, mas relativamente adaptado aos problemas investigados, às realidades de cada *instituição*. Dessa forma, torna-se imprescindível e necessário que o MER seja adequado às *condições* e às *restrições* da sociedade em que vivemos, considerando todas as pesquisas e estudos já realizados. Como hipótese de trabalho, o MER deve ser explicitado, pois auxiliará na visibilidade dos *fenômenos didáticos*, dos tipos de problemas a serem investigados, entre outros (GASCÓN, 2011). Dessa forma, o MER se dará a partir dos anos finais do ensino fundamental das escolas municipais do município de Campo Grande/MS, fruto das minhas experiências como professor, das minhas leituras e análises das dificuldades de ensino, das dificuldades de se justificar as técnicas matemáticas das tarefas sobre os inteiros relativos e dos debates realizados nos encontros do grupo de estudos, resultado das minhas experiências como pesquisador, professor e participante de um grupo de professores.

Segundo Bosch e Gascón (2010, p. 60, tradução nossa, grifos do autor),

> qualquer organização ou praxeologia de ensino [...] que vive em uma determinada instituição é apoiada e fortemente condicionada pelo modelo epistemológico dominante das matemáticas nessa instituição. Essa hipótese pode ser considerada uma reformulação da afirmação de Guy Brousseau, segundo a qual os modelos de ensino espontâneos são simplistas porque são apoiados por um modelo epistemológico ingênuo que se reflete na 'epistemologia espontânea do professor' (Brousseau, 1999). Daí a necessidade, para o ensino de matemática, de desenvolver um modelo epistemológico que sirva de referência tanto para a análise das 'epistemologias espontâneas' presentes nas instituições observadas quanto para o desenvolvimento de novas propostas de OD[xxxvii].

Mais ainda, para Gascón (2014, p.100, tradução nossa),

> para levar os processos de transposição didática como um objeto de estudo, o [educador matemático] precisa analisar criticamente os modelos epistemológicos da matemática dominante nas instituições envolvidas e, libertar-se do pressuposto acrítico desses modelos[xxxviii].

A partir dessas ideias mobilizamos o MER como parâmetro de análise do MD dos inteiros relativos da Reme de Campo Grande/MS. Nas palavras de Gascón (2014, p. 117, tradução nossa), "o MER específico será utilizado, em primeira instância, como sistemas de referência para analisar e interpretar os modelos epistemológicos dominantes (específicos)".

Vale ressaltar que essas análises se deram sobre as versões atuais mobilizadas em cada instituição, bem como reflexo da sociedade na qual está inserida, por meio da função de interpretação das atividades matemáticas em jogo. Nesse sentido, o MER também nos auxiliou em uma espécie de emancipação do MD. Essa emancipação não é algo que se consegue[85] instantaneamente, claramente, se trata de algo com um sentido totalmente contrário, pois como Gascón (2014) nos alerta que essa

> emancipação epistemológica constitui um aspecto particular, um primeiro passo essencial, da emancipação institucional que poderia ser definida, em geral, como a liberação da sujeição à ideologia dominante nas instituições que fazem parte de seu objeto de estudo, isto é, a emancipação não apenas do provincianismo epistemológico, mas também de todo provincianismo didático, pedagógico e cultural. (p. 100, tradução nossa)[xxxix].

Esse pesquisador cita uma emancipação institucional, porém nossa pretensão não foi tão ousada, pensamos em uma emancipação de alguns elementos, tais como a dependência do *Modelo Dominante*, o fato de não se questionar aspectos das propostas

---

[85] Para retornar à página 89, *R_5: Identificar e descrever modelo dominante*, ..., clique aqui.

de ensino relacionada a ele, as justificativas das técnicas matemáticas ligadas às criações didáticas dadas nos modelos concretos, e uma forma de contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem dos alunos e professores da Reme. Nesse sentido, mobilizamos algumas dessas características tanto na construção da proposta alternativa quanto nas discussões com o grupo de professores.

Aos *Modelos Epistemológicos de Referência* têm-se atribuído características fenomenotécnicas, principalmente, em relação à construção de forma autônoma dos objetos de estudo que são modelados pela problemática de pesquisa. Tal produção dos objetos de estudos está vinculada às ideias de construção de fenômenos "e dos problemas de investigação associados aos estudos desses fenômenos que constituem a [sua] razão de ser" (GASCÓN, 2014, p. 103, tradução nossa) da investigação em voga. Nesse contexto, o MER propiciou e, em algumas circunstâncias, tornou visível novos fenômenos didáticos relativos aos inteiros relativos. Entretanto, uma questão principal surgiu: até que ponto é possível (e é interessante) produzir algo totalmente novo, especialmente quando o que os professores pensam é levado em consideração? Fomos capazes de produzir e tornar visíveis tais fenômenos? Sabendo que todos os envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem sempre necessitam de algo para se apoiar para desbravar novas fronteiras, é possível produzir um modelo 'totalmente' inovador?

Os *Modelos Epistemológicos de Referência* devem ter, inclusive, a finalidade ou a "função metodológica, heurística, posto que servem para contrastar com a realidade empírica, historicamente existente e para gerar novas questões". (GASCÓN, 2014, p. 104, tradução nossa).

Em suma, um MER, a depender de suas características e funções, pode ser categorizado em: *MER específico* ou local e em *MER geral.* Um *MER geral* pode ser construído com intuito de caracterizar o *Modelo Epistemológico Dominante* da matemática no ensino e, por sua vez, um *MER específico* é construído na didática da matemática como ferramenta heurística para tornar visíveis certos fenômenos didáticos. Sua primeira função é fornecer os elementos necessários para a formulação de problemas didáticos cujo estudo melhorará o conhecimento desses fenômenos. Somente assim, a didática pode emancipar-se do *Modelo Epistemológico Dominante* nas instituições envolvidas e ter a possibilidade de construir autonomamente seu próprio objeto de estudo.

Ressaltamos que nosso propósito não foi o de retratar uma realidade e, sim, produzir conhecimentos que vão além do MD de ensino dos inteiros relativos. De forma geral, os inteiros relativos podem ser um pano de fundo para os primeiros passos da dita emancipação epistemológica e/ou institucional retratada por Gascón (2014): "a construção de tipos ideais e seu contraste empírico constituem parte fundamental das técnicas de pesquisa científica e podem ser interpretados como um primeiro movimento em direção à emancipação institucional". (GASCÓN, 2014, p. 104 - 105, tradução nossa). A construção desses novos fenômenos que nos orientaram a modelizar alguns aspectos da realidade investigada e a estabelecer algumas comparações, também favoreceram a concepção de novas questões ou problematizações que contribuem com o aumento dos nossos conhecimentos sobre os fenômenos investigados. Nesse contexto, não sabemos se conseguimos responder às questões referentes às inovações acerca dos inteiros relativos, mas acreditamos que a constituição do grupo de estudos com os professores da Reme de Campo Grande/MS, nos permitiu estudar coletivamente alguns fenômenos retratados pelo MER construído.

Como os MER possuem aspectos fenomenológicos[86], propiciando a visibilidade de novos fenômenos didáticos, o estudo de uma proposta de ensino dos inteiros relativos dada por sua *razão de ser* epistemológica, pode ser considerado um exemplo de fenômeno didático analisado pelo grupo de estudos. Investigando o desenho e o desenvolvimento da gênese escolar dos inteiros negativos, descrita a partir de uma proposta que visava trabalhar de forma concomitante a introdução da álgebra escolar e os inteiros relativos, entendemos que algumas criações didáticas, dadas em alguns modelos concretos, ocasionavam novas dificuldades de aprendizagem, além daquelas próprias dos inteiros relativos. A partir das análises de tais dificuldades, que são bem semelhantes aos obstáculos epistemológicos, muitas discussões e um grande movimento de reflexões foram realizados, permitindo "um distanciamento dos modelos epistemológicos dominantes [em nossa instituição] [...] e a correspondente emancipação dos fatores condicionantes que esses fatores implicam, eles [permitiram] construir ('tornar visível') fenômenos que permaneceram invisíveis". (GASCÓN, 2014, p. 108, tradução nossa).

Outro fenômeno didático foi o estudo sobre as justificativas matemáticas para as técnicas das atividades propostas. A parte introdutória que engloba os primeiros procedimentos e algoritmos, é baseada em modelos concretos. Porém, ao analisarmos as justificativas matemáticas para algumas dessas técnicas que habitam a 'matemática formal' nos deparamos com conceitos vindo da teoria das estruturas algébricas, conteúdo que não faz parte do *habitat* daqueles encontrados no final do ensino fundamental. Dessa

---

[86] Para retornar à página 89, R_5*: Identificar e descrever modelo dominante,* ..., clique aqui.

forma, esses fatos ou fenômenos didáticos estavam ‘invisíveis’ para aqueles professores e para nós antes de iniciarmos nossa pesquisa. Vale ressaltar que um *Modelo Dominante* tem por característica condicionar tanto as atividades matemáticas quanto as didáticas estudadas na instituição em torno do conteúdo matemático em questão, que, certamente, se concretizam em modelos de ensino. “Consequentemente, a emancipação epistemológica envolve, em certa medida, a emancipação do modelo de ensino dominante na instituição em questão, o que fornece autonomia para questioná-lo e propor outros modelos de ensino alternativos”. (GASCÓN, 2014, p. 108, tradução nossa). A constituição desses modelos alternativos abre um precedente, pois conseguimos ir além das análises das influências e das consequências do *Modelo Dominante* de ensino, podemos estudar também as influências e as consequências dos modelos alternativos.

Na escrita das questões e respostas do grupo de estudos, descrevemos algumas características do MER construído até aquele momento, pois para sua finalização consideramos as discussões do grupo.[87] Para nortear os possíveis caminhos para a elaboração do MER, construímos um *diagrama de ações* que foi dividido em três grandes contextos, sendo que para cada um usamos uma cor de fundo: o matemático (M), proveniente dos estudos do doutoramento, principalmente pela busca por modelos alternativos aos concretos; o cotidiano/concreto (C), proveniente dos estudos do mestrado referente aos modelos concretos, e o matemático e cotidiano (MC), fruto das discussões com o grupo de estudos. Ressaltamos que, para as caixas de textos usamos a cor branca e para as setas a vermelha, para contextos iguais, e usamos verde-claro, laranja, azul e amarelo para representar articulações entre os contextos. Por exemplo, o caminho verde-claro seria uma proposta pensada com razão de ser epistemológica, enfatizando as justificativas matemáticas das tarefas e, que também perpassa os três caminhos, mesclando suas concepções.

---

[87] Para retornar à página 70, $R_{3.2}$: *Estudar propostas de ensino* ..., clique aqui.
Para retornar à página 75, R_4: *Comparar o ensino de Z* ..., clique aqui.
Para retornar à página 94, Q_6: *Por que ensinar Z?* Clique aqui.
Para retornar à página 102, R_6: *Razões de ser: Cotidiano* ..., clique aqui.
Para retornar à página 119, Q_9: *Que atividades, problemas e estratégias* ..., clique aqui.
Para retornar à página 128, $R_{9.2}$: *Resposta Coração do grupo de professores.* Clique aqui.
Para retornar à página 139, $R_{10.2}$: Metodologia e procedimentos de pesquisa. Clique aqui.
Para retornar à $C_{8.1}$ – *Início*, clique aqui.
Para retornar à página 165, R_{II}^{Z}: *Desenho do MER para Z.* Clique aqui.
Para retornar à página 185, R_{II}^{Z}: *Desenho do MER para Z.* Clique aqui.
Para retornar à página 197, R_{II}^{Z}: *Desenho do MER para Z*, clique aqui.
Para retornar à página 205, R_{IV}^{Z}Z: *Desenho da proposta de ensino para Z*, clique aqui.
Para retornar à página 214, R_{IV}^{Z}: *Elementos e aspectos relevantes da proposta* ..., clique aqui.

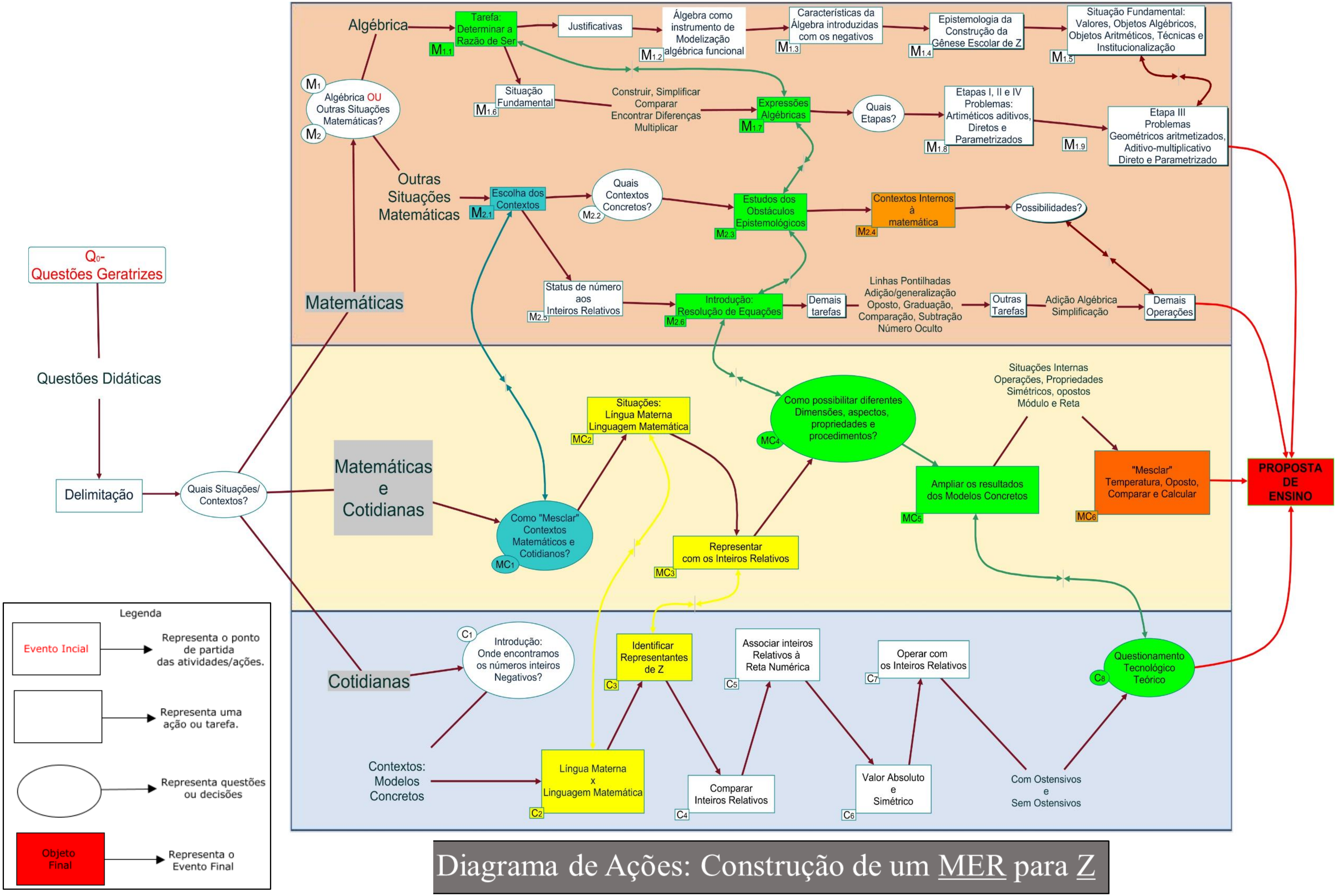


Diagrama de Ações: Construção de um MER para Z

Descreveremos cada um dos componentes do MER, bem como as possíveis relações entre eles, para apresentar os seus conteúdos e os caminhos percorridos para alcançarmos esse resultado, indicando as partes da tese representativa dessas ações. Ressaltamos que para a sua elaboração nos baseamos em Lucas (2015), que realizou um trabalho semelhante para uma possível *razão de ser* do cálculo diferencial elementar no âmbito da modelização funcional.

Questões Iniciais

No *Paradigma Questionamento do Mundo*, os estudos são iniciados por meio de algumas questões problemáticas. Tais questões não podem ser respondidas diretamente com algumas obras já prontas, mas, devem ser capazes de iniciar um percurso de estudo e ser ricas o suficiente para suscitar novos questionamentos que levarão à resposta coração dos processos de estudo. No caso de um PEP-FP, as questões geratrizes são didáticas, atendem as necessidades dos professores. Porém, no decorrer do desenvolvimento do *Percurso de Estudo*, há necessidade de se atender às três dimensões de um problema didático. Em nosso caso, o foco esteve na dimensão epistemológica, pois, para Gascón (2011) é a principal dimensão e que dá origem ao *Modelo Epistemológico de Referência.* A questão geratriz do grupo de estudos foi a seguinte: *Como ensinar os números inteiros relativos?*

Delimitação

A partir do problema docente, que pode ser o de ensinar um determinado conteúdo, buscamos elementos que respondessem a dimensão epistemológica, iniciando pela delimitação e pela construção do problema didático, que é um problema de investigação. Assim, investigamos possibilidades de ensinar os inteiros relativos com *razão de ser*, ou seja, levando em consideração *condições* e *restrições* da sociedade brasileira, mais especificamente da campo-grandense. Os estudos de alguns elementos do *Modelo Dominante* retirados de Gonçalves (2016) e CID (2015), apontavam que o ensino dos inteiros relativos era predominantemente baseado em contextos concretos, em que o *bloco do saber* era dado por criações didáticas amparadas por situações cotidianas. Esse contexto revela criações de novas dificuldades de aprendizagem, além daquelas que já fazem parte desses estudos. Nesse sentido, a construção do *Modelo Epistemológico de Referência*, os debates com os professores e os demais estudos nos indicaram três possíveis contextos para o ensino dos inteiros relativos: o matemático (M), que por sua vez, pode ser dividido em outros dois, algébrico (M_1) e outras situações matemáticas (M_2); o cotidiano (C), representado pelos contextos concretos e o matemático e cotidiano (MC), representando os estudos do grupo de estudos e dado por situações matemáticas que exploram as propriedades, as operações e, principalmente as justificativas para as técnicas matemáticas, mescladas com atividades do cotidiano.

Contexto Matemático M_1

Esse contexto foi retirado, principalmente, dos estudos de Cid (2015), precisamente da gênese escolar dos inteiros relativos cuja *razão de ser* é epistemológica, dado que a álgebra escolar é o cenário ideal para a introdução desses conceitos.

Vale ressaltar que os links distribuídos no decorrer das explicações das ações de cada contexto, nos levam a parte da tese com mais informações e detalhes, nos encaminham para os demais aspectos que mobilizamos na pesquisa.

$M_{1.1}$- Determinar a razão de ser – Primeira ação foi determinar a razão de ser dos inteiros relativos. Para tal, Cid (2015) apresentou um trabalho sobre os processos transpositivos dos inteiros relativos, concluindo que a sua *razão de ser* não pode ser a aritmética, dentre outras justificativas, devido a não possibilidade de se explicitar as justificativas matemáticas.

$M_{1.2}$- Álgebra como instrumento de modelização algébrica funcional – Segundo Cid (2015), diversas pesquisas têm apresentado o *Modelo Dominante* da álgebra escolar como 'aritmética generalizada', assim como outros pesquisadores buscam uma introdução alternativa, propondo o seu ensino como ferramenta funcional, permitindo atividades de modelização matemática. (CID, 2015).

$M_{1.3}$- Características da álgebra introduzidas com os inteiros relativos – Ao mostrar que a álgebra escolar é o contexto propício para a introdução dos inteiros relativos, Cid (2015) justifica essa conclusão por meio de alguns elementos, dentre eles, expondo que as expressões algébricas podem cumprir o papel de conservar a memória de cálculo, bem como entendendo-as como modelo algébrico de um programa de cálculo.

$M_{1.4}$- Epistemologia da construção da gênese escolar de Z – Os critérios epistemológicos, mobilizados para a gênese escolar construída por Cid (2015), levaram em consideração a natureza e as características do *saber* estudado, iniciando o estudo dos inteiros relativos e os conteúdos da álgebra escolar simultaneamente.

$M_{1.5}$- Situação fundamental: valores, objetos algébricos e aritméticos, técnicas e institucionalização – O objetivo foi a construção de situações fundamentais para a gênese

escolar dos inteiros relativos. Partindo da concepção que “a função do professor é a de provocar o estudante às adaptações desejadas mediante uma eleição adequada de problemas a ele proposto”. (CID, 2015, p. 265).

$M_{1.6}$- Situação Fundamental – Nos baseamos nos estudos de Cid (2015) e Berte *et al*. (2008) para construirmos três situações motivadoras, que constituíram nosso conjunto de situações fundamentais. Segundo Brousseau (1986, p. 49),

> estes problemas, escolhidos para que o aluno possa aceitá-los, devem fazê-lo, agir, falar, refletir e evoluir por si mesmo. Assim que o aluno aceita o problema como seu, e quando o aluno responde a ele, o professor se recusa a intervir como promotor do conhecimento que ele quer ver aparecer. O aluno sabe bem que o problema foi escolhido para fazê-lo adquirir novos conhecimentos, mas também deve saber que este conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que ele pode construí-lo sem levar em conta razões didáticas[xl].

$M_{1.7}$- Expressões Algébricas – A gênese escolar construída por Cid (2015) é composta por um problema inicial e cinco partes temáticas a saber: construir, simplificar, comparar, encontrar a diferença e multiplicar expressões algébricas. A falta de informações da atividade inicial e a exigência de se apresentar uma resposta, força a inserção de letras, promovendo a aparição de expressões algébricas, as fórmulas que resolvem os problemas. (CID, 2015). Como o resultado das discussões com o grupo de estudos foi que não tratássemos dos aspectos diretos às expressões algébricas, decidimos não aprofundar esses elementos na escrita do *Percurso de Estudo* da tese.

$M_{1.8}$- Etapas I, II e IV, problemas aritméticos aditivos, diretos e parametrizados – O objetivo foi a construção de problemas aritméticos aditivos, diretos e parametrizados. Essas atividades foram debatidas com os professores do grupo e algumas delas, adaptadas, constituíram nossa proposta de ensino para os inteiros relativos. O consenso do grupo foi que se mesclasse os aspectos dos contextos algébricos aos do contexto dos modelos concretos e, como os problemas propostos por Cid (2015) e Berte *et al*. (2008) são provenientes da aritmética, os professores os aceitaram prontamente.

$M_{1.9}$- Nessa ação, mobilizamos o que Cid (2015) denominou de contexto geométricos para construção de problemas aditivo-multiplicativo, direto e parametrizado. Como o grupo de estudos foi encerrado antes de iniciarmos os debates dessas atividades, não tratamos desses contextos na tese. Porém, para finalizarmos nossa proposta de ensino alternativa às do *Modelo Dominante*, mobilizamos aspectos dos estudos de Caraça (1951) e Berte *et al*. (2008), principalmente, para as operações de multiplicação e de divisão.

Contexto Matemático M_2

Esse contexto foi retirado, principalmente, dos estudos de Berte *et al*. (2008), em que eles apresentam uma sequência didática dividida em três partes, pautadas em contextos internos à matemática, com resolução de pequenas equações, construção de regularidades e a mobilização de propriedades. Eles buscaram o melhor contexto para se introduzir os inteiros relativos, como as temperaturas, bem como tentaram justificar alguns resultados por meio de discussões históricas, como a ideia de obstáculos epistemológicos.

Vale ressaltar, que os links distribuídos no decorrer das explicações das ações de cada contexto, nos levam a parte da tese com mais informações e detalhes, nos encaminham para os demais aspectos que mobilizamos na pesquisa.

$M_{2.1}$- Escolha dos Contextos – Para se introduzir os inteiros relativos há necessidade de escolher um contexto: Concreto, baseado em situações do dia a dia? Matemático, baseado em resolução de equações? Existem outros contextos? Enfim, nesta ação, buscamos em Berte *et al*. (2008) três contextos para esse trabalho, por meio da apresentação de alguns aspectos da proposta de ensino construídas por esses autores.

$M_{2.2}$- Quais contextos concretos? – Nesta ação, questionamos até que ponto os contextos concretos, mobilizados para se introduzir os inteiros relativos, podem ser confiáveis para a aprendizagem dos estudantes. Estudamos alguns contextos históricos, principalmente, referente às questões relativas aos obstáculos epistemológicos. Além dos autores Berte *et al*. (2008), também trabalhamos com os estudos de nossa dissertação, pois nela construímos um capítulo com vários aspectos históricos e epistemológicos dos inteiros relativos (GONÇALVES, 2016).

$M_{2.3}$- Estudos dos obstáculos epistemológicos – Os obstáculos epistemológicos são mobilizados por Berte *et al*. (2008) para responder ao questionamento sobre o quão confiável são os contextos cotidianos para o ensino dos inteiros relativos. Além desses estudos também mobilizamos nessa ação os estudos de Glaeser (1985), que organiza análises aprofundadas de tais obstáculos, relacionando-os aos matemáticos que os superaram e quais as contribuições para que todos o fossem também.

$M_{2.4}$- Contextos internos à matemática – Nesta ação, buscamos em Berte *et al*. (2008) uma introdução mais próxima aos contextos históricos. Esses autores afirmam que eles possibilitam um ensino em que os números inteiros relativos são objetos necessários para a introdução dos mais variados cálculos e para as resoluções de algumas equações, bem como das suas respectivas simplificações.

$M_{2.5}$- *Status de número aos inteiros relativos* – Uma das dificuldades elencada por Berte *et al*. (2008) e discutida com o grupo de professores foi sobre os estudantes compreenderem que os inteiros negativos são números. Por isso, uma das atividades necessárias foi justamente o estudo sobre as possíveis formas de ensino que pudessem propiciar contextos favoráveis a essa aprendizagem. Segundo Berte *et al.* (2008), nenhum modo único pode favorecer essa aprendizagem, sempre haverá dificuldades a serem superadas, no entanto, esses autores concebem que "distanciar-se de contextos concretos, a fim de dar um *status* de números aos negativos [e] tomar cuidado ao introduzir negativos para não criar desnecessariamente obstáculos didáticos" (BERTE *et al*., 2008, p. 63 - 64) é um bom caminho para o ensino dos inteiros relativos.

$M_{2.6}$- *Introdução: Resolução de equações* – A última ação desse ramo do diagrama é referente à proposta de ensino para os inteiros relativos. Nela, leva-se em consideração os contextos dos obstáculos epistemológicos, os contextos concretos e os internos à própria matemática, buscando, incialmente, dar *status* de número aos inteiros negativos por meio da resolução de algumas equações e a mobilização de algumas propriedades dos números inteiros relativos. As demais ações dessa parte do digrama são específicas da proposta de ensino dada por Berte *et al*. (2008), e muitas delas foram acatadas pelo grupo de professores que com suas devidas adaptações, foram mobilizadas em nossa proposta também.

Contexto Cotidiano C

Esse contexto foi retirado, principalmente, dos estudos de Gonçalves (2016) e Cid (2015), que juntamente com os consensos provenientes das discussões com o grupo de estudos nos auxiliou na construção de um *Modelo Dominante* para os inteiros relativos.

Vale ressaltar, que os links distribuídos no decorrer das explicações das ações de cada contexto, nos levam a parte da tese com mais informações e detalhes, nos encaminham para os demais aspectos que mobilizamos na pesquisa.

C_1- *Introdução: Onde encontramos Z?* – Descrevemos um *Modelo Dominante* cuja introdução ao ensino dos inteiros relativos se dá por situações cotidianas que podem ser representadas pelos inteiros relativos: contextos monetários, de temperatura, saldo de gols, altitudes, entre outros. Todos estes contextos são mobilizados para contemplarem o primeiro contato que os estudantes terão com esses números, movimento justificado pela aproximação que eles podem ter com esses números.

C_2- Linguagens – Estudamos a comparação entre a tarefa de traduzir um problema em linguagem matemática para a linguagem materna, retirado do *Tipo de Tarefas* descrito por Gonçalves (2016). Nela, parte-se de situações cotidianas, "familiares aos estudantes", cria-se contextos para a aparição dos inteiros negativos e, consequentemente, dos demais conceitos e procedimentos.

C_3- Identificar representantes de Z – Os contextos para o ensino dos inteiros relativos dados no *Modelo Dominante* são pensados para se identificar representantes para os inteiros relativos em situações cotidianas. Gonçalves (2016) também identificou que devido as dificuldades de aprendizagem apresentadas pelos estudantes, alguns autores de livros didáticos propõem suas criações didáticas, novos modelos de ensino pautados em situações cotidianas e que visam "atacar" as dificuldades elencadas.

C_4, C_5, C_6 e C_7- Reta numérica, valor absoluto, simétrico, comparar e operar com Z – Para essas ações, realizamos estudos sobre os principais tipos de tarefas que serviram de base para a construção das técnicas para se operar com os inteiros relativos. Buscamos essa sequência nas propostas do *Modelo Dominante*. Comparar dois inteiros relativos, reta numérica, simétrico e operações com os inteiros.

C_8- Questionamento tecnológico-teórico – Questionamos o *bloco tecnológico-teórico*, fruto dos estudos de Gonçalves (2016). O interesse por discutir esses aspectos de uma praxeologia se deu a partir da dificuldade de encontrar justificativas matemáticas para as técnicas das tarefas para os inteiros relativos. A maioria dessas justificativas pairavam o campo das criações didáticas, modelizadas pelos modelos de neutralização e deslocamento.

Contexto Matemático-Cotidiano MC

Esse contexto foi construído além dos estudos do grupo de professores pelos estudos de Gonçalves (2016), Berte *et al*. (2008), Borba (2009), Coquin-Viennot (1985), Cid e Bolea (2010) e Cid (2002, 2003, 2015), buscando a construção um *Modelo Epistemológico de Referência* para os inteiros relativos.

Vale ressaltar, que os links distribuídos no decorrer das explicações das ações de cada contexto, nos levam a parte da tese com mais informações e detalhes, nos encaminham para os demais aspectos que mobilizamos na pesquisa.

MC_1- Como 'mesclar' contextos matemáticos e cotidianos? – Uma das primeiras questões levantadas para a realização dessa ação foi como 'mesclar' os contextos cotidianos com os matemáticos? Esse questionamento foi necessário, pois, segundo os

estudos de Cid (2015) e Gonçalves (2016), os modelos concretos, entre outros aspectos já debatidos, geravam novas dificuldades de ensino. Porém, segundo o grupo de estudos, o modelo algébrico traria também muitas dificuldades de aprendizagem aos estudantes, principalmente, devido à defasagem de aprendizagem dos anos anteriores e pela falta de 'costume' em lidar com as propriedades e com os conceitos algébricos.

MC_2- Situações e Linguagens – Articulamos as ideias de um tipo de tarefas construído por Gonçalves (2016), para atender às solicitações dos professores do grupo de estudos referente à mobilização apenas dos contextos algébricos, devido à falta de maturidade dos estudantes em lidar com as noções algébricas.

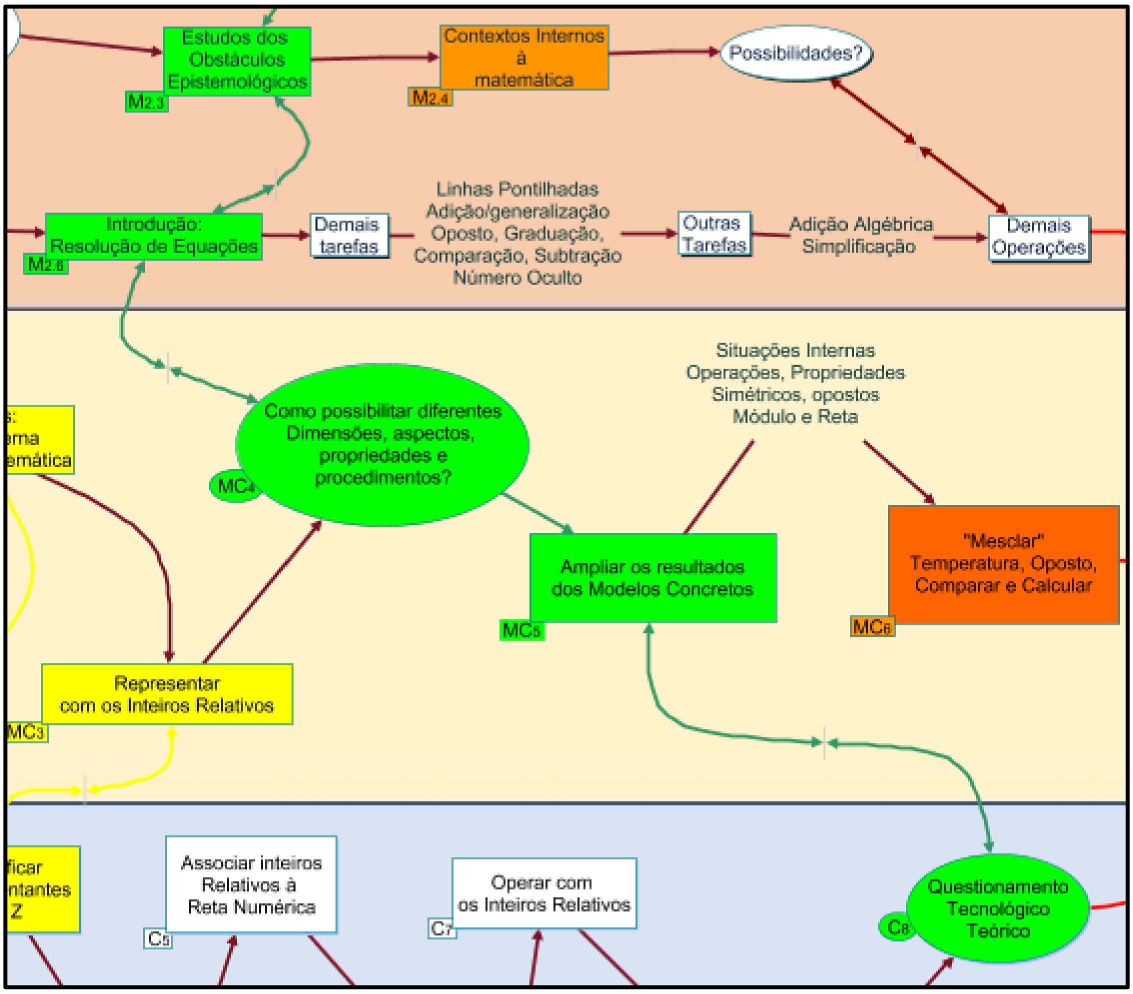
MC_3- Representar com os inteiros relativos – Tanto as tarefas identificadas por Gonçalves (2016) quanto as apresentadas por Berte *et al*. (2008) partem de contextos cotidianos e aritméticos. Por sua vez, Berte *et al*. (2008) propõem, além disso, que seja realizado um trabalho com resolução de equações e a exploração das propriedades das operações. Sendo assim, o consenso do grupo foi que trabalhássemos algo semelhante em nossa proposta, novamente, 'mesclando' ambas as concepções sobre a introdução dos inteiros relativos.

MC_4- Como possibilitar diferentes dimensões, aspectos, propriedades e procedimentos e *MC_5- Ampliar os resultados dos modelos concretos* – Para possibilitar diferentes aspectos, dimensões, procedimentos e propriedades nos pautamos nos estudos de Borba (2009), buscando ampliar os tipos de tarefas a serem trabalhados a partir dos contextos concretos. Essa autora apresenta em seus estudos a importância desse conhecimento por parte dos docentes para o seu planejamento e, consequente, aprendizagem dos estudantes.

MC_6- 'Mesclando' temperaturas, opostos, comparando e calculando – Compilamos todos os estudos realizados, os com o grupo de professores, os consensos, além daqueles anteriores ao grupo de estudos, também preparatório para toda a organização do grupo. Também articulamos aqueles posteriores, mais evidentes, em consequência ao fechamento do grupo, devido ao momento político vivido naquele período. Dessa forma, também nos baseamos na resposta coração do grupo, construímos a resposta coração da tese, que em parte, se deu pela proposta de ensino dos inteiros relativos alternativa àquelas ao *Modelo Dominante*.

Além dos contextos Matemáticos, Cotidianos e Matemáticos-Cotidianos, prevemos outras quatro possíveis articulações presentes neles, representados em verde-claro, azul-claro, amarelo e laranja.

Por exemplo, o grupo verde-claro poderia ter suas ações relacionadas por meio da aproximação como os estudos da *razão de ser* epistemológica dos inteiros relativos, dadas a partir do surgimento de novas dificuldades didáticas e do reforço de alguns obstáculos epistemológicos. Daí, a necessidade de se introduzir os inteiros relativos simultaneamente aos estudos da Álgebra Escolar, semelhante ao trabalho realizado por Cid (2015). Esse caminho de ações poderia gerar novos elementos ao *Modelo Epistemológico de Referência*, consequentemente, uma nova proposta de ensino para os inteiros relativos. Em verde-claro representamos esse novo caminho.



Não apresentaremos justificativas mais elaboradas das articulações entre as atividades dos novos grupos, pois demandaria um tempo e espaço para além dos objetivos pensados para essa parte da tese. Resumidamente, os motivos foram as aproximações observadas entre os temas e atividades de cada contexto que, segundo as conclusões tanto do grupo de estudos quanto as nossas, mostravam elementos que poderiam ser relacionados.

R_{II}^{Z}- DESENHO DO MODELO EPISTEMOLÓGICO DE REFERÊNCIA PARA OS INTEIROS RELATIVOS[88]

MC_2- Situações e Linguagens e C_2 – Linguagens (esta parte refere-se aos seguintes fragmentos dos contextos MC_2 e C_2):

Inventar a roda novamente não foi o nosso objetivo e, como disse Sir Isaac Newton, ‘Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes’. Dessa forma, me baseei em outros estudos para organizar o desenho do MER para os inteiros relativos. Inicio a escrita desta resposta, com a descrição de alguns resultados de minha dissertação (GONÇALVES, 2016), por ela ter sido o ponto inicial que originou esta tese. Nela, buscamos compreender os possíveis distanciamentos e aproximações de um saber em duas instituições distintas, o entendimento das transformações que esse saber sofreu de uma instituição para outra.

Uma das ferramentas mobilizadas para realizar essa tarefa foi a construção de um Modelo Dominante tanto da proposta de ensino de um livro didático quanto das demais vinculadas aos modelos concretos.

O primeiro tipo de tarefas da praxeologia descrita na dissertação foi “dado um problema enunciado na língua materna, converter as informações para linguagem matemática”. (GONÇALVES, 2016, p. 114). A análise da parte do livro didático que nos possibilitou construir esse tipo de tarefa, nos permitiu concluir que um possível objetivo dos autores era o de introduzir as ideias dos números inteiros relativos, precisamente, “onde encontramos os números negativos?” (GONÇALVES, 2016, p. 82) em situações cotidianas. O segundo tipo de tarefas construído ainda a partir da análise dessa mesma parte do livro foi: ‘dado um problema ou situação-problema, identificar se os valores, frases ou respostas são representados por números inteiros negativos ou positivos’. Apesar de os autores anunciarem os dois tipos de tarefas anteriores e nada falarem sobre

[88] Descrevemos nossas ações por meio de um *Diagrama de Ações*, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada ação será identificado por “**Xn**” e o fim “**Xn – Fim**”. Ações dos contextos MC_2 e C_2. Ressaltamos que as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.
Para retornar à $MC_{1.1}$ – *Início*, clique aqui. Ou para retornar à C_1 – *Início*, clique aqui.
Para retornar à página 54, $R_{3.1}$: *Estudar o desenvolvimento histórico e epistemológico de Z*, clique aqui.
Para retornar à página 136, $R_{10.2}$: *Metodologia e Procedimentos da pesquisa*, clique aqui.
Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.
Para retornar à página 163, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.

converter os enunciados da língua materna para a matemática, essa tarefa foi mobilizada muitas vezes nas atividades propostas. Essa questão ficou implícita nas atividades dadas por eles e, por uma escolha metodológica de retratar ao máximo as praxeologias, demos esse destaque em nossa modelagem. Ressalta-se que os dois tipos de tarefas são complementares, pois, o objetivo seria que, a partir de uma situação cotidiana, os estudantes pudessem identificar quando ela pode ser 'traduzida' como um número inteiro negativo. Percebe-se que esse primeiro contato com esses números se dá por situações externas à matemática. **MC2** e **C2 – Fim.**[89]

Vale destacar que, pensando em uma forma de deixar mais evidenciado, nessa parte do texto, o *MER*, a partir daqui realçaremos em **NEGRITO** alguns tópicos. Partes mais importantes, além do negrito, serão **SUBLINHADAS**.

Outro material que nos debruçamos foi a tese de Eva Cid (2015) que finaliza um ciclo de pesquisa retratado em várias publicações anteriores. Em sua tese, Cid (2015) afirma que **o campo da aritmética ou modelos do cotidiano não são bons lugares para "começar a ensinar números negativos, pois não permite justificar de maneira aceitável sua necessidade. Além disso, incentiva a concepção de que o número só pode ser entendido como uma medida**". (CID, 2015, p. 255 - 256, tradução nossa).

Sendo assim, segundo essa pesquisadora a definição de número fica prejudicada, e as concepções acerca das operações poderá ficar restrita às ações concretas realizadas por meio dessas atividades e, provavelmente, a busca por justificativas a essas tarefas ficará também em segundo plano. (CID, 2015).

> A razão de ser dos números negativos não pode ser encontrada em uma área, como a aritmética, em que a contextualização numérica permanente e a fragmentação da sequência de operações a serem realizadas tornam desnecessário todo simbolismo além da representação de números e seus algoritmos de cálculo. (CID, 2015, p. 255, tradução nossa)[xli].

M1.8 – Etapas I, II e IV: Problemas aritméticos aditivos, diretos e parametrizados:

A partir dessas concepções, Cid (2015)[90] nos propõe o **desenvolvimento de um trabalho focado na introdução da Álgebra e dos inteiros relativos de forma simultânea**. Assim, inicialmente, em sua proposta de ensino, os estudantes se envolverão com situações do tipo 'como construir expressões algébricas? Como construir as ideias

[89]Para ir à *C2.1 – Início*, clique aqui.
Para ir à *MC3 – Início*, clique aqui.
[90] Para retornar à página 159, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.

de parâmetros? E, de variáveis? E, de incógnitas? Quais são os papéis dos sinais operatórios? E, das diferenças algébricas? E, das propriedades? Entre outros temas vinculados à passagem da Aritmética para a Álgebra. O excerto a seguir fornece uma aproximação com a proposta desta autora:

> Constituem problemas aritméticos aditivos, diretos e parametrizados, nos quais um cardinal inicial sofre diferentes aumentos ou diminuições que levam a um cardinal final que é a solução solicitada. A falta dos dados iniciais ou um dos dados intermédios impede a execução do programa de cálculo aritmético necessário para obter a solução. A exigência de 'dar uma solução' ao problema força o uso da letra e permite o aparecimento de expressões algébricas (a 'fórmula' que resolve o problema) aditivas, onde a letra assume um papel de parâmetro ou variável. O conhecimento subsequente dos dados desconhecidos abre inicialmente a possibilidade de utilizar a fórmula para encontrar a solução, dando valores numéricos às letras, o que leva à simplificação das expressões algébricas para permitir um uso mais eficiente delas. Finalmente, as técnicas de simplificação dão significado operatório binário generalizado dos sinais + e – e à adição dos inteiros entendidos como a composição de transformações. (CID, 2015, p. 271, tradução nossa)[xlii].

Para exemplificar a necessidade dessas composições, pensamos na seguinte operação, '10 – 3 – 2', ou seja, para o primeiro sinal de menos, interpreta-se como uma operação de subtração (operatório binário), assim, como '10 – 3 = 7', temos agora, '7 – 2 = 5', novamente o sinal pode ser interpretado como operatório binário. Todavia, se escrevermos 'b – 3 – 2', a primeira subtração não pode ser resolvida, modificando a interpretação para o sinal de menos, nesse caso, deve-se pensar que de *b* subtrai-se '3' e depois subtrai-se '2'. Assim, de *b* deve subtrair '5' ou 'b – 3 – 2 = b – 5'.

Nesse caso, teremos uma composição de transformações, primeiro subtraímos '3' e depois subtraímos '2', ou seja, obtemos a transformação, subtrair '5'. Dessa forma, os sinais de mais e de menos não representam apenas as operações entre dois números (sinais operatórios binários), mas agora, também afetam cada número, indicando seu papel como parcela de uma adição ou subtraendo de uma subtração (sinais operatórios binários generalizados).

Uma conclusão levantada nos estudos com os professores dos laboratórios de matemática da Rede de Ensino de Campo Grande foi a não aceitação desse tipo de metodologia de ensino por um percentual bem elevado dos docentes dessa rede. Um dos motivos é que alguns desses conhecimentos tratam das propriedades dos números naturais, e segundo eles, algumas justificativas habitam 'séries' do ensino médio ou de alguns cursos de graduação e, consequentemente, a 'maturidade

matemática' para iniciar trabalhar esse conteúdo ainda não estaria adequada. Outra justificativa é a falta de algo concreto para ser explorado, muitos diriam que estamos 'fazendo matemática sem sentido' para os estudantes, há necessidade de partir de algo do cotidiano para que eles tenham condições de progredir em seus estudos. $M_{1.8}$ – Fim[91]**.**

MC_3- Representar com os inteiros relativos e C_3- Identificar representantes dos inteiros relativos (esta parte, refere-se aos seguintes fragmentos dos dois contextos, MC_2 e C_2):

Cid (2002) [92] traz diversas reflexões sobre como podemos representar os inteiros relativos em um trabalho em que sua introdução é dada em situações cotidianas, os modelos concretos. Uma delas seria sobre a "crença de que o modelo, o representante, deve se assemelhar ao que é representado, uma crença que a educação incentiva, devido ao uso de analogias que faz com os modelos concretos, mas que deve ser posta em questionamento". (CID, 2002, p. 537, tradução nossa).

Uma crença que muitas vezes paira sobre determinados conteúdos, por serem de maior dificuldade de aprendizagem, é a criação de novas ferramentas didáticas ou, simplesmente, criações didáticas, supostamente por facilitar os processos de aprendizagem. O intuito não é o de criticar essa postura e sim, dar ênfase ao que Cid (2002) alertou para se pôr em questionamento. **Os modelos concretos têm o seu fundamento nas situações de analogia**, pois ao se estudar um modelo, por analogia, estamos trabalhando algumas propriedades e procedimentos dos inteiros relativos.

Outra reflexão importante se dá acerca dos problemas mobilizados em algumas propostas de ensino que exemplificamos com a figura 11.

[91] Para retornar à *$M_{1.6}$ – Início*, clique aqui.
Para retornar à *MC_2 – Início*, clique aqui.
[92]Para retornar à página 162, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.
Para retornar à página 163, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

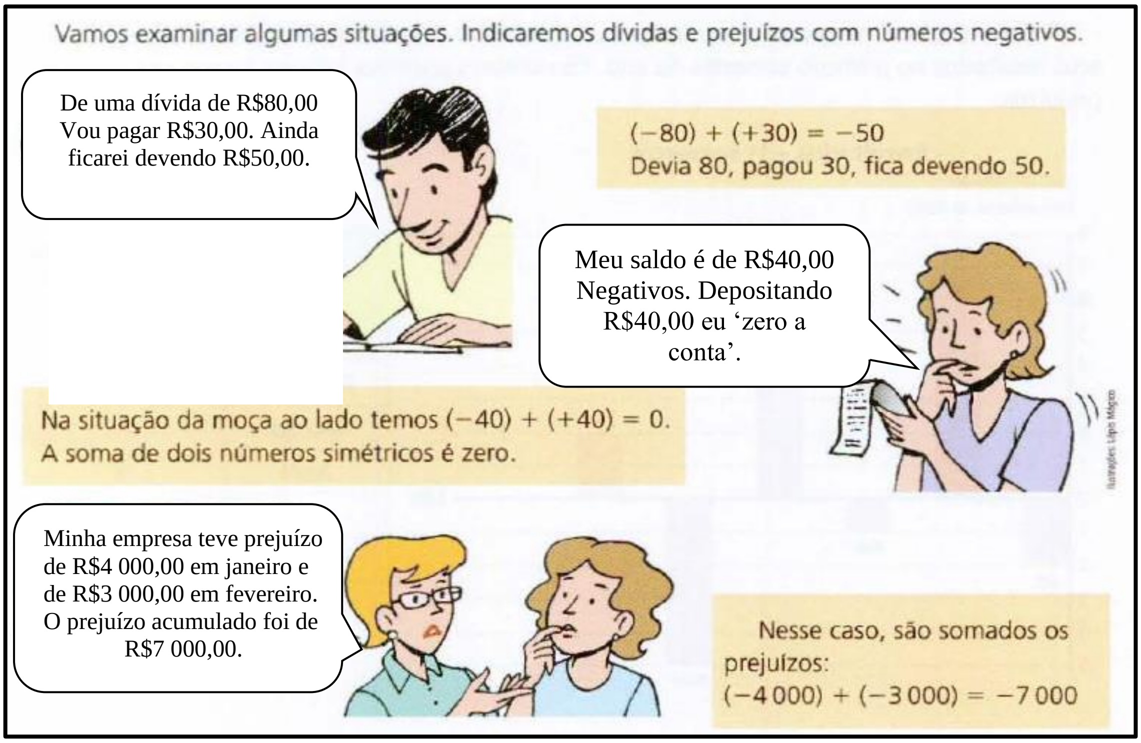


Figura 11– Exemplo de Situações de analogia
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 63.

Segundo Cid (2015), esses problemas poderiam ser resolvidos usando números naturais, pois se de uma dívida de R$80,00 pago R$50,00, há possibilidade de representá-la pela seguinte subtração, '80 – 50 = 30', ou ainda, se em janeiro minha empresa teve um prejuízo de R$4 000,00 e em fevereiro um prejuízo de R$3 000,00, pode-se representar o saldo desses dois meses com a seguinte operação de adição,
'4 000 + 3 000 = 7 000'. Todavia, nesses casos, os autores escolheram esses exemplos para apresentar possíveis situações em que se mobiliza os números inteiros relativos. Assim, aparentemente, sob a perspectiva identificada no livro didático, os números inteiros relativos 'traduzem' melhor as situações.

> Isso responderia à crença de que o modelo, o representante, tem que parecer com o representado, uma crença que a educação promove devido ao uso análogo que faz de modelos concretos, mas que deve ser questionado. Geralmente, as equações matemáticas que modelam um sistema do mundo sensível não 'se assemelham' fisicamente ao sistema que representam, mas isso não impede que o seu estudo permita obter muita informação sobre esse sistema. A principal função de um modelo não é 'assemelhar-se' ao sistema que ele modela, mas fornecer conhecimento sobre ele e fazê-lo da maneira mais econômica e eficiente possível. (CID, 2002, p. 537, tradução nossa)[xliii].

Cid (2002) ainda afirma que situações-problema de cunho aritmético, da aritmética elementar, podem ser traduzidas e solucionadas por meio dos números inteiros positivos, deixando em segundo plano os números inteiros negativos. Segundo essa autora, as técnicas postas em prática são mais eficientes e demandam procedimentos e simbologias menos custosas. “E, é claro, todos os problemas da aritmética elementar podem ser resolvidos usando números positivos e sem o uso de números negativos, fornecendo técnicas de resolução mais econômicas ou mais poderosas”. (CID, 2002, p. 537, tradução nossa).

Essa autora tece uma crítica bem enfática ao uso dos modelos concretos, característicos da aritmética elementar, quando trabalhados com os inteiros relativos. As justificativas e as razões desse ensino estão pautadas como no exemplo acima, sendo assim, os cenários motivadores para o seu ensino. Dessa forma, **ela as considera muito pobres, dizendo que os matemáticos não demandariam construir um conceito para apenas ser mobilizado em situações cotidianas, bem como não faria sentido os estudantes aprenderem um conceito que fosse usado apenas para esses modelos concretos, ou seja, ela retrata a razão de ser dos inteiros relativos. MC_3 e C_3 – Fim.**[93]

Gonçalves (2016) descreve que os contextos da formalização dos inteiros relativos perpassam os estudos de algumas estruturas algébricas e, consequentemente, as justificativas das técnicas matemáticas não podem ser demonstradas pelos modelos concretos. Por exemplo, como ensinar a ‘relação de ordem’ por meio das ideias de temperatura?

Nesse sentido, “os modelos concretos que são definidos nele não fundamentam a estrutura de anel ordenado dos números inteiros e até parecem dificultar a compreensão dos aspectos ordinais e multiplicativos da estrutura acima mencionada”. (CID, 2002, p. 537, tradução nossa). E, dependendo da mobilização realizada, pode-se gerar o desenvolvimento de regras e procedimentos de cálculo equivocados, gerando novos obstáculos à aprendizagem dos estudantes, além daqueles inerentes aos inteiros relativos. Por exemplo, estabelecer a mesma relação de ordem dos inteiros positivos para os inteiros negativos, ou ainda, mobilizar as mesmas “regras de sinal” da operação de multiplicação para as adições.

[93]Para retornar à $C_{2.1}$ – Início, clique aqui.
Para ir à C_4 – *Início*, clique aqui.
Para ir à MC_4 – *Início*, clique aqui.
Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para as demais locais.

Nesse sentido, além das considerações de Cid (2015) sobre **a defesa da introdução dos inteiros relativos pela álgebra por esta ser a sua *razão de ser* epistemológica e, desta forma, estes números terem sentido ou ainda, esta abordagem contribuir para a atribuição de significado a eles, acreditamos, baseados nas considerações do grupo de estudos, que as situações mobilizadas, da aritmética elementar, não justificam todos os conteúdos e procedimentos dos números inteiros negativos ou especificamente dos números inteiros relativos.** Mobilizamos vários aspectos da tese de Cid (2015) que nos permitem fundamentar e justificar essa nova escolha referente à introdução dos inteiros relativos. A seguir, discorremos sobre os elementos que embasaram nossas escolhas.

Na tentativa de aproximar o início dos estudos dos inteiros relativos com a sua *razão de ser*, uma das escolhas metodológicas é o estudo simultâneo dos inteiros relativos e da álgebra escolar. Para justificar tal escolha, Cid (2015) elenca alguns aspectos, tais como, simetrização aditiva e multiplicativa dos números naturais; o papel dos parênteses para a escrita algébrica; o entendimento que os sinais operatórios binários, na aritmética, indicam a ação de realizar uma operação; a subtração aritmética relacionada à ação de subtrair e retirar e a comparabilidade entre as diferenças da escrita algébrica e aritmética, sendo que a primeira é considerada mais complexa por essa pesquisadora[94].

Da mesma forma que para o estudo com os modelos concretos, segundo Cid (2015), vários são os problemas que se pode enfrentar no ensino da passagem da aritmética para a álgebra e os inteiros relativos concomitantemente. Um deles é a necessidade de começar

> [...] a álgebra escolar quando as regras dos sinais ainda não estão disponíveis, o que dificulta, se não impede, o cálculo algébrico. Isso nos coloca na passagem da aritmética para a álgebra, [...], no início da álgebra escolar, e força uma introdução simultânea de números negativos e álgebra na qual os diferentes objetos algébricos são apresentados, mas o desenvolvimento e a consolidação das técnicas que os afetam são adiados até que sejam estabelecidas as técnicas de cálculo com números [...] negativos. (CID, 2015, p.256, tradução nossa)[xliv].

Isso mostra a necessidade de um planejamento para a organização das atividades, pois a depender das escolhas, algumas dificuldades podem aparecer. **A demanda de uma ferramenta que o aluno ainda não estudou pode gerar as mesmas dificuldades ocorridas para os modelos concretos, quando para justificarmos**

[94] Detalharemos esses aspectos na *resposta coração da tese* em que descrevemos nossa proposta de ensino para os inteiros relativos.

algumas técnicas, as tecnologias necessárias habitam outras etapas do ensino e demandam uma maturidade matemática que será alcançada em anos posteriores de estudo.

Na tentativa de entender melhor esses fenômenos das escolhas didáticas visando não acarretar mais problemas ao ensino dos inteiros relativos, um fato preponderante é o conhecimento mais aprofundado do conteúdo. Quais dimensões desse conteúdo devem ser abordadas? Quais as principais dificuldades? Pensando nessas questões buscamos dois outros artigos que nos auxiliaram na missão de descrever um *Modelo Epistemológico de Referência* para os inteiros relativos.

O primeiro deles, "O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números relativos", escrito pela pesquisadora Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (BORBA, 2009)[95], também foi uma das fontes de pesquisa para a organização dos encontros com os professores de matemática e para a elaboração da nossa proposta de ensino para os inteiros relativos e para a descrição de um *Modelo Dominante*.

Resumidamente, nesse artigo, Borba (2009) discute os processos de aprendizagem dos números inteiros relativos, apresentando o resultado de três investigações, todas pautadas na concepção que a aprendizagem de um conceito tem por influência seus significados, suas propriedades e suas representações, analisando cada uma dessas dimensões. Por exemplo, os números inteiros relativos assumem alguns significados, podendo ser uma medida positiva ou negativa (possuir R$ 10,00), uma transformação positiva ou negativa (retirar R$ 10,00), ou ainda uma relação positiva ou negativa (R$ 10,00 a menos). Esses significados, matematicamente, são representados de forma semelhante, porém os aspectos cognitivos envolvidos são de ordem diferentes.

Na primeira investigação apresentada por Borba (2009), 60 estudantes entre 7 e 8 anos, resolveram atividades com os três significados atribuídos aos inteiros relativos. Mobilizou-se 12 problemas envolvendo as ideias do jogo *pinball*. Como resultados, essa pesquisadora apresentou que as dimensões, significados, invariantes e representações são imprescindíveis para a aprendizagem dos inteiros relativos.

> Neste plano metodológico as três dimensões propostas por Vergnaud (1986, 1997) foram manipuladas: os alunos resolviam problemas de diferentes *significados* (*medidas* ou *relações*), envolvendo diferentes

[95] Para retornar à página 30, *Q_2: Que aspectos do PQM mobilizar* ..., clique aqui.
Para retornar à página 54, *$R_{3.1}$: Estudar o desenvolvimento histórico e epistemológico de Z*, clique aqui.
Para retornar à página 100, *R_6: Razão de ser: cotidiano, jogos* ..., clique aqui.
Para retornar à página 136, *$R_{10.2}$: Metodologia e procedimentos da pesquisa*, clique aqui.
Para retornar à página 163, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

> *invariantes* (as propriedades de problemas *diretos* e as de problemas *inversos*) e por meio de diferentes formas de *representação simbólica* (*implícitas* – como a representação oral, ou *explícitas* – como representações escritas ou as que se utilizam de material manipulativo). (BORBA, 2009, p. 80).

Na segunda investigação, 60 estudantes resolveram 12 problemas de transformação. Os resultados variavam entre os significados de medida e de relação, também no jogo *pinball*. Como resultados da investigação foram apresentados os estudantes que manipularam apenas problemas com significados de relação, porque eles tiveram um nível de desenvolvimento maior tanto nesse significado quanto nos demais, quando comparados com aqueles que resolveram apenas problemas com significados de medida e foram resolver problemas com os demais significados.

Na terceira investigação, alguns estudantes resolveram apenas problemas diretos, enquanto outros apenas inversos[96]. Borba (2009) concluiu que o desenvolvimento dos primeiros foi superior aos demais, pois, como os problemas inversos ou aqueles cujos números possuem significado de relação, cognitivamente, são mais complexos, auxiliam na aprendizagem dos problemas diretos ou problemas cujos números têm significado de medida, cognitivamente, mais simples.

Essa pesquisadora também trata da questão que, naturalmente, qualquer professor, intuitivamente, é capaz de dizer como seus estudantes estão aprendendo, os que estão com dificuldades e quais são essas dificuldades. Essa intuição é descrita por Borba (2009, p. 58) como: "muitas vezes, eu tinha a impressão de que a maioria dos alunos demonstrava compreender o conceito sendo trabalhado, ou, ao contrário, parecia que um grande número de alunos estava tendo dificuldades". Porém, um questionamento é pertinente nesse contexto: como avaliar essa compreensão? Como verificar os motivos dos erros? Como passar da intuição ou da impressão, para um método mais palpável?

Com indagações semelhantes a essas é que o artigo é desenvolvido. Borba (2009, p. 59) destaca que "**é preciso ter um bom conhecimento do que constitui um conceito e de como este se desenvolve**", pois há necessidade de uma **compreensão mais aprofundada "do que compõe conceitos e de quais aspectos deles estão sendo avaliados nas questões propostas aos alunos"**. A necessidade de se conhecer os

[96] "No caso do valor inicial desconhecido exige-se mais do que uma ação direta, pois não se tem um valor sobre o qual se possa agir diretamente. Uma das formas de se resolver um problema de valor inicial desconhecido, é inverter as ações sugeridas no enunciado do problema. Dessa forma, na situação inversa proposta [...]. Essa inversão é uma operação mental a mais – e não mencionada no enunciado do problema – e, desta forma, problemas inversos são mais complexos que problemas diretos que não exigem inversão de operações. (BORBA, 2009, p. 67 – 68).

conceitos com mais profundidade evita a geração de dificuldades de construção de novos princípios pelas quais seria possível deduzir um determinado conjunto de consequências ou motivos acerca das dificuldades e dos erros dos estudantes. Também aponta caminhos ou metodologias de como as dificuldades observadas poderiam ser superadas. No entanto, **como conhecer o conceito? Basta saber mobilizar as fórmulas, algoritmos e procedimentos? Basta resolver diversos problemas com exatidão?** A proposta dada por Borba (2009) nos parece palpável para os docentes responderem a estes questionamentos.

Nossas experiências em/com formações continuadas, nos traz uma frase muito repetida nesses encontros: *uma boa formação precisa de algo que possa ser mobilizado em minha sala de aula.* Obviamente, esse pensamento não pode ser generalizado, mas uma grande parte dos professores quer que ao final de uma formação haja uma 'aula ou atividades para ser/serem posta/postas em prática'. Um dos participantes do nosso grupo de professores dos laboratórios de matemática nos relatou que *algumas formações realizadas já trazem tudo pronto, não coloca o professor para pensar, refletir, buscar, pesquisar.* [...] *Esse formato* [não] *é positivo pois* [não] *coloca o professor a ter papel ativo no seu processo de formação.*

Nesse sentido, buscando formas de o professor ser ativo nas formações que participa, semelhante aos aspectos do *Paradigma Questionamento do Mundo,* também pensamos a organização dos encontros do grupo de estudos, mobilizando elementos da proposta de Borba (2009), ou seja, um professor que busque por **caminhos que lhe permita compreender o que realmente seu aluno aprendeu e de que forma aprendeu, bem como os diversos questionamentos que pode incorporar à sua prática a respeito do desenvolvimento de conceitos por parte de seus alunos**. Porém, para isso, esse docente deve analisar sua prática e as suas metodologias. Contudo, se simplesmente, reproduzir propostas apresentadas nos livros didáticos ou em seus encontros formativos, certamente, questões como as que seguem aparecerão: "Como posso me certificar de que meus alunos estão compreendendo os conceitos trabalhados? Quais aspectos dos conceitos devo avaliar? Como devo trabalhar os conceitos de forma a oferecer aos meus alunos um contato amplo com os mesmos?" (BORBA, 2009, p. 59). Tais questões propiciam reflexões e análises de vários aspectos tanto da aprendizagem dos estudantes quanto das formas de ensinar os conteúdos.

Como conhecer um conceito? Uma possível resposta para esse questionamento seria que "**a compreensão de um conceito é fortemente influenciada pelos**

'significados' envolvidos nas situações vivenciadas, pelas 'propriedades' conceituais trabalhadas e pelas 'representações simbólicas' utilizadas". (BORBA, 2009, p. 60, grifo do autor). Um grande desafio aos professores é lecionar tais conceitos e favorecer aos seus alunos a produção de significados. Pensando na operação de multiplicação, os significados seriam os canônicos, adicionar parcelas iguais, combinações, proporcionalidades? Ou que os alunos sejam capazes de enxergar utilidade prática e interna à própria matemática? Nosso objetivo foi no decorrer da escrita da tese abordar tais pontos e buscar quais questionamentos que, como esses, pudessem fazer parte da rotina de professores e alunos. **A arte de criar boas perguntas**, pode ser um excelente caminho para favorecer a aprendizagem dos nossos alunos. Tentamos justificar os motivos de nossa 'certeza', também, no decorrer da tese.

MC_4- Como possibilitar diferentes dimensões, aspectos, propriedades e procedimentos para o ensino de Z? e MC_5 – Ampliar os resultados dos Modelos Concretos (esta parte refere-se aos seguintes fragmentos dos dois contextos, MC_4 e MC_5) [97]**:**

Retornando ao texto de Borba (2009), não que os assuntos abordados anteriormente não permeassem as ideias dessa autora, porém, por detrás da compreensão de um determinado conceito, como vimos anteriormente, deve existir três dimensões: os significados, as propriedades e as representações simbólicas. Alguns cuidados devem ser observados, e são estes que nos permitem ampliar nosso conhecimento acerca dos conceitos que estamos aprendendo. Por exemplo, **posso compreender um conceito para um certo tipo de significado, como a ideia de 'adição de parcelas iguais' e não em outro, 'combinações', bem como posso compreender determinada propriedade e não ter sido apresentado a outra tão importante quanto**. **Para as representações não seria diferente, ou seja, conheço e compreendo bem a representação algébrica de uma função, mas não compreendo e opero tão bem a sua representação gráfica.** Sendo assim,

> alunos podem demonstrar a compreensão de um conceito em certas situações, mas não em outras. Para certos significados, utilizando-se propriedades específicas e representando o conceito por meio de algum sistema de símbolos, o aluno pode demonstrar compreensão de um

[97] Para retornar à *MC_3 – Início*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.

> conceito, mas, ao variar alguma dessas dimensões, o mesmo nível de compreensão pode não ser evidenciado. (BORBA, 2009, p. 60).

Vale ressaltar que, **variar contextos não significa variar as dimensões**, pois, possivelmente, podemos mudar os contextos e trabalhar o mesmo significado, por exemplo, se devo 7 reais ou se a temperatura agora é de 7ºC abaixo de zero, em ambos os casos, '–7' representa um significado de medida negativa, apesar de os contextos serem diferentes. Vejamos que para esse caso poderíamos organizar situações com significados de transformação ou de relação. Se as situações forem apenas de medida, os alunos serão privados de aprenderem e de mobilizarem os demais significados. Assim, a ausência dessas variações pode "afetar a compreensão de conceitos e de como diferentes significados, propriedades e representações devem fazer parte do processo de ensino formal dos conceitos". (BORBA, 2009, p. 60).

Para exemplificar seus estudos acerca das dificuldades de compreensão dos conceitos ensinados e da teoria da Campos Conceituais (VERGNAUD, 1986)[98] que embasa todas as suas análises, Borba (2009) mobiliza os números naturais e os números inteiros relativos. Essa autora usa as ideias que um conceito é definido por três dimensões: "1) o conjunto de situações que dão significado ao conceito, 2) as propriedades do conceito, invariantes em todas as situações e 3) os sistemas de sinais utilizados para representar simbolicamente o conceito". (BORBA, 2009, p. 61). Esta autora nos alerta que essas dimensões são imbricadas, mas para efeito de estudos e organização de seu trabalho irá considerá-los separadamente, isolando uma das três dimensões e mantendo as outras duas constantes. Uma das justificativas é o fato que devido a esse isolamento da dimensão, os professores podem mais facilmente identificar quais dimensões os estudantes estão desenvolvendo. O fato de compreender que dimensão está ou não sendo desenvolvida pode propiciar ao professor uma melhor maneira de direcionar suas ações e reforça a tese de que a compreensão dos conceitos é fundamental para que o professor possa desenvolver suas práticas mais efetivamente. Esses aspectos possibilitam ao professor um trabalho mais direcionado, "que leve em consideração o que seus alunos já sabem ao se iniciar uma unidade de ensino – que pode ser um primeiro contato ou retomada de contato com certo conceito - e que é voltada para a superação de dificuldades dos alunos". (BORBA, 2009, p. 61).

---

[98] VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. Análise Psicológica, v.1, n. 5, p, 75-90, 1986.

Nesse sentido, **dadas duas ou mais situações-problema podemos identificar que a mesma operação matemática pode resolvê-las, mas os significados, do ponto de vista psicológico, por detrás delas podem ser diferentes**. Os significados trabalhados por essa autora são os de **combinação, de mudança de quantidade, de medida, de transformação e de relação**, sendo que este último exige mais cognitivamente dos estudantes. Esses significados são dados em contextos com problemas que envolvem os números naturais, mas, como veremos a seguir, podemos transportá-los para os inteiros relativos.

Borba (2009) traz à tona os estudos de Carpenter e Moser (1982) e Vergnaud (1986) sobre a classificação dos problemas aditivos. "Para esses autores, embora dois problemas possam ser resolvidos pela mesma operação matemática, pode haver diferenças relacionais nos problemas e estas diferenças afetam o desempenho de alunos na resolução de cada um dos problemas". (BORBA, 2009, p. 62). Nesse sentido, **mesmo que a operação realizada seja a mesma, a interpretação que é exigida com a variação dos significados pode tornar o problema mais fácil ou muito mais difícil**. Obviamente, ao se propor um problema de combinação ou um problema de relação, o nível de compreensão será elevado, bem como a interpretação e o consequente raciocínio que deve ser mobilizado para a sua resolução.

Borba (2009) ainda acrescenta aos significados dos problemas as ideias de cálculo relacional e do cálculo numérico. Para Vergnaud (1986 *apud* BORBA, 2009), "o *cálculo relacional* refere-se à análise das relações implícitas nos problemas e a escolha de uma estratégia para a sua resolução" (p. 63, grifo do autor). E o cálculo numérico envolveria as contas que devem ser realizadas, não tendo destaque se foi mobilizado um algoritmo ou uma estratégia elaborada pelo estudante.

Em relação os inteiros relativos, Borba (2009) cita ao menos três significados aditivos: **o de medida, o de transformação e o de relação**. A autora ressalta que esses significados estão presentes em diversos contextos em que podemos encontrar os inteiros relativos, "tais como saldos bancários, saldos de jogos, localizações, medidas de temperatura, de altitude e de níveis de líquidos em recipientes, dentre diversos outros". (BORBA, 2009, p. 64). **Dentre os contextos apresentados por Borba (2009), podemos identificar a classificação realizada por Cid (2015) que trata todos eles como sendo modelos concretos, ou seja, modelos que retratam situações concretas em que algumas características dos inteiros podem ser identificadas.**

Como exemplo para essas ideias apresentamos os seguintes problemas:

1. “Uma pessoa tem R$ 600,00 em sua conta bancária e faz, sucessivamente, as seguintes operações: retira R$ 73,50; deposita R$ 18,30; retira R$ 466,90; retira R$ 125,00. O saldo final é positivo ou negativo? Em quanto?” (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2012, p. 66).
2. “Se a temperatura de uma cidade era de 5 graus acima de zero e houve uma queda de 7 graus, a temperatura final é de 2 graus abaixo de zero”. (BORBA, 2009, p. 64).

Nos exemplos o valor de R$ 600,00 e a temperatura de 5 graus acima de zero, representam uma medida positiva, valores ‘possuídos’ no início do problema. Já as retiradas de R$ 73,50, R$ 466,90, R$ 125,00 e a queda de 7 graus são classificados como transformações negativas, assim como, o depósito de R$ 18,30 é considerado uma transformação positiva, ou seja, o valor que irá ‘modificar’ o valor inicial, a quantidade que será adicionada ou subtraída do valor inicial. E, as soluções seriam as medidas finais, no caso do problema 1, uma medida negativa, ‘– R$ 47, 10’ e, para o segundo problema, uma medida negativa de ‘– 2ºC’.

Para os contextos apresentados, podemos interpretar o significado de ‘relação’, ou seja, um número inteiro relativo enquanto ‘relação’, como nos exemplos a seguir.

> Se alguém deposita R$ 7,00 (uma transformação positiva) ou a temperatura de uma cidade sobe 7 graus (também uma transformação positiva), independentemente do estado inicial – se a pessoa possuía ou devia dinheiro ou se a temperatura da cidade estava acima ou abaixo de zero – tem-se uma *relação positiva* de 7. Isto quer dizer que a pessoa possui no final R$ 7,00 a mais do que possuía antes ou a temperatura da cidade no final é de 7 graus maior do que a inicial. Para uma *transformação negativa* – uma retirada de R$ 7,00 ou uma queda de temperatura de 7 graus – resulta uma *relação negativa* – R$ 7,00 a menos ou 7 graus a menos. (BORBA, 2009, p. 64).

Sendo assim, podemos interpretar os números inteiros relativos, em contextos aditivos, como:

i. **medida negativa: dinheiro devido, temperatura abaixo de zero, abaixo do nível do mar, saldo devedor;**
ii. **transformação negativa: dinheiro retirado, dinheiro gasto, queda de temperatura, queda do nível da água num reservatório, pontos perdidos em um jogo, entre outros, e, por último**
iii. **relação negativa, uma quantia de dinheiro a menos, ou uma temperatura a menos que a inicial, ou ainda pontos a menos do que a medida inicial.** (BORBA, 2009).

Estes mesmos exemplos podem ser considerados para:

iv. **medidas positivas (dinheiro possuído, temperatura acima de zero, saldo de gols positivo em um campeonato de futebol);**

v. **transformações positivas (dinheiro depositado, subida de temperatura, pontos ganhos em um jogo) e;**

vi. **uma relação positiva (dinheiro, temperatura e pontos a mais do que a medida inicial).** (BORBA, 2009).

Diante desse contexto, podemos representar matematicamente uma dada situação mobilizando um número inteiro relativo, assim, um saldo de vinte reais, ganhar 20 reais ou ter vinte reais a mais, pode ser dado pelo número positivo '+20'. Exemplificando que conhecer os diversos aspectos de um conteúdo pode facilitar o trabalho dos professores, quando nos referimos as suas dificuldades de aprendizagem. **MC5 – Fim.**[99]

Borba (2009) diz que formalmente os números inteiros relativos são ensinados a partir do sétimo do ensino fundamental, mas enfatiza também que alguns de seus significados são lecionados em problemas dos anos escolares anteriores. Nesses problemas, não são abordados toda a simbologia, conceitos e ideias. Por exemplo, **o sinal de menos, que pode representar que uma quantidade é negativa, é visto apenas com a ideia da operação de subtração. "Os significados de *transformação negativa* – decrescer uma quantidade inicial – e de *relação negativa* – ter menos que uma quantidade inicial – estão presentes em muitos problemas aditivos trabalhados nas séries iniciais do Ensino Fundamental**". (p. 66).

Por exemplo, a ideia por detrás do problema 'Eu recebi R$ 80,00 a menos que meu colega. Se ele recebeu R$ 1 200, 00, quantos reais recebi de salário?' É a de relação negativa, 'R$ 80,00 a menos' ou (– 80). A operação ou a representação dessa situação pode ser dada por,

'1200 – 80' ou 'x – 1200 = (– 80),

Assim, '– 1200' é comparação entre o valor recebido e o salário do colega. **Neste problema, a mobilização de números naturais poderia resolvê-lo, mas o professor que propuser este problema aos seus alunos deve saber que ele também contém ideias dos números inteiros negativos. Nesse sentido, novamente, vemos a importância de conhecer os diversos aspectos de um conteúdo para planejar, organizar atividades e avaliar a aprendizagem dos estudantes.**

---

[99]Para ir à *MC6 – Início*, clique aqui.

Na sequência de seus estudos, Borba (2009) trata dos invariantes das operações aditivas, afirmando que podemos manter a mesma operação variando seus significados, sendo que para os diferentes significados há possibilidade de algumas propriedades serem mantidas constantes. Por exemplo, "a adição de dois números negativos [...] sempre resulta em um número negativo que é menor que qualquer um dos números adicionados". (BORBA, 2009, p. 67).

Nesse sentido, podemos ter atividades que a operação trará mais dificuldades para sua resolução, enquanto em outro caso, as operações mentais envolvidas, a interpretação pode ser a causa da dificuldade. Em um problema que o valor inicial é desconhecido, com certeza, trará maiores problemas de interpretação que um problema que exija como solução a medida final, ou seja,

> Determinar quantas bolas são possuídas se inicialmente se tem sete bolas e perde-se quatro bolas é mais fácil que determinar quantas se tinha inicialmente após perder quatro bolas e ficar com apenas três. Não se pode dizer que a dificuldade maior da segunda situação está na operação aritmética envolvida, pois a primeira situação, cognitivamente mais fácil, envolve uma operação aritmética – a subtração- que traz mais dificuldades e a segunda situação envolve a adição, mas exige maior número de operações mentais. (BORBA, 2009, p. 67).

Dessa forma, na primeira situação mobilizamos uma ação direta, retiramos quatro bolas das sete iniciais e aplicamos a transformação ao valor inicial, ou seja, de sete retiramos quatro, ou ainda, '7 – 4' = '3' bolas. Essa ação é suficiente para obtermos a resposta do problema, a quantidade de operações mentais é bem menor e mais simples que se compararmos com a segunda atividade, em que o valor inicial é desconhecido. Nesse exemplo, geralmente, **os estudantes são 'tentados' pela expressão 'a mais' a realizar uma operação de adição, muito provavelmente, pela falta de contato com problemas em que o significado da expressão 'a mais' está vinculado a problemas diretos**.

Nesse segundo exemplo, como o valor inicial é desconhecido uma das alternativas seria inverter a ação dada no enunciado, ou seja, foi proposta uma transformação negativa e nesse processo a ação a ser realizada seria uma transformação positiva. Sendo assim, a operação a ser realizada é uma adição, como dissemos anteriormente, mais simples que uma subtração, mas as operações mentais que levam a interpretação que as ações devem ser invertidas são mais complexas que agir diretamente sobre o valor inicial. Portanto, "**essa inversão é uma operação mental a mais – e não mencionada no enunciado do**

problema – e, desta forma, problemas inversos são mais complexos que problemas diretos que não exigem inversões de operações". (BORBA, 2009, p. 68).

Essas propriedades comentadas nos parágrafos anteriores são aplicadas aos números naturais, mas há possibilidade de as pensarmos para os inteiros relativos, ou seja, **o nível de dificuldade das propriedades, das ações diretas e inversas, das operações mentais mobilizadas pode ser analisado quanto às maiores ou menores dificuldades de resolução dadas aos estudantes, também podem ser pensadas e aplicadas aos inteiros relativos. E, para esses números podemos ampliar as discussões quando pensamos nos significados que os sinais operatórios podem ter[100], particularmente, podemos pensar no sinal de menos, pois além da ideia da operação de subtração (operatório binário), ele pode ser interpretado como o representante do oposto de um inteiro (operatório unitário), bem como representar a negatividade desse número (interpretação predicativa)**[101].

Outra discussão pertinente, representar simbolicamente algumas expressões dadas na linguagem materna, por exemplo, perda, débito, menos, decréscimo, abaixo de zero, graus a menos, podem ser substituídas pelo sinal de '–'. Nas aulas de matemática sobre os inteiros relativos, é comum vermos a mobilização de materiais concretos, como baralho (naipe preto negativo e vermelho positivo), palitinhos pretos e vermelhos, fichas azuis e vermelhas, andares acima e abaixo do térreo, entre outros que representam valores positivos e negativos. Nesse sentido, **percebe-se que pode haver algumas formas de representar os inteiros relativos, língua materna, materiais concretos e os próprios símbolos matemáticos, ou seja, vários são os ostensivos mobilizados**. Na TAD, o conceito de ostensivo, segundo Bosch e Chevallard (1999), são as figuras, mas também, tudo aquilo que é perceptível aos sentidos e que pode ser mobilizado nas atividades, como os sons, a escrita, os materiais concretos, os risquinhos, as simbologias matemáticas, enfim, tudo que ouvimos, enxergamos, sentimos e tocamos.

---

[100] [...] o sinal de menos pode representar operação: 2 – 1 = 1; sinal: – 1 e; simétrico: – (– 1) = + 1. Daí as confusões que os alunos podem vir a estabelecer com os conceitos dos inteiros, que permeiam todo esse conjunto. Quando se estabelecem regras e não há compreensão, quando os conceitos forem aplicados simultaneamente, as dificuldades surgirão nos processos de resolução de problema. (GONÇALVES, 2016, p. 126).

[101] A distinção entre modelos de neutralização e deslocamento é dada pelo significado que lhes é atribuído às diferentes valências dos sinais 'mais' e 'menos'. Nos modelos de neutralização, os sinais predicativos referem-se a medidas de quantidades de magnitude de sentidos opostos que se neutralizam; enquanto os sinais operatórios binários e unitários são identificados com ações de adição, coleta, remoção, separação etc. (CID, 2003, p. 5, tradução nossa).

Nesse sentido, os objetos ostensivos “constituem a parte perceptível da atividade, [...] na realização da tarefa esses objetos podem ser vistos tanto pelos observadores como pelos atores” (CASABÓ, 2001, p. 11, tradução nossa). E, como cada forma de representar pode favorecer a apresentação de determinada propriedade em detrimento de outra, facilitando ou não a resolução de problemas ou o entendimento do aspecto do conteúdo a ser trabalhado. **Geralmente, no início dos estudos com os inteiros relativos, expressar uma situação de forma oral, ostensivos dados oralmente, são mais fáceis de serem trabalhados pelos estudantes, em detrimento de expressá-los simbolicamente, ostensivos escritos. Por exemplo, provavelmente os estudantes responderão que em determinada atividade a solução é de dívida ou que se deve 2 reais ou 2 reais a menos, ao invés, de mobilizarem o ostensivo, ‘– 2’.**

Em um dos nossos encontros do grupo de estudos, propusemos a seguinte atividade adaptada, a partir de uma das disciplinas cursadas por mim, como crédito para o doutoramento:

> “III – Arthur levou suas figurinhas à escola para jogar várias partidas de ‘bafo’.
>
> Na primeira partida perdeu 9 figurinhas e na segunda ganhou 7. Depois dessas partidas quantas figurinhas ele tem a mais ou a menos do que a quantidade que tinha inicialmente?”

Analisando esse problema, queremos exemplificar que há um consenso entre os professores e a fala da pesquisadora Borba (2009), não no sentido de confirmar o que a autora escreveu, mas sim, de novamente abrir um espaço para discutirmos tal pensamento e expandir nosso conhecimento acerca dos conceitos dos inteiros relativos.

No debate ocorrido no grupo de estudos, um professor relatou que *os alunos têm facilidade em expor oralmente suas respostas, ‘perdeu 2’, mas o registro é que deve ser ensinado, estudado, ou seja, ‘7 – 9’.* Outro professor, no mesmo diálogo, questionou: como seria *a representação da ideia de perdeu duas cartas?*

Percebemos que a preocupação está na formalização dos conteúdos, mas como fica a exploração desses conceitos iniciais, favorecidos pelas resoluções dadas oralmente? Nesse sentido, temos uma grande oportunidade de explorarmos nas atividades iniciais as compreensões dadas oralmente.

No problema de Arthur, apesar de partir de uma situação concreta, o enunciado abre um precedente para trabalharmos o ensino de um novo número, um número que possa representar a quantidade ‘perdeu duas cartas’. Retomaremos essas ideias no tópico acerca das análises da nossa proposta para os inteiros relativos.

No intervalo entre dois encontros, eu propus para que uma professora, não integrante do nosso grupo de estudos, que lecionava para um sétimo ano, que aplicasse as atividades analisadas pelo grupo. Nossa intenção era a de buscar novos elementos de análises com os professores, assim, pensávamos em ter algo já ocorrido em sala de aula, para debater com eles.

No encontro seguinte, apresentei as soluções dadas pelos alunos aos integrantes do grupo e, em um dos diálogos nessa reunião, tivemos a seguinte constatação, *a intervenção da professora foi fundamental para organizar as ideias da representação '7 – 9' ao invés de '9 – 7', natural da sua escrita.*

Algo que podemos nos perguntar é se essa intervenção é ruim. Há alguma forma de deixar o aluno representar sozinho essa operação? As dificuldades de interpretação também atrapalharam na resolução? Outro professor ainda relatou que, *a forma de organização das atividades também indica a intervenção da professora. Se fosse a representação dos alunos seria um emaranhado de números, e o professor deveria identificar as duas formas do aluno.*

Nesse ponto, tocamos em uma das funções do professor em sala de aula, ao ensinar que o 'emaranhado' de números pode ser organizado de uma forma mais lógica e de fácil compreensão, o professor tem um grande campo para explorar aspectos do desenvolvimento histórico da matemática, pois os algoritmos e as fórmulas, por exemplo, foram criados como uma forma de 'economia de tempo', de esforços, de cálculos, algo que resumisse de forma mais eficiente todo o trabalho já desenvolvido. Outro ponto seria dar justificativas para o ensino desses procedimentos, abrindo o caminho para os momentos de institucionalização dos conceitos estudados.

Algumas perguntas foram levantadas em relação ao trabalho a ser realizado com os estudantes, por exemplo, *colocaria uma carta para representar a quantidade inicial? Para em seguida, representar perdeu nove e ganhou 7? Ou retiraria a carta fazendo com que os alunos percebessem que o valor inicial não faria diferença? Há possibilidade de representar os diversos valores iniciais e verificar que em relação a esse valor sempre teríamos duas cartas a menos?* Outro aspecto debatido foi em relação a como explicar que '7 – 9' resulta em '– 2'? Isso seria complicado? Qual é o objetivo do problema? Um participante acrescentou que *seria criar um contexto em que temos a necessidade de aprender um novo número, ou seja, como represento duas figurinhas a menos?*

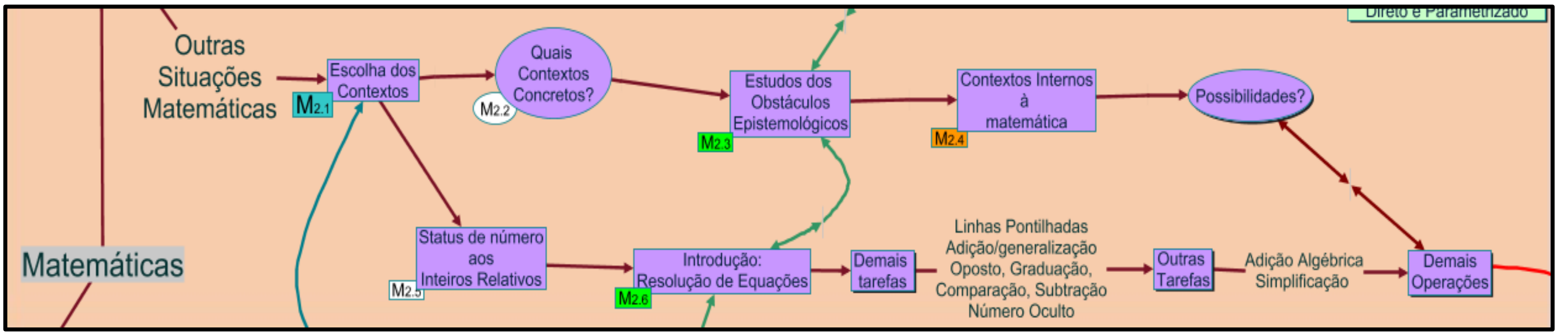
Borba (2009, p. 69) afirma que "numa representação oral há uma necessidade menor de se explicitar a diferença entre números positivos e negativos e entre os sinais dos números e as operações aritméticas utilizadas para a resolução de problemas". **Comparando os diálogos entre os integrantes do grupo de estudos e os excertos da pesquisadora, percebemos que para os trabalhos iniciais com os inteiros relativos, há um campo exitoso para as atividades exploratórias orais**. Por exemplo, para se mobilizar um ostensivo oralmente, a dívida contraída pela compra de um caderno de 'R$ 15,00' e uma caneta de 'R$ 3,00', pode-se afirmar que foram gastos 'R$ 18,00'. Mas, por outro lado, se fosse exigido de tal aluno uma representação numérica, certamente, ele deveria explicitar que 'R$ 15,00' e 'R$ 3,00' têm a mesma natureza, negativa, por meio do uso do sinal de menos. Oralmente, a natureza negativa foi explicitada pelo fato de adicionar ambos os valores e dar como solução que a dívida era de 'R$ 18,00'. Assim, a representação escrita vai exigir certa formalização que, nesse caso, significa apresentar estes novos números. Apresentar explicitamente, já que implicitamente ele já estava "um pouco" presente. Nesse sentido, "o grau de dificuldade de um problema pode estar relacionado à necessidade de se ter que explicitar significados dados a sinais de números e a explicitamente ter que diferenciar estes sinais e as operações aritméticas necessárias à resolução do problema". (BORBA, 2009, p. 69).

Sendo assim, Borba (2009, p. 69) explica que "a compreensão de um conceito é influenciada pelos significados dados, pelas propriedades sendo tratadas e pelas representações simbólicas, sendo utilizadas ao se raciocinar sobre o conceito em questão". Como conclusão de seus estudos, nesse artigo, Borba (2009) apresenta uma série de constatações que podem auxiliar os professores que querem aprofundar seu conhecimento acerca dos inteiros relativos e das possíveis dificuldades de ensino e de aprendizagem de seus alunos. A primeira constatação é sobre o fato de que **o ensino dos problemas com significado de medida é mais fácil do que os com significado de relação**. A mesma ideia se aplica para os **problemas diretos em relação aos problemas inversos** e, por último, "que uma das maiores dificuldades de operar com números inteiros relativos deve-se a ter que *representar simbolicamente de forma explícita* as diferenças entre números inteiros positivos e inteiros negativos, entre os sinais dos números e os sinais de operações aritméticas. (BORBA, 2009, p. 99, grifo do autor). Tais conhecimentos podem auxiliar na identificação do que os estudantes já sabem, o que ainda necessita ser trabalhado e o ensino de outras partes do conteúdo que possam propiciar um desenvolvimento mais completo.

E, por fim, a autora aborda outro aspecto importante da organização dos planejamentos das aulas, no sentido que é importante

> Elaborar cuidadosamente atividades de mediação que se baseiam em construções próprias por parte dos alunos [...] na direção da promoção do desenvolvimento da compreensão de conceitos por parte de nossos alunos. Investigações do que alunos conhecem e podem vir a conhecer têm que se tornar práticas constantes nas atividades desenvolvidas pela escola para que os alunos venham de fato a avançar no seu conhecimento de conceitos. (BORBA, 2009, p. 100).

Para a continuação dos estudos, exemplificaremos o contexto matemático-outras situações possíveis, executado e representado pelas ações no Diagrama de Ações, marcando seu início com "$\mathbf{X_{n.m}}$" e o seu fim "$\mathbf{X_{n.m}}$ **– Fim**". Reforçamos que, esse diagrama juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa às do *Modelo Dominante* dos inteiros relativos.



$\mathbf{M_{2.1}}$ – Escolha dos contextos:

Para a execução dessa ação, buscamos e nos aprofundamos em textos que nos possibilitassem identificar novos cenários para a introdução dos inteiros relativos. Nesse sentido, o segundo artigo analisado foi '*Enseigner Les Nombres Relatifs Au College' do Groupe Didactique des Mathématiques, Irem d'Aquitaine, AMPERES – INRP (BERTE et al.*, 2008)[102] que é dividido em três partes.

Na primeira parte, os autores realizam uma busca pelo melhor contexto para se introduzir os inteiros relativos, questionando o conhecimento cultural, em que os conceitos dos inteiros relativos são familiares aos alunos, devido tais noções estarem presentes na vida cotidiana, como as temperaturas, a cronologia, os elevadores, entre outras situações. Para tal, trazem discussões históricas justificadas pela ideia de esclarecer

---

[102] Para retornar à página 136, $R_{10.2}$: *Metodologia e procedimentos da pesquisa*, clique aqui.
Para retornar à página 160, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui.
Para retornar à página 211, R^{Z}_{IV}: *Desenho da proposta de ensino para Z*, clique aqui.

os conceitos de obstáculos epistemológicos e buscar contextos internos à própria matemática para o ensino dos inteiros negativos. Como resultado desses estudos, os autores apresentam uma sequência didática pautada em contextos internos à matemática, como a resolução de pequenas equações, a construção de regularidades e a mobilização de propriedades. Eles afirmam que os alunos serão capazes de compreender os números como conceitos abstratos, dadas por propriedades definidas dentro da matemática, extrapolando as interpretações dadas por modelos concretos.

Por fim, os autores nos alertam que não fizeram "uma simetrização dos inteiros naturais porque não construímos os inteiros relativos, mas estendemos o conjunto de todos os números positivos que os alunos já conheciam". (BERTE *et al.*, 2008, p. 71). Articulo assim, as principais ideias apresentadas pelos autores com algumas análises, para uma melhor compreensão dos detalhes mobilizados na tese. **M2.1 – Fim.**

M2.2- Quais contextos concretos? e **M2.3 – Estudos dos obstáculos epistemológicos (esta parte refere-se aos seguintes fragmentos dos dois contextos, M2.2 e M2.3)**[103]**:**

No início do texto são trazidas informações, definições e formas de ensino para os números inteiros negativos num contexto concreto. "A noção de número negativo parece familiar, porque nossos alunos encontram esses números em seu ambiente imediato e na vida cotidiana (temperaturas, cronologia na história, elevadores etc.). **Até que ponto o professor pode contar com esse conhecimento cultural para fundamentar seu ensino?"** (BERTE *et al.*, 2008, p. 59) E, como uma espécie de resposta a esse questionamento, os autores fazem menção ao uso do recurso da história dos inteiros relativos, trazendo os principais obstáculos epistemológicos observáveis no desenvolvimento desse conceito ao longo dos anos:

i. O primeiro obstáculo – dar sentido e manipular quantidades negativas isoladas – é relacionado ao primeiro século chinês, em que esse povo mobilizava as quantidades negativas para ações contáveis. Eles manipulavam pequenas varetas coloridas (representando os valores positivos) e varetas pretas para as quantidades negativas. Os autores relatam que até o final do século XVIII, na Europa, não mencionavam números inteiros negativos, apenas quantidades negativas. Uma citação de

[103] Para retornar à página 160, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui ou clique aqui.

Carnot (1753 – 1823) é apresentada para exemplificar as ideias desse obstáculo:

> Para obter uma quantidade negativa isolada, seria necessário remover uma quantidade efetiva de zero, algo de nada: operação impossível. Como projetar uma quantidade negativa isolada? E ele conclui: 'O uso de números negativos leva a conclusões errôneas'. (CARNOT *apud* BERTE *et al.*, 2008, p. 60, grifo do autor, tradução nossa)[xlv].

ii. O segundo obstáculo – renúncia do zero absoluto e unificação da reta numérica atribuindo um zero comum aos positivos e aos negativos – trata do entendimento que 'abaixo' de zero, em um termômetro por exemplo, não existe nenhuma quantidade. Novamente, os autores mobilizam a citação de Carnot (1753 – 1823), para demonstrar como esse segundo obstáculo também pode ser visto no primeiro. Vemos que as quantidades negativas são interpretadas como números acrescidos do sinal de menos, justificando a ideia de que "a reta é descrita como a justaposição de duas meias linhas opostas carregando símbolos heterogêneos, com sinais negativos (–) e sem sinais no lado positivo. (BERTE *et al.*, 2008, p. 60, tradução nossa). São apresentados ainda, os exemplos de Descartes e sua escolha por coordenadas positivas e das escalas termométricas de Fahrenheit, o zero absoluto e de Celsius para temperaturas ente 0 e 100 graus.

iii. O terceiro obstáculo – dar um sentido concreto aos números – é exemplificado pelos autores como a prática dos cálculos 'clandestinos', ou seja, os matemáticos usavam os números inteiros negativos, porém, as soluções eram dadas com números inteiros positivos, e as quantidades negativas eram eliminadas o mais rápido possível. Muitos acreditam que os inteiros negativos levavam a conclusões errôneas e serviam apenas como instrumentos de cálculo para obter respostas positivas. Os inteiros negativos foram evitados até quase o século XX. Para evitar soluções negativas os problemas eram reescritos. Como exemplo de matemáticos temos,

> Al Khwarizmi (780-850) aceitando os termos negativos nas equações, mas livrando-se deles o mais rápido possível; Chuquet (1445-1500) sendo o primeiro matemáticos a isolar uma quantidade negativa em um dos membros de uma equação; Cardan (1501-1576) sendo um dos primeiros matemáticos a admitir a existência de soluções negativas; E, Viète (1540-1630) estabelecendo as bases para o cálculo literal, no

> entanto, representando apenas quantidades positivas, em que as soluções negativas das equações não eram admitidas. (BERTE *et al.*, 2008, p. 60, tradução nossa)[xlvi].

iv. O quarto obstáculo – impossibilidade de encontrar um modelo unificador concreto que permita ilustrar ao mesmo tempo as duas operações, adição e multiplicação – os autores buscam na história alguns matemáticos que se depararam com esse obstáculo, bem como as consequências para os seus estudos. Uma frase que retrata bem essas confusões é a seguinte, "na verdade, para a consistência dos cálculos, é necessário admitir que o produto de dois negativos é positivo, mas essa regra é contrária ao senso comum". (BERTE *et al.*, 2008, p. 61, tradução nossa). Os exemplos apresentados pelos autores, justamente ilustram a contrariedade do senso comum. Stendhal em sua autobiografia (1835, *apud* BERTE *et al.*, 2008, p. 61, tradução nossa) rejeita veemente a expressão $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$, pois como pode essas divisões terem o mesmo resultado se 1 é maior que – 1, ou seja, um número maior dividido por um número menor pode resultar uma igualdade com uma divisão entre um número menor por um maior. Da mesma forma, como um quadrado de um número inteiro negativo pode ser maior que o quadrado de um número inteiro positivo, a intuição nos leva a pensar que o quadrado de um positivo deve ser sempre maior, mas para o caso de, $(-3)^2 > 2^2$, o quadrado de '– 3' é maior que o quadrado de '2'.

Dessa forma, os modelos concretos são auxiliares no ensino introdutório dos inteiros relativos, nas operações de adição e subtração, mas para as operações de multiplicação e divisão, podem causar os erros de interpretação, e os possíveis obstáculos que Stendhal descreveu em sua autobiografia.

Os obstáculos apresentados por Berte *et al.*, (2008) são os quatro primeiros descritos por Glaeser (1985). Os primeiros pesquisadores mobilizaram os contextos históricos para a apresentação inicial do conceito dos números inteiros negativos e justificaram tal ação para que **os estudantes possam compreender que as quantidades negativas são uma nova classe de números que serão ensinados**. Realizamos um movimento introdutório bem semelhante em nossa proposta para o ensino dos inteiros relativos, que será detalhada na R_{IV}^{Z}: *Desenho da proposta de ensino para os inteiros relativos*. A intenção foi de mobilizar alguns obstáculos epistemológicos para a organização das sequências de atividades e que proporcionassem ou permitissem que **os**

estudantes atribuam aos negativos o *status* de números, bem como **possam compreender outras dimensões, além da de medida,** como vimos no artigo de Borba (2009). Podemos pensar ainda, que esse foi um dos fenômenos didáticos analisados no grupo de estudos. **M2.3 – Fim.**

M2.4 – Contextos internos à matemática:

Berte *et al*., (2008)[104] afirmam que a partir dos estudos dos contextos históricos verifica-se que "a questão fundamental que gerou os novos números é a das equações, sejam elas relativas ou complexas. Porém, os cálculos para resolver problemas concretos que envolvem 'ganhos e perdas' também contribuíram para a concepção da adição dos relativos. (p. 61). **<u>Nesse sentido, no *Modelo Dominante* para os inteiros relativos, encontramos apenas atividades retiradas de situações do dia a dia, situações que se baseiam em modelos concretos, tais como baralhos, saldo de gols, temperaturas, sistema monetário, entre outros, mas vemos uma possibilidade de acrescentarmos atividades que estejam pautadas em situações da própria matemática para que as dimensões retratadas por Borba (2009) e Cid (2015), por exemplo, possam ser exploradas pelos professores em suas propostas de ensino[105].</u>**

Nesse sentido, percebemos que **os contextos que podemos organizar as atividades introdutórias são diversificados; alguns modelos podem gerar os mesmos obstáculos epistemológicos e outros podem favorecer a compreensão das variadas dimensões de um conteúdo**. Os modelos concretos, geralmente, baseiam-se nos conhecimentos prévios que os alunos trazem; mobilizar o recurso da história dos inteiros pode ser mais um aspecto motivador a ser articulado ao trabalho com os obstáculos epistemológicos. Esse trabalho deve ser pautado numa transposição didática dos conteúdos que necessitam ser ensinados aos conteúdos que poderão auxiliar os professores e, principalmente, os estudantes a compreenderem as dimensões, algoritmos, procedimentos e as demais características importantes para o seu aprendizado.

Geralmente nos contextos concretos, podemos observar dois significados ou dimensões para os inteiros relativos, denominado por Berte *et al.* (2008) de:

1. "um estado: – 3 ° C ou o ano de nascimento de um personagem é – 50 a.C;

[104] Para retornar à página 160, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui..

[105] Vale destacar que, pensando em uma forma de deixar mais evidenciado, nessa parte do texto, o *MER*, realçaremos em **NEGRITO** alguns tópicos. Partes mais importantes, além do negrito, serão **<u>SUBLINHADAS</u>**.

2. uma variação: a temperatura caiu 3 ° C ou o elevador desceu 3 andares”. (p. 62).

Borba (2009) denomina essas mesmas situações de medida e de transformação, respectivamente. O fato de mobilizarem ideias bem semelhantes provém dos estudos do pesquisador Gérard Vergnaud: ambas as pesquisas citam os estudos desse psicólogo do desenvolvimento cognitivo e didático da matemática.

Berte *et al.* (2008) trazem ainda as noções e conceitos que podem ser interpretados a partir de deslocamentos na reta numérica, assim como Pommer (2010)[106] ao mencionar os estudos de Caraça (1951)[107][108], nos alertando que diferentes interpretações também podem ser estudadas. **Esses autores, também destacam que os estudos dos diversos contextos propiciam a compreensão das dimensões dos números inteiros relativos.** Dessa forma, em estudos na reta numérica, os números podem representar os pontos que marcaremos na reta ou determinar o deslocamento que devemos realizar. Vejamos que essas ideias se aproximam dos conceitos de ‘estado’ (ponto de referência) ou de ‘variação’ (deslocamento). Os autores nos alertam que a mobilização desses contextos na reta numérica pode causar dificuldades no entendimento das adições como os inteiros relativos. Imaginemos que a única representação dos estudantes seja marcar valores positivos e negativos na reta numérica, sendo assim, Berte *et al.*, (2008, p. 62, tradução nossa) afirmam que

> Observamos um aluno incapaz de fazer um acréscimo porque sua única imagem mental relativa era uma marca em uma reta. Ele mentalmente foi em busca do primeiro termo e depois do segundo termo da adição sem poder fazer qualquer operação com estas referências inertes. Para introduzir adição, não é preferível trabalhar apenas com variações, a fim de favorecer situações em que os significados dos dois números sejam os mesmos. Assim, não há confusão para os alunos[xlvii].

---

106 Uma situação que permite justificar a regra de sinais na adição/subtração e faz apelo a representação geométrica é citada em Caraça (1970). Um ponto material sofre sucessivos deslocamentos, a partir de um marco inicial (que pode ser adotado como origem dos espaços ou zero), em dois possíveis sentidos: para a direita ou esquerda. (POMMER, 2010, p. 5).

107 Para retornar à página 110, *R_8: Dificuldades e erros: sinais, reta numérica* ..., clique aqui.
Para retornar à página 113, *R_8: Dificuldades e erros: sinais, reta numérica*..., clique aqui.

108 Se o móvel, partindo de O, está no ponto P ao fim de 5 segundos, isso equivale afirmar que nesse tempo ele percorreu o segmento OP, de medida 5. Suponhamos agora que ele muda o sentido do movimento e continua com a mesma velocidade durante mais três segundos. Ao fim desses três segundos, ele estará no ponto S, figura 28, a uma distância 2 da origem. [...] à medida, 5, do segmento percorrido na primeira fase, subtraímos a medida, 3, do segmento percorrido na segunda; o resultado traduz pela operação 5 – 3 = 2. (CARAÇA, 1951, p. 96). Para retornar à página 191, R_{II}^{Z}: Desenho do MER ..., clique aqui.

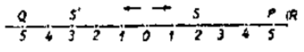


Fig. 28

Borba (2009) também nos alerta para o fato de que problemas com significados de 'relação' são mais difíceis do que os de medida. Berte *et al.*, (2008) discorrem sobre as dificuldades dos problemas que envolvem uma dupla variação, mas enfatizam que para a introdução desse conceito deve-se trabalhar inicialmente com problemas de mesma natureza. Todavia, não deixaremos de propor os problemas com significados mais complexos, pois eles permitirão que os estudantes compreendam os conceitos em sua totalidade.

Na sequência do artigo, Berte *et al.*, (2008) apresentam as dificuldades para se introduzir a adição e subtração de inteiros relativos por meio de deslocamentos na reta:

> O sinal '+' representa uma sucessão de deslocamentos ou resultados. Por que essas situações traduzem uma adição? Por que esta operação? [...] Para realizar essa adição, às vezes é necessário fazer uma adição aritmética e às vezes uma subtração aritmética. Por que estamos falando sobre a adição de números relativos nos dois casos? (BERTE *et al.*, 2008, p. 63, tradução nossa)[xlviii].

Os contextos concretos tanto das ideias monetárias quanto de deslocamentos na reta numérica podem trazer algumas dificuldades de compreensão no momento do ensino das operações de multiplicação e divisão, não ocorridas para as operações de adição e subtração como visto no excerto de Caraça (1951). Essas dificuldades são encontradas no decorrer do desenvolvimento histórico desses números, sendo assim, essas dificuldades pairavam nas atividades dos estudantes de antigamente também, como no exemplo de Stendhal. Em sua autobiografia, Stendhal[109] (1835 *apud* BERTE *et al.*, 2008, p. 61, tradução nossa) supõe que "[...] as quantidades negativas sejam as dívidas de um homem, como multiplicando 10.000 francos de dívida por 500 francos, esse homem terá ou conseguirá uma fortuna de 5.000.000, cinco milhões de francos?". Ou no exemplo do estudante que justifica que a solução de (– 3). (– 5) não é 15, pois interpreta que '– 3' como ação de descer 3 degraus 5 vezes, logo, parará no '– 15' (BERTE *et al.*, 2008, p. 63, tradução nossa). Outra interpretação seria, descer 3 lances de escada com 5 degraus cada, sendo que os lances são do subsolo, pois '– 5' representaria 'andares' ou 'escadaria' abaixo do solo. Vejamos que nesses casos, para contextos de adições algébricas, esses modelos funcionam muito bem, mas para as multiplicações e divisões essas ideias parecem absurdas, pois as respostas corretas fogem das interpretações lógicas que esses modelos teriam na realidade modelada.

[109] Vida de Henry Brulard - Stendhal- Gallimard Edição -1973.

Analisando esse artigo, nos parece que os autores estão contextualizando as dificuldades recorrentes de alguns modelos concretos, por exemplo, “os contextos concretos citados [...] impedem a introdução da multiplicação de dois negativos, como mostra a história do pensamento. Isso também é verdade para nossos alunos.” (BERTE *et al.*, 2008, p. 63, tradução nossa). **M2.4 – Fim.**

M2.5- *Status* de número aos inteiros relativos e M2.6– Introdução do ensino dos inteiros relativos por meio de resoluções de equações (esta parte refere-se aos seguintes fragmentos dos dois contextos, M2.5 e C2.6):

Expondo esses contextos problemáticos para se introduzir os inteiros relativos, os autores apresentam sua proposta para a introdução desses números.

> Em uma introdução mais alinhada com o caminho histórico, assim centrada nos problemas de resolução de equações, os negativos aparecerão sozinhos como novos números, em detrimento de uma coerência de no conjunto de números. Em todos os casos, haverá dificuldades inevitáveis de anotação e escrita, em particular sinal operativo e sinal predicativo anotados da mesma forma com a passagem de um para o outro. (BERTE et al., 2008, p. 63, tradução nossa).[xlix]

Para esses autores, a introdução do ensino dos números inteiros relativos seria por meio de situações de resolução de equações, como ‘5 + ___= 8’ ou para o ensino de procedimentos que sirvam para simplificar esses novos objetos. Por exemplo, para a expressão anterior uma solução possível seria ‘8 – 5’, pois,

5 + ___= 8 (substituindo ‘8 – 5’ no espaço vazio)

5 + (8 – 5) (associatividade)

(5 + 8) – 5

13 – 5 = 8.

Assim, esse exemplo pode auxiliar o professor a ensinar que o número adicionado com ‘5’ que resulta em ‘8’ é o resultado da subtração entre ‘8’ e ‘5’, podendo ser mobilizado como resposta para a seguinte pergunta, “mas o que significa ‘8 – 5’?” O resultado é 3, que para os estudantes do início do 7º ano do ensino fundamental já possui *status* de número. **Esse procedimento será usado com números inteiros negativos[110], um procedimento que funciona com números conhecidos. Esse trabalho auxiliará**

---

[110]Para retornar à página 161, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.
Para retornar à página 163, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

nas técnicas que propiciarão aos inteiros negativos o *status* de número. Exemplos de atividades que poderão auxiliar nessa institucionalização são:

‘38 + ... = 83’; ‘438 + ... = 450’; ‘8 + ... = 58’; ‘9 + ... = 7’.

A resolução dessas atividades permitirá a formalização da propriedade associativa:

i. (a + b) + c = a + (b + c)

Tal propriedade auxiliará na compreensão desse novo número que está para ser ensinado, pois 45, solução de ‘38 + ... = 83’ é obtido por meio da subtração entre 83 e 38. Substituindo essa subtração na expressão obtemos:

‘38 + (83 – 38) = 83, pela propriedade *i*,

(38 + 83) – 38 = 83, ou

121 – 38 = 83’.

Ou, como ‘83 – 38 = 45’, a solução da expressão ‘38 + ... = 83’ é ‘45’, pois ‘38 + 45 = 83’. Assim, a transformação procurada pode ser dada pela subtração entre a medida final e a medida inicial. Semelhantemente, para as demais atividades, ‘438 + ... = 450’; ‘8 + ... = 58’; ‘9 + ... = 7’, será: 450 – 438; 58 – 8 e ‘7 – 9’, respectivamente. Assim, observando os resultados anteriores, para a atividade ‘7 – 9’, deve-se representar um número e, nesse caso, um número inteiro negativo, o novo objeto de estudo.

Outro encaminhamento será sobre esse número ser a diferença negativa de duas unidades, ou seja, ele pode ser representado por outras subtrações, por exemplo, ‘6 – 8’, ‘5 – 7’, ‘4 – 6’, ‘3 – 5’, ‘2 – 4’, ‘1 – 3’ e finalmente, ‘0 – 2’, pois todas essas subtrações resultarão em ‘– 2’, que provavelmente será mais bem visualizada pelos estudantes nessa última expressão.

Outra forma de resolver essas atividades propostas por (BERTE *et al.*, 2008) seria mobilizar as propriedades associativa (propriedade *i*) e comutativa, além dos elementos neutro e simétrico, ou seja, outros contextos internos, vejamos:

‘38 + (83 – 38) = 83’, pela associativa, ‘(38 + 83) – 38 = 83’,

‘(38 + 83) – 38 = 83’, pela comutativa, ‘(83 + 38) – 38 = 83’,

‘(83 + 38) – 38 = 83’, pela associativa, ‘83 + (38 – 38) = 83’,

‘83 + (38 – 38) = 83’, pelo simétrico, ‘83 + 0 = 83’,

‘83 + 0 = 83’, elemento neutro, ’83 = 83’

Logo, ‘(83 – 38) é solução.

Pela expressão ‘83 + 0 = 83’ pode-se chegar em outras semelhantes:

‘83 + 0 = 83’, ‘0 + 83 = 83’, ‘0 – 2’ e ‘– 2 + 0’, **mobilizando as ideias do elemento neutro, do simétrico e das propriedades comutativa e associativa**.

Esses autores ainda se preocupam com a criação de novos obstáculos de aprendizagem além daqueles que normalmente já fazem parte do ensino dos inteiros relativos, mais especificamente, dos números inteiros negativos. Para exemplificar, eles propuseram algumas atividades:

Resolver a expressão ‘1243 + 34 – 35’ de pelos menos duas maneiras diferentes.

Pela mobilização da propriedade comutativa e dos elementos neutro e simétrico, encontra-se o seguinte resultado:

‘(1243 + 34) – 35, comutativa, ‘1243 + (34 – 35)’,

‘1243 + (34 – 35)’, pela associativa, ‘(1243 + 34) – 35’

‘(1243 + 34) – 35’, resulta em, ‘1277 – 35’

‘1277 – 35’, resulta em ‘1242’.

Pode-se ainda, analisar cada etapa da resolução, levantando questões sobre o que foi alterado e quais as semelhanças e diferenças que podem ser observadas e estudadas. Realizando um paralelo com a primeira atividade, a expressão ‘(34 – 35)’ pode ser considerada como solução de ‘1243 + ... = 1242’. Logo, ‘(34 – 35)’ por ser a diferença de uma unidade negativa, pode ser representado por ‘(0 – 1)’ ou simplesmente ‘– 1’, pois qual o número que adicionado a ‘1243’ resulta em ‘1242’. Os estudantes poderiam dizer que ‘1243 – 1’ é igual a ‘1242’, ou seja,

‘1243 + (–1) = 1242’

Em outras palavras, ‘34’ subtraído de ‘35’ resulta em ‘adicionar 1’ ou ‘– 1’,

‘1243 subtraído de 1’

‘1243 – 1 = 1242’.

Logo, ‘1243 – 1 = 1242’ tem mesmo resultado que ‘1243 + (–1) = 1242’.

Portanto, partimos de um estado inicial ‘1243’, no qual realizamos duas ações de variação, consideradas como operadores aditivos ‘+34’ e ‘– 35’ cujo resultado é o operador aditivo ‘– 1’, que terá que obter o *status* de número inteiro negativo. O novo objeto estudado segue do resultado de dois operadores positivos, aparecendo também como um operador aditivo. Porém, segundo os autores, mais tarde, a multiplicação de operadores aditivos entre eles levantará o mesmo obstáculo que os contextos concretos de ganhos e perdas ou ainda das translações na reta numérica mencionada anteriormente. Gerando assim, um novo obstáculo à aprendizagem das operações de multiplicação e divisão.

Para evitar esse obstáculo, Berte *et al.*, (2008) propõem como alternativa que o resultado da subtração entre ‘34’ e ‘35’ poderia ser interpretado como tendo o mesmo resultado que outras subtrações mais simples, por exemplo, ‘1 e 2’, ‘2 e 3’, ou até mesmo ‘37 e 38’, chegando em 0 e 1, pois há uma diferença de uma unidade e, nesse sentido, os alunos terão a oportunidade de perceberem a relação que há entre essas subtrações.

Dessa forma, a introdução dos números inteiros relativos se dará em um contexto interno à matemática, por meio da resolução de algumas operações. Nesse início, planejando não criar obstáculos desnecessários, esses números terão um *status* de números abstratos, bem como o sinal de mais tem apenas o *status* de operatório binário, sendo que a notação +3 ou 3 serão indicados desde o início com o mesmo significado, caso os alunos queiram mobilizar a notação + 3. Isso é devido ao fato de se evitar algumas técnicas, nessa fase inicial, desnecessárias de simplificação.

Não obstante, esses autores nos alertam para o fato de que “nenhum modo de introdução sozinho pode alcançar todos os fins desejados e haverá necessariamente obstáculos a superar e dificuldades”. (BERTE *et al.*, 2008, p. 63, tradução nossa).

Eles afirmam ainda que lhes parece razoável:

> i. distanciar-se dos contextos concretos para dar um status de número aos negativos.
> ii. assegurar durante a introdução dos negativos não criar obstáculos didáticos desnecessários que seriam revelados ao estabelecer as regras de adição e especialmente multiplicação. (BERTE *et al.*, 2008, p. 64)[l].

Nesse artigo sobre o ensino dos inteiros relativos, à escolha didática apresentada pelos autores, após toda essa contextualização das dificuldades que podem ser geradas a partir dos modelos concretos, eles organizam a seguinte sequência para ensino dos números inteiros negativos:

> a) Para dar aos negativos o status de um número, rapidamente introduzimos esse conjunto de operações já conhecidas com positivos. Damos aos alunos as propriedades dessas operações que gostaríamos de manter em um novo conjunto que também conterá os números positivos que eles conhecem.;
> b) Consequentemente, planejamos uma introdução aos números negativos através da resolução de equações, de modo que a adição chegue ao mesmo tempo, permanecendo em um contexto matemático interno e justificando os resultados com exemplos. A ligação entre resultados justificados e situações concretas de ganho e perda será feita no final da sequência;

> c) Para deixar claro porque a estrutura do conjunto de números positivos está sendo ampliada e para evitar uma quebra entre os números positivos já conhecidos e estes novos números, os negativos, o professor não introduz uma forma de escrita como (+3). Esta redação é proposta pelos próprios alunos para o número 3, em oposição a (-3). Os (+3) e 3 são assim apresentados desde o início como duas formas do mesmo número. O sinal "+" continua sendo o único sinal operativo. Isto evita exercícios de "simplificação da escrita", o que significa que os alunos não podem mais reconhecer que (+2) + (+3) ..... é simplesmente 2 + 3! Alguns livros didáticos e professores explicam aos alunos que uma forma de escrita como (-2) + (+4) é substituída por -2 + 4, obtida pela remoção dos parênteses e do sinal operativo "+", o que leva a uma confusão abismal porque não há mais o sinal operativo para adição! Limitando a dificuldade de saber como manipular os três status do sinal "-". sinal, parece-nos razoável! (BERTE *et al.*, 2008, p. 64, tradução nossa)[li].

Os autores ainda sugerem que é fundamental que haja algumas atividades anteriores ao início dos inteiros relativos, situações que tratem da igualdade:

‘(a + b) – c = a + (b – c)’.

Eles relatam que não necessariamente essa igualdade seja ensinada para os números inteiros negativos, mas sim em conteúdos anteriores.

Essas atividades introdutórias podem gerar, por exemplo, expressões do tipo:

‘2,75 + (8,75 – 0,50)’ = ‘(2,75 + 8,25) – 0,50’ ou

‘(7,8 + 4,2) – 2,2’ = ‘7,8 + (4,2 – 2,2)’.

O objetivo é que os estudantes conjecturem a propriedade que traduza essa igualdade. Provavelmente os estudantes terão muitas dificuldades de realizar essa tarefa retoricamente, “porque aqui não é uma questão de traduzir um procedimento. É uma questão de traduzir a igualdade de duas fórmulas que diferem em sua estrutura”. (BERTE *et al.*, 2008, p. 64, tradução nossa).

Em resumo, a sequência apresentada tem a seguinte ordem:

i. traduzir problemas aritméticos em expressões algébricas na qual surgem as ideias dos números negativos;
ii. nas adições algébricas trabalha-se conceitos como, adicionar 3 e subtrair 5 é o mesmo que subtrair 2, ou seja, 3 – 5 é igual a – 2, essa técnica será trabalhada por meio de adições algébricas;
iii. a comparação e as simplificações se darão para explicitar os significados de expressões do tipo ‘2*x*’, o objetivo é o de facilitar a passagem do campo aritmético para o algébrico; as operações entre números se darão por composição de translações;
iv. os algoritmos são interpretados como economias de cálculo, bem como podem ser mobilizadas boas técnicas mentais;
v. as atividades de cálculo mental, assim, se darão por supressões de parênteses;

vi. outras formas de se compreender as adições algébricas serão trabalhadas a partir da ideia de que adicionar *'x'* e subtrair *'y'* é o mesmo que, *'$+ x - y$'*;

vii. aparecerá nova interpretação para os parênteses, assim como foram estudadas para os sinais de igual, de adição e subtração;

viii. por último, as multiplicações se darão por meio dos cálculos de áreas de retângulos, mobilização da propriedade distributiva e comparação de expressões algébricas dadas pelo aumento ou diminuição dos lados ou do perímetro.

Portanto, o contexto a ser mobilizado nessa introdução, é interno à matemática, fato que segundo Berte *et al.*, (2008) não impossibilitará, e sim, propiciará que os estudantes tenham maior motivação para o aprendizado dos números inteiros negativos. A demanda explorada é a que os números, nesse início, são conceitos abstratos, em que suas propriedades, assim como outros conceitos, são definidas dentro da matemática, não sendo necessários outros modelos que sejam embasados em situações concretas, os modelos concretos já mencionados. Na última restrição, eles não procedem "uma simetrização do conjunto de números naturais porque não [construíram] o conjunto dos inteiros relativos, mas [estenderam] o conjunto de todos os números positivos que os alunos já conheciam". (BERTE *et al.*, 2008, p. 64). **Um dos aspectos que permeou nossos estudos foi a preocupação, que chamaremos de passagem dos naturais para os inteiros negativos, alusão à passagem da aritmética à álgebra, outro fenômeno didático dado a partir deste modelo epistemológico de referência. $\mathbf{M}_{2.6}$ – Fim.**[111]

Entre outros autores, Chevallard (1984, 1989, 1990) e Cid (2015), apresentam o fenômeno denominado de 'aritmética generalizada'. Essa forma de ensino é cheia de confusões e fracassos, pois como Chevallard (1990) mostra, a álgebra é reduzida a encontrar soluções numéricas de problemas aritméticos, construir modelos algébricos (generalidade), trabalho com letras representando incógnitas, variáveis, parâmetros ou números generalizados. E, Cid (2015) trata essa proposta como o *Modelo Dominante* de ensino da álgebra escolar. Assim, a passagem dos naturais para os inteiros negativos também apresenta os seus percalços de ensino e de aprendizagem.

Os números inteiros relativos podem apresentar quatro fases ou concepções. (COQUIN-VIENNOT, 1985)[112]. A primeira seria entender os inteiros relativos como se fossem os naturais precedidos de um sinal de adição ou de subtração, e a partir dessa

[111] Para retornar à $M_{2.4}$ – *Início*, clique aqui.
Para retornar ao *Diagrama de ações*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os links direcionando para os demais locais.

[112] Para retornar à página 89, *R_5: Identificar e descrever o Modelo Dominante, ...* clique aqui.

interpretação pode ocorrer que **o sinal de menos seja totalmente ignorado**, fato provocado pelos conhecimentos baseados nas operações com os naturais. Outro aspecto preponderante é a **consideração dos números, de forma geral, apenas como medida** de uma quantidade, prejudicando o entendimento dos conceitos dos números inteiros negativos.

Nesse caso, identificamos algumas ideias dos obstáculos epistemológicos descritos por Glaeser (1985), particularmente, o obstáculo 5 - *Estagnação no estágio das operações concretas*. Outra questão referente a essa primeira concepção seria o reconhecimento que os números inteiros negativos são menores que os inteiros positivos, mas **a relação de ordem entre os inteiros negativos é dada igualmente ao que se realiza para os seus valores absolutos**, que pode ser associado ao segundo obstáculo - *Dificuldades em dar um sentido a quantidades negativas isoladas*[113].

Para um aluno 'passar' para a segunda concepção deve superar os 'obstáculos' da primeira, ou seja, compreender os problemas da estrutura aditiva, podendo resolvê-los com os naturais quando for mais efetivo. Nessa segunda, fase os alunos ainda separam as ideias dos inteiros positivos dos inteiros negativos, tratando-os como conceitos opostos. E, referente a estrutura multiplicativa percebe-se apenas alguns esboços de soluções.

A terceira etapa requer a superação dos 'obstáculos' da segunda, consistindo na compreensão completa dos problemas da estrutura aditiva. As ideias de inteiros positivos e inteiros negativos não são mais tratadas como conceitos separados, ou seja, as adições e subtrações são entendidas como um todo, a relação de ordem para os inteiros negativos é interpretada corretamente, a reta numérica já é concebida não mais como a união do lado positivo com o negativo e sim como única.

Nesse contexto, percebe-se que há superação dos obstáculos epistemológicos *3 – Dificuldades em manipular a reta numérica* – e *4 – Ambiguidade de dois zeros* – descritos por Glaeser (1985). E, os problemas que envolvem a estrutura multiplicativa ainda não são resolvidos corretamente.

Por fim, a passagem para a fase 4 será relativa à aprendizagem dos problemas multiplicativos, incluindo todos os outros aspectos já citados. Para que se passe à fase 4

[113] Realizando um adendo acerca da identificação dos obstáculos epistemológicos, entendemos que, apenas identificar ou classificar o obstáculo não nos traz muitos avanços; precisamos determinar o que cada um desses obstáculos pode propiciar para os processos de aprendizagem dos estudantes. Por exemplo, a mobilização de atividades introdutórias baseadas em fatos do dia a dia pode favorecer os aspectos do quinto obstáculo, nesse sentido, é possível organizar atividades, em uma proposta, que transitem por outras áreas de conhecimento, incluindo contextos matemáticos.

é necessário superar o obstáculo *6 – Desejo de um modelo unificador*. Segundo Glaeser (1985), os matemáticos, que na história não superaram essa concepção, buscavam encontrar ou construir um modelo concreto que fosse bem-sucedido tanto para as operações de adição e subtração quanto para a multiplicação e divisão com inteiros relativos. Outro obstáculo a ser superado é o *5 – Estagnação no estágio das operações concretas –*, característico das propostas justificadas por estarem aproximando os alunos a situações conhecidas e mais 'palpáveis' aos conhecimentos que já apreenderam.

Assim sendo, **a noção de número inteiro negativo parece familiar, porque nossos alunos 'mobilizam' esses números em seu 'cotidiano': temperaturas, cronologia na história, elevadores, entre outras. Realmente, até que ponto podemos confiar nesses conhecimentos que os alunos já possuem, tanto do seu dia a dia quanto de sua vida escolar e cultural, para que possamos fundamentar nossas práticas de ensino dos inteiros relativos?** O que a determinação dessas quatro fases ou concepções descritas por Coquin-Viennot (1985) nos auxiliam na compreensão das dificuldades de ensino e de aprendizagem dos inteiros relativos? Qual o ganho em classificar em qual das fases está determinada atividade ou proposta de ensino? Entendemos que apenas classificar permite uma análise superficial do nosso problema didático e, nesse sentido, tentamos transpor essa etapa, por meio da compreensão da 'sensibilidade' dessa categorização. Quais os avanços para as análises quando realizamos essas classificações?

Assim, mobilizamos essa classificação e os obstáculos epistemológicos para a organização da proposta de ensino, buscando pôr **as atividades que possam auxiliar os estudantes na superação ou entendimento dessas dificuldades de aprendizagem**. Além disso, organizamos com esses estudos os temas a serem debatidos com os professores do grupo de estudos, que permitiram pensar em situações de ensino potentes para 'atacar' as dificuldades de aprendizagem já analisadas; planejar as ações didáticas e as possíveis consequências para a aprendizagem dos alunos por meio da ideia de passagem ou de superação de um obstáculo ou fase.

R_{III}^{Z}- ELEMENTOS E ASPECTOS RELEVANTES DA PROPOSTA DE ENSINO PARA OS INTEIROS RELATIVOS

Na escrita da resposta R_{III}^{Z} , apresentamos a proposta de ensino para os números inteiros relativos, fruto dos estudos sobre as dificuldades vinculadas tanto aos processos de ensino e de aprendizagem advindas das metodologias mobilizadas quanto as oriundas da sua própria constituição e de seu desenvolvimento histórico. As metodologias mobilizadas foram identificadas a partir da REME de Campo Grande/MS, analisadas a partir do *Modelo Dominante* construído e aperfeiçoado com elementos de nossa dissertação e das conclusões do grupo de estudos.

Parte da construção de nosso *corpus* se deu a partir da constituição do grupo de estudos. Nele tratamos diversos aspectos dos processos de formação continuada da Reme de Campo Grande/MS por meio dos dados construídos juntamente com esses professores, em sete encontros ocorridos no primeiro semestre de 2019, articulados às investigações de cunho histórico, epistemológico e matemático, para que pudéssemos finalizar um *Modelo Epistemológico de Referência* baseado nas dificuldades descritas no *Modelo Dominante* e nos resultados dessas discussões. Nesse sentido, essas são algumas das justificativas para a elaboração de uma proposta de ensino dos inteiros relativos alternativa àquelas constantes no *Modelo Dominante*. Portanto, nossa proposta compilou todas essas informações, análises e resultados em uma escrita de orientações para a construção de atividades que buscaram potencializar aspectos dos modelos concretos, por um lado, suprindo as suas necessidades por meio da exploração de atividades de cunho matemático, por outro.

Dentre os temas abordados, destacamos as justificativas para o fato de se introduzir os inteiros relativos simultaneamente aos estudos iniciais da álgebra escolar. Em propostas de ensino semelhante a essa, *a razão de ser* epistemológica dos inteiros relativos não estaria mais na aritmética, como identificamos na maioria das propostas de ensino encontrados nos livros didáticos. Segundo Cid (2015), iniciar os estudos dos inteiros relativos a partir de atividades só aritméticas pode promover uma compreensão de que os números só estão vinculados às ideias de medida. Nesse caso, a noção de número, as ideias das operações aritméticas e suas propriedades podem ser relacionadas aos comportamentos de determinadas ações físicas. Assim, todas essas concepções são identificadas como os obstáculos epistemológicos "que a comunidade de matemáticos teve que superar para aceitar plenamente os números positivos e negativos e justificar sua estrutura". (CID, 2015, p. 256, tradução nossa). Dentre as justificativas estudadas para o ensino dos inteiros relativos se dar ao mesmo tempo que a introdução à álgebra, destacamos as seguintes:

a) simetrização aditiva e multiplicativa: para essa justificativa Cid (2015)[114] se valeu da propriedade do elemento neutro da adição, em que dois números são tidos como simétricos se a adição entre eles resulta em zero (elemento neutro). Na construção axiomática dos inteiros relativos (anel dos inteiros, suas duas operações e propriedades), é possível deduzir a operação de subtração por meio da propriedade da existência de um único elemento neutro. E, com essa ideia de simetrização é possível reduzir as quatro operações fundamentais para apenas duas. Como consequência, as operações de adição e multiplicação, tidas como operatórias binárias em uma apresentação aritmética, nessa nova proposta passarão também a ter ideias operatórias unitárias ou predicativas. Tal contexto é de primordial importância para o estudo das regras dos cálculos algébricos. No ensino usual dos inteiros relativos, determinar a positividade e a negatividade de certa quantidade é dada por contextos concretos, fato que não favorece a compreensão mais aprofundada dessas novas regras.

b) símbolos de parênteses e de igual – geralmente, nos estudos aritméticos, a mobilização do símbolo de parênteses orienta a ordem das operações em expressões numéricas. Já para o contexto algébrico, eles também permitem identificar ou diferenciar uma adição de uma multiplicação. O símbolo que representa igualdade nos contextos aritméticos, também representa a ideia de que o número posto à direta é o resultado da operação escrita à esquerda desse sinal. Já para os contextos algébricos, ele também caracteriza a relação de igualdade entre as expressões que as contém. E, como se trata de uma regularidade bem complexa para o entendimento dos estudantes, ela deve ser trabalhada e tratada com mais detalhes, buscando assim, que não se torne mais uma regra a ser decorada.

c) Sinais operatórios binários – para uma adição de dois números, em contextos aritméticos, deve-se sempre apresentar uma solução. Por exemplo, a adição dos números 8 e 2 deve ser respondida com o número 10. Por outro lado, para uma

[114] Para retornar à página 128, *$R_{9.2}$: Resposta coração do grupo de professores*, clique aqui.

apresentação algébrica dos inteiros relativos, pode-se trabalhar tanto com a solução quanto com a representação dessa adição, '8 + 2'.

d) subtração aritmética e diferença algébrica – em aritmética, a subtração está relacionada, principalmente, às ideias de subtrair e retirar, enquanto, em álgebra, a ideia principal é a de comparar. No contexto algébrico, pensa-se o que deve ser adicionado ao subtraendo para que o resultado seja igual ao minuendo. Esse valor a ser adicionado será positivo se o minuendo for maior que o subtraendo, caso contrário, será negativo. Essa justificativa também nos permite descrever uma técnica para a relação de ordem para os inteiros relativos:
se x > y, então x – y > 0; e, se x < y, então x – y < 0.

e) precisão na escrita e maior complexidade – nos contextos aritméticos, as operações geralmente são realizadas sempre uma a uma. Esse controle da execução das operações é considerado por Cid (2015) como semântico. Realizando uma pequena comparação com a semântica, sem grande rigor, quando operamos cada linha da execução de uma expressão seria semelhante aos estudos que tratam do significado de cada palavra. Já para os contextos algébricos, tal controle é dado em cada período, realizados de maneira mais geral. Nesse sentido, observa-se as estruturas e as ideias que as expressões podem representar, grosso modo, Cid (2015) considera esse trabalho com um estudo de ordem sintático.

Acrescentamos a esse resumo as discussões sobre dificuldades, erros mais comuns e intervenções mais utilizadas na resolução de atividades com os inteiros relativos debatidas no grupo. A primeira dificuldade apresentada é comparação entre dois inteiros negativos: por exemplo, como 15 é maior que 7, logo, para alguns alunos '–15' é maior que '–7'. A segunda dificuldade é relativa aos sinais de '+' e de '–'e ao uso dos parênteses nas expressões construídas: por exemplo, na operação, '10 – (– 8)', erros de cálculos poderiam surgir, os estudantes por ignorarem um dos sinais de '–', realizam a subtração como se fosse '10 – 8', resultando, '2', ou seja, as técnicas para as operações com os naturais, já conhecidas, são obstáculos à aprendizagem das novas técnicas para os inteiros negativos. A terceira dificuldade é a compreensão de que um número inteiro negativo não representa apenas medidas. Como a introdução dos inteiros negativos via resolução de expressões algébricas, proposta por Cid (2015) foi rejeitada, a proposta alternativa, pensada pelo grupo, amparada em Berte *et al.* (2008) foi de introduzir os inteiros negativos como resultado de uma operação e trabalhando as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro, ou as ideias de transformação ou de relação para os inteiros relativos (BORBA, 2009). Com relação à quarta dificuldade, trabalho com jogos matemáticos, o consenso do grupo foi que deveríamos evitar o jogo pelo jogo, buscar registros mais sistemáticos, desenvolvendo as atividades articulando os assuntos discutidos por meio dos jogos com os conceitos matemáticos. Para a quinta dificuldade – situações de aprendizagem retiradas do cotidiano – o grupo sugeriu o trabalho com situações diversas, para além da monetária. Na sexta dificuldade – 'jogos de sinais' – discutiu-se sobre a mobilização da regra de sinal da multiplicação para todas as demais operações. Segundo o grupo, esse erro surge como resultado do ensino de cada operação separadamente, para depois, então, finalizar com as regras, algoritmos, procedimentos, problemas e desafios com todas as operações ao mesmo tempo.

Outra situação importante a ser acrescentada à proposta de ensino foi o fato de os estudantes identificarem o número 'zero' para além da ausência de quantidade, como resultado de operações entre inteiros relativos ou em uma reta numérica representante da separação dos valores positivos e dos negativos. Também se discutiu alguns questionamentos, como: colocar ou não colocar o sinal 'antes' dos números faz diferença na aprendizagem dos estudantes? Quais os motivos que levam os estudantes a pensarem que o sinal de menos não possui outra função, além da operação de subtração? Quais os motivos que os levam a ignorar esse sinal? O que é um jogo para os estudantes? Quando se registra, pensa e testa hipóteses se configura como um jogo para eles? O consenso do grupo foi de *mesclar os contextos históricos, com atividades internas à matemática, com problemas do cotidiano, registrando frases do tipo, perdi duas figurinhas, tenho dois passageiros a menos, tive um prejuízo de dois reais.* Assim, teríamos situações em que os estudantes necessitariam dos inteiros negativos, precisariam usar os inteiros negativos para solucionar seus problemas.

R_{IV}^{Z}- DESENHO DA PROPOSTA DE ENSINO PARA OS INTEIROS RELATIVOS[115]

A proposta de ensino para os números inteiros relativos foi construída buscando superar algumas defasagens identificadas a partir da mobilização dos modelos concretos, fundamentadas no *Modelo Dominante* que descrevemos a partir dos estudos do sistema de ensino brasileiro, pautados ainda nas sínteses construídas pelo grupo de estudos. A partir dos contrapontos construídos juntamente com os professores, pensamos numa proposta baseada tanto nas *condições* e *restrições* do sistema de ensino de Campo Grande/MS quanto nas dificuldades e problemas de aprendizagem trazidos das nossas experiências e dos resultados das pesquisas debatidas. Dessa forma, o resultado final (provisório) foi a junção das potencialidades dos estudos dos modelos concretos com o das análises pautadas dos contextos intramatemáticos/algébricos, buscando ênfase na *razão de ser* epistemológica dos inteiros relativos.

Dividimos a proposta em três blocos, sendo que cada um deles tem por objetivo propiciar, além de um ensino pautado nos problemas de aprendizagem já identificados, também não provocar novas dificuldades desnecessárias à aprendizagem. Buscamos apresentar todos os aspectos, contextos, procedimentos e algoritmos que o ensino dado apenas por modelos concretos não favorece.

Quadro 12– Resumo dos blocos da proposta de ensino

Bloco	Objetivos e Atividades
I	Expressões: 'linguagem materna' ***VERSUS*** 'linguagem matemática'. Representar situações com inteiros relativos. Diferentes dimensões, aspectos, propriedades e procedimentos. Ampliar os resultados dos modelos concretos
II	Situações internas à própria matemática. Operações e propriedades dos inteiros relativos. Simétricos/opostos, comparação, módulo/valor absoluto, reta numérica.
III	Temperaturas (Modelos concretos para estudar propriedades e regularidades.) Operações: Como comparar temperaturas? Como calcular variações de temperatura? Como calcular com temperaturas?

Fonte: Autor da pesquisa

Ressaltamos que como não conseguimos finalizar todos os encontros do grupo de estudos, os dois primeiros blocos, equivalentes à introdução encontrada nos livros

[115] Para retornar à página 80, R_4: *Comparar o ensino de Z ...*, clique aqui.
Para retornar à página 182, *c.f* R_{II}^{Z}: *O desenho do MER para Z*, clique aqui.

didáticos, por exemplo, é fruto das discussões com os professores dadas na íntegra. Porém, o último bloco, voltado às operações com os inteiros relativos, foi construído a partir das nossas reflexões enquanto pesquisadores e participantes desse grupo. Nos baseamos em tudo que foi debatido e, de certa forma, naquilo que de alguma maneira foi consenso do grupo de estudos. A partir dessas considerações, articulamos essas ideias com os nossos estudos, desenvolvendo e descrevendo o último bloco da proposta.

A introdução dos números inteiros relativos ocorreu nos dois primeiros blocos. No primeiro bloco, há situações em que se deve representar contextos de ‘perda’ e de ‘ganho’, traduzir a ideia de ‘a menos’, de ‘sobrou’, de ‘diferença’, entre outras. Pretende-se motivar e fomentar discussões sobre a existência desses novos números, os inteiros negativos e, por consequência, a introdução desses novos números.

$M_{1.5}$ – Situação Fundamental: valores, objetos algébricos e aritméticos, técnicas e institucionalização[116]:

O objetivo planejado para o primeiro bloco foi criar um contexto em que se pudesse questionar a existência desses novos números. Parte-se de algumas situações que ainda são representadas por números naturais, porém, deve-se inserir novos contextos em que eles não são suficientes. Por exemplo, no seguinte problema:

Arthur levou suas figurinhas à escola para jogar várias partidas de “bafo”. Na primeira partida perdeu 9 figurinhas e na segunda ganhou 7. Depois dessas partidas quantas figurinhas ele tem a mais ou a menos do que a quantidade que tinha inicialmente?[117]

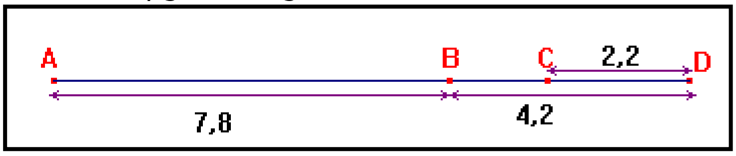
Analisando uma possível solução, poderíamos ter como resposta que “Arthur perdeu duas figurinhas” ou “ficou com duas figurinhas a menos”. Essa seria uma representação oral da situação. Nesse caso, um bom questionamento seria, duas figurinhas ‘a menos’ pode ser representada por um número? Se, sim, que número seria esse? A que

[116] Descrevemos nossas ações por meio de um *Diagrama de Ações*, que juntamente com o *mapa de questões e repostas*, nos auxiliou na apresentação do *MER* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os links direcionando para os demais locais.
Para retornar à $M_{1.4}$ – *Início*, clique aqui.
[117] Para retornar à página 158, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.
Para ir ao exemplo das atividades motivadoras, anexos, clique aqui.

conjunto numérico esse número pertence? É possível realizar operações com esse número? E compará-lo? E, ‘marcá-lo’ na reta numérica?

Para a elaboração desse bloco, discutiu-se no grupo de estudos a necessidade de se propor diversas situações nas quais os inteiros relativos pudessem ser mobilizados:

- do cotidiano, como a utilização da ideia ‘de mais quente’ e ‘de mais frio’, em substituição à ideia de maior ou menor. A que se atentar ao que Cid (2002) traz como crítica, ou seja, debater as possíveis interpretações de situações do tipo, ‘– 3ºC’ é mais frio que ‘– 1ºC? Nesse caso, ‘– 1’ é maior que ‘– 3’, assim, ‘mais frio’ pode ser interpretado como maior;
- apresentadas nos livros didáticos, como as que mobilizam o sistema monetário;
- internas a própria matemática, como resultado de operações que mobilizam a reta numérica. Exemplo:

> *Observe a figura a seguir:*
>
> 
>
>
> *Calcule a distância entre o ponto C e o ponto A de duas maneiras diferentes e, para cada forma, escreva os cálculos realizados em forma de expressões numéricas.*

O objetivo desta atividade é trabalhar com propriedades, nesse caso, confrontando duas formas de resolução, ou seja, ‘(7,8 + 4,2) – 2,2 = 7,8 + (4,2 – 2,2)’. Dessa forma, propicia-se a mobilização da propriedade associativa, útil para os cálculos e usada na construção da técnica para adicionar dois inteiros relativos, bem como fomentando a construção do seguinte resultado:

“(a + b) – c = a + (b – c)”.

Algo ponderado nas discussões do grupo de estudos foi que, provavelmente, os estudantes não lembram ou não estudaram expressões numéricas ou algumas das propriedades. Os resultados e as conjecturas serão frutos da comparação das expressões do tipo já exemplificadas aqui e as outras realizadas sob a supervisão do professor. Segundo o consenso do grupo, a escrita de novas expressões poderá garantir a compreensão da estrutura da propriedade. Os professores também mencionaram que, provavelmente, os estudantes não conseguiriam descrever a comparação dessas expressões, momento propício para o uso de letras que representem algumas quantidades desconhecidas.

- que combinem ideias do cotidiano com as internas à própria matemática. Exemplos:

Leia o problema e responda às questões.[118]

Eva e Bernardo jogam um jogo de cartas em que as apostas são recompensadas por fichas de duas cores: vermelhas se perder a partida e brancas se vencer a partida. Quem recebe uma ficha branca ganha dois pontos e quem recebe uma vermelha perde um ponto. As fichas de uma mesma cor valem a mesma quantidade de pontos. Ao acabar o jogo, Eva tem 2 fichas brancas e 9 fichas vermelhas e Bernardo tem 4 fichas brancas e 6 vermelhas.

1. Responda as perguntas:

a) Quem venceu o jogo?

b) Se ambos iniciaram esse jogo com 10 pontos cada. Quem perderá?

c) E, se Eva iniciar com dois pontos a mais que Bernardo, quem vencerá?

d) E, se Eva iniciar com dois pontos a menos que Bernardo, quem perderá?

e) Explique como Eva poderia ganhar o jogo? E, como poderia haver empate?

O desafio desse tipo de situação está na representação das ideias "perdeu 'x' pontos", "ganhou 'y' pontos" ou a "diferença de 'z' pontos".

2. Laura tem 35 reais a mais que Alberto e Clara 20 a menos que Alberto. Eles vão comprar um presente. Adicionando o que os três amigos possuem, indique quanto dinheiro resta após a compra do presente, nos seguintes casos:

a) O presente custa três vezes o dinheiro de Alberto.

b) O presente custa 25 reais.

c) Eles poderão pagar o presente se este custar 105 reais?

Nota: Em qualquer caso, você acha que existe uma maneira justa de encontrar o dinheiro restante?

O desafio constante nesse tipo de situação se dá pela representação das ideias 'de sobra', 'a menos' e 'a mais'. Há necessidade de se verificar os registros dessas operações, pois, a partir das discussões geradas por elas, os novos "entes" matemáticos serão ser institucionalizados.

[118] Para retornar à página 159, *Diagrama de Ações:* ..., clique aqui.

3. Quando começam as aulas em setembro, Maria, Adriano e Luisa têm a mesma quantidade de dinheiro no cofrinho. Entre setembro e dezembro, eles gastam ou recebem os valores indicados no quadro a seguir:

Maria	*Adriano*	*Luisa*
Recebe 10 reais	*Gasta 5 reais*	*Recebe 10 reais*
Gasta 5 reais	*Gasta 10 reais*	*Recebe 5 reais*
Gasta 15 reais	*Gasta 15 reais*	*Recebe 15 reais*
	Recebe 30 reais	*Gasta 35 reais*

a) Quem tem mais dinheiro?

b) Quem tem menos?

c) Qual a diferença em dinheiro em relação aos demais que cada um tem?

A mobilização dos diversos contextos tem por intenção propiciar uma visualização desses novos números, identificando diferentes dimensões, aspectos, propriedades e procedimentos dados em cada um desses contextos, ampliando os estudos ocorridos com a mobilização dos modelos concretos. Essas situações auxiliam no trabalho de explicitar 'onde' e 'como' há possibilidade de se determinar a existência dos números inteiros negativos, novamente, além dos modelos concretos. Todavia, a partir do consenso do grupo, podemos prever que a variedade e as variações desses contextos, concretos e internos à própria matemática, auxiliarão em uma aprendizagem mais aprofundada dos inteiros relativos. **$M_{1.5}$ – Fim.**

$M_{1.6}$ – Situação Fundamental:

Ressaltamos que a concepção trazida nos contextos anteriores foi gerada a partir do conceito de situação fundamental para os inteiros relativos. Cid (2015), em sua tese, pautada nos estudos de Brousseau (1986), descreveu uma situação fundamental[119] para esses números. Nesse sentido, algumas atividades discutidas com os professores foram desenvolvidas e adaptadas por meio dessa situação fundamental. Logo, o desenvolvimento do primeiro bloco dessa proposta está fundamentado nessas concepções, sendo que muitas das atividades construídas se deram a partir de adaptações das de Cid (2015) e Berte *et al.* (2008). Cid (2015) afirma que,

> O que nos permite caracterizar esta situação como uma situação a-didática é o fato de os alunos terem conhecimentos antigos, o cálculo aritmético, que lhes oferece uma estratégia básica para enfrentar a situação, mas a presença das letras os obrigará a modificar o dito estratégias, movendo-se em vários estágios de um cálculo entre

[119] Retornar à página 159, *Diagrama de Ações*, clique aqui.

números sem determinação a um cálculo entre números positivos e negativos. Por exemplo, no problema

> *Laura levou seus tazos para a escola para jogar vários jogos. No Primeiro ele perdeu 9 tazos e no segundo ele ganhou 7. Quantos tazos ele tinha sobrando, depois de jogar?*

os alunos não têm dificuldade em dar as respostas para ‘a – 9 + 7’ ou ‘a – 2’, mas estabelecer a equivalência entre essas duas respostas requer assumir que "subtrair 9 e adicionar 7 equivale a subtrair 2", o que implica passar as adições e subtrações entre números sem determinar a composição das traduções. (CID, 2015, p. 269, tradução nossa)[lii].

Em nosso caso, segundo as concepções discutidas com os professores, não há intenção ainda de se explorar a inserção de letras, e sim, estudar as ideias dos números inteiros negativos. No exemplo do excerto, oralmente, em outros contextos, ‘traduzir’ as situações com números inteiros relativos.

Algo tratado com mais cuidado no grupo de estudos foi o fato de que para cada propriedade ou procedimento mobiliza-se um modelo diferente, característica peculiar dos modelos concretos. Por exemplo, para adicionar e subtrair inteiros relativos mobiliza-se a regra do jogo dos palitos coloridos. Já para as multiplicações, a regra é modificada, além da ideia anterior, acrescenta-se a interpretação de uma multiplicação. Para ‘3. (– 2)’, interpreta-se como a adição de ‘3’ grupos de ‘2’ palitos pretos, ou seja, ‘6’ palitos pretos ou ‘– 6’. E, para ‘(– 2). 3’, a retirada de ‘2 grupos’ de palitos vermelhos, ou seja, ‘– 6’. Assim, para esses três exemplos, temos três regras diferentes para serem aprendidas, aumentando as dificuldades de aprendizagem, sendo que, na proposta alternativa às vigentes tentamos “evitar” essa diversidade de regras.

Nesse sentido, para a construção da proposta de ensino, pensamos para o primeiro bloco variar os contextos que podem ser representados por inteiros relativos, cuidando para não propor situações de mudança de regras ou inserção de novas. A intenção foi de construir situações ‘gatilhos’, geradoras de discussões sobre o estudo de novos números, propiciando principalmente a construção do *status* de número para esse novo ‘ente’ matemático. Compreender os inteiros negativos como sendo números foi uma das dificuldades debatidas em nosso grupo e presentes no rol daquelas mais evidentes nas salas de aula. **$M_{1.6}$ – Fim**[120]**.**

Para o segundo bloco, partimos das discussões sobre a mobilização dos números inteiros relativos como representantes de algumas expressões ou situações, enfatizando

[120] Para ir à *$M_{1.8}$ Início*, clique aqui.

que eles também podem representar as soluções de algumas operações e de alguns problemas, dando continuidade aos estudos iniciais desses novos números.

Novamente o grupo pensou em situações motivadoras, nesse caso, mais focadas nos contextos matemáticos, discussões sobre as propriedades associativa, comutativa, elemento neutro, entre outras. O papel do professor será o de motivar seus estudantes pela busca de formas alternativas de resolução dos problemas. Essa prática não é muito comum nas salas de aula e será um procedimento muito importante para a sequência da proposta, como veremos mais adiante. Apresentamos um exemplo de atividades motivadoras:

Uma estudante vai ao supermercado e compra dois produtos para sua mãe: um pacote de arroz 'Eme' a R$12,75 e um pacote de feijão 'Xis' a R$4,25. No autofalante do supermercado é anunciada uma promoção, 'leve um pacote de arroz 'Eme' e um de feijão da marca 'Xis' para ter um desconto de R$1,50 sobre o preço do pacote de feijão'. Diante dessa situação, calcule o preço total que a estudante deverá pagar, já com o desconto, pois ela comprou os produtos da promoção. Realize esse cálculo de duas maneiras diferentes e, em cada forma, represente os cálculos por meio de expressões numéricas. Possíveis soluções seriam as seguintes expressões:

'(12,75 + 4,25) – 1,50' ou '12,75 + (4,25 – 1,50)'.

Situações desse tipo podem propiciar a organização de soluções diversificadas, ora por diferentes procedimentos, ora por formas mais eficientes, além da mobilização das propriedades, no caso do exemplo, a associativa.

Com as atividades motivadoras, pode-se a mobilização de algumas propriedades e procedimentos da própria matemática. Apesar de os contextos serem concretos, o tratamento dado aos números inteiros negativos será pela compreensão dos aspectos matemáticos que fundamentam algumas operações e procedimentos.

Salientamos que todos esses contextos são para justificar que alguns problemas gerarão o estudo de novos números, soluções de problemas cotidianos e daqueles dos contextos internos à matemática. Portanto, para enriquecer as discussões do grupo de estudos, foram abordadas algumas atividades do material escrito por Berte *et al.* (2008). E, algumas delas foram pensadas como representantes da próxima etapa do segundo bloco:

Resolver as operações a seguir. (Os professores podem desafiar seus estudantes a mobilizar as ideias das situações motivadoras, justificando suas respostas).

i. *4 + ... = 34*

ii. $5 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 65$

...

x. $16 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 61$

xi. $9 + .(7 - 9). = 7$

xii. $4 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$

xiii. $8 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 4$

O foco dessas atividades está na construção de justificativas para os resultados encontrados, nesse caso, mobiliza-se a operação inversa da adição, bem como a propriedade associativa. Simulando os cenários de uma sala de aula, as duas primeiras podem ser resolvidas mentalmente, porém, para as demais será necessário a representação de uma operação. Para a primeira expressão, a solução, o número ‘30’, poderia ser representado pela subtração ‘34 – 4’, realizando as substituições como forma de verificar se realmente ‘30’ seria a solução (algo que os estudantes já sabem). A mobilização das propriedades seria o foco da aprendizagem nesse momento. Como vimos na resposta que explicitou a proposta de ensino dos autores Berte *et al*., (2008), a substituição de ‘34 – 4’ resultaria na seguinte solução:

substituindo a expressão ‘34 – 4’ em ‘4 + ... = 34’, obtemos

$4 + (34 - 4) = 34$; *propriedade associativa*

$(4 + 34) - 4 = 34$; *propriedade comutativa*

$(34 + 4) - 4 = 34$; *propriedade associativa*

$34 + (4 - 4) = 34$; *elemento inverso*

$34 + 0 = 34$; *elemento neutro*

$34 = 34$

Logo, 34 – 4 = 30 é solução.

Um novo procedimento será criado, interpretar o significado da expressão

‘34 = 34’

Assim, obter uma igualdade verdadeira é o que confirma que ‘34 – 4’ ser a solução. Outro aspecto interessante será representar o número ‘30’ pela subtração ‘39 – 9’ ou pela adição ‘27 + 3’. Ambas se fossem substituídas na expressão ‘4 + ... = 34’ resultariam em ‘34 = 34’, comprovando que tanto a adição quanto a subtração, pensadas, são soluções. Essa forma de verificar se as soluções estão ou não corretas tem um caráter mais algébrico.

Nas últimas atividades, a mobilização do procedimento da operação inversa, por exemplo, para o item “*xi*”, ‘7 – 9’ será a solução. Porém, surge um questionamento, qual o número que é solução dessa subtração? Pelas atividades anteriores é possível justificar que '7 – 9' será uma solução? Essa subtração pode ser representada por um número?

Outro questionamento importante: '2 – 4' ou '3 – 5' são soluções? E mais, quais os números que elas representariam? Vale ressaltar que as justificativas para essas técnicas se darão pelos exemplos das situações motivadoras, como podemos verificar nos parágrafos anteriores.

Outro fato relevante é a ideia do sinal de '+', nessa parte introdutória, como sugerido pelo grupo de professores, deve-se mantê-lo apenas com o *status* de operação. Pensando em não criar uma situação de rompimento total dos conceitos que se tinha com os números naturais. Percebe-se que a maior preocupação é a de evitar que os estudantes tenham que simplificar, por exemplo, '(+ 3) + (+ 5)'. Nesse caso, eles podem, pelo número excessivo de regras, não reconhecer que essa expressão pode ser substituída por '3 + 5'. Sendo assim, nos limitamos à compreensão dos três estados interpretativos do sinal de menos.

No próximo procedimento, eles devem verificar em quantas unidades (em módulo) resulta a diferença entre as medidas finais e iniciais. Os valores $|2|, |4|\ e\ |4|$ serão encontrados pelos estudantes e, provavelmente, de forma oral eles dirão 'menos' duas unidades, 'menos' três e 'menos' quatro unidades. Assim, o desafio é o de transpor da linguagem materna para a matemática.

Pensou-se também no momento para se treinar a técnica e as conjecturas construídas, bem como a inserção do conceito de oposto, ferramenta para a técnica da subtração entre inteiros relativos:

Resolva as seguintes operações. Em seguida, descreva como foram resolvidas as operações.

i.	*16 + ... = 61*	*.... + 54 = 71*	*.... + 45 = 81*
ii.	*38 + ... = 85*	*.... + 30 = 34*	*50 + 15 = ...*
iii.	*18 + ... = 58*	*90 + 12 = ...*	*5 + ... = 0*
iv.	*8 + ... = 0*	*.... + 7 = 0*	

Diante dessas atividades, algumas perguntas podem surgir: como mobilizar ou como explicar as ideias das situações motivadoras durante a realização dos itens anteriores? Como justificar essas respostas? '0 – 5'; '0 – 8'; '0 – 7' são soluções e representam que números? Como verificar que os inteiros relativos podem ser entendidos como classes de equivalência de pares de inteiros, pares ordenados? Por exemplo, o número negativo, '– 2', pode ser representado pelos pares ordenados (0, 2); (1, 3); (2, 4); (8, 10), ...

Podemos acrescentar a essa dificuldade o fato de que o *contrato didático usual* não prevê que os estudantes justifiquem ou descrevam sua argumentação, eles não estão acostumados com essa prática. Neste cenário, além de motivar os estudantes e mostrar a eles os 'sentidos' de realizarem tal tarefa, há possibilidade, se obtiver êxito, de tentar compreender algumas das relações dos alunos aos objetos do conhecimento e algumas de suas dificuldades, permitindo-lhe refletir sobre as técnicas mobilizadas para busca por outros caminhos que possam auxiliar a introdução dos inteiros relativos em um contexto interno à própria matemática, atribuindo-lhe o *status* de número, buscando expressá-los por diferentes representações ou operações.

No segundo bloco, há proposição de várias técnicas a serem estudadas pelos alunos, dadas por situações como do exemplo a seguir:

Resolver algumas adições, em seguida, destacar os resultados que são positivos.

i. *7 + (– 4) = 7 – 4 = 3.*

Uma possível solução para essa operação seria

7 + (4 – 8)	(classe de equivalência de '– 4')
(7 + 4) – 8	(propriedade associativa)
11 – 8	(resolvendo a expressão numérica)
3	(resultado final)

Outra solução seria mobilizar 0 – 4 = – 4, assim,

7 + (0 – 4)	(classe de equivalência de '– 4')
(7 + 0) – 4	(propriedade associativa)
7 – 4	(verificar que 7 + (– 4) = 7 – 4)
3	(resultado final)

ii. *12 + (– 5)*

iii. *54 + (– 29)*

iv. *– 35 +68*

v. *– 17 + 21*

Essas adições possibilitam a mobilização de uma nova escrita, podendo substituir a adição de um número inteiro negativo pela subtração de um número natural, propiciando um aprofundamento, dado pelas conjecturas a serem construídas, que por sua vez, justificadas pela mobilização das propriedades já aprendidas, como no exemplo anterior.

Outro exemplo retirado da proposta de Berte *et al.* (2008),

Complete a tabela a seguir:

Jogo matutino	*Jogo vespertino*	*Resultado do dia*	*Resultado do dia com um número*	*Uma operação que resuma o dia*
Ganhei 10 bolas	*Ganhou 8 bolas*	*Ganhou 18 bolas*	*18*	*10 + 8 = 18*
Perdeu 8 bolas	*Ganhou 12 bolas*			
Perdeu 6 bolas	*Perdeu 5 bolas*		*– 11*	
Ganhou 5 bolas	*Perdeu 8 bolas*			
Ganhou 9 bolas	*Perdeu 9 bolas*			
Perdeu 4 bolas	*Ganhou 0 bola*			
Ganhou 0 bola	*Perdeu 5 bolas*	*Perdeu 5 bolas*	*– 5*	*0 – 5 = – 5*

O objetivo dessa atividade é o de propor uma revisão dos principais procedimentos ensinados e discutidos, pois traz à tona a passagem da escrita da linguagem materna para a linguagem matemática, além dos significados e das interpretações das quantidades negativas e a escrita das operações e das expressões que as representam.

MC$_6$ – Mesclando temperaturas e oposto, comparando e calculando[121]:

Até esse momento não foi trabalhada adições cujos resultados são números negativos; esses tipos de soluções se deram apenas para as expressões, ‘7 + ... = 3’ em que uma possível solução seria ‘3 – 7’ ou ‘– 4’. Outro exemplo de mobilização dos números inteiros negativos foi adicionando um número positivo e um negativo,

7 + (– 4), incluindo as ideias de números opostos,

‘– 4’ pode ser representado por ‘0 – 4’,

resultado da operação: ‘4 + ... = 0’, procedimentos anteriormente estudados,

‘4 + (0 – 4) = 0’, associativa,

‘(4 + 0) – 4 = 0’, elemento neutro,

---

[121] Descrevemos nossas ações por meio de um Diagrama de Ações, que juntamente com o *mapa de questões e respostas*, nos auxiliou na apresentação do *Modelo Epistemológico de Referência* e da proposta de ensino alternativa construída junto com o grupo de estudos. O início de cada atividade será identificado por “**Xn**” e o fim “**Xn – Fim**”.
Para retornar à *MC$_5$ – Início*, clique aqui.
Para retornar à página 163, *Diagrama de Ações: ...*, clique aqui. Ressaltamos que, as ações do Diagrama estão descritas no decorrer do relatório de tese, por isso, os *links* direcionando para os demais locais.

'4 – 4 = 0, explicitação da propriedade do elemento simétrico.

Na sequência da proposta, procedimentos, que em parte já foram explorados, podem favorecer a compreensão da ideia de números simétricos:

i. *A partir do número 12, subtraia 3 unidades. Agora, subtraia novamente 3 unidades a partir da solução encontrada, repita a subtração de 3 unidades pelo menos mais 4 vezes. Escreva os números encontrados e descreva os procedimentos realizados.*

Há possibilidade de representar os números encontrados em um esquema:

12 – 3 = 9;
9 – 3 = 6;
6 – 3 = 3;
3 – 3 = 0;
0 – 3 = – 3
– 3 – 3 = – 6
Logo, a sequência encontrada será 9, 6, 3, 0, – 3, – 6, ...

Essas atividades têm por objetivo explorar a ideia de existência dos números inteiros negativos, assim, pode-se verificar se os estudantes compreenderam a existência dos inteiros negativos e se conseguem mobilizar os procedimentos para operar com esses números.

ii. *O desafio do número inteiro negativo oculto para se introduzir os conceitos de comparação entre inteiros relativos. Por exemplo, o professor registra em um papel, que somente ele tem acesso, o número '– 85', em seguida os estudantes tentarão adivinhar o valor desconhecido, registrado no papel. O professor falará a cada estudante se o valor dito é maior ou menor do que aquele que está oculto. Os alunos terão que se atentar a todas as jogadas para encontrar a solução. O professor pode desafiá-los a registrar as tentativas em uma reta numérica coletiva, procurando por descrições e pensamentos acerca de como os alunos organizaram estratégias para encontrar o número desconhecido.*

O trabalho com a reta numérica é uma possibilidade para institucionalização de algumas formas de resolução. A determinação de regras para comparar ou para 'marcar' números inteiros negativos da reta numérica também podem ser objetivos de ensino. A mobilização de números maiores ou números decimais também podem auxiliar no desenvolvimento da compreensão da comparação dos números negativos. Esses aspectos finalizam o segundo bloco.

Após os dois blocos[122], no terceiro propomos um trabalho voltado para a mobilização dos conceitos de temperatura e das operações envolvendo variação de temperaturas. O estudo foi organizado em torno de três grandes questões: Como comparar temperaturas? Como calcular variações de temperatura? Como calcular com temperaturas?

Alguns contextos construídos se deram pela mobilização de termômetros. Um ponto chave será o de ordenar os inteiros relativos com as ideias de ‘mais quente’, ‘mais frio’, que se assemelham às ideias ‘de mais alto’, ‘mais baixo’ e permitem, segundo Berte *et al.* (2008), evoluir nas representações da noção de ordem evitando a armadilha semântica, maior e menor.

No entanto, segundo Cid (2002, 2015), podemos identificar dois problemas: primeiro, os modelos concretos funcionam por analogia, ou seja, o comportamento do modelo é mostrado e, em seguida, diz-se que os conceitos dos números inteiros têm procedimentos semelhantes; segundo ‘ser mais frio’ significa que a temperatura diminuiu. Logo, pode-se pensar que mais frio é maior, relacionando com aumento do frio. Nesse caso, o problema não está somente com a multiplicação, mas também na ideia de ordem dos inteiros.

Contornar esses problemas será um dos desafios, pois, de um lado, mobilizar apenas conteúdo internos à própria matemática, segundo os resultados apresentados pelas discussões do grupo de estudos, apresenta enormes dificuldades aos estudantes, por outro lado, segundo Cid (2002, 2015), a mobilização dos modelos concretos também gera obstáculos à aprendizagem. Assim, utilizando esses contextos trataremos de forma mais específica os possíveis problemas de aprendizagem com os estudantes. A tentativa foi a de usar os modelos concretos para os estudos de algumas propriedades, bem como a criação e a verificação de algumas regularidades.

A organização desse bloco teve por objetivo propiciar aprofundamentos, validar os resultados estudados e os que serão ainda introduzidos. No entanto, essa etapa está fundamentada e indica que o conhecimento dos diversos aspectos, dimensões e dificuldades são fundamentais, o que coaduna com o argumentado por Borba (2009).

[122] Nesses dois blocos, trabalhamos com expressões na linguagem materna que foram traduzidas para a linguagem matemática, mobilizando números ainda desconhecidos. Na sequência, esses números foram identificados como soluções de problemas, com situações internas à própria matemática e com algumas operações. Avançando para o estudo de algumas propriedades dos inteiros relativos: simétricos/opostos, comparação, módulo/valor absoluto e reta numérica.

Dessa forma, temos ferramentas potentes para transpor os problemas que interfeririam na aprendizagem dos estudantes.

Um exemplo de exploração das ideias de temperatura é o estudo de reportagens sobre o assunto:

> *EUA: recorde frio em Nova York, mais voos cancelados - 8 de janeiro de 2014, 8:50*
> *A maior parte do território dos Estados Unidos e do Canadá ainda está tremendo sob o efeito de uma onda histórica de frio que se move para o leste. As autoridades americanas e canadenses em todos os lugares alertaram o público que as temperaturas, combinadas com os ventos tempestuosos, poderiam ser mortais. "Estamos pedindo às pessoas que sigam em segurança e sigam as instruções das autoridades locais", disse o porta-voz da Casa Branca, Jay Carney. Nova York registrou terça-feira suas temperaturas mais baixas para um 7 de janeiro por mais de 100 anos. Foram -15,5 ° C no Central Park na manhã de terça-feira, onde o recorde anterior de 7 de janeiro foi de 1896, com -14,4 ° C. A temperatura na cidade não excedeu -10 ° C durante todo o dia, com uma sensação de -22 ° C. "Peço a todos os nova-iorquinos para ficar em um lugar aquecido, para evitar a hipotermia, congelamento e outros problemas que possam colocar em risco a sua saúde", insistiu o prefeito de Nova York, Bill de Blasio. Mas é o meio-oeste que foi mais afetado. Em Embarrass, Minnesota, registrou-se - 37 ° C, recorde de terça-feira para todos os Estados Unidos. Um total de pelo menos 49 cidades quebrou um recorde de frio em 7 de janeiro, incluindo a Filadélfia (-15,5 ° C) ou Baltimore (-16,1 ° C). Mais ao sul, Atlanta, onde estava mais frio que em Anchorage, Alasca, enfrentou -14,4 ° C, pulverizando um recorde que remonta a 1970. A temperatura máxima anunciada terça-feira foi de -14 ° C em Chicago (-28 ° C) e -7,7 ° C (-12 ° C) em Nashville, Tennessee (sul). As escolas foram fechadas em Minnesota, Chicago, Atlanta e Nashville em particular, por causa do "vórtice polar": ventos frios do Polo Norte devido a um enfraquecimento da corrente de jato quente.*

O objetivo dessa atividade é o de explorar algumas regularidades, utilizando os novos números no dia a dia, identificando novas propriedades atribuídas a eles.

a) Qual foi a temperatura em Nova York em 7 de janeiro? Qual é a diferença de temperatura entre este novo recorde de frio e o anterior? Alguns desafios podem ser propostos, buscando as ideias de diferença, por exemplo:

b) Qual foi a temperatura máxima em Nova York em 7 de janeiro de 2014? Que diferença tem com a temperatura sentida? Como você explica a diferença entre a temperatura "real" e a temperatura "sentida"? Os cálculos das variações de temperatura podem ser realizados por meio do uso de outros procedimentos ao invés dos algoritmos.

f) Em que cidade dos EUA faz mais frio? g) Classifique as cidades dos Estados Unidos cujas temperaturas são dadas em 7 de jan., do menos frio aos mais frios. Importante que os estudantes terão que comparar as temperaturas por meio do uso reta numérica, fundamental, observar e debater as estratégias mobilizadas pelos alunos.

h) Quais informações estão contidas neste texto? Pode-se propor a elaboração de outros questionamentos sobre os dados? O que são termômetros? Para que servem? Tipos? Construção? Como calcular a variação de temperaturas nesse instrumento?

Pode-se propor outros desafios como*, no tubo de um termômetro foram marcadas as temperaturas 0 e 50. A distância entre as duas marcas é de 10 cm. Construa uma reta numérica (graduação) em graus que possa ser deslizada e colada no tubo.*

Definir temperaturas no seu termômetro:

Aumento de... º a partir de... º

Qual é a nova temperatura?

Construa um termômetro cuja distância entre nas graduações -25º e 35º têm 7 cm de comprimento.

Procure em termômetros comuns dimensões e amplitudes de sua graduação. Você saberia como fazer suas marcações?

O desafio será a confecção da reta numérica, determinando cada uma das graduações (marcações) que há na reta colada no termômetro. Nesse caso, gerir as questões para os estudantes de forma que consigam chegar às soluções também será um obstáculo apresentado aos professores.

Outro exemplo de exploração dos demais procedimentos com os inteiros relativos seria pesquisar e analisar a previsão do tempo de algumas cidades. Possíveis questionamentos e conceitos a serem desenvolvidos:

Qual cidade terá o dia mais quente? Qual cidade terá o mais frio?

Qual dia terá a temperatura mais baixa? A diferença é muito grande? E para a sexta-feira? Novamente, a diferença de temperatura é grande? E, para o sábado?

Nesse caso, o desafio seria determinar o significado atribuído às expressões 'mais quente' e 'mais frio', 'mais baixa', bem como se a existência ou não da diferença de temperaturas será identificada. Articulando todos os conceitos já estudados com os cálculos da diferença, pode-se introduzir as ideias das operações com os inteiros relativos.

Para cada cidade, compare a amplitude térmica por 24h de um determinado dia. Como essas informações podem ser interpretadas? Como esses dados devem variar para outros dias da semana?

O objetivo será de trabalhar as ideias de amplitude térmica tanto oralmente quanto por escrito, propondo, assim, debates sobre as compreensões dessa nova comparação.

Propor uma temperatura média diária para sexta e sábado para toda as cidades identificadas no quadro. Justificar.

Alguns questionamentos possíveis: Nesse caso, como os estudantes irão interpretar a ideia de temperatura média? Eles devem pesquisar? Consultar o professor? Seus conhecimentos prévios? Como relacionar com os conceitos de distância? E de módulo? De simétrico? Há relação entre esses conceitos? Essas e outras indagações podem ser debatidas com a turma, articulando com as demais técnicas já estudadas.

Calcule a variação das temperaturas máximas e mínimas entre dois dias da semana. Que observação podemos fazer?

Outros questionamentos: Os estudantes conseguirão mobilizar os conceitos de variação de forma correta? Como o professor poderá intervir nesse momento? Quais os tipos de erros podem aparecer?

Para finalizar esse bloco, há necessidade de propiciar aos estudantes momentos de trabalho com as técnicas já estudadas, nesse caso, mobilizar algumas para formalizar as técnicas das operações com os inteiros relativos. Pode-se indagar ainda sobre a existência de adições cuja solução seja negativa. Ou passar diretamente uma adição cujo resultado é um valor negativo e, no caso, pergunta-se a maneira de encontrar a solução, por exemplo, '– 8 + 5'. Ou, ainda, propor a resolução de algumas expressões:

Resolva as seguintes operações (resolva de duas maneiras diferentes):

a) 1243 + 34 – 35

(1243 + 34) – 35 = 1277 – 35 = 1242

ou

1243 + (34 – 35) = 1243 + (0 – 1) = 1243 – 1 = 1242

ou

interpretar que adicionar 34 e subtrair 35 é o inverso, quando adicionamos 35 e subtraímos 34, ou seja, restará – 1 (primeira) ou + 1 (segunda).

ou ainda

o número (– 1) pode ser o resultado de outras subtrações, 35 – 36, 36 – 37, 37 – 38.

b) 54 + 34 – 35 *c) 387 + 23 – 25* *d) 387 + 34 – 35*

e) 1243 + 24 – 25 *f) 895 + 37 – 38* *g) 902 + 62 – 63*

h) 1000 + 98 – 99 *i) 274 + 74 – 73*

Descreva como foram resolvidas as operações do exercício anterior.

O objetivo é a construção das ideias das classes de equivalência, com pares de inteiros e da associatividade [(a + b) – c] = [a + (b – c)]. Os sinais '+' e '–' continuam com a ideia de operação, com exceção do caso (– 1), ideia predicativa, bem como temos a antecipação da mobilização de técnicas para se trabalhar com parênteses.

Outros exemplos

Complete as seguintes frases:
Adicionar 5 e adicionar 2 é o mesmo que ____________________________
Adicionar 5 e subtrair 2 é o mesmo que ____________________________
Subtrair 5 e adicionar 2 é o mesmo que ____________________________
Subtrair 5 e subtrair 2 é o mesmo que: Subtrair 7 ou – 7.
Descreva uma possível regularidade observada.

Resolva as seguintes operações. Em seguida, descreva como foram resolvidas as operações:

a) 35 – 17 *pode ser resolvida normalmente.*
b) 23 – 48 *equivale a 0 – 25 = – 25*
c) 34 – 26
d) 48 – 72

O objetivo é o exercício das técnicas já estudadas: classes de equivalência, operação inversa e oposto, bem como outros procedimentos que possam surgir das discussões entre os alunos da turma. **MC6 – Fim.**

Semelhante ao trabalho realizado para as operações de adição e subtração, consideramos que o contexto para se trabalhar as operações de multiplicação e divisão deva se dar por conjecturas construídas por meio da resolução de algumas atividades aritméticas, além da mobilização de algumas propriedades e a definição de multiplicação como adição de parcelas iguais. Esse cenário é pensado para complementar as possíveis lacunas existente no *Modelo Dominante*, que por sua vez, se dá pela mobilização de jogos, de contextos concretos e pela apresentação das regras diretamente aos estudantes.

A intenção apresentada, nessa proposta alternativa, traz algumas dificuldades. Uma delas, citada pelos professores do grupo de estudos, é que a maioria das praxeologias mobilizadas no âmbito do *Modelo Dominante,* dos inteiros relativos, promovem estudos com as propriedades como memorização de regras, sendo ainda, que a construção e o debate de conjecturas quase não ocorrem. Para justificar esse contexto para o estudo dessas operações, partimos dos conhecimentos já aprendidos sobre os inteiros relativos e dos naturais. Vejamos um exemplo de atividade:

Complete as seguintes igualdades

$(-2) + (-2) + (-2) + (-2) =$

$(-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$

$(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) =$

$(-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) + (-5) =$

$(-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) + (-6) =$

$(-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) + (-7) =$

$\underbrace{(-8) + (-8) + \cdots \ldots \ldots \ldots + (-8) + (-8)}_{\text{100 termos}} =$

$0 \times 2 =$

$0 \times 3 =$

$4 \times 0 =$

$0 \times (-2) =$

$(-3) \times 0 =$

O objetivo dessa atividade se dá pela mobilização do algoritmo da multiplicação como importante processo para realizar as adições com mais rapidez, dessa forma, inicia-se a construção da “regra de sinais” da multiplicação. Nesse caso, as parcelas foram escolhidas para que haja a construção de conjecturas sobre os resultados com os números inteiros relativos. Os cálculos iniciais podem ocorrer por meio de adições das parcelas iguais, já que todas as adições resultam num inteiro negativo. Outro procedimento seria a substituição das adições por uma multiplicação correspondente (inteiro positivo vezes inteiro negativo), cabendo decidir qual deve ser o sinal dos resultados das adições ou das multiplicações resolvidas.

Por exemplo, para a adição dos ‘100 termos’, como as multiplicações ‘100 x 8’ e ‘8 x 100’ resultam em ‘800’, deve-se decidir se o resultado de ‘100 x (– 8)’ é positivo ou negativo. Os resultados das seis primeiras adições foram pensados para propiciar a construção da conjectura que ‘100 x (– 8)’ resulta em ‘– 800’ e trabalhar com alguns erros cometidos pelos estudantes, como ‘mobilizar apenas a regra de sinais das multiplicações para todas as demais operações já estudadas com os inteiros relativos’.

As multiplicações por zero são inseridas para o trabalho com algumas propriedades: elemento neutro da multiplicação, qualquer número multiplicado por zero resulta em zero. Portanto, nessas atividades, pode-se trabalhar as multiplicações de dois inteiros positivos e as com um inteiro positivo por um inteiro negativo.

As próximas atividades, exemplificada a seguir, têm por finalidade concluir a construção da técnica para se multiplicar dois inteiros relativos, agora, inteiros negativos por inteiros positivos.

Calcule as seguintes multiplicações.

5 x (– 4)	*6 x (– 5)*	*3 x (– 6)*
9 x (– 7)	*(– 3) x 6*	*(– 3) x 5*
(– 6) x 7	*(– 4) x 8*	*(– 2) x 4*

Se existir alguma regularidade nos valores encontrados, descreva-a.

Para as quatro primeiras atividades, em que o primeiro fator é positivo, pode-se ainda substituir as multiplicações por adições de parcelas iguais e mobilizar as técnicas das adições algébricas. Agora, para as demais atividades, em que o primeiro fator é negativo, deve-se mobilizar a propriedade comutativa para se obter uma operação semelhante, em resolução, as quatro primeiras. O objetivo será criar contextos para a mobilização das propriedades e a construção de resultados, por exemplo das seguintes técnicas:

i. Multiplicação de inteiros positivos: procedimento idêntico aos números naturais.
ii. Multiplicação de um inteiro positivo por um inteiro negativo: multiplica-se os números inteiros sem considerar os sinais, como se fossem positivos, acrescentando o sinal negativo.

Com objetivo de induzir os estudantes a testarem as técnicas construídas, bem como o seu alcance, atividades em que algumas multiplicações não podem ser substituídas por adições de parcelas iguais são importantes. E mais, pode-se acrescentar atividades em que nenhuma das parcelas pode exercer o papel de quantidade de vezes a ser multiplicado.

Calcule as seguintes multiplicações.

2,3 x (– 4)	*6,2 x (– 5)*	*(– 3) x 6,5*
3,2 x (– 5)	*6,1 x (– 7)*	*3,8 x (– 6)*

Se existir alguma regularidade nos valores encontrados, descreva-a.

Uma técnica alternativa para as atividades anteriores é a substituição dos números inteiros negativos pelos seus simétricos. Assim, teremos multiplicações com inteiros positivos cujos resultados serão também simétricos aos das atividades propostas. Portanto, além das regras já estudadas, há o ensino tanto da propriedade distributiva em relação à adição quanto do produto de um número por ‘0’, justificando sua validade para os inteiros relativos, semelhante ao apresentado por Caraça (1951).

Pode-se demonstrar também que ‘2,3 x (– 4) = – 9,2’, mobilizando a ideia de oposto, como segue: como ‘4’ e ‘– 4’ são simétricos, conjectura-se que o resultado da multiplicação desses números por 2,3 também são simétricos, ou seja,
‘2,3 x (– 4) + 2,3 x 4 = 0’, ou ainda, como a distributiva da multiplicação em relação à adição é mantida, tem-se 2,3 x (– 4) + 2,3 x 4 = 0 (fatorando)

2,3 (– 4 + 4) = 0 (elemento oposto)

2,3 x 0 = 0 (multiplicação por zero)

0 = 0

Logo, como o resultado é zero, conclui-se que a conjectura é válida, consequentemente, o resultado de ‘2,3 x (– 4)’ é o oposto de ‘2,3 x 4’, pelo fato de ‘4’ e ‘(– 4)’ também o serem. Outra possibilidade para se demonstrar essa conjectura, mobilizando as propriedades já estudadas, seria substituir (– 4) por (0 – 4). Assim,

2,3 x (– 4) (realizando a substituição)

2,3 x (0 – 4) (aplicando a distributiva da multiplicação em relação à subtração)

2,3 x 0 + 2,3 x – 4 (multiplicação por zero)

0 – 9,2 (elemento neutro)

– 9,2

Portanto, até essa parte dos estudos, temos técnicas para as multiplicações de três tipos: ‘2 x 3’, 2 x (–3)’ e ‘(–3) x 2’. Na sequência das atividades, haverá a construção da última regras de sinais, ‘multiplicar dois inteiros negativos.

Calcule:

(–3) x (– 4)	*(–6) x (– 5)*	*(– 3) x (– 6)*
(–3) x (– 5)	*(–6) x (– 7)*	*(–8) x (– 6)*

Se existir alguma regularidade nos valores encontrados, descreva-a.

Em todas as atividades há estímulos para se construir conjecturas, dadas por meio de observações e registros de regularidades. Sendo assim, pode-se trabalhar com elas, de forma que a última regra seja construída também.

Por exemplo, para o exercício ‘(–3) x (– 4)’, duas respostas possíveis seriam ‘12’ e ‘(– 12)’, bastando, assim, decidir qual das soluções é a correta. Dos resultados anteriores, sabe-se que

‘12 = 4 x 3’ e ‘(– 12) = (– 4) x 3’ ou ‘4 x (– 3)’

Mobilizando a demonstração realizada anteriormente, adicionar um número oposto, decide-se qual dos resultados é o verdadeiro.

1º caso: Se ‘(–3) x (– 4)’ for igual a ‘12’:

[(–3) x (– 4)] + [(– 4) x 3] = 0 (distributiva em relação à adição)

– 4 x [(– 3) + 3] = 0 (elemento oposto)

– 4 x 0 -= 0 (multiplicação por zero)

0 = 0 (a soma de opostos resultou em zero).

Como chegou-se a uma igualdade verdadeira, a conjectura está demonstrada. E, para o caso ‘4 x (– 3)’ o procedimento é semelhante.

2º caso: Se ‘(–3) x (– 4)’ for igual a ‘– 12’:

[(– 3) x (– 4)] + (4 x 3) = 0 (Propriedade associativa)

Nesse caso, colocar um fator em evidência, técnica já mobilizada não é uma tarefa tão óbvia. Sendo assim, a sugestão é: para resolver essa atividade teremos que avançar para a próxima tarefa: “multiplicar inteiros relativos por – 1”. Dessa forma, como temos uma conjectura validada[123], segue-se para as próximas técnicas. A conjectura validada é: a multiplicação de dois inteiros relativos resulta em uma solução positiva.

Portanto, as técnicas construídas com as atividades anteriores podem, assim, ser resumidas: para multiplicar dois inteiros relativos, consideramos os valores em módulo para o cálculo do produto e para determinar o sinal, seguimos:

- ✓ O produto de dois inteiros positivos é sempre positivo.
- ✓ O produto de dois inteiros negativos é sempre positivo.

[123] Outra forma de validar a conjectura, ‘(–3) x (– 4) = 12’:

(– 4) × (– 3)	(Usando os estudos das multiplicações por zero)
(–4) × (0 – 3)	(Distributiva da multiplicação em relação à subtração)
(– 4) × 0 – (– 4) × 3	(Multiplicação por zero)
0 – (– 12)	(Elemento Neutro)
[12 – (– 12)] – (–12)	(Associatividade)
12 – [(– 12) – (–12)]	(Oposto)
12 – 0	
12.	

- ✓ O produto de dois inteiros, sendo um negativo e outros positivo, ou um positivo e outro negativo, é sempre negativo.

Vale observar que para essas técnicas, mobilizou-se o termo “em módulo”, claramente construída pelo professor que estiver dirigindo os processos de ensino. Pode-se mobilizar outras expressões até o momento de formalização de todos esses conceitos, por exemplo, valor numérico, parte numérica, a distância a zero, mas provavelmente, incidirão problemas semelhantes aos estudantes, para a compreensão das técnicas aprendidas.

Como já anunciado, passamos para a próxima atividade, multiplicar inteiros relativos por ‘(– 1)’, uma outra forma de determinar o oposto.

Calcule

(– 1) × 3	*(– 1) × 4*	*(– 1) × 5*	*(– 1) × 6*
(– 1) × (– 4)	*(– 1) × (– 5)*	*(– 1) × (– 6)*	*(– 3,2) × (– 1)*
7,6 × (– 1)	*(– 1) × (– 1)*	*(– 1) × 0*	*(– 1) × 1*

Existe alguma regularidade nos resultados dos produtos desses números por – 1? Se houver, descreva-a.

Para a resolução dessas atividades, espera-se a mobilização das técnicas já estudadas, principalmente, a que trata do “produto de dois inteiros, sendo um negativo e outro positivo”. Espera-se também a construção da conjectura que o resultado de todos esses produtos trata do oposto dos números multiplicados por ‘(– 1)’. O trabalho em grupo e as discussões são importantes para levantar elementos que favoreçam a confirmação ou não das regularidades observadas. Em outras palavras, há necessidade de testar, validar e demonstrar as conjecturas construídas.

Para a construção da demonstração, pode-se trabalhar com todas as hipóteses levantadas pela turma, encaminhando as discussões por meio dos debates e das novas questões levantadas. Assim, uma conjectura que pode ser construída é a seguinte:

se o número inteiro é positivo, seu produto por ‘(– 1)’ será negativo, e também o seu oposto. E, se o número inteiro for negativo, seu produto por ‘(– 1)’ será positivo, e também o seu oposto. Portanto, o produto por ‘(– 1)’ por um número inteiro, sempre resultará no seu oposto/simétrico.

Para mostrar que essa conjectura é válida, adiciona-se o número qualquer, ‘x’ ao seu oposto, ‘x × (–1)’, verificando se o resultado será zero.

x × (–1) + x = 0 (elemento neutro)

x × (–1) + x × 1 = 0 (associatividade)

$x \times [(-1) + 1] = 0$ (Oposto)

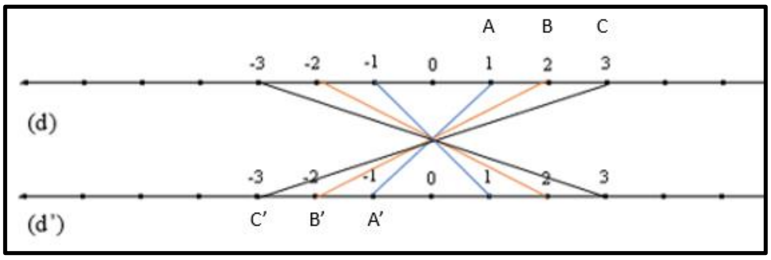
$x \times 0 = 0$ (multiplicação por zero)

$0 = 0.$

Portanto, x e $x \times (-1)$ são opostos.

Nas atividades propostas e nas conjecturas construídas e verificadas, surgiram as ideias dos diferentes significados do sinal de menos, representando uma subtração, ou que um inteiro relativo é negativo, ou ainda o oposto de um inteiro relativo.

Dentro do planejado para o trabalho com as operações de multiplicação e divisão, pensou-se em atividades com diversos contextos, principalmente as internas à matemática. Sendo assim, outro exemplo é uma espécie de visualização geométrica da ideia de opostos.



Para a construção desse esboço, partiu-se do ponto A de abscissa '1', reta d, ligando-o ao ponto A', de abscissa '–1', reta d'. Semelhantes às demais atividades, essa também será potente para se produzir conjecturas que verificadas permitem os estudos dos conceitos de oposto, de reta numérica e de valor absoluto. Nesse sentido, cria-se uma visualização geométrica da ideia de oposto, construídas a partir da multiplicação de um número inteiro relativo por '–1'.

Nesse ponto da proposta de ensino, vê-se a necessidade de mobilizar algumas ideias do ensino da álgebra escolar, como a noção de incógnita. Assim como é importante o movimento de construir os resultados estudados, o treino e a aplicação das técnicas também são fundamentais. Chevallard (1999) destaca entre os seis momentos de estudo, um justamente para essa finalidade. Sendo assim, apresenta-se alguns exemplos que foram pensados para as discussões com os professores do grupo, porém, com o encerramento dos encontros, não foram debatidos diretamente com eles. Nas atividades, evidencia-se os aspectos que foram tratados com o grupo de estudos.

Atividades

1. *Existem três números cujo produto resulta em '–100'?*

Duas possíveis soluções numéricas: '5 × 2 × (– 10)' ou '(– 10) × (– 10) × (– 1)'.

Algumas expressões algébricas que generalizam a solução da atividade:

a × 2 × b × (– 5) × c

a × (– 6) × c × b

(– a) × b × c

(– a) × (– b) × c

O objetivo das duas últimas expressões será de se reinvestir na técnica de multiplicação por '– 1', pois nesse caso, especificamente, trata-se da ideia de oposto, um dos três significados já estudados.

Uma variação dessa atividade, mobilizando todas as operações já estudadas pode ser a seguinte:

1.1. Com os números – 4; – 1; 2; 3; – 10; – 6 encontre – 100.

Para a resolução não será necessário mobilizar todos os números, podendo mobilizar uma, duas ou três das operações já estudadas (adição, subtração e multiplicação). Pode-se encontrar uma solução positiva, '100', nesse caso, a técnica de multiplicação por '– 1' pode ser utilizada também.

2. Sabendo que, a = (– 3) e b = (– 4), calcule as seguintes expressões algébricas, substituindo as incógnitas pelos seus respectivos valores numéricos.

a + b;	*a – b;*	*ab;*	*a² = a x a;*
– a;	*2a;*	*2a + 3b + 7*	*– b*

A solução '– (–3)' da atividade '– a', causará algumas dificuldades, exigindo o uso da associatividade, a multiplicação por '– 1' e o significado de oposto do sinal de menos. Outra dificuldade que deve ser debatida é a mobilização ou não do sinal de multiplicação, ou seja, para o exercício 'ab', os estudantes devem compreender que se trata de uma multiplicação, mesmo na ausência do sinal indicativo dessa operação.

A partir deste ponto da proposta de ensino, o objetivo será a construção da regra de sinais para a divisão de inteiros relativos. Os contextos serão semelhantes aos mobilizados para a operação de multiplicação. E, novamente, pretende-se evitar a apresentação direta das regras, buscando potencializar a construção de conjecturas, validando-as ou não, para então, alcançar o resultado de que as regras de sinais da divisão seguem a mesma lógica da multiplicação. Atividades do campo da aritmética também serão mobilizadas, bem como as ideias das operações inversas.

3. Complete as lacunas:

$(-3) \times \ldots = (-36)$	$\ldots \times 4 = (-12)$	$(-2) \times \ldots = 18$
$\ldots \times 5 = (-15)$	$(-10) \times \ldots = 3$	$(-2) \times \ldots = (-7)$
$4 \times \ldots = (-4)$	$(-6) \times \ldots = 12$	$(-9) \times \ldots = (-9)$

Existe alguma regularidade nos resultados? Se houver, descreva-a.

Espera-se que nessas atividades, sejam mobilizadas as regras de sinais da multiplicação para se determinar o sinal dos números que completarão as lacunas. Porém, antes da determinação do sinal do resultado, necessita-se mobilizar a ideia de operação inversa da multiplicação. As atividades podem ser realizadas em duplas ou trios, para que as conjecturas construídas possam ser validadas e divulgadas para os demais. Vejamos um exemplo:

Para o primeiro exercício, uma possível solução seria,

$(-3) \times \ldots = (-36)$ (operação inversa)

$(-36) : (-3) = .12$ (Deve-se pensar que, se o resultado de um inteiro negativo por '– 3' resultando em um inteiro negativo, então, esse inteiro relativo deve ser positivo. Esse resultado deve ser deduzido pelas regras já construídas para a multiplicação de inteiro.)

Sendo assim, para a maioria das atividades, as soluções são inteiras, obtidas por meio das divisões, sendo os sinais definidos pelas regras da multiplicação. Generalizando, pode-se conjecturar que a regra de sinais da divisão de dois números inteiros relativos é igual à da multiplicação.

Para as três últimas atividades, a solução não é um decimal, encontramos as dificuldades do passo anterior. Porém, para algumas divisões, os resultados serão números decimais, o caso dos sinais trabalha-se com a mesma regra, podendo deixar as divisões na representação fracionária ou, dependendo do contexto, na representação decimal.

Portanto, nesse terceiro bloco, fruto dos estudos e das concepções dadas nos últimos encontros realizados com os professores, trabalhamos com as operações e com algumas articulações com outras técnicas. Propomos assim, ideias e caminhos possíveis para se introduzir os primeiros conceitos dos inteiros relativos. Destacamos alguns caminhos, exemplificamos atividades, todavia, queríamos propor um espaço de discussões e possibilidades de estudos por meio da combinação de aspectos dos modelos concretos, presentes no *Modelo Dominante* já descritos, com as ideias do modelo algébrico, porém, aqueles mais próximos da *razão de ser* epistemológica dos inteiros relativos, também descritas no *Modelo Epistemológico de Referência*.

EPÍLOGO

Mobilizar um modelo de escrita alternativo foi um dos nossos desafios. Os estudos sobre o *Paradigma Questionamento do Mundo*, as concepções de *Percurso de Estudo e Pesquisa*, os debates com a professora Marilena Bittar (minha orientadora) e uma palestra da professora Mariana Bosch (BOSCH, 2018a) foram disparadores para tal compreensão, e me permitiram compreender e legitimar o uso de um modelo de escrita, em nosso caso, tentar escrever o relatório final da tese, do percurso de investigação que vivenciei, por meio da construção de um *mapa de questões e respostas*.

O *Paradigma Questionamento do Mundo* nos possibilita (e instiga a) ter uma visão mais crítica dos acontecimentos, propondo formas para questionar os modelos cristalizados ao nosso redor. O caminho da tese representa bem esse fato, pois partimos das angústias remanescentes do mestrado, imersos no contexto das disciplinas cursadas como crédito, deparando-nos com outras linhas de pesquisa, outras formas de enxergar e de pensar a pesquisa que se iniciaria, imersos também nas leituras sobre a TAD, principalmente o *Paradigma Questionamento do Mundo* e o *Percurso de Estudo e Pesquisa*, entre outras ferramentas, na busca por direcionamentos. Nesse sentido, deparamo-nos com muitas questões, algumas respostas provisórias, outras questões descartadas, respostas que não nos auxiliaram na construção da tese, enfim, me via em meio à um verdadeiro *Percurso de Estudo e Pesquisa* e poderia, então, descrevê-lo em forma de *mapa de questões e respostas*. Dessa forma, nosso objetivo final a *resposta coração* desse percurso, a resposta para as inquietações da pesquisa, seria fruto de uma construção dada por esse processo vivenciado por mim.

Na escrita de uma tese, esses movimentos, os questionamentos, as pesquisas daquilo que já está pronto, a elaboração de novas perguntas, a construção de respostas provisórias, a recorrência a algumas dialéticas, enfim, todo esse movimento é praticamente natural. Não se tem no início do processo, uma questão e uma resposta prontas; na realidade a pergunta inicial é transformada no processo; o caminho pode ser outro, as idas e vindas, a busca por algumas pessoas com *expertises* naquele tema. Em suma, mobilizar esse modelo de *mapa de questões e respostas* para a escrita da tese pareceu coerente com movimento vivido no processo de doutoramento.

Ressaltamos que em um *Percurso de Estudo e Pesquisa* (PEP) a resposta para a questão geratriz, em nosso caso, a resposta à nossa questão de pesquisa é chamada de *Resposta Coração* ($R^{\heartsuit}$). Fomos buscar outros sentidos para o termo ‘coração’ e na internet, em uma das muitas pesquisas, concluímos que o sentido figurado da palavra coração é o de 'Objeto do afeto de alguém'[124] ou 'centro da sensibilidade, da afeição, do amor'. Nesse sentido, uma *resposta coração* seria nosso objeto mais desejado, pois nossa pergunta é muito especial, há necessidade de responder algo muito importante. Seria, assim, tudo que nos daria elementos para responder à nossa questão inicial, mas essa resposta deve ser construída, no sentido que no processo, no decorrer do percurso de construção eu me encantei, me apaixonei por essa resposta, ela realmente me pertence, não foi algo que alguém me deu de maneira pronta e acabada, sendo fruto dos meus estudos.

Todavia, para chegarmos à nossa *resposta coração* da questão geratriz, houve um processo: a questão geratriz gerou novas perguntas e algumas respostas parciais ou fruto da visita a alguma obra. Depois de muitos estudos, idas e vindas, a elaboração de um prólogo foi uma das ideias para iniciar a nossa escrita. Segundo o dicionário Houaiss, prólogo, 'no antigo teatro grego, a primeira parte da tragédia, em forma de diálogo entre personagens ou monólogo, na qual se fazia a exposição do tema da tragédia[125]'. Nesse monólogo, 'eu, eu mesmo e minha tese', minhas conversas 'comigo mesmo' resultaram em uma tentativa de dar um norte acerca dos caminhos percorridos e das possíveis mudanças ocorridas em nosso trabalho de doutoramento, destacando a mediação da 'saúde mental e emocional', minha e da tese.

Baseando-me na metáfora do *Percurso de Estudo e Pesquisa*, organizei e estruturei a tese em forma de um *mapa de questões e respostas* em que os capítulos são dados ora por questões, ora por respostas, e o último capítulo é a descrição da *resposta coração* da tese.

Por detrás dessa forma de pensar estão elementos do *Paradigma Questionamento do Mundo*. A elaboração de uma tese segue essas ideias: a questão inicial juntamente com os estudos posteriores produziu o sentimento de constituir um grupo de estudos com professores da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS para debatermos o ensino dos inteiros relativos. Tinha anseio por construir uma proposta alternativa às constantes no *Modelo Dominante*. Anterior à constituição do grupo com professores, iniciamos a construção de um *Modelo Epistemológico de Referência* que nos permitiu analisar o *Modelo Dominante* dos inteiros relativos, iniciado pelos conhecimentos da

[124] Coração. In Dicionário Priberam da Língua Portuguesa. Disponível em: https://dicionario.priberam.org/cora%C3%A7%C3%A3o. Acesso em: 10 dez. 19.
[125] Prólogo. In Dicionário Houaiss Eletrônico.

dissertação e complementado com os novos estudos, principalmente, dos textos de Cid (2015) e Borba (2009). Todavia, não almejávamos construir nem a proposta alternativa e nem o *Modelo Epistemológico de Referência* sozinhos. A constituição de um grupo de professores foi uma das respostas ao questionamento de que *condições* e *restrições* do nosso sistema de ensino estivessem presentes e a possibilidade de um processo emancipatório dos principais elementos do *Modelo Dominante*.

Nesse contexto, as novas questões foram a 'ajuda' para termos uma tese a ser defendida. Também, não poderíamos deixar de visitar algumas obras, apresentamos a pesquisa de mestrado, na tese, que nos ajudou a responder à questão que complementou o *Modelo Dominante*. Ressaltamos que em nossa pesquisa de mestrado, tivemos por objetivo "compreender distanciamentos e aproximações entre a construção dos números inteiros e propostas de ensino das operações de adição e subtração desse conjunto numérico". (GONÇALVES, 2016, p. 123). Como resultados, pudemos analisar os processos de transposição didática entre esses níveis mobilizados. Nesse processo transpositivo, concluímos que houve uma ruptura entre os *blocos técnico-prático* e o *bloco do saber*, pois diferentemente de outros conteúdos, as justificativas dadas para as técnicas utilizadas estão mais próximas de modelos concretos ou de criações didáticas que não se aproximam de alguns conteúdos matemáticos. Isso para nós não foi um problema, não estávamos preocupados que esses conteúdos estivessem presentes, mas queríamos entender os motivos da ausência de justificativas que tivessem alguma relação com os conteúdos matemáticos.

Esses estudos nos levaram ao estudo do desenvolvimento histórico e epistemológico dos inteiros relativos, buscando a comparação entre a modelagem da praxeologia de um livro didático com a sua construção na matemática formal, o que nos proporcionou atingir o objetivo de pesquisa. Os fenômenos que geraram as citadas ausências, nos angustiaram e, consequentemente, nos impulsionaram a realizar nova pesquisa sobre esse tema. Nossas angústias, perpassaram alguns questionamentos: Por que o ensino dos inteiros relativos se dá dessa forma? Existem outras formas para se ensinar esses números? Há alguma de forma de se privilegiar ou trabalhar com as justificativas matemáticas nessa etapa de ensino?

Os resultados que obtivemos na pesquisa de mestrado, nos permitiram organizar um cenário e descrever algumas condições para o desenvolvimento dessa nova investigação, ou seja, na pesquisa de doutorado, tentamos modificar estas *condições* que faziam com que o ensino praticado fosse o identificado, por exemplo: impossibilidade de se apresentar algumas justificativas matemáticas para os números inteiros relativos; paradigma de aprendizagem mais próximo do *Paradigma Questionamento do Mundo*. Essa pesquisa foi desenvolvida buscando refletir sobre essas *condições*, investigando como ensinar os números inteiros relativos, na procura de uma proposta de ensino possível de ser desenvolvida sem repetir a que está posta na maioria dos livros didáticos e mobilizadas nas salas de aula de 7º e 8º anos, considerando as *condições* e *restrições* da nossa rede de ensino de Campo Grande/MS.

No entanto, como tal proposta seria produzida a partir das discussões e das conclusões do grupo de estudos, tal tarefa se tornou bem mais difícil. Primeiramente, identificamos dois grupos de professores bem distintos que compunham o grupo maior. Um que denominamos de mais tradicionais, não pejorativamente, mas com características bem marcantes do *Modelo Dominante* e o outro mais aberto às mudanças e mais engajados ao formato do grupo de estudos, que no caso, estava amparado pelo *Paradigma Questionamento do Mundo*. A dificuldade pairou no momento das conclusões, pois os professores mais tradicionais defendiam a manutenção dos processos de ensino do *Modelo Dominante*, mesmo diante dos estudos apresentados sobre as dificuldades que algumas formas de ensino provocariam, por exemplo, a mobilização do sistema monetário para as operações com os inteiros relativos.

Outra dificuldade enfrentada foi referente ao formato do grupo de estudos, apesar de o conteúdo matemático ter sido definido por mim, os inteiros relativos, mobilizamos alguns aspectos de um PEP-FP, mais precisamente, conseguimos vivenciar o primeiro módulo, o das questões didáticas, bem como usamos alguns aspectos das dialéticas *pergunta/resposta*, *mídia/meio* e *coletivo/individual*. Realizamos alguns estudos iniciais, Gonçalves (2016), Cid (2002, 2003, 2015) e Borba (2009) que serviu de base para iniciarmos a construção de uma proposta alternativa às vigentes no *Modelo Dominante*. Assim, em nosso grupo propusemos aos professores vivenciar uma formação continuada, sobre os inteiros relativos, cujo produto final seria uma proposta de ensino. No entanto, a mudança paradigmática[126] vivenciada por todos causou alguns desafios: a mudança de papéis durante os encontros, pois nas formações ofertadas pela Secretaria Municipal de Educação, em geral, há uma parte teórica, explanada pelos formadores, seguida de uma atividade prática. Nesse grupo de estudos, com exceção do primeiro encontro, todos exerceriam o papel de mediador, de proponente de questionamentos, exporiam algumas

[126] Para retornar à página 85, *R_5: Identificar e descrever Modelo Dominante* ..., clique aqui.

experiências. A construção dos questionamentos do *mapa de questões e respostas* deveria surgir da participação de todos. Meu objetivo era 'plantar' a semente do *Paradigma Questionamento do Mundo* em que todos pudessem vivenciar a experiência de um *cidadão herbartiano* com *atitudes procognitivas*. No entanto, todos nós tivemos nossos momentos de conflitos. Por exemplo, normalmente em todas as formações há momentos de silêncio do grupo, nesse sentido, como 'movimentar' o grupo sem influenciá-los com minhas opiniões e os meus estudos? Como não ser o mediador das discussões, diante do silêncio frente às questões? Qual atitude deveria ser posta em prática diante de um consenso que de certa forma ia de encontro aos resultados dos estudos?

A construção das demais questões também foi um desafio para o grupo, pois a busca por respostas, principalmente, nos livros didáticos e na internet, geralmente, essa visita às obras ocorre, no entanto, essas respostas parciais devem ser mobilizadas para a construção da *resposta coração* e não para serem mobilizadas diretamente. Porém, muitos dos professores já se contentavam com as respostas já encontradas, mesmo que segundo os nossos estudos, poderia causar novas dificuldades de aprendizagem e de ensino. Nesse caso, alguns deles, propunham a mobilização de suas criações didáticas. Aparentemente, estávamos vivenciando a incorporação de algumas mídias ao meio didático, transformações fundamentais para o desenvolvimento do *Percurso de Estudo e Pesquisa*, no entanto, o que percebemos foi que independente do professor ter a palavra, suas falas eram aceitas e tomadas como verdades. Em poucos casos, tivemos debates construtivos, na maioria das vezes os debates eram apenas para refutar a opinião dos colegas, principalmente, quando estavam nos grupos tradicionais e os mais propícios ao PQM.

Outro desafio enfrentado foi referente aos consensos do grupo, pois o objetivo de construir um MER ou uma proposta alternativa se deu pelo fato de algo estar apontado para conflitos, no entanto, mesmo com os estudos e a sua identificação, alguns professores não achavam necessária a proposição das ferramentas anteriormente citadas. Nessas condições, como ser mediador dos estudos sem impor minhas opiniões? Pelo fato de participar do grupo, tinha o direito e o dever de expor minhas opiniões e conhecimento, no entanto, o peso da palavra dos formadores sempre exerceu influência sobre os demais. Por estar com esses pensamentos, em vários momentos perdi oportunidades de novos debates com os professores.

Algumas *condições*, provenientes do nível da *Escola*, foram alteradas, no entanto, outras tantas surgiram em seu lugar. Geralmente, as formações para os professores ocorriam a cada bimestre, propomos encontros semanais, rejeitados, que se transformaram em quinzenais, em seus planejamentos. Dessa forma, no momento de planejarem suas atividades, eles estariam conosco, ou seja, tanto as suas atividades quanto as do grupo de estudos deveriam ser realizadas em horários alternativos. Eles mostraram que se dedicariam aos encontros apenas nos momentos presenciais, as atividades extras não foram realizadas. Entendemos que o momento dos planejamentos não poderia ser usado para outro fim, dessa forma, os professores deveriam ter por direito uma carga horária maior e específica para os seus estudos.

Entendemos que a mudança paradigmática proposta no grupo de estudos pode ser bem-sucedida, porém, muitas *condições* devem ser alteradas. O currículo a ser cumprido, a carga horária reduzida das aulas de matemática e dos momentos de estudos, *condições* estruturais (recursos tecnológicos e imobiliário) devem ser revisitados e pensados para as mudanças necessárias. O engajamento dos professores, dos demais responsáveis das escolas e das secretárias deve ser maior, buscando organizar e reestruturar, principalmente, as questões curriculares e metodológicas, bem como a continuação de políticas bem-sucedidas. O fechamento dos laboratórios de informática, de matemática e de ciências, bem como o apoio pedagógico especializado que foi retirado dos estudantes com necessidades especiais mostram a falta de compromisso com algumas políticas.

Assim, *condições* e *restrições* para tal mudança paradigmática estão além do Nível da *Escola*, consequentemente, incidirão no chão das escolas, influenciando o fazer pedagógico dos professores. Dessa forma, percebe-se que além do engajamento dos professores, se o formato de escola e muitos dos aspectos da sociedade não forem alterados, a mudança paradigmática proposta pelo *Paradigma Questionamento do Mundo* não são possíveis de existirem. O contexto pandêmico revelou (escancarou) muitos dos problemas relatados durante a escrita, obviamente, as problemáticas superam o contexto vivido pelo grupo de estudos, que ocorreu anteriormente a esse período.

Não poderia deixar de mencionar esse contexto em minha escrita, que ocorreu em boa parte durante a pandemia, me influenciando de forma mais psicológica, nas formas de enfrentamento dos desafios que finalizar um relatório de pesquisa propõe aos doutorandos. As análises realizadas juntamente com os professores tomariam outros caminhos, outros contextos deveriam ser pensados: ensino remoto, falta de tecnologia para que ocorra aulas síncronas ou assíncronas, pais ou familiares enfrentando o desemprego, a falta de condições financeiras, pais ou familiares ausentes, nos hospitais e além daqueles falecidos, outras urgências nas vidas de todos. Enfim, qual o papel da educação? Da matemática? Do ensino dos inteiros relativos? Da mudança de paradigma?

Essas são algumas questões que as discussões com a banca e com a professora Marilena não foram possíveis de serem debatidas, em muito pela falta de condições emocionais e psicológicas de tratar tal assunto.

Assim, deixo meus singelos sentimentos aos familiares e às vítimas desse vírus que assolou o mundo. Mudou nossa maneira de agir, de se relacionar, de trabalhar, de ver a vida, enfim, nossa maneira de viver e de enfrentar nossos problemas. Como pensar nos estudos, se estou com fome? Agora, como pensar em estudos, se minha família foi retirada de mim? A vida segue, porém, as cicatrizes ficarão. Cada um à sua maneira tentou oferecer o seu melhor ao seu próximo. A minha foi finalizar meu doutoramento, cuidar da minha família e daqueles que me rodeiam, pondo em prática os protocolos sanitários e aderindo ao plano de vacinação. Desistir, parar e se assentar à beira do caminho, talvez fosse um ato de covardia. Difícil de compreender ou de avaliar, como dito, cada um à sua maneira lidou com essa pandemia e tentou ajudar aqueles ao seu redor.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

ANDRINI, Á. VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática**, 7. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Ecología de la modelización matemática**: Restricciones transpositivas en las instituciones universitárias. communication au 2e congrès TAD. 2007.

BERTE, A. DESNAVRES, C. ; CHAGNEAU, J. ; LAFOURCADE, J. ; CONQUER, L. ; MAURATILLE, M. C. ; SAGEAUX, C. ; ROUMILHAC, D. **Enseigner les nombres négatifs au collège.** Repères IREM, França, n. 73, p. 59-90, Out. 2008. Disponível em: http://numerisation.univ-irem.fr/WR/IWR08016/IWR08016.pdf. Acesso em: 10 abr. 2020.

BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.25, n. 3, set./dez.2017, p.364-387.

BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M. de; PAIS, L. C. Reflexões sobre a Orientação de Pesquisas de Pós-Graduação em Educação Matemática com o Suporte da Teoria Antropológica do Didático. **Perspectivas da Educação Matemática**, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, v. 7, p. 380-406, ISSN 2359-2842, 2014.

BORBA, R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números relativos. Borba, R. e Guimarães, G. **A pesquisa em Educação Matemática**: repercussões na sala de aula, São Paulo: Cortez, 2009.

BOSCH, M. Modelos epistemológicos e didáticos no paradigma de questionamento do mundo. In: Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais** [...]. Campo Grande: UFMS; 2018a.

BOSCH, M. **Study and research paths**: a model for inquiry. In: International Congress of Mathematics. Rio de Janeiro, Brazil, 2018b.

BOSH, M. CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. Objet d'estude et problématique. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensé Sauvage-Éditions. v.19, n.1, p. 77 – 124, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=35. Acesso em: jan. 2021.

BOSCH, M., GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XIII** (p. 89-113). Santander: SEIEM. 2009.

BOSCH, M., GASCÓN, J. Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los talleres de prácticas matemáticas a los recorridos de estudio e investigación. In : A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G.

Cirade & C. Ladage (Eds.), **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action** (p. 55-91). Montpellier, Francia: IUFM. 2010.

BOSCH, M., WINSLØW, C. **Linking problem solving and learning contents**: the challenge of self-sustained study and research processes. Recherches en Didactique des Mathematiques, 35(3), 357-401, 2016.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Brasília: MEC. 2017.

BROUSSEAU G. **Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, v. 7, p. 33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. (1989). **Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques**. Construction des savoirs. Ottawa: CIRADE.

BROUSSEAU G. **Fundamentos e métodos da didática da Matemática**. In: BRUN J. Didática das Matemáticas. Horizontes Pedagógicos: Instituto Piaget, Lisboa, 1999.

CAMPO GRANDE. Secretaria Municipal de Educação. Superintendência de Políticas Educacionais. Núcleo do Ensino Fundamental do 6º ao 9º Ano. **Orientações Curriculares: ensino fundamental do 1º ao 5º**. / Organizadores, Alexandrino Martinez Filho, Maria Elisabete Martins. Campo Grande - MS: SEMED, 2016.

CAMPO GRANDE. Secretaria Municipal de Educação. Superintendência de Políticas Educacionais. Núcleo do Ensino Fundamental do 1º ao 5º Ano. **Matemática Referencial Curricular Reme**. Campo Grande - MS: SEMED, 2020.

CAMPO GRANDE. Secretaria Municipal de Educação. Superintendência de Políticas Educacionais. Núcleo do Ensino Fundamental do 6º ao 9º Ano. **Matemática Referencial Curricular Reme**. Campo Grande - MS: SEMED, 2020.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Fotogravura Nacional, 1951.

CASABÓ, M. B. Un punto de vista antropológico: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad Matemática. In: **Cuarto Simpósio de La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática**. Huelva: Universidade de Huelva, 2001. p. 15 – 28.

CHAACHOUA, H., BITTAR, M. A teoria antropológica do didático: paradigmas, avanços e perspectivas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracaju, v. 9., n. 1, p. 29-44, 2019

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au college**. Première partie. França, 1984. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/5x3_1570714298158-pdf. Acesso em: 19 mar. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au college**. Deuxième partie. França, 1989. Disponível em:

https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/19x5_1570440008367-pdf. Acesso em: 19 mar. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans des mathématiques au college**. Troisième partie. França, 1990. França. Disponível em: https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/23x1_1570438461783-pdf. Acesso em: 19 mar. 2020.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble : La pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Vol. 12, nº 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques : L´approche antropologique. Publicado em : **Recherches en Didactique des Mathématiques,** v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27. Acesso em : 27 mai. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Organiser l'étude**. Cours 3 - Structures & Fonctions. Actes de la XIième Ecole d'été de didactique des mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage, 2002a.

CHEVALLARD, Y. **Recherches en didactique et pratiques de formation** d'enseignant. In : Conférence donnée au LADIMATH, Namur. 2002b.

Chevallard, Y. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques**. Dans S. Maury & M. Caillot (Éds), Rapport au savoir et didactiques (p. 81-104). Paris : Fabert. 2003.

CHEVALLARD, Y. **Un concept en émergence** : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds). Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, ARDM et IREM de Paris 7, Paris, p. 344-366, 2007.

CHEVALLARD, Y. **Didactique et formation des enseignants**, p. 1-20, 2009a. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr. Acesso: 9 out. 2020.

CHEVALLARD, Y. **À propos des PER**. In : Journal du Séminaire TAD/IDD – 1; p. 7-23, 2009b. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-1.pdf. Acesso: 9 out. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER**. 2009c. Disponível em : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=155. Acesso : 9 out. 2020.

CHEVALLARD, Y. **Le fait de la recherche**. In : Journal du Seminaire TAD/IDD – 3 ; p. 1-8, 2009d. Disponível em : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf. Acesso : 3 nov. 2020.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder** ; Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009e. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr. Acesso em agosto de 2020.

CHEVALLARD, Y., CIRADE, G., LADAGE, C., LARGUIER, M. (Eds.), **Un panorama de la TAD** (p. 465-483). III Congreso Internacional sobre la TAD (Sant Hilari Sacalm, 25-29 enero 2010).

CHEVALLARD, Y. **Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana**: alegato a favor de un contraparadigma emergente. Journal of Research in Mathematics Education, v. 2, n. 2, p. 161-182, 2013.

CHEVALLARD, Y. BOSCH, M. GASCÓN. J. **Estudar Matemática**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas. 2001.

CID, E. **Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos**. Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, v. 10, 2000.

CID, E. **Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos**. Actas de las X Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (Vol. 2, p. 529-542). Zaragoza, España: Publicaciones de la Universidad de Zaragoza. 2002.

CID, E. **La investigación didáctica sobre los números negativos:** estado de la cuestión. Pre-publicaciones del Seminario Matemático "García de Galdeano", n. 25, p. 1-40, 2003.

CID, E. **Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos**. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza. 2015.

CID, E. BOLEA, P. Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. In : A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.), **Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action** (p. 575-594). Montpellier, Francia : IUFM. 2010.

COQUIN-VIENNOT, D. **Complexité mathématique et ordre d'acquisition** : une hierarchie de conceptions a propos des relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 6, n. 2-3, p. 133-192. França. 1985.

GASCÓN, J. **La necessidade de utilizar modelos em didáctica de las Matemáticas**. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 11 – 37, 2003.

GASCÓN, J. **Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico**. El caso del álgebra elemental. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 14 (2), p. 203-231, 2011.

GASCÓN, J. **Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas**. Educación Matemática [en linea] 2014, (marzo-Sin mes). Disponível em: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854006. Acesso em: 9 de abril de 2019.

GIOVANNI, J. R. CASTRUCCI, B. JUNIOR, J. R. G. **A Conquista da Matemática**: Teoria e Aplicação. Edição renovada. São Paulo: FTD, 1992.

GITIRANA, Verônica *et al*. **Jogos com sucata na educação matemática**. Recife: Nemat: Ed. Universitária da UFPE, 2013.

GLAESER, G. **Epistemologia dos números relativos. Boletim do GEPEM** - Grupo de estudos e pesquisas em educação Matemática. Rio de Janeiro: UFRJ, n. 17, 1985.

GONÇALVES, K. R. **A teoria antropológica do didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas**: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

GONÇALVES, K. R.; BITTAR, M. **A distância entre o saber acadêmico e o saber ensinado revelado em um livro didático de matemática do 7º ano**: o caso da adição e subtração com números inteiros. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, v. 13, n. 27, p. 107-123, 2017.

GONÇALVES, K. R.; BITTAR, M. **O bloco do saber do conjunto dos inteiros relativos**. The know pack of the relative whole of integers. Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, v. 21, n. 5, 2019.

HILLESHEIM, S.F.; MORETTI, M.T. A regra dos sinais: alguns elementos importantes do seu contexto histórico. In: BRANDT, CF., and MORETTI, MT., orgs. **Ensinar e aprender matemática: possibilidades para a prática educativa** [online]. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2016, p. 233-254. Disponível em: http://books.scielo.org/id/dj9m9/pdf/brandt-9788577982158-12.pdf. Acesso em: 23 ago. 2018.

HOUAISS. **Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

KLAUE, I. P. Explorando os números inteiros por meio dos jogos matemáticos. In: **Produções Didático-Pedagógicas**. Os desafios da escola pública Paranaense na perspectiva do professor. Toledo, 2013.

LUCAS, C. O. **Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional**. Tese de Doutorado. Universidade de Vigo. 2015. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=156003. Acesso em: 5 de jun. de 2021.

MALAGUTTI, P. L.; BALDIN, Y. **Minicurso para Aperfeiçoamento de Professores de Matemática do Ensino Básico**. UFSCAR, 2010. Disponível em: https://www.dm.ufscar.br/profs/dplm/osnumerosinteiros.pdf. Acesso em: 28 de ago. de 2018.

OLIVEIRA, N. C. N. **Reta numérica dos números inteiros**. Mundo Educação. 2017. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/reta-numerica-dos-numeros-inteiros.htm#:~:text=Z%20%3D%20%7B0%2C%20%2B%201,%2B%204%2C%20%2

B%205%20%E2%80%A6%7D&text=Em%20rela%C3%A7%C3%A3o%20aos%20termos%20negativos,negativos%20em%20rela%C3%A7%C3%A3o%20ao%20zero.&text=Isso%20acontece%20porque%20o%20%2D%205,negativo%20em%20rela%C3%A7%C3%A3o%20ao%20%2D%204. Acesso em dez. 2020.

POMMER, W. M. **Diversas abordagens das regras de sinais s elementares em** Z. São Paulo: USP, 2010. Disponível em: http://www.uems.br/eventos/encontromatematica/arquivos/44_2012-08-26_18-35-53.pdf. Acesso em: 01 jun. 2020.

QUEIROZ, F. da C. **Números relativos**: uma análise de natureza epistemológica de alguns livros didáticos nacionais do terceiro ciclo do ensino fundamental. Universidade Federal Fluminense, 2006.

RUIZ-OLARRÍA, A. **La Formación Matemático-Didáctica del Profesorado de Secundario**. De las Matemáticas por Enseñar a las Matemáticas para la Enseñanza. Tesis de Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid/ES, 2015.

RUIZ, N., BOSCH, M., GASCÓN, J. La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XIV** p. 545-556. Lleida: SEIEM, 2010.

SIERRA DELGADO, T. Á.; BOSCH CASABÓ, M.; GASCÓN PÉREZ, J. **El Cuestionamiento Tecnológico-Teórico en la Actividad Matemática**: el caso del algoritmo de la multiplicación. Bolema: Boletim de Educação Matemática, v. 27, n. 47, p. 805-828, 2013.

SÁ, P. F. de ANJOS, L. J. S. dos. **Números Negativos**: Uma trajetória Histórica. Anais... IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011.

SCHIELACK JR. V. P. Aplicações Matemáticas da Geometria. São Paulo: Atual. In: LINDQUIST, M. M SHULTE, A. P. (org.) **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual. p. 226-239. 1994.

SCHUBRING, G. **Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition**: Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century France and Germany. New York: Springer, 2005.

SCHUBRING, G. **Os números negativos** – exemplos de obstáculos epistemológicos? Rio de Janeiro: LIMC-UFRJ, 2012.

TEIXEIRA, M. R. G. **A obra de Bento de Jesus Caraça e a educação matemática**: entre encanto e resistências. Rio Claro: [s.n.], f.: il., gráfs., tabs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. 2010.

VALE, R.S. **O Ensino dos números relativos**: Atividades a partir da opinião de estudantes. Trabalho de conclusão de curso (graduação) – Centro de Ciências Sociais e Educação, Universidade do Estado do Pará. Belém, 2009.

VERGNAUD. G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, 10 (23): 133-170, 1990.

ANEXOS

ANEXO 1[127]

O ‘jogo de pega-varetas’ tem por objetivo propiciar aos estudantes aumento da compreensão e operacionalização dos inteiros relativos, por meio das operações de adição e de subtração. As regras do jogo original pega-varetas são mantidas, com exceção de valores negativos para algumas varetas, pois, originalmente, todas têm valores positivos. O jogo termina quando a última vareta for retirada e quem determina a regra vencedora é o professor, por exemplo, ganha o jogo quem tiver a maior quantidade de pontos. Sugere-se alterar os valores das varetas a partir do avanço da aprendizagem dos estudantes. (VALE, 2009).

‘O Jogo dos Sinais’, apresenta um tabuleiro formado por 13 hexágonos, sendo 6 azuis (lado direito), 6 vermelhos (lado esquerdo) e 1 verde (casa central). (GITIRANA *et al.*, 2013).

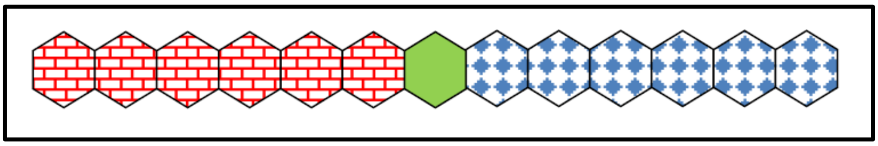


Figura 12**-** Exemplo do tabuleiro do Jogo dos Sinais
Fonte: Gitirana *et al*. (2013, p. 100)

Os peões podem ser tampas de garrafa de cores diferentes, um para cada jogador, um dado deve conter números azuis e o outro, vermelhos, numerados de 1 a 5, onde se repete o número quatro, azul, e o número dois, vermelho. (GITIRANA *et al*., 2013).

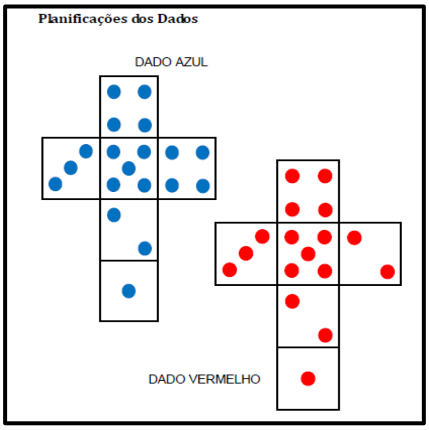


Figura 13- Exemplo de planificação indicativa da posição dos números
Fonte: Gitirana *et al*. (2013, p. 224)

Podem participar de dois a quatro jogadores, sendo que ganha o jogo aquele que conseguir sair primeiro do caminho pelo lado azul ou ficar sozinho no jogo (no caso em

[127] Para retornar à página 111, R_8: *Dificuldades e Erros*: ..., clique aqui.
Para retornar à página 112, R_8: *Dificuldades e Erros*: ..., clique aqui.

que os oponentes tenham saído pelo lado vermelho). Regras: todos os jogadores colocam seus peões na casa central (verde), a ordem dos participantes é definida por sorteio, em sua vez, o jogador lança simultaneamente os dois dados, o número que o dado azul indicar, será o número de casas que o jogador deverá percorrer à direita, o número que o dado vermelho indicar será o número de casas, que o jogador deverá andar a esquerda. O jogador que sair do tabuleiro pela esquerda será eliminado do jogo; e, em cada jogada, o jogador terá que usar o resultado dos dois dados, ou seja, o jogador só sai do tabuleiro depois de fazer a jogada correspondente aos dois dados. Portanto, se um jogador sair pelo lado direito antes de usar o dado vermelho, deve primeiro andar para o lado esquerdo com o número do dado vermelho e só depois andar para o lado direito; o mesmo pode ocorrer pelo outro lado, o azul. (GITIRANA *et al*., 2013).

O jogo 'Zigue-zague' é composto por um tabuleiro, um marcador para cada jogador e três dados. (KLAUE, 2013)[128].

Figura 14- Exemplo de tabuleiro do jogo ziguezague
Fonte: Klaue, 2013, p.8

O objetivo do jogo é o de realizar operações de adição e subtração mentalmente. Pode-se jogar até quatro alunos, o início do jogo se dá por sorteio, por exemplo, no par ou ímpar. Assim, cada jogador, na sua vez, lança os três dados. Os números obtidos nos dados podem ser adicionados ou subtraídos em qualquer ordem. Assim, o jogador, colocará o seu marcador sobre o número encontrado, inicialmente, localizado na linha de partida. Cada jogador poderá movimentar apenas uma casa em cada jogada para frente e para trás, para os lados ou em diagonal desde que a casa não esteja ocupada por um outro marcador. E, finalmente, o primeiro a alcançar a linha de chegada é o vencedor. (KLAUE, 2013).

[128] Para retornar à página 113, R_8: *Dificuldades e Erros*: ..., clique aqui.

O jogo 'Desafio das Operações'[129] foi desenvolvido em dois níveis. O primeiro envolve apenas os números naturais e o segundo os números inteiros negativos. Outras versões podem ser feitas, estendendo-se o resultado para os racionais. Na descrição do material, constam o número de participantes, no mínimo dois; o objetivo, capturar o maior número de fichas, e para isso, "deve-se acertar, dentre os números do primeiro conjunto aqueles que chegam ao resultado e a operação indicados pelo oponente." (GITIRANA *et al*., 2013, p. 150).

Figura 15- Exemplo de tabuleiro do jogo Desafio das Operações
Fonte: Gitirana *et al*. (2013, p. 149)

O Material para o jogo é composto por um tabuleiro constituído de dois conjuntos de números. O primeiro com números que serão usados pelos alunos para realizar uma das quatro operações e o segundo com os resultados a serem obtidos. Há ainda 4 peões, um para cada operação, adição, subtração, multiplicação e divisão, mais 9 fichas indicativas do ganhador de cada rodada. Ganha quem tiver o maior número de fichas.

[129] Para retornar à página 114, R_8: *Dificuldades e Erros*: ..., clique aqui.

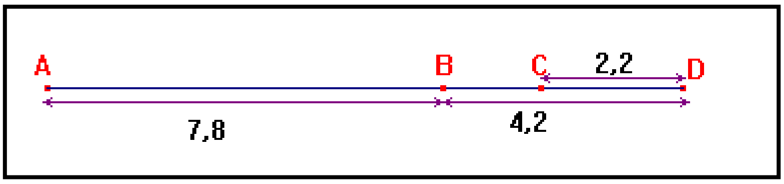
ANEXO 2[130]

Proposta de Ensino (Atividades adaptadas de Bert *et al.* (2008))

Atividades motivadoras

I - Uma estudante vai ao supermercado e compra dois produtos para sua mãe: um pacote de arroz a R$12,75 e um pacote de feijão a R$4,25. Do autofalante do supermercado é anunciada uma promoção, “leve um pacote de arroz e um de feijão da marca “Xis” para ter um desconto de R$1,50 sobre o preço do pacote de feijão”. Diante dessa situação, calcule o preço total que a estudante deverá pagar, no caso de comprar os produtos da promoção. Realize esse cálculo de duas maneiras diferentes e, em cada forma, descreva os cálculos realizados.

II – Observe a figura a seguir:



Calcule o comprimento do ponto C ao ponto A de duas maneiras diferentes e, para cada forma, escreva os cálculos realizados.

III – Arthur levou suas figurinhas à escola para jogar várias partidas de “bafo”.
Na primeira partida perdeu 9 figurinhas e na segunda ganhou 7. Depois dessas partidas quantas figurinhas ele tem a mais ou a menos do que a quantidade que tinha inicialmente?

1. Resolva as seguintes operações (mobilize as ideias das situações motivadoras):

a) 4 + ... = 34 b) 5 + ... = 65 c) 8 + ... = 58
d) 16 + ... = 61 e) 17 + ... = 71 f) 18 + ... = 81
g) 38 + ... = 83 h) 9 + ... = 7 i) 5 + ... = 1
j) 8 + ... = 4

2. Encontre três novas operações que resultam em cada uma das alternativas a seguir:

a) 54 b) 63 c) 45 d) 30 e) 60
f) 50 g) – 2 h) – 1 i) – 4

3. Resolva as seguintes operações:

a) 16 + ... = 61 b) .... + 54 = 71 c) .... + 45 = 81 d) 38 + ... = 85
e) .... + 30 = 34 f) 50 + 15 = ... g) 18 + ... = 58 h) 90 + 12 = ...
i) 5 + ... = 0 j) 8 + ... = 0 k) .... + 7 = 0

4. Descreva como foram resolvidas as operações do exercício anterior.

5. Resolva as seguintes adições. Em seguida, destaque quais as adições cujos resultados são positivos:

a) 7 + (– 4) b) 12 + (– 5) c) 54 + (– 29)d) – 35 +68 e) – 17 + 21

[130] Para retornar à página 96, Q_6: *Por que ensinar Z?* Clique aqui.
Para retornar à página 100, R_6: *Razões de Ser: Cotidiano, ...*, clique aqui.
Para retornar à página 126, $R_{9.1}$: *Atividades, problemas e exercícios ...*, clique aqui.
Para retornar à página 182, R_{II}^{Z}: *Desenho do MER para Z.* Clique aqui.
Para retornar à página 205, R_{IV}^{Z}: *Desenho da proposta de ensino para Z,* clique aqui.

6. Complete a tabela a seguir:

Jogo matutino	Jogo vespertino	Resultado do dia	Resultado do dia com um número	Uma operação que resuma o dia
Ganhei 10 bolas	Ganhou 8 bolas			
Perdeu 8 bolas	Ganhou 12 bolas			
Perdeu 6 bolas	Perdeu 5 bolas			
Ganhou 5 bolas	Perdeu 8 bolas			
Ganhou 9 bolas	Perdeu 9 bolas			
Perdeu 4 bolas	Ganhou 0 bola			
Ganhou 0 bola	Perdeu 5 bolas			

7. Resolva as seguintes operações (resolva de duas maneiras diferentes):
a) 1243 + 34 – 35 b) 54 + 34 – 35 c) 387 + 23 – 25 d) 387 + 34 – 35
e) 1243 + 24 – 25 f) 895 + 37 – 38 g) 902 + 62 – 63 h) 1000 + 98 – 99
i) 274 + 74 – 73

Descreva como foram resolvidas as operações do exercício anterior.

8. Complete as seguintes frases:
a) Somar 5 e somar 2 é o mesmo que ___________________________________
b) Somar 5 e subtrair 2 é o mesmo que ___________________________________
c) Subtrair 5 e somar 2 é o mesmo que ___________________________________
d) Subtrair 5 e subtrair 2 é o mesmo que ___________________________________

Descreve uma possível regularidade observada.

9. Resolva as seguintes operações. Em seguida, descreva como foram resolvidas as operações:
a) 35 – 17 b) 23 – 48 c) 34 – 26 d) 48 – 72

10. Conte do maior número para o menor de 3 em 3, começando do 18. Descreva os resultados por meio de operações. Qual foi o último número encontrado?

11. Represente os resultados das operações do exercício anterior em uma reta numérica.

12. Descubra o número oculto. Regra: o estudante encontrará esse número por meio das dicas: “esse número é maior do que o oculto” ou “esse número é menor do que o procurado”. Por exemplo, se o número oculto for 12 e o estudante disser 23, o professor dirá que esse valor é maior. Represente os números falados e o número oculto em uma reta numérica.

13. Complete as colunas seguindo as instruções a seguir:
I. Para preencher a segunda coluna, determine os resultados da subtração que origina a solução da primeira coluna. II. Para preencher a terceira coluna, copie a resposta dada na segunda coluna à direita do sinal de igual e mobilize o procedimento utilizado para responder a primeira coluna.

1ª coluna	2ª coluna	3ª coluna
3 + …... = 7	7 – 3 = ………	7 + …… = …….
5 + …... = 2	2 – 5 = ……...	2 + …… = ……
–7 + …... = 3	3 – (–7) = ……...	3 + ……. = ……
6 + …… = –4	– 4 – 6 = ……...	– 4 + …... = ……
–9 + …... = –5	– 5 – …... = ……...	– 5 + …… = ……
1 + …... = –3	…... – …... = …….	…..+…… = ……
–8 + …... = –11	….. – …... = …….	…..+…… = ……
7 + …... = 0	…... – …... = …….	…..+…… = ……
–10 + …. = –10	….. – …... = …….	…..+…… = ……

Descreva as possíveis regularidade que podem ser encontradas para o preenchimento das colunas do exercício anterior.

14. Resolva as seguintes operações:
a) 12 – (–20) = b) –20 – (–14) = c) –42 –42 = d) 13 – 30 =
e) –12 – 18 = f) –39 – (–39) = g) –18 – (–20) = h) 35 –25 =
i) –19 –11 = j) 28 –28 =

15. Vamos justificar as operações realizadas anteriormente! Para isso, como é possível mostrar que – 3 – 4 = – 3 + (– 4).

16. Resolva as seguintes operações:
a) 678 + 99 b) 47 + 98 c) 157 – 99 d) 123 + 39
e) 87 – 29 f) 601 – 103 g) 427 + 397 h) 212 – 198
i) 117 – 22

17. Preencha com os sinais + e – que faltam nas seguintes igualdades:
765 – (100 – 1) = 765 – 99 = 765 __ 100 __ 1
80 – (30 – 1) = 80 – 29 = 80 __ 30 __ 1
141 – (100 + 2) = 141– 102 = 141 __ 100 __ 2
92 – (42 +3) = 92 – 45 = 92 __ 42 __ 3
325 + (200 – 3) = 325 – 197 = 325 __ 200 __ 3

18. Um trem sai de Barcelona com um certo número de passageiros. Na primeira parada, descem 15 passageiros e sobem 12 passageiros; na segunda parada, descem 40 e sobem 42 passageiros. Com quantos passageiros o trem chegou na terceira parada?

ANEXO 3

---

[i] De manera coloquial, podemos decir que la dimensión económico-institucional de un problema didáctico incluye cuestiones que giran en torno a Ia pregunta ¿cómo son las cosas (las OM y las OD) en Ia contingencia institucional? Con ello, abarca al sistema de reglas y principios (nomos) que regulan —en una institución determinada— Ia organización y el funcionamiento de las OM y las OD involucradas en el problema didáctico. Cabe mencionar que cualquier respuesta que pretendamos dar a Ia citada pregunta deberá apoyarse en un MER y en un modelo didáctico de referencia (MDR) sustentado por dicho MER. (GASCÓN, 2011, p. 213).

[ii] De forma muy simplificada, podría decirse que Ia dimensión ecológica de un problema didáctico contiene las cuestiones que giran en torno a Ia siguiente pregunta: ¿por qué las cosas (las OM y las OD) son como son en Ia contingencia institucional y qué condiciones se requerirían para fuesen de otra forma dentro del universo de lo posible? […] Por ello, es preciso tomar en consideración las restricciones y condiciones impuestas sobre las praxeologías en *todos los niveles de co-determinación didáctica*, desde los más genéricos, como Ia sociedad y Ia civilización, a 10s más específicos, como el tema y Ia cuestión matemática concreta. (GASCÓN, 2011, p. 217, grifo do autor).

[iii] ¿Qué conocimientos o competencias son necesarios (o por lo menos útiles) para que los profesores puedan intervenir de manera efectiva y pertinente en la formación matemática de los estudiantes (de tal o cual etapa educativa) y qué se puede hacer para ayudar a los profesores a que construyan o adquieran estos conocimientos o competencias? (Bosch, Gascón, 2009, p. 91).

[iv] La motivación de este tipo de dispositivo es doble. Por un lado, las investigaciones sobre la ecología de los REI han puesto en evidencia el problema de la formación de los profesores para adaptarlos al nuevo paradigma del cuestionamiento del mundo. Además, si el objetivo es ir preparando una transición efectiva del paradigma monumentalista al del cuestionamiento del mundo, la propia formación del profesorado requiere dispositivos didácticos que no se fundamenten únicamente en el paradigma monumentalista y, por ello, deben recurrir de un modo u otro a dispositivos con estructura tipo REI (estudio de cuestiones, medias y medios, etc.). Proponemos, en consecuencia, un dispositivo didáctico con estructura de REI enfocado a la formación del profesorado, el REI-FP. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 136).

[v] Este módulo contiene tanto la construcción de Q0 (su elección y asunción) como las primeras exploraciones con vista a elaborar primeros elementos de respuesta, generalmente a partir de las medias más habituales para los profesores: currículum, libros de texto, revistas para el profesorado, revistas de investigación, centros de recursos, webs, etc. El rol de los formadores Y en este proceso no es el de aportar elementos de respuesta para darlos a conocer a los profesores, sino guiarlos en la búsqueda de estos elementos y, sobre todo, iniciarlos a los gestos básicos del cuestionamiento didáctico: ¿Qué es C? ¿De dónde viene? ¿En qué ámbitos matemáticos y no matemáticos se utiliza o utilizaba? ¿Por qué hay que enseñarlo? ¿Cuáles son sus razones de ser en la matemática escolar (las establecidas explícita o implícitamente y las potenciales)? ¿Qué propuestas de enseñanza existen? ¿Qué se dice o sabe de ellas?, etc. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 137-138).

[vi] ¿Cómo llevar a cabo la tarea de diseñar un REI para los alumnos de cierta etapa educativa, análogo al vivido, y analizado en las fases anteriores? Esta cuestión da origen a otras más concretas tales como: ¿Qué elementos componen el diseño de un REI? ¿Cuál es el orden más razonable para diseñar cada uno de dichos elementos? ¿Cómo deben expresarse materialmente dichos elementos del REI? Los criterios básicos para dar respuesta a estas cuestiones y explicitar un diseño didáctico a priori de un REI análogo al vivido surgen directamente de las respuestas aportadas en los dos módulos anteriores, si bien hay que tener en cuenta que la aplicación de los criterios matemático-didácticos obtenidos no es inmediata. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 141).

[vii] X est le collectif des étudiants (ce mot est employé ici de façon générique), Y est l'équipe des aides et directeurs d'étude et Q désigne la question étudiée (par X sous la direction de Y ou avec son aide), question qui peut consister à se demander ce qu'est, comment « fonctionne », à quelles fins, etc., telle oeuvre O, par exemple, disons, le « calcul tensoriel ». La question Q, quelle qu'elle soit, est l'enjeu didactique du système considéré. (CHEVALLARD, 2009a, p. 2, grifos do autor).

[viii] Ce qu'il importe de souligner avant tout est ce fait pluriséculaire que le métier qu'exerce Y est regardé comme un petit métier, qui ne nécessite quasiment aucune formation. À Rome comme en Grèce, note l'historien Henri-Irénée Marrou (dans son Histoire de l'éducation dans l'Antiquité, Le Seuil, Paris, 1948, pp. 66-67), le maître d'école est « un pauvre hère », dont le métier est « le dernier des métiers, rem indignissimam », « fatigant et pénible, mal payé », « bon pour des esclaves, des affranchis ou de petites gens : obscura initia dit Tacite d'un parvenu qui avait commencé par là ». Métier qu'on exerce faute de

mieux, en attendant mieux. C'est de là que nous venons ; et cette « indignité » originelle pèse toujours. (CHEVALLARD, 2009a, p. 3 – 4, grifo do autor).

[ix] Dans l'actuel paradigme scolaire, celui de l'inventaire des oeuvres, ce qui compte est Ã, non Q ; et le professeur est jugé sur les œuvres – les savoirs – dont il aura impulsé l'étude dans sa classe. (CHEVALLARD, 2009c, p. 27 – 28).

[x] Le mot de pédagogue a désigné d'abord – dans l'antiquité gréco-latine – l'esclave qui conduisait l'enfant à l'école et qui, peu à peu, vit s'étendre son champ d'action au point de se faire parfois le précepteur de son protégé. Généralisons : la fonction de Y a de tout temps été occupée par des aides à l'étude occasionnels, parfois réguliers, pour qui cela pouvait, à la longue, devenir un métier, dont on tire une rémunération. (CHEVALLARD, 2009a, p. 3).

[xi] Le développement de la pédagogie de régent conduit au XIXe siècle à ce que je nommerai une pédagogie de l'étude, expression où le mot d'étude désigne « le travail en étude ». L'historienne Françoise Mayeur (1933-2006) a donné jadis cette brève description de ce que y fait alors en classe. Tout en parcourant et en signant les cahiers de correspondance, il fait réciter les leçons. Puis un élève lit les leçons du lendemain. Le professeur distribue ensuite les copies corrigées des jours précédents. Arrive la correction des devoirs : c'est l'exercice principal, qui réclame le temps le plus long. Cette correction terminée, le professeur dicte un devoir à faire ; la dernière demi-heure est employée à traduire la page de latin ou de grec que les élèves ont dû préparer d'avance. (CHEVALLARD, 2009c, p. 2).

[xii] Dans tous les cas – pédagogie de régent, pédagogie de l'étude, pédagogie de professeur –, ce que y doit faire est en vérité limité, même si, par contraste avec le régent d'autrefois, le professeur, lauréat de l'agrégation ou titulaire de la licence, est réputé « savant » et se regarde comme tel. Au lieu d'aller chercher dans « le livre » (du maître) les réponses aux questions qu'il propose à X d'étudier, le professeur y est censé les tirer de son propre fonds : c'est elles qu'il expose dans son « cours ». (CHEVALLARD, 2009c, p. 3).

[xiii] Une bonne part de l'activité des élèves doit être consacrée à l'étude et à la recherche de la solution de « problèmes », depuis le simple exercice d'application proposé pour illustrer un théorème, pour rendre vivante une formule, jusqu'au « devoir », exigeant un effort plus personnel, rédigé hors de la classe et donnant lieu ensuite à un compte rendu précis et détaillé. (CHEVALLARD, 2009c, p. 5).

[xiv] Intègre des dispositifs propres à la pédagogie de régent – le manuel – et d'autres issus de la pédagogie de professeur – le cours – pour les corriger afin de ménager en chacun d'eux une place « active » à X. […] Le « métier » se complique : Y n'est plus un régent (sauf par moments), et il n'est vraiment un professeur que par intermittences, ce qui choque certains. On pourrait dire qu'il est devenu un « impulseur d'étude », qui doit avoir plusieurs cordes à son arc – un peu régent, un peu professeur, un peu aide à l'étude. (CHEVALLARD, 2009c, p. 7).

[xv] Que asigna a la Escuela la misión de proporcionar a los estudiantes las competencias necesarias para resolver los problemas de todo tipo: académicos, profesionales, personales y sociales. Dado que esta "pedagogía" no propone una organización detallada del proceso de estudio que permita desarrollar efectivamente dichas competencias, el problema de la génesis y justificación del modelo didáctico vuelve a quedar abierto, apareciendo, a lo sumo, formulado en términos asombrosamente simplistas. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 57).

[xvi] En efecto, dado que las AEI se sitúan en el nivel local (del "tema"), no constituye una herramienta eficaz para cuestionar aquellos aspectos de la epistemología escolar monumentalista que opera, al menos, a nivel de la disciplina y más allá. En particular, no permiten superar el "autismo temático" del profesor que es, en realidad, un "autismo temático" del sistema de enseñanza de las matemáticas (Chevallard, 2001). Esto es debido a que muchas veces las cuestiones que constituyen la razón de ser de una OM local se hallan no sólo más allá del nivel local, sino incluso más allá del nivel regional, sectorial y hasta disciplinar. Además, el paso de una AEI a otra AEI no puede estar *"motivado" funcionalmente* por la propia AEI. (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 81).

[xvii] Haciéndola aparecer como un medio y no como el Jin mismo del estudio. En Ia medida en que un programa de estudios esté definido o determinado por un conjunto de "contenidos" o saberes a enseñar y aprender, es difícil que las cuestiones Q que podrían motivar y justificar Ia reconstrucción de estos saberes puedan actuar como motor principal del proceso didáctico. Se acabará siempre imponiendo Ia lógica de una enseñanza secular más dedicada a hacer un inventario de los saberes que se deben estudiar ("monumentalismo") que a cuestionar el mundo e intentar aportar nuevas respuestas a los problemas planteados. GASCÓN, 2010, p. 82, grifo do autor).

[xviii] por el casi-postulado que, una vez terminada la escuela y la universidad, si uno no sabe de antemano la respuesta a una pregunta, entonces es mejor renunciar a toda pretensión de conseguir una respuesta sensata. Esto, por supuesto, se correlaciona con la propensión a esquivar preguntas nunca planteadas de la que hablábamos antes. (CHEVALLARD, 2013, p. 169-170).

[xix] The dialectical character of the questions and answers is related to the notions of study and research: to approach a question Q, one usually searches for available answers $A_i^{\diamond}$ and has to study them: that is, to deconstruct and reconstruct to adapt them to Q. This study generates new questions about the validity and limitations of $A_i^{\diamond}$, its adequacy to Q, the adaptations required, etc. The question-answer dialectic is the one that provides visible proof of the progress of the inquiry and contributes to what is called the chronogenesis of the process. (BOSCH, 2018b, p. 4040).
[xx] Any message from the media has to be confronted with the milieu to test its validity and to collect critical elements providing new information. In a sense, the answers supplied by the media have to be integrated in the milieu—turning into “sure” knowledge—and the elements of the milieu have to be worked out in order to make it send new messages—to become a media. The evolution of the milieu by the incorporation of new objects and partial answers constitutes the mesogenesis of the inquiry (the generation of the milieu). (BOSCH, 2018b, p. 4040 – 4041).
[xxi] Chronogenèse. Genèse du temps didactique c’est-à-dire du temps de la construction praxéologique. (CHEVALLARD, 2009d, p. 2)
Mésogenèse. Genèse du milieu didactique, c’est-à-dire du système des ressources utilisées dans le processus de construction praxéologique. (CHEVALLARD, 2009d, p. 3)
Topogenèse. Genèse des équipements praxéologiques (et des rapports institutionnels associés) selon les positions d’élève et de professeur au cours de la construction praxéologique. Le topos (le lieu, en grec ancien) de l’élève (respectivement du professeur) est cette partie de la position d’élève (resp. de professeur) qui a trait aux entités praxéologiques construites ou en cours de construction dans la classe. (CHEVALLARD, 2009d, p. 5).
[xxii] Esto nos introduce en una nueva organización matemática, M2, que es una ampliación de M1, caracterizada por problemas que se resuelven mediante una igualdad entre programas de cálculo, lo que conduce a un nuevo significado del signo = como indicador de una equivalencia condicionada y al desarrollo de técnicas ecuacionales como, por ejemplo, la de cancelación. (CID, 2015, p. 260).
[xxiii] - muestra la razón de ser de los números positivos y negativos,
- el punto de partida son los problemas aritméticos, lo que permite relacionar la estructura de sumandos y sustraendos con la estructura de las operaciones aritméticas ya conocida por los alumnos, y
- presenta un álgebra que no se reduce a una aritmética generalizada, lo que pone de manifiesto la ruptura epistemológica que supone el paso de la aritmética al álgebra. (CID, 2015. p. 260 – 261).
[xxiv] En este contexto, la expresión algebraica cumple la función de conservar una memoria de los datos y cálculos, mostrar la estructura del problema y construir programas de cálculo (Bolea, 2003). Es mas, desde el momento en que la expresión algebraica indica las operaciones a realizar entre los datos, hay que entenderla como un modelo algebraico de un programa de cálculo aritmético. Esto tiene como consecuencia que, mientras en aritmética la actividad matemática consiste en efectuar cálculos, en álgebra, los programas de cálculo se convierten en un objeto de estudio, y el medio para estudiarlos es el cálculo algebraico. (CID, 2015, p. 261).
[xxv] la pertinencia de una introducción de los números enteros por medio de modelos concretos por dos razones. La primera es que en la enseñanza de la aritmética elemental el proceso de modelización matemática se invierte: mientras en el ámbito científico lo habitual es que el objeto de estudio sea un cierto sistema o fenómeno del mundo sensible modelizado por medio de un sistema matemático, en el ámbito de la enseñanza el objeto de estudio es una noción aritmética que se modeliza por medio de un sistema físico o social con el que los alumnos se supone que están familiarizados. Además, el modelo funciona por analogía, es decir, permite obtener conocimiento sobre la noción matemática porque “se parece a ella” o “funciona como ella”. Pero, en realidad, la estructura algebraica que más se asemeja a un modelo de neutralización es la estructura de espacio vectorial unidimensional (o, más precisamente, la restricción a Z del espacio vectorial R^1), y la más cercana a un modelo de desplazamiento es el espacio afín unidimensional (o mejor, la restricción a Z de la recta real). En cambio, la estructura de anillo totalmente ordenado conmutativo y con unidad, propia de los números enteros, difícilmente podremos mostrarla por medio un modelo concreto, de ahí las dificultades didácticas que plantea su utilización. (CID, 2003, p. 12).
[xxvi] Les négatifs -ne sont donc pas d'abord motivés par l'étude de systèmes à variables prenant des valeurs entières positives et négatives, ainsi qu'on s'obstine à vouloir le faire croire en présentant de rares systèmes de ce type altitude, ascenseur, pertes et gains, etc. Ils naissent d'exigences internes au travail mathématique (exactement : algébrique). Sans doute leur introduction, qui étend le domaine du numérique, soulèvera-t-elle, historiquement, bien des interrogations, qui trouvent nécessairement un écho dans le curriculum du Collège. (CHEVALLARD, 1990, p.18).
[xxvii] El comportamiento del modelo concreto “se parece” al de los números enteros y, por eso, su conocimiento permite deducir las propiedades de dichos números. Para ello, se interpretan 10s objetos del

modelo concreto como y se postula que es necesario expresar la medida de esas cantidades de magnitud con un número natural precedido del signo “+” o del signo “-”, lo que justifica Ia consideración de número que se le adjudica a este nuevo objeto matemático. (CID, BOLEA, 2010, p. 576).

[xxviii] Signos ‘predicativos’ cuando indican la “positividad” o “negatividad” del número, ‘operativos binarios’ cuando representan las operaciones binarias de suma o resta, y ‘operativos unarios’ cuando indica la operación unaria que afecta al sentido –positivo o negativo– del número, manteniéndolo o transformándolo en el sentido opuesto. (CID, 2003, p. 5 – 6, grifos do autor).

[xxix] En resumen, la enseñanza escolar de la ciencia se plantea a partir de un paradigma inamovible (que es bastante transparente) y donde no sólo las respuestas sino también las preguntas, las técnicas permitidas para abordar dichas cuestiones y los elementos tecnológico-teóricos que permiten justificar e interpretar dichas técnicas están completamente predeterminados. (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2007, p. 531 – 532).

[xxx] Le principal déficit qu’engendre l’état de choses qui prévaut aujourd’hui au collège et au lycée concerne d’abord les organisations mathématiques effectivement mises en place dans les classes : ce déficit s’y fait sentir dans l’absence de motivation des types de tâches T étudiés. Très généralement, les tâches « motivantes » 3 manquent, et, à la limite, nul ne sait plus même où les chercher ! Or le travail de synthèse que l’on vient d’évoquer en suivant Bouligand fait que, très généralement, les types des tâches motivantes se trouvent dans les niveaux supérieurs de détermination des organisations mathématiques – secteurs et domaines. (CHEVALLARD, 2002a, p. 4).

[xxxi] la matemática escolar se caracteriza porque el discurso matemático que explica, justifica e interpreta las técnicas, sean estas algorítmicas o no, no está integrado en la práctica matemática de los alumnos con el objetivo de hacerla más eficaz. A lo sumo, pueden aparecer (en determinados niveles educativos) justificaciones más o menos formales de las técnicas matemáticas, pero las cuestiones relativas a la interpretación de los resultados obtenidos, a las limitaciones de las técnicas, al alcance o ámbito de aplicabilidad de las mismas, y a su fiabilidad y economía están prácticamente ausentes en la matemática escolar. (SIERRA DELGADO, BOSCH CASABÓ, 2013, p. 809).

[xxxii] Por tanto, preguntas sobre la “comparación” del grado de adecuación de dos o más modelos de un mismo sistema, ni sobre la necesidad de modificar progresivamente un modelo determinado para dar respuesta a las nuevas cuestiones problemáticas porque *el sistema se supone construido de una vez por todas* (no aparecen cuestiones “nuevas” no previstas de antemano), ni sobre la necesidad de elaborar modelos de los modelos (la recursividad de la modelización matemática es completamente ignorada en la práctica escolar). (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2007, p. 535, grifos do autor).

[xxxiii] según el papel que juegan en cada modelo concreto los signos predicativos y operativos. En los modelos de neutralización los objetos que se manejan son cantidades de magnitud que pueden tener el mismo sentido o sentidos opuestos. Cuando dos cantidades de magnitud son iguales en valor absoluto, pero de sentidos opuestos, se neutralizan entre sí. En este caso, los signos predicativos indican el sentido de la cantidad de magnitud y los signos operativos se relacionan con las acciones de añadir, quitar, reunir o separar. […] En un modelo de desplazamiento los números enteros indican desplazamientos o posiciones y los signos predicativos el sentido del desplazamiento o la situación de la posición a uno u otro lado de la posición origen. En cuanto a los signos operativos, pueden significar composición de desplazamientos o aplicación de un desplazamiento a una posición para obtener otra posición. (CID, 2002, p. 531).

[xxxiv] un alumno podría pensar que (+70) – (–10) = +70 porque «si tengo 70 pesetas y me perdonan una deuda de 10 pesetas sigo teniendo 70 pesetas». Naturalmente, el profesor utiliza otro razonamiento dentro de ese mismo modelo, pero hay que reconocer que el primero es perfectamente válido desde el punto de vista del «sentido común», que es a lo que se apela cuando se trabaja con modelos muy familiares a los niños. De la misma manera, podríamos deducir que (–6) – (–2) = +4, diciendo que «entre 6 grados bajo cero y 2 grados bajo cero hay 4 grados de diferencia y 4 es lo mismo que +4». (CID, 2002, p. 534).

[xxxv] modelos concretos no reflejan la estructura de cuerpo conmutativo totalmente ordenado que caracteriza a los números reales (o, más en particular, la de anillo totalmente ordenado conmutativo y con unidad de los números enteros), sino la de espacio vectorial unidimensional, en el caso de los modelos de neutralización, o la de espacio afín unidimensional, en el caso de los modelos de desplazamiento. (CID, BOLEA, 2010, p. 578).

[xxxvi] En Ia formulación de cualquier problema didáctico, el didacta siempre utiliza, aunque sólo sea implícitamente, una descripción y una interpretación —es decir, un modelo epistemológico— del ámbito matemático que está en juego. La TAD ha subrayado desde el principio la necesidad de *explicitar* dicho modelo y utilizarlo como *referencia* para analizar los hechos didáctico-matemáticos (Gascón, 1993, 1994, 1998, 1999a, 2001a). Actualmente se le llama *modelo epistemológico de referencia* (MER) y tiene un carácter *siempre provisional*. (GASCÓN, 2011, p. 208, grifos do autor).

[xxxvii] Toda organización o praxeologia didáctica (en adelante, OD) que vive en una institución determinada está sustentada y fuertemente condicionada por el *modelo epistemológico de las matemáticas* dominante en dicha institución. Esta hipótesis puede considerarse como una reformulación de la afirmación de Guy Brousseau según la cual los modelos docentes espontáneos son simplistas porque están sustentados por un modelo epistemológico ingenuo que se refleja en la "epistemología espontánea del profesor" (Brousseau, 1998). De ahí la necesidad, para la didáctica de las matemáticas, de elaborar un modelo epistemológico que le sirve de referencia tanto para el análisis de las "epistemologías espontáneas" presentes en las instituciones observadas como para la elaboración de nuevas propuestas de OD. (BOSCH, GASCÓN, 2010, p. 60, grifos do autor).
[xxxviii] En efecto, para tomar los procesos de transposición didáctica como objeto de estudio, el didacta necesita analizar de manera crítica los modelos epistemológicos de las matemáticas dominantes en las instituciones involucradas y liberarse así de la asunción acrítica de dichos modelos. (GASCÓN, 2014, p.100).
[xxxix] a emancipación epistemológica constituye un aspecto particular, un primer paso esencial, de la emancipación institucional que podría definirse, en general, como la liberación de la sujeción a la ideología dominante en las instituciones que forman parte de su objeto de estudio, esto es, la emancipación no sólo del provincianismo epistemológico, sino también de todo provincianismo didáctico, pedagógico y cultural. (GASCÓN, 2014, p. 100).
[xl] Ces problèmes, choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maitre se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaitre. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par Ia logique interne de Ia situation et qu'il peut Ia construire sans faire appel à des raisons didactiques. (BROUSSEAU, 1986, p. 49).
[xli] La razón de ser de los números negativos no puede encontrarse en un ámbito, como el aritmético, donde la permanente contextualización numérica y la fragmentación de la secuencia de operaciones a realizar hace innecesario todo simbolismo más allá de la representación de los números y de sus algoritmos de cálculo. (CID, 2015, p. 255).
[xlii] La constituyen problemas aritméticos aditivos, directos y parametrizados en los que un cardinal inicial sufre distintos aumentos o disminuciones que conducen a un cardinal final que es la solución pedida. La falta del dato inicial o de uno de los datos intermedios impide llevar a cabo el programa de cálculo aritmético necesario para obtener la solución. La exigencia de "dar una solución" al problema fuerza a la utilización de la letra y permite la aparición de expresiones algebraicas (la "fórmula" que soluciona el problema) aditivas donde la letra asume un papel de parámetro o variable. El conocimiento posterior del dato desconocido inicialmente abre la posibilidad de utilizar la fórmula para encontrar la solución, dando valores numéricos a las letras, lo que lleva a la simplificación de las expresiones algebraicas para permitir un uso más eficaz de las mismas. Por ´ultimo, las técnicas de simplificación dan carta de naturaleza al significado operativo binario generalizado de los signos + y − y a la suma de números enteros entendida como composición de traslaciones. (CID, 2015, p. 271).
[xliii] Esto respondería a la creencia de que el modelo, el representante, se tiene que parecer a lo representado, creencia que la enseñanza fomenta debido al uso analógico que hace de los modelos concretos, pero que hay que poner en entredicho. Generalmente, las ecuaciones matemáticas que modelizan un sistema del mundo sensible no se «parecen físicamente» al sistema que representan, pero eso no impide que su estudio permita obtener mucha información sobre dicho sistema. La principal función de un modelo no es la de «parecerse» al sistema que modeliza, sino la de aportar conocimiento sobre él y hacerlo de la manera más económica y eficaz posible. (CID, 2002, p. 537).
[xliv] el ´algebra escolar cuando aún no se dispone de las reglas de los signos, lo que dificulta, si es que no impide, el cálculo algebraico. Esto nos sitúa en el paso de la aritmética al ´algebra, es decir, en los comienzos del ´algebra escolar, y obliga a una introducción simultánea de los números negativos y del ´algebra en la que se presenten los distintos objetos algebraicos, pero se posponga el desarrollo y consolidación de las técnicas que les afectan hasta tanto no se establezcan las técnicas de cálculo con números positivos y negativos. (CID, 2015, p.256).
[xlv] « Pour obtenir une quantité négative isolée, il faudrait retirer une quantité effective de zéro, quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ? » et il conclut : « L'usage des nombres négatifs conduit à des conclusions erronées. » (CARNOT apud BERTE et al., 2008, p. 60, grifo do autor).
[xlvi] Al Khwarizmi (780-850) accepte les termes négatifs dans les équations mais il s 'en débarrasse au plus vite. Les nombres négatifs apparaissent en Occident par la résolution d'équations. Chuquet (1445-1500) est

le premier à isoler une quantité négative dans l'un des membres d'une équation. Cardan (1501-1576) est un des premiers à admettre l'existence de solutions négatives. En 1591, Viète (1540-1630) pose les bases du calcul littéral, mais les lettres ne représentent que des quantités positives et les solutions négatives des équations ne sont pas admises. (BERTE et al., 2008, p. 60).

[xlvii] Nous avons observé un élève incapable de faire une addition car il avait pour seule image mentale des relatifs un repère sur une graduation. Il allait chercher mentalement tour à tour le premier terme puis le deuxième terme de la somme sans pouvoir faire aucune opération avec ces repères inertes. Pour introduire l'addition, n'est-il pas préférable de travailler seulement avec des variations afin de privilégier les situations dans lesquelles les significations des deux nombres sont les mêmes ? Ainsi il n'y a pas de confusions possibles pour les élèves. (BERTE et al., 2008, p. 62).

[xlviii] Le signe + traduit une succession de déplacements ou un bilan. Pourquoi ces situations se traduisent-elles par une addition ? Pourquoi cette opération ? Pour effectuer cette addition, il faut faire parfois une addition arithmétique et parfois une soustraction arithmétique. Pourquoi parle-t-on dans les deux cas de l'addition des nombres relatifs ? (BERTE et al., 2008, p. 63).

[xlix] Dans une introduction plus conforme au cheminement historique, donc axée sur des problèmes de résolution d'équations, les négatifs vont apparaître seuls comme nouveaux nombres, au détriment d'une cohérence de notation dans l'ensemble des nombres. Dans tous les cas, il y aura des difficultés incontournables de notation et d'écriture, notamment signe opératoire et signe prédicatoire notés de la même façon avec passage de l'un à l'autre. (BERTE et al., 2008, p. 63).

[l] De prendre de la distance par rapport aux contextes concrets de façon à donner un statut de nombres aux négatifs. De veiller lors de l'introduction des négatifs à ne pas créer inutilement des obstacles didactiques qui se révèleraient lors de la mise en place des règles de l'addition et surtout de la multiplication. (BERTE et al., 2008).

[li] a) Pour donner aux négatifs un statut de nombre, nous introduisons très vite dans cet ensemble des opérations connues déjà avec les positifs. Nous donnons aux élèves les propriétés de ces opérations que l'on voudrait conserver dans un nouvel ensemble qui contiendra aussi les nombres positifs qu'ils connaissent.

b) En conséquence nous avons prévu une introduction des nombres négatifs par la résolution d'équations, de sorte que l'addition arrive en même temps, tout en restant dans un contexte interne aux mathématiques et en justifiant les résultats sur des exemples. Le lien entre des résultats que l'on aura justifiés et des situations concrètes de gain et de perte sera fait en fin de séquence.

c) Pour bien faire comprendre pourquoi on prolonge la structure de l'ensemble des nombres positifs et pour éviter une coupure entre les nombres positifs déjà connus et ces nouveaux nombres, les négatifs, le professeur n'introduit pas d'écriture du type (+3). Cette écriture est proposée par les élèves eux-mêmes pour le nombre 3 par opposition avec (–3). Les écritures (+3) et 3 sont ainsi présentées dès le départ comme deux écritures d'un même nombre. Le signe " + " garde le seul statut opératoire. Cela évite des exercices de « simplification d'écriture », qui font que les élèves ne savent plus reconnaître que (+2) + (+3) ..... c'est tout simplement 2 + 3 ! Certains manuels et professeurs expliquent aux élèves qu'une écriture comme (–2) + (+4) se remplace par –2 + 4, obtenue en enlevant les parenthèses et le signe opératoire " + ", ce qui apporte des confusions abyssales car il n'y a plus le signe opératoire de l'addition ! Limiter la difficulté à savoir manipuler les trois statuts du signe " – ", nous semble raisonnable. (BERTE et al., 2008, p. 64).

[lii] Lo que nos permite caracterizar esta situación como situación a-didáctica es el hecho de que los alumnos tienen un conocimiento antiguo, el cálculo aritmético, que les ofrece una estrategia de base para afrontar la situación, pero la presencia de las letras va a obligarles a modificar dichas estrategias, pasando en varias etapas de un cálculo entre números sin determinación a un cálculo entre números positivos y negativos. Por ejemplo, en el problema

> *Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?*

los alumnos no tienen dificultad en dar como respuestas a $-9+7$ o a -2, pero establecer la equivalencia entre estas dos respuestas exige asumir que "restar 9 y sumar 7 equivale a restar 2", lo que implica pasar de las sumas y restas entre números sin determinación a la composición de traslaciones. (CID, 2015, p. 269).