**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**LUDIÉR MARIANO ROSA**

# UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: DO ENSINO PRESENCIAL AO ENSINO REMOTO

**CAMPO GRANDE – MS**

**2022**

**LUDIÉR MARIANO ROSA**

# UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: DO ENSINO PRESENCIAL AO ENSINO REMOTO

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Dra. Marilena Bittar.

**CAMPO GRANDE – MS**

**2022**

**LUDIÉR MARIANO ROSA**

**UMA ENGENHARIA DIDÁTICA PARA OS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS: DO ENSINO PRESENCIAL AO ENSINO REMOTO**

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Dra. Marilena Bittar.

Campo Grande, 25 de fevereiro de 2022.

BANCA EXAMINADORA:

________________________________________

Profa. Dra. Marilena Bittar (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS.

________________________________________

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS.

________________________________________

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Universidade Federal do Pará – UFPA.

*Aos meus pais Joviniano e Domingas por sempre fazerem o possível para me proporcionar as melhores condições de estudo e acreditarem em meu potencial.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela sabedoria e força em todos os momentos da minha vida, especialmente durante a realização deste curso de Mestrado.

À minha família por todo amor e compreensão durante toda essa trajetória de pesquisa. Vocês fazem a diferença em minha vida! Pais (Joviniano e Domingas), irmão (Lucas) e meus queridos sobrinhos (Nathan e Luísa), que por muitas vezes precisavam fazer silêncio quando estavam em casa sem entender nada, pois “o titio estava estudando!”

Agradeço minha orientadora, Profa. Dra. Marilena Bittar, que sempre esteve presente durante este trabalho, principalmente nos momentos difíceis em que as condições não eram as melhores. Obrigado, professora!

Agradeço também a Professora Susilene Garcia da Silva Oliveira e a Professora Adriana Wagner por acreditarem em mim e terem me dado a oportunidade de transitar em diferentes espaços formativos, em áreas distintas da Matemática durante a graduação. Foram as situações vivenciadas nesses espaços proporcionados por vocês que me despertaram à pesquisa.

Às minhas amigas Camila, Carla, Gabi, Ligiane e Luiza que sempre me ouviam falar, falar e falar do Mestrado, e me apoiavam em todos os momentos. E que momentos, não é mesmo, Camila!?

Agradeço aos amigos que fiz durante este curso, Diogo, Jocelei e Lúcia (Grupo Supera). Obrigado por me ouvirem desabafando, pelas nossas reuniões e por todos os momentos divertidos que passamos juntos; mesmo longe, parecíamos estar tão perto.

Não poderia deixar de agradecer ao Grupo DDMat, pelas reuniões e por todas as contribuições! Em especial Rosane, Camila, Tatiani, Liana, Katy, Kleber e Renan; talvez vocês não saibam, mas contribuíram demais para este trabalho!

Aos meus colegas de turma, que a grande maioria ainda não conheço pessoalmente, mas sempre nos apoiávamos nas disciplinas, eventos, apresentações e em todos os outros momentos possíveis; uma turma que realizou todo o curso de Mestrado de forma remota. Obrigado, pessoal!

À banca examinadora, composta pelo Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas e pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, pela leitura atenta, pelas sugestões e contribuições que permitiram o avanço desta pesquisa.

À CAPES pelo apoio financeiro durante esses dois anos, em que tive a oportunidade de me dedicar exclusivamente ao curso de Mestrado.

*“[...] É uma maratona ou uma montanha que*

*você escalou sem pensar no tamanho.”*

Lorde

# RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi compreender como pode/deve ser a estruturação do meio de uma engenharia didática aplicada no ensino remoto. Elaboramos e aplicamos uma sequência de atividades, alternativa ao modelo dominante, para apresentar os conceitos iniciais dos números inteiros relativos em uma turma de 7º ano de uma escola da rede pública estadual de ensino, no município de Aquidauana/MS. A sequência didática em questão foi elaborada à luz dos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas, com destaque para o papel de mediador desenvolvido pelo professor, sobretudo em situações adidáticas, para ser aplicada em sala de aula com os alunos. Durante o desenvolvimento da pesquisa, esta sequência precisou sofrer várias mudanças para que a proposta inicial fosse mantida, bem como, para que os alunos tivessem condições de realizá-la, uma vez que devido à pandemia, foi aplicada totalmente de forma remota, sem qualquer contato presencial com os alunos. A sequência didática foi elaborada, aplicada e analisada à luz dos pressupostos da engenharia didática e foi mobilizado o conceito de Níveis de Co-determinação Didática para compreender fatores externos que influenciaram as relações que os alunos estabeleceram com as atividades e com o pesquisador devido ao contexto que eles estavam inseridos e à pandemia. Como resultados, observamos a necessidade de olhar para além da sala de aula, uma vez que, diante do cenário vivenciado, elementos de instituições que estão em relação com o ambiente escolar afetam diretamente o processo de aprendizagem do aluno. Além disso, foi possível colocar em evidência a necessidade de reflexões sobre o papel de mediador desempenhado pelo professor na aplicação de uma sequência de atividades, desenvolvida no modelo de ensino remoto.



**Palavras-chave:** estruturação do meio; professor mediador; níveis de co-determinação didática; interação em ambientes remotos.

## ABSTRACT

The aim of this research was to understand how the structuring of the medium of a didactical engineering applied in remote teaching can/should be. We elaborated and applied a sequence of activities, an alternative to the dominant model, to present the initial concepts of relative integer numbers in a 7th grade class of a state public school system in the city of Aquidauana/MS. The didactic sequence in question was elaborated in the light of the assumptions of Theory of Didactical Situations, with emphasis on the role of mediator developed by the teacher, especially in adidactical situations, to be applied in the classroom with students. During the development of the research, this sequence had to undergo several changes so that the initial proposal was maintained, as well as for that the students were able to carry it out, since due to the pandemic, it was applied completely remotely, without any face-to-face contact with students. The didactic sequence was elaborated, applied and analyzed in the light of didactical engineering assumptions and the concept of levels of didactic codeterminacy was mobilized to understand external factors that influenced the relationships that students established with the activities and with the researcher due to the context in which they were inserted and the pandemic. As a result, we observed the need to look beyond the classroom, since given the experienced scenario, elements of institutions that are related to the school environment directly affect the student's learning process. In addition, it was possible to highlight the need for reflections on the role of mediator played by the teacher in the application of a sequence of activities, developed in the remote teaching model.



**Keywords:** structuring of the medium; teacher mediator; levels of didactic codeterminacy; interaction in remote environments.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE TABELAS

**SUMÁRIO**

**INTRODUÇÃO**

Ao ingressar no curso de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), campus de Aquidauana, tive a oportunidade de entrar em contato com o ambiente escolar, como futuro professor, ainda muito cedo, oportunidade essa que me foi concedida pelo Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). As experiências vivenciadas nesse programa, aliadas ao início de minha caminhada foram determinantes para reflexões posteriores. Estes momentos se intensificaram conforme me dedicava às atividades do curso, durante o qual também pude participar de outros projetos.

Como participante do PIBID comecei a olhar as situações que aconteciam dentro da sala de aula de uma maneira diferente, pois além de estar na condição de aluno de graduação participante do programa, os alunos da sala em que desenvolvia as atividades já me consideravam como professor. Difícil transitar nesses dois contextos, porém foram eles que me proporcionaram observar algumas das primeiras situações que me incentivaram à pesquisa. Uma delas foi referente à metodologia utilizada pela professora e como, a partir desta, os alunos aprendiam o conteúdo ou não; outra situação foi a percepção de como algumas dificuldades em conteúdos considerados pré-requisitos, apresentadas pelos alunos, influenciavam diretamente na aprendizagem de conteúdos posteriores.

As atividades desse primeiro Programa que tive contato eram desenvolvidas em uma escola da rede pública de ensino que ofertava somente os ensinos fundamental I e II, e o grupo de pibidianos do qual eu fazia parte atuava somente no segundo caso, o fundamental II. No desenvolvimento de algumas atividades como acompanhamento diário das aulas de matemática, reforços no contraturno, oficinas mensais, comecei a observar como os alunos da turma de 7º ano apresentavam dificuldades com relação ao conjunto dos números inteiros relativos, porém não me chamou muita atenção por acreditar que estas seriam comuns, pelo fato de ser um conteúdo novo que acabara de ser apresentado aos mesmos.

Além de participar do PIBID, simultaneamente e posteriormente a ele, também tive a oportunidade de ter contato com alunos em outros espaços formativos: Projeto de Ensino de Graduação (Matemática Básica: Reconstruindo os Alicerces), Estágios Obrigatórios (presentes na grade curricular do curso) e uma importante participação no Programa Residência Pedagógica (PRP). Esses diferentes espaços formativos me oportunizaram entrar em contato com alunos de outros níveis de ensino, por exemplo, no projeto de Matemática Básica, ministrava aulas de matemática para calouros ou não de cursos de graduação do meu campus, e os estágios obrigatórios e a Residência Pedagógica me possibilitaram contato com alunos do ensino médio. Desenvolvendo as atividades nesses outros ambientes de aprendizagem pude começar a constatar algumas dificuldades em relação à matemática. Novamente um objeto matemático se sobressaiu e chamou a minha atenção, por já ter presenciado dificuldades por parte dos alunos do ensino fundamental, que agora apareceram também em alunos do ensino médio e da graduação: tratava-se do conjunto dos números inteiros relativos. A compreensão deste conjunto, suas propriedades e as operações que o envolvem foram cenários de muita dificuldade dos alunos nestes ambientes pelos quais percorri.

Geralmente este conjunto é apresentado formalmente aos alunos, pela primeira vez, no 7º ano do Ensino Fundamental e muitos deles já têm contato com esses números em situações informais do cotidiano, concordando com Souza, Alvarenga e Silveira (2014),

> No cotidiano de muitas pessoas, os números inteiros estão presentes, como por exemplo, ao usar a ordem bancária com crédito ou débito, quando se assiste na televisão as notícias de baixas temperaturas em determinadas regiões, no saldo de gols dos times de futebol em um campeonato, para situar fusos horários de países, entre outras inúmeras situações (SOUZA; ALVARENGA; SILVEIRA, 2014, p. 1).

Entretanto é possível afirmar que estes números ocasionam certa "estranheza" quando apresentados. De acordo com os autores ainda que presentes, é válido lembrar que muitos alunos podem não estar inseridos em tais contextos ou estar inseridos, mas não compreender a ligação do conhecimento cotidiano com o conhecimento escolar. E ainda "do ponto de vista didático, existem muitas dificuldades, por parte dos estudantes, para aceitar o funcionamento de tais números" (D'AMORE, 2005, p. 107).

Sabemos que o ensino do conjunto em questão não é tarefa fácil para o professor. No contexto escolar, quando apresentado aos alunos, eles estão acostumados apenas com os números naturais e alguns racionais positivos, e fazer essa transição para outro contexto, no qual há regras e características diferentes das vistas anteriormente, acaba gerando dificuldades de aprendizagem que podem comprometer o desempenho dos alunos em outros conteúdos.

Ao mesmo tempo em que eu desenvolvia essas atividades no ambiente escolar e fui percebendo tais dificuldades, também iniciei alguns estudos orientados sobre a didática da matemática, lendo e discutindo algumas das teorias de origem francesa, comumente conhecida como didática da matemática francesa e indicada neste texto por DDM. Comecei a me interessar muito por esses estudos, uma vez que eu conseguia identificar elementos dessas teorias na prática em sala de aula e, dessa maneira, quis continuar meus estudos nessa área.

Diante das dificuldades vivenciadas nos diferentes espaços formativos e dos estudos iniciais em DDM, ainda na graduação, surge o primeiro interesse de pesquisar uma proposta de ensino alternativa para os números inteiros relativos que causasse menos dificuldades quando apresentada aos alunos de uma turma de 7º ano. Ao finalizar a minha graduação em 2019, decidi seguir os estudos e ingressar na pós-graduação, prestando o processo seletivo de ingresso no curso de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da UFMS. Para este ingresso era necessário apresentar um projeto de pesquisa, o qual produzi com base nas minhas inquietações experienciadas na graduação.

A ideia inicial do projeto, aprovada no processo seletivo e mantida em sua essência após reflexões com minha orientadora, era pensar uma proposta didática alternativa para apresentar o conjunto dos números inteiros relativos aos alunos. Esta proposta seria apoiada nos pressupostos teóricos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1986) e a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) seria a metodologia que permitiria seu desenvolvimento. Após ajustes nesta proposta inicial, foi definida como questão norteadora para pesquisa: **Qual proposta didática pode ser feita para o ensino dos números inteiros relativos, levando em consideração dificuldades de aprendizagem dos alunos presentes em pesquisas já realizadas?** Com esta questão tínhamos por objetivo geral: Compreender dificuldades de aprendizagem dos alunos sobre os inteiros relativos, por meio da aplicação de uma sequência didática que levasse em consideração pesquisas sobre dificuldades com este objeto matemático. Elencamos três objetivos específicos como auxílio para alcançar nosso objetivo geral:

- Identificar principais dificuldades que os alunos apresentam na compreensão dos números inteiros relativos, sobretudo quando este conjunto é apresentado.
- Investigar situações relativas aos números inteiros que favoreçam a aprendizagem deste conjunto numérico.
- Compreender relações estabelecidas entre aluno e saber sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas.

Para as reflexões sobre a elaboração dessas atividades da sequência didática incorporaríamos estudos realizados por Gonçalves (2016) sobre o ensino e aprendizagem deste conjunto. Este autor é membro do Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat), do qual também passei a fazer parte com o ingresso no mestrado, e em sua dissertação realizou uma investigação sobre os distanciamentos e aproximações dos números inteiros relativos e suas propostas de ensino para as operações de adição e subtração. Em seu trabalho, ele dedica um capítulo à um estudo detalhado sobre os aspectos epistemológicos e históricos sobre este conjunto numérico; além de continuar seus estudos sobre os números inteiros relativos em seu curso de doutorado.

Porém, no decorrer da presente pesquisa esses objetivos foram se alterando, como é natural de seu desenvolvimento. A investigação que descrevo neste relatório começou em março de 2020, exatamente quando a pandemia do coronavírus estava se alastrando pelo mundo todo e quando foram registrados os primeiros casos positivos em nosso Estado. Algum tempo depois, as aulas da educação básica passaram a ser desenvolvidas à distância, no modelo remoto e, em alguns momentos, foram até mesmo suspensas. As aulas do PPGEduMat passaram a ser realizadas também remotamente. Inicialmente, não sabíamos que a pandemia tomaria as proporções catastróficas que hoje conhecemos; imaginávamos – ou desejávamos – que logo a situação seria resolvida e seguimos trabalhando em nossa pesquisa, realizando os estudos e desenvolvendo as etapas iniciais da engenharia didática a ser executada, contando que logo poderíamos voltar ao "normal" e que a experimentação ocorreria como planejado, presencialmente, afinal ela estava planejada para ser realizada no primeiro semestre de 2021, ou seja, um ano após o início da pandemia! Infelizmente, o que ocorreu não foi o que se imaginava. A pandemia persistiu em nosso país e, consequentemente, o contexto do ensino remoto permaneceu. Dessa forma, nossa pesquisa precisou sofrer algumas mudanças para se adequar a essa nova realidade. Era fundamental enfrentar o *problema* e tentar compreender como trabalhar neste novo contexto, uma vez que os elementos teóricos, tanto da TSD como da ED, foram elaborados para ambientes presenciais e, em ambientes remotos a elaboração das atividades, as análises, bem como as interações durante a experimentação adquirem uma complexidade maior e, muitas vezes, imprevisíveis. Assim, redefinimos a seguinte questão norteadora para a pesquisa: Como estruturar o meio para que seja possível desenvolver uma engenharia didática na modalidade do ensino remoto? Para responder a esta questão de pesquisa, definimos como objetivo geral: **Compreender a estruturação do meio no desenvolvimento de uma engenharia didática realizada na modalidade do ensino remoto**. E para alcançar nosso objetivo geral, elencamos três objetivos específicos:

- Identificar fatores externos à *sala de aula* que influenciam na difusão dos saberes durante a pandemia;
- Analisar as mudanças necessárias para realização de uma engenharia didática elaborada para o ensino presencial, mas realizada no ensino remoto;

- Identificar elementos presentes na sequência de atividades e em sua maneira de aplicação que contribuíram ou prejudicaram a realização dessa proposta.

Durante todo o desenvolvimento desta pesquisa foi preciso fazer diversas modificações, principalmente na sequência de atividades que foi aplicada aos alunos, uma vez que ela foi, inicialmente, elaborada para ser aplicada em sala de aula com a mediação presencial do professor, que tem papel fundamental conforme previsto na TSD. Como estar junto com o estudante, mediando a situação sem estar presencialmente com ele? Esse passou a ser nosso maior desafio. Acreditávamos que era possível, e necessário, como discutiremos neste relatório, e decidimos apostar que seria possível mediar mesmo sem estar presente fisicamente. É o que tentaremos mostrar nessa pesquisa cujo relatório está descrito em cinco capítulos de forma cronológica, isto é, descrevemos os acontecimentos no tempo em que eles foram acontecendo. Fazemos essa escolha uma vez que até certo ponto estávamos desenvolvendo uma sequência de atividades para um contexto e, de repente, precisou ser alterada para um novo contexto totalmente diferente, em que foi necessária a realização de diversas mudanças, bem como a utilização de uma nova ferramenta teórica como suporte para análise dos dados produzidos. Acreditamos que desta forma, as mudanças realizadas e a nova ferramenta teórica de análise ganham evidência, o que nos interessa, uma vez que são alguns dos principais focos deste trabalho.

No primeiro capítulo apresentamos uma breve abordagem sobre os números inteiros relativos, destacando alguns trabalhos que trouxeram uma proposta de ensino para esse conjunto numérico, encontrados em um levantamento realizado em duas plataformas digitais. Além disso, apresentamos os elementos que estão presentes em nossa proposta.

O segundo capítulo é dedicado aos dois referenciais teóricos iniciais utilizados, em que discutimos sobre a Teoria das Situações Didáticas, dedicando uma seção para falar especialmente sobre as situações adidáticas e o importante papel de mediador que o professor desempenha nesta teoria. Abordamos também os principais elementos da Engenharia Didática e suas quatro fases.

No terceiro capítulo encontra-se a análise *a priori* da sequência didática inicial, que foi elaborada em dez sessões, em que são apresentadas todas as atividades, seus objetivos e as possíveis estratégias que poderiam ser mobilizadas pelos alunos. Em seguida fazemos algumas considerações sobre esta sequência.

No quarto capítulo discorremos sobre as principais mudanças realizadas em nossa pesquisa devido a continuidade da pandemia e a consequente necessidade de realizar a experimentação no modo remoto. Abordamos também questões levantadas em reunião com a escola na qual a pesquisa foi aplicada e que foram importantes para a reorganização da sequência de atividades. Além disso, apresentamos e justificamos o uso de mais uma ferramenta teórica, os Níveis de Co-determinação Didática Superiores (CHEVALLARD, 2002), que pareceu fundamental para compreender nosso problema de pesquisa, principalmente com o advento da pandemia.

No quinto capítulo é apresentada a produção de dados e análise a posteriori, em que abordamos a maneira como a sequência foi aplicada, as datas de realização das atividades com os alunos, bem como a análise do desenvolvimento das sessões realizadas.

Após esses cinco capítulos, tecemos algumas considerações finais feitas seguidas das referências e anexos.

# 1 SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS

Neste primeiro capítulo temos por objetivo apresentar um breve histórico sobre as principais dificuldades relacionadas ao conjunto dos números inteiros. Damos uma maior atenção para os trabalhos desenvolvidos sobre essa temática, no intuito de verificar as principais dificuldades que ainda persistem do ponto de vista da construção desse conceito pelo estudante, além de identificar como estão sendo realizadas as propostas de ensino deste conteúdo. Após exposição do levantamento de trabalhos realizados e análises, abordamos as características que estão presentes em nossa proposta, explicando em que consiste cada uma delas na tentativa de justificar nossas escolhas.

## 1.1 Os Números Inteiros Relativos: Um Olhar Para Algumas Pesquisas

O processo de aprendizagem dos números inteiros relativos pode apresentar diversos problemas como apresentaremos brevemente nesta sessão.

Relatos sobre dificuldades de aprendizagem do conjunto dos números inteiros podem ser encontrados desde antes de a educação matemática existir como área. Um exemplo disso é a obra de Jean Piaget (1949), em que ele dedica em torno de 6 páginas para tecer comentários sobre dificuldades desencadeadas pelos números inteiros relativos (*apud* GLAESER, 1985). Embora grande parte das dificuldades com esses números sejam apresentadas no primeiro contato de alunos com conceitos referentes a este conjunto numérico, é possível identificar em Nascimento (2004) que alunos do ensino médio também apresentaram dificuldades nas operações com esses números, o que significa que, algumas delas podem se estender e persistir em níveis posteriores de ensino aos de sua introdução.

A presença de dificuldades durante este processo, no entanto, não deveria causar estranheza, uma vez que os próprios Matemáticos no desenvolvimento, formalização e aceitação deste conjunto também enfrentaram algumas delas. De acordo com Glaeser (1985) a introdução dos conceitos referentes aos números inteiros relativos foi um processo muito lento, durando mais de 1500 anos; durante esse tempo os Matemáticos que trabalharam com este conjunto apresentavam uma compreensão parcial e com diversas lacunas. Um dos possíveis fatores para a demora da aceitação dos números inteiros negativos deve-se ao fato de muitos matemáticos gregos acreditarem que para "números" serem considerados objetos matemáticos "deveriam ser inteiros positivos, pois para eles esses números tinham relação direta na representação das grandezas geométricas, como por exemplo, segmentos de retas, áreas e volumes." (FERREIRA, 2018, p. 19). O conjunto dos números naturais surgiu de necessidades cotidianas da antiguidade, como a contagem e a enumeração e, quando apresentados aos alunos esses números não geram tantos problemas de compreensão como é o caso dos números inteiros relativos, visto que sua necessidade de existência não ocorreu por mesma via dos naturais. Diante das dificuldades apresentadas pelos Matemáticos da antiguidade que trabalharam com este conjunto numérico, Glaeser analisa algumas de suas obras e elenca seis obstáculos enfrentados por eles durante o processo de criação deste conjunto:

> 1 Inaptidão para manipular quantidades isoladas; 2 Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; 3 Dificuldade em unificar a reta numérica; 4 A ambiguidade de dois zeros; 5 Estagnação no estágio das operações concretas; 6 Desejo de um modelo unificador. (GLAESER, 1985, p.7).

É possível observar que grande parte dos obstáculos acima elencados estão relacionados à compreensão dos elementos pertencentes aos números inteiros, especialmente os inteiros negativos e às suas formas de representação. Glaeser apresenta um quadro esquemático sobre 10 autores matemáticos que trabalharam com este conjunto numérico e que enfrentaram os obstáculos citados, indicando quais dos obstáculos eles conseguiram transpor ou não. Alguns superavam apenas dois ou três desses obstáculos, outros apenas um, mas foi necessário que todos esses obstáculos fossem superados para que o conjunto dos números inteiros relativos fosse bem definido.

Ainda neste estudo de Georges Glaeser é possível observar, além das dificuldades enfrentadas pelos matemáticos, as mais diferentes formas que eles utilizavam na tentativa de explicitar ou justificar o funcionamento de tais números, ou sua não compreensão. Por exemplo, alguns matemáticos quando trabalharam com equações, para não considerar as raízes negativas como um resultado, as ignoravam totalmente e consideravam apenas as raízes positivas. Percebemos então a resistência que houve para a aceitação desses números.

O longo processo de criação e aceitação deste conjunto numérico é bastante retratado em diversos trabalhos, em que muitos deles foram motivados a ser desenvolvidos com o intuito de apresentar diferentes propostas para o seu ensino. Um destes trabalhos é o de Cid (2003), um estudo relacionado às investigações sobre os números negativos. Neste, a autora se propõe a identificar trabalhos que versaram sobre propostas de ensino; dificuldades de aprendizagem e erros dos alunos; e implicações didáticas da epistemologia do número negativo. Destacamos a parte que trata das propostas de ensino, uma vez que é diretamente relacionada à nossa pesquisa e, além disso, dentre as três separações feitas por ela, nesta foi encontrado um maior número de trabalhos. Ela afirma ser um levantamento com cerca de 200 obras entre artigos e capítulos de livros que discutem essa temática, que estão nas línguas inglesa, francesa ou espanhola e que foram realizados após 1950. Por estar limitado a tais línguas, tornou-se fundamental analisar trabalhos sobre essa temática desenvolvidos em território nacional, visto que, as especificidades da educação em nosso país seriam outras, ainda que os estudantes compartilhassem das mesmas dificuldades.

Assim, quando decidimos pensar em uma proposta de ensino para introduzir conceitos referentes aos números inteiros relativos, fizemos um breve levantamento de trabalhos brasileiros que apresentaram uma proposta de ensino deste conjunto aos alunos, no intuito de verificar potencialidades ou insucessos, os recursos que foram mais utilizados, além disso, principais dificuldades apresentadas pelos alunos. Abordaremos as escolhas deste procedimento e o seu desenvolvimento na seção a seguir.

### 1.1.1 Levantamento De Trabalhos Sobre Propostas De Ensino Dos Números Inteiros Relativos

Para realizar o levantamento de trabalhos brasileiros envolvendo o objeto matemático conjunto dos números inteiros relativos, utilizamos dois portais que listam informações sobre pesquisas já desenvolvidas: Catálogo de Dissertações e Teses da Capes; e Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Nestes portais é possível localizar pesquisas sobre os mais diversos temas a partir de descritores – palavras-chave – que ao serem inseridas em um *searcher* resultam em uma lista de trabalhos que as contêm. Essas plataformas fornecem desde informações básicas como, título do trabalho, autor, curso (mestrado/doutorado), local (universidade), até informações mais avançadas como resumo da pesquisa, orientador, data da defesa e em alguns casos é fornecido também o arquivo em pdf do trabalho completo.

Foram definidos três descritores para busca, "números inteiros", "inteiros relativos" e "números negativos", inseridos dessa forma com aspas no *searcher*, pois se inseridos sem elas, apareceriam trabalhos com as duas palavras de forma isolada e não com a locução gramatical; estes descritores foram pesquisados nessa ordem em que aparecem no texto.

Ao pesquisar o primeiro descritor uma lista de trabalhos era apresentada; nosso critério de seleção consistiu em analisar o resumo de cada trabalho identificado. Após a leitura de cada resumo, selecionávamos aqueles trabalhos que foram motivados a serem realizados por dificuldades que os alunos encontravam frente a esse conjunto, ou aqueles que tinham por objetivo apresentar uma estratégia alternativa para o ensino dos números inteiros relativos. Este mesmo processo foi repetido para o segundo e o terceiro descritor, e quando aparecia um trabalho já identificado no descritor anterior, ele era descartado. Da mesma forma, quando realizamos este processo no outro portal, descartávamos os trabalhos já identificados no primeiro. Iniciamos o levantamento no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, depois passamos para a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

Destacamos que alguns trabalhos listados sob os descritores escolhidos apresentavam apenas informações básicas, não fornecendo o resumo do trabalho, dessa forma, nesses trabalhos pesquisávamos o repositório de cada instituição para tentar localizar o trabalho e ter acesso ao resumo para leitura.

### 1.1.2 Resultados Obtidos no Catálogo De Teses e Dissertações da Capes

Iniciamos a pesquisa com o primeiro descritor, "números inteiros" resultando em 240 trabalhos. Não aplicamos nenhum filtro limitador disponível no portal, como ano, tipo de trabalho ou instituição. Foi realizada a leitura do resumo de cada trabalho e de acordo com nosso critério de seleção, apenas 73 trabalhos nos interessaram, 167 foram descartados.

Passamos para o segundo descritor, "inteiros relativos", que resultou em 09 trabalhos; 08 deles já haviam sido identificados sob descritor anterior, 01 trabalho diferente atendeu nosso critério e foi selecionado. No terceiro descritor, "números negativos", foram identificados 43 trabalhos; desses, selecionamos 08 de nosso interesse, 10 eram repetidos sob descritores anteriores e 25 foram descartados. Concentramos essas informações obtidas em duas tabelas, uma delas destacando a quantidade de trabalhos e os anos de defesa; a outra separando os tipos de trabalhos selecionados em dissertações ou teses.

**Tabela 1** - Trabalhos selecionados no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes

| **Catálogo de Dissertações e Teses da Capes** | | |
|---|---|---|
| **Descritor** | **Ano de defesa** | **Quantidade de trabalhos encontrados** |
| | 1990 | 1 |
| | 1992 | 1 |
| | 1994 | 2 |
| | 1999 | 1 |
| | 2002 | 2 |
| | 2003 | 3 |
| | 2004 | 2 |
| | 2005 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| Números inteiros | 2007 | 1 |
| | 2008 | 3 |
| | 2009 | 5 |
| | 2010 | 6 |
| | 2011 | 2 |
| | 2012 | 5 |
| | 2013 | 8 |
| | 2014 | 2 |
| | 2015 | 3 |
| | 2016 | 10 |
| | 2017 | 6 |
| | 2018 | 4 |
| | 2019 | 5 |
| | Subtotal | 73 |
| | | |
| Inteiros relativos | 2004 | 1 |
| | Subtotal | 1 |
| | | |
| Números negativos | 2003 | 1 |
| | 2013 | 4 |
| | 2014 | 1 |
| | 2015 | 1 |
| | 2018 | 1 |
| | Subtotal | 8 |
| **TOTAL** | | 82 |

Fonte: (AUTOR)

**Tabela 2** - Total de dissertações e teses encontradas (CAPES)

| | **Dissertações** | **Teses** |
|---|---|---|
| | 77[1] | 5 |
| **Total** | 82 | |

Fonte: (AUTOR)

### 1.1.3 Resultados Obtidos na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)

Finalizado o levantamento no primeiro portal, repetimos o mesmo processo com os mesmos descritores na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), agora descartando os trabalhos já selecionados anteriormente. O primeiro descritor, “números inteiros”, apresentou 200 trabalhos, novamente optamos por não aplicar nenhum filtro limitador. Desses trabalhos, de acordo com nosso critério, selecionamos 09 trabalhos, 35 já haviam sido identificados e os outros foram descartados (156).

[1] Das 77 dissertações encontradas, 49 são produtos de mestrados profissionalizantes e 28 de mestrados acadêmicos.

Passando para o segundo descritor “inteiros relativos”, a plataforma apresentou apenas 04 trabalhos, todos eles já selecionados anteriormente. Finalizando o processo de busca com “números negativos”, apareceram 28 trabalhos, dos quais 03 nos interessavam, 10 já haviam sido identificados e 15 foram descartados. Apresentamos esses resultados em tabelas como feito na seção anterior.

**Tabela 3** - Trabalhos selecionados na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD)

| **Catálogo de Dissertações e Teses da Capes** | | |
|---|---|---|
| **Descritor** | **Ano** | **Quantidade de pesquisas encontradas** |
| Números Inteiros | 2002 | 1 |
| | 2005 | 2 |
| | 2006 | 3 |
| | 2007 | 1 |
| | 2014 | 1 |
| | 2018 | 1 |
| | Subtotal | 09 |
| | | |
| Inteiros relativos | - | - |
| | | |
| Números negativos | 2005 | 1 |
| | 2008 | 1 |
| | 2018 | 1 |
| | Subtotal | 03 |
| TOTAL | | 12 |

Fonte: (AUTOR)

**Tabela 4** - Total de dissertações e teses encontradas (BDTD)

| | **Dissertações** | **Teses** |
|---|---|---|
| | 11[2] | 1 |
| **Total** | 12 | |

Fonte: (AUTOR)

## 1.2 Considerações Sobre o Levantamento das Pesquisas

Após levantamento realizado nessas duas plataformas, encontramos o total de 94 trabalhos que abordam os números inteiros de diferentes formas. Na leitura de cada resumo observamos a presença recorrente de algumas palavras, como: “operações”, “multiplicação”, “divisão”, “fixação das operações”, “jogos e operações”, indicando que grande parte dos trabalhos com o objetivo de ensino deste conjunto, procuraram abordar propostas para o ensino

[2] Das 11 dissertações encontradas, 01 é produto de mestrado profissionalizante e 10 são de mestrados acadêmicos.

das operações que os envolvem, na maioria das vezes, utilizando materiais concretos, jogos, recursos tecnológicos, ou até mesmo problemas com situações do cotidiano como auxílio para o ensino. Além dessa preocupação com as operações, percebemos um grande enfoque nas chamadas “regras de sinais”.

Embora grande parte das dificuldades relacionadas a esse objeto matemático se concentrem em suas operações, acreditamos que a maneira como seus conceitos iniciais são apresentados aos alunos pode contribuir para o surgimento de dificuldades posteriores. Retomamos o fato de as principais dificuldades apresentadas pelos Matemáticos da antiguidade, envolvidos na elaboração deste conjunto, explicitadas anteriormente se concentrarem especialmente na compreensão e formas de representação deste conjunto, gerando então os obstáculos que contribuíram para o longo tempo de entendimento deste conjunto.

Se olharmos para o número de trabalhos listados quando pesquisávamos um descritor e o número dos selecionados, conseguimos observar um número expressivo daqueles que foram descartados por não irem ao encontro do nosso critério de seleção. Isso ocorreu pelo fato de muitos serem referentes a áreas como ciência da computação, informática, engenharia elétrica entre outras, que utilizavam esses números aplicados a códigos e outras situações de matemática pura ou aplicada, não trabalhando dificuldades apresentadas por alunos, nem mesmo uma maneira alternativa para o ensino deste conjunto.

Para auxiliar na elaboração de nossa proposta de intervenção, selecionamos 10 desses trabalhos listados para realizar a leitura completa, que mais se aproximaram do nosso objetivo ou que poderiam nos ajudar quanto às características epistemológicas desse conjunto. Essa escolha também foi feita analisando apenas o resumo de cada trabalho. Listamos os 10 selecionados na tabela abaixo, em seguida fazemos um breve comentário sobre o que foi desenvolvido em cada um deles.

**Quadro 1** - Listagem dos 10 trabalhos selecionados para leitura completa

| | **Título** | **Autor** | **Ano** | **Tipo** |
|---|---|---|---|---|
| 01 | A Sequência Fedathi como proposta de mediação do professor no ensino dos números inteiros | Raimundo Nélio Rodrigues Ferreira | 2018 | Dissertação de Mestrado Profissional |
| 02 | (Pré-) álgebra: introduzindo os números inteiros negativos | João Carlos Passoni | 2002 | Dissertação de Mestrado Acadêmico |
| 03 | Números Inteiros: Estratégias que visam facilitar a compreensão de conceitos e operações | Sanileni Gutemberg dos Santos | 2016 | Dissertação de Mestrado Profissional |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 04 | Obstáculos e dificuldades relacionados à aprendizagem de números inteiros | Marcia Maria Teodoro | 2013 | Dissertação de Mestrado Acadêmico |
| 05 | O ensino de números inteiros por meio de atividades com calculadora e jogos | Rosangela Cruz da Silva | 2011 | Dissertação de Mestrado Acadêmico |
| 06 | Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos números inteiros | Fabulo Eugenio Danczuk | 2016 | Dissertação de Mestrado Profissional |
| 07 | A utilização de números inteiros relativos na resolução de problemas de estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental | João dos Santos | 2013 | Dissertação de Mestrado Acadêmico |
| 08 | A fixação da aprendizagem dos números inteiros e suas operações na educação básica | Antonio Oliveira Simão | 2016 | Dissertação de Mestrado Profissional |
| 09 | A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental | Kleber Ramos Gonçalves | 2016 | Dissertação de Mestrado Acadêmico |
| 10 | Números relativos: uma proposta de ensino | Cristiano Cardoso Pereira | 2014 | Dissertação de Mestrado Profissional |

Fonte: (AUTOR)

O trabalho de Ferreira (2018) teve como objetivo propor uma maneira alternativa para apresentar o conjunto dos números inteiros, utilizando como metodologia a Sequência Fedathi. Nesta metodologia, o papel de mediador exercido pelo professor é valorizado, ou seja, o professor tem grande importância durante a realização das atividades propostas, conduzindo os alunos com questionamentos que os façam pensar; o autor coloca que o professor assume uma postura "mão-no-bolso", auxiliando o aluno, mas não o fornecendo uma resposta. Dentre os 5 capítulos que compõem esta dissertação, destacamos aqui dois que nos interessam particularmente: um deles dedicado a explicar essa metodologia e outro apresentando como foram organizadas as sessões didáticas para o ensino do objeto matemático em questão. Talvez esta seja a pesquisa que mais se aproximou da nossa proposta inicial, levando em consideração as questões referentes ao papel de mediador desempenhado pelo professor. Em Passoni (2002), foram utilizadas noções de (pré-)álgebra para apresentar este conjunto a alunos da terceira série do ensino fundamental (entre 8 e 9 anos) de uma escola particular da cidade de São Paulo. Para investigar como os problemas aditivos poderiam ser desenvolvidos nesse nível, inicialmente o autor utiliza alguns problemas propostos por Vergnaud (1976) e ao longo do desenvolvimento de seu trabalho, utiliza como referencial teórico algumas ideias de Duval no que diz respeito a importância das representações para a compreensão de um objeto matemático. Em sua dissertação também é apresentada uma sequência de atividades dividida em 16 conjuntos, além de aplicar um pré-teste e um pós-teste de caráter diagnóstico.

Santos (2016) buscou apresentar estratégias que auxiliariam os alunos na compreensão do conjunto Z, bem como identificar conteúdos posteriores que pudessem causar dificuldades nos alunos pela falta de entendimento desses números, especialmente os negativos. Neste trabalho são apresentadas diversas atividades e jogos para trabalhar desde os conceitos básicos dos números inteiros, até as operações envolvendo-os; embora essas atividades trabalhem com alguns dos conceitos iniciais dos números inteiros relativos, elas utilizam materiais manipuláveis como jogos, o que não é nosso objetivo. A pesquisadora também formou um grupo de alunos para investigar os principais conteúdos relacionados a este conjunto que causavam mais dúvidas, com o objetivo de compreendê-las. Teodoro (2013), por meio de uma pesquisa de caráter documental, buscou evidenciar dificuldades existentes na aprendizagem e obstáculos didáticos referentes aos números inteiros. Para isso realizou um breve estudo histórico sobre esses números, analisou algumas pesquisas referentes a esse objeto matemático, além de verificar se as orientações para o ensino desses números presentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e nas Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental do Paraná eram contempladas no último Programa Nacional do Livro Didático.

Em sua pesquisa, Silva (2011) buscou investigar se a utilização de calculadora e jogos poderia favorecer a aprendizagem dos alunos em relação aos números inteiros. Adotando como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas e como metodologia a Engenharia Didática, elaborou e aplicou, em uma turma de 7º ano com 32 alunos, uma sequência didática contendo 24 atividades e 5 testes diagnósticos. A sequência foi desenvolvida em 17 sessões, descritas em um dos cinco capítulos presentes na dissertação. Embora a pesquisadora tenha trabalhado apenas com conceitos referentes às operações envolvendo os números inteiros relativos, esta pesquisa também se aproxima bastante da nossa, uma vez que utiliza o mesmo referencial teórico principal, bem como a mesma metodologia de pesquisa. Danczuk (2016) apresenta uma metodologia pautada na Diversificação de Tarefas Matemáticas para ensinar os números inteiros em uma turma de sétimo ano, além de utilizar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1993, 2003) para favorecer o trânsito entre os diferentes registros. Essa dissertação está organizada em sete capítulos, em um deles exibindo algumas atividades que podem ser utilizadas no ensino desse conteúdo.

Em sua dissertação, Santos (2013) objetivou iniciar o estudo dos números inteiros com alunos de 8 a 10 anos de idade, introduzindo esse conjunto por meio de atividades lúdicas e resolução de problemas. Realizou intervenções com um grupo experimental de alunos para introduzir as noções básicas deste conjunto. Além disso, verificou se o conhecimento desse conteúdo auxiliaria o aluno a construir o pensamento probabilístico. Utilizou como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1982), bem como se apoiou em pesquisas anteriores que abordavam esse objeto matemático. Por sua vez, Simão (2016) buscou apresentar este conjunto utilizando exemplos retirados do livro de História, mostrando acontecimentos como informação ou revisão para que os alunos tivessem o primeiro contato com esse conjunto. Foram trabalhadas ideias dos números negativos, módulo, e as quatro operações.

Gonçalves (2016) analisa as aproximações e distanciamentos relacionados à construção dos números inteiros em um livro do 7º ano do ensino fundamental, com enfoque nas operações de adição e subtração. Este autor realizou estudo desse conjunto levando em consideração aspectos epistemológicos e históricos, utilizando o conceito de Transposição Didática (TD) e, para a análise do livro utilizou como principal referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD). Pereira (2014) propõe uma sequência didática para o ensino dos números inteiros relativos como operadores aditivos, como representação de posição relativas e das operações de adição e subtração. Utilizou como referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais, e ao final da pesquisa, apresenta uma nova sequência "aprimorada", que resultou a partir de reflexões desenvolvidas durante a aplicação da primeira sequência de atividades.

A leitura completa desses trabalhos selecionados nos permitiu verificar como estavam sendo realizadas, comumente, as propostas de ensino para os números inteiros relativos e a pensar em que aspectos a nossa proposta poderia avançar. Por exemplo, percebemos em Ferreira (2018) que apesar da metodologia da Sequência Fedathi possuir ideais semelhantes aos que adotamos em nossa pesquisa com relação ao papel de mediador do professor, ela não trabalha com alguns conceitos iniciais desse conjunto numérico, apresentando apenas a necessidade de existência dos números negativos e partindo para as operações de adição e subtração nesse conjunto. Além disso, sua experimentação foi realizada em sala de aula com os alunos, o que favoreceu a postura esperada pelo professor indicada em seu referencial teórico. Para nossa proposta temos como objetivo apresentar os conceitos iniciais desse conjunto por meio de atividades disparadoras para discussão dos conceitos desejados, sem a utilização de materiais manipuláveis como jogos, calculadora entre outros, como foram apresentadas nas pesquisas de Salgado (2011), Santos (2013), Pereira (2014), Danczuk (2016) e Simão (2016). Apesar de Passoni (2002) utilizar noções de álgebra como auxílio para a introdução desse conjunto numérico, o que está presente em nossa proposta, sua experimentação ocorreu com alunos entre 8 e 9 anos de idade e contou com a utilização de jogos. Além disso, os trabalhos de Teodoro (2013) e Gonçalves (2016) apresentaram aspectos epistemológicos relevantes sobre o conjunto que nos auxiliaram a refletir sobre as principais características de nossa proposta. Abordaremos sobre ela a seguir.

### 1.3 A Nossa Proposta

Para pensar uma proposta alternativa para o ensino dos números inteiros relativos, além das inquietações vivenciadas pelo pesquisador em momentos de sua formação na graduação, levamos em consideração alguns aspectos encontrados nas pesquisas que foram levantadas anteriormente, além disso, olhamos para algumas orientações presentes na BNCC quanto às competências e habilidades previstas para este conteúdo matemático.

Ficou evidente que a grande maioria dos trabalhos realizados com propostas para o ensino dos números inteiros relativos, concentraram-se especialmente na parte das operações aritméticas; poucos foram os que trabalharam com os conceitos iniciais. Nossa proposta visa trabalhar justamente os conceitos iniciais deste conjunto. Dessa maneira acreditamos que pensando em uma maneira de introduzir esses números, o aluno poderá compreender de fato o que é um número inteiro negativo, que o sinal de menos agora não representa somente a operação de subtração, mas indica também uma quantidade negativa e o oposto ou simétrico de um número. Além disso, poderá compreender outros conceitos como módulo de um número inteiro, simétrico, comparação entre esses números; tudo isso passa por uma boa compreensão das características dos elementos pertencentes a este conjunto numérico.

Percebemos também uma grande utilização dos mais diferenciados recursos nas propostas de ensino, como calculadora, jogos e materiais concretos. Sabemos que, em muitas situações, um professor da educação básica de ensino possui uma extensa carga horária em sala de aula e o tempo de planejamento não é suficiente para preparação de materiais como recursos para o ensino. Alguns professores buscam investir além de seu tempo do planejamento para preparar “aulas diferenciadas” com diversos materiais, porém não é algo comum devido à grande demanda exigida deles, como prazo para postagem de planejamentos, correção de provas, envio de notas etc.

Pensando nessa realidade da maioria dos professores, nossa proposta de ensino consiste em uma sequência de ensino composta por atividades que servirão de disparadoras para discussão dos conceitos desejados. O papel do professor, aqui desempenhado pelo pesquisador, na condução dessas atividades tem papel central como mediador da discussão com os alunos. Além disso, a interação professor-aluno e aluno-aluno será fundamental para o bom encaminhamento do processo de aprendizagem dos alunos, aspectos que os pressupostos teóricos da TSD propiciam e permitem análise, conforme veremos no capítulo 2.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), homologada de forma completa em dezembro de 2018, é o documento vigente que define as “aprendizagens essenciais” que o aluno deve desenvolver ao longo da Educação Básica. Trata-se de um documento normativo que apresenta 10 competências gerais que visam nortear possíveis práticas pedagógicas para a aprendizagem e desenvolvimento de habilidades pelos alunos. Na BNCC, para o desenvolvimento das habilidades dos anos finais do ensino fundamental, é sinalizado que,

> [...] é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. (BRASIL, 2018, p. 298).

É nesse sentido que planejamos desenvolver atividades para a compreensão dos elementos deste conjunto e suas características, utilizando alguns modelos concretos que abrangem situações do cotidiano, pois a BNCC reforça a relação da aprendizagem dos alunos com a apreensão de significados dos objetos matemáticos, uma vez que “esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano”. (BRASIL, 2018, p. 298).

Além disso, para não ficar apenas nessas situações cotidianas, que tornariam nossa proposta muito semelhante às desenvolvidas em pesquisas anteriores, visamos inserir alguns elementos algébricos, pois, concordamos com Cid (2015) quando a autora diz que a razão de ser dos números negativos não se encontra no campo aritmético, pois este não justifica, com credibilidade, a forma de sua existência. Porém, queremos destacar que essa escolha de introduzir este conjunto utilizando elementos algébricos pode apresentar alguns problemas.

> [...] a decisão de introduzir os números negativos dentro da álgebra levanta vários problemas. Um deles é a necessidade de iniciar a álgebra escolar quando as regras de sinais ainda não estão disponíveis, o que dificulta, se é que não impede, o cálculo algébrico. Isso nos coloca na passagem da aritmética para a álgebra, ou seja, nos

> primórdios da álgebra escolar, e obriga a uma introdução simultânea dos números negativos e da álgebra, em que os diferentes objetos algébricos são apresentados, mas adia-se o desenvolvimento e consolidação das técnicas que os afetam até que as técnicas de cálculo com números positivos e negativos sejam estabelecidas. (CID, 2015, p. 256, tradução nossa).[3]

Ou seja, os alunos ainda não tiveram contato direto com a linguagem algébrica, que no Brasil, pela BNCC, é prevista na unidade temática seguinte a dos números inteiros. Dessa forma, escolhemos utilizar esses elementos algébricos na tentativa de propiciar aos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico, que auxilia na identificação de regularidades e padrões de sequências numéricas (BRASIL, 2018), ressaltando que não apresentaremos a álgebra em nossa proposta, mas utilizaremos atividades que permitirão aos alunos identificar sequências e regularidades, e ideias de generalização.

Cid apresenta 4 (quatro) formas de introdução do conjunto dos números inteiros identificadas por ela em pesquisas de propostas de ensino deste objeto matemático. São elas: introdução indutiva, introdução dedutiva, introdução construtiva e introdução por meio de modelos.

A introdução indutiva é caracterizada pela descoberta e generalização de regularidades por meio de sequências, como:

| | |
|---|---|
| 7 – 3 = 4 | 3 x 3 = 9 |
| 7 – 2 = 5 | 3 x 2 = 6 |
| 7 – 1 = 6 | 3 x 1 = 3 |
| 7 – 0 = 7 | 3 x 0 = 0 |
| ... | ... |
| 7 – (-1) = 8 | 3 x (-1) = -3 |
| 7 – (-2) = 9 | 3 x (-2) = -6 |

A ideia desse tipo de apresentação é que o aluno observe, na primeira coluna que está “aumentando de um em um” e, na segunda que está “diminuindo de três em três” ou “subtraindo três a cada operação” e assim “perceba” os números negativos por meio da observação de regularidades e generalização.

[3] […] la decisión de introducir los números negativos en el seno del álgebra plantea varios problemas. Uno de ellos es la necesidad de iniciar el álgebra escolar cuando aún no se dispone de las reglas de los signos, lo que dificulta, si es que no impide el cálculo algebraico. Esto nos sitúa en el paso de la aritmética al álgebra, es decir, en los comienzos del álgebra escolar, y obliga a una introducción simultánea de los números negativos y del álgebra en la que se presenten los distintos objetos algebraicos, pero se posponga el desarrollo y consolidación de las técnicas que les afectan hasta tanto no se establezcan las técnicas de cálculo con números positivos y negativos.

A introdução dedutiva é feita basicamente por meio da soma dos números naturais aos seus simétricos relacionados à soma, definindo as operações nesse novo conjunto mantendo a estrutura algébrica dos números naturais (CID, 2003). Já a introdução construtiva,

> Consiste na simetrização do conjunto dos números naturais pela soma, construindo o conjunto dos inteiros como o conjunto quociente de pares ordenados de números naturais a respeito da relação de equivalência: "(a, b) equivalente a (a', b') se, e somente se, a+b' = b+a'. Posteriormente, se define a soma, o produto e a ordem do referido conjunto e a estrutura de anel totalmente ordenado é deduzida." (ibidem, p. 3, tradução nossa).[4]

A introdução por meio de modelos é aquela feita com a utilização de sistemas e objetos familiares aos alunos. Acredita-se que esses objetos permitem, por meio das experiências cotidianas que o aluno possui com ele, "dar sentido" às regras de funcionamento deste conjunto. Cid destaca que esses modelos recebem diferentes nomes como modelos físicos, modelos intuitivos ou modelos concretos; ela utiliza este último. Dentre esses modelos concretos encontram-se os modelos de neutralização e de deslocamento. O modelo de neutralização se baseia no manuseio de fichas de duas cores diferentes, em que uma anula a outra (CID, 2015), assim determina-se o sinal para essas fichas já relacionando com a ideia do sinal de + ou –. Esse modelo é bastante utilizado em jogos como trilhas, já fazendo referência à reta numérica, ou aqueles que utilizam pontuações positivas e negativas, além de problemas envolvendo perdas e ganhos. Os modelos de deslocamento fazem bastante referência à reta numérica. Consiste em situações de "caminhar" sobre casinhas em ambos os sentidos (direita e esquerda), definindo questões como ponto inicial, utilizando os sinais de + e – a depender do sentido deslocado. Esses modelos também são muito presentes em jogos como trilhas com situações de pessoas que avançam ou retrocedem sobre elas.

Não pretendemos utilizar jogos em nossa proposta, mas utilizamos os modelos concretos em diferentes situações nas atividades, além disso, utilizamos também a introdução indutiva, mesclando essas duas formas anteriormente apresentadas com algumas ideias algébricas iniciais; acreditamos que utilizar alguns elementos algébricos pode tornar favorável a introdução deste conjunto.

Como auxílio para a introdução indutiva, que será por meio da discussão de atividades que utilizam operações matemáticas, especialmente a de subtração em que o minuendo é menor do que o subtraendo, tomamos como base as ideias do princípio de extensão apresentadas em

[4] Se basa en la simetrización del conjunto de los números naturales respecto a la suma, construyendo los enteros como conjunto cociente de pares ordenados de naturales respecto a la relación de equivalencia: (a,b) equivalente a (a', b') si, y sólo si, a+b' = b+a'. Posteriormente, se define la suma, el producto y el orden de dicho conjunto cociente y se deduce la estructura de anillo totalmente ordenado.

Caraça (1951), que permitiram reduzir as impossibilidades que surgiam em determinados conjuntos numéricos. Sobre este método, diz-se:

> Aplicações sucessivas do *princípio de extensão* levarão a reduzir todas essas impossibilidades; para isso é preciso criar novos campos numéricos; [...] pondo em evidência as necessidades de ordem prática ou teórica que, de cada vez, obrigaram a uma nova extensão. (CARAÇA, 1951, p. 28, grifo do autor).

Por exemplo, este autor afirma que a criação dos números naturais ocorreu pela prática da contagem, que era uma situação do cotidiano do homem, porém algum tempo depois surgiram alguns problemas de medição em que esses números não eram suficientes para respondê-los, surgindo assim a necessidade de criação do campo racional. Analogamente, pela manutenção da impossibilidade de subtração – quando o minuendo é menor do que o subtraendo – também houve a necessidade de extensão para os números relativos, pelo método que ele chama de “negação da negação” (ibidem, p. 97), isto é, negar a impossibilidade de existência de subtrações desse tipo, apresentando números que as contemplem.

Para elaborarmos nossa sequência de atividades de forma que contemple os expostos anteriores, mobilizamos a metodologia da Engenharia Didática que auxilia na construção de sequências de ensino, além disso a elaboramos sob os pressupostos teóricos da Teoria das Situações Didáticas. O próximo capítulo abordará as ideias da TSD e da ED de forma mais aprofundada.

## 2. ELEMENTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Optamos por apresentar neste capítulo elementos da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) e da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) por serem os principais referenciais teóricos mobilizados por nós para a elaboração da experimentação a ser realizada com os estudantes na modalidade presencial. Como queremos colocar em evidência importantes modificações que ocorrem ao mudar do ambiente presencial para o ambiente remoto, decidimos apresentar o texto de modo cronológico, da forma como foi desenvolvida a pesquisa. Acreditamos que desta forma aspectos do papel de mediador do professor, nos dois tipos de ambientes, serão evidenciados favorecendo nossa análise e a compreensão do estudo pelo leitor.

### 2.1 A Teoria das Situações Didáticas

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa tomamos como referencial teórico, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Brousseau (1986). Entendemos que a sala de aula é um ambiente munido de diversos fatores que contribuem, ou não, para a aprendizagem do aluno de um novo conceito. A forma como o professor conduz sua aula, a relação que esse professor possui com o objeto matemático que está ensinando, seu relacionamento com os alunos, o conhecimento prévio do aluno a respeito de determinados conhecimentos, são alguns exemplos de fatores que influenciam no momento da aprendizagem.

A TSD foi desenvolvida por Guy Brousseau, na França, e aborda as relações estabelecidas entre professor, aluno e saber, além de um meio constituído que visa proporcionar ambientes favoráveis para que a aprendizagem ocorra. Para este autor, o aluno deve ter papel ativo em sua aprendizagem e o professor deve mediar a relação entre o aluno e o saber. Dessa maneira, esta teoria poderá nos ajudar a compreender as relações que serão estabelecidas com os alunos, as possíveis relações deles com o objeto matemático que estamos considerando, além de ajudar a pensar situações que podem favorecer a aprendizagem. Para Artigue et al. (2014, p. 50, tradução nossa)[5].

> Embora a TSD tenha o objetivo final de melhorar a aprendizagem da matemática dos alunos, o aluno não é o centro desta teoria. A TSD dá prioridade à compreensão de

[5] Even if TDS has the ultimate goal of improving student's mathematics learning, the learner is not at the center of the theory. TDS gives priority to the understanding of how the conditions and constraints of didactical systems enable or hinder learning, and how the functioning of such systems can be improved.

> como as condições e restrições do sistema didático permitem ou dificultam a aprendizagem, e como o funcionamento desse sistema pode ser melhorado.

Sendo assim, além de pensar em uma maneira de introdução dos números inteiros relativos que possa contribuir para a construção do conhecimento pelos alunos, estamos interessados também em verificar como se dará o funcionamento do sistema didático diante do que será proposto.

Os componentes analisados na TSD (professor, aluno, saber e meio), quando reunidos são entendidos como Sistema Didático. Este sistema, de forma mais simples, aparece representado por um triângulo, em que professor, aluno e saber aparecem em cada um dos vértices desse triângulo e o meio é representado em seu interior. Embora seja uma representação bastante utilizada, Brousseau alerta que ela é muito reduzida, visto que esse sistema não se limita somente às interações entre professor e aluno, mas também da relação do aluno com o meio adidático pré-estruturado pelo professor, que é dinâmico e está em constante mudança. Cada um desses componentes desempenha um papel importante nos processos de ensino e de aprendizagem. Segundo Teixeira e Passos (2014, p. 158),

> A aprendizagem deve ser um processo envolvente para o aluno, que constrói, modifica, enriquece e diversifica esquemas de conhecimento já internalizados a respeito de diferentes conteúdos, a partir do significado e do sentido que pode atribuir a esses conteúdos e ao próprio fato de estar aprendendo.

O processo de aprendizagem de qualquer conteúdo deve instigar o aluno, e o professor pode ser visto como mediador de situações para estimular o aluno na construção do saber. "Uma 'situação' é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado" (BROUSSEAU, 2008, p.21); o professor tem a oportunidade de preparar ambientes favoráveis à aprendizagem do aluno a partir de uma situação didática que é definida por Brousseau (1982) como,

> Um conjunto de relações estabelecidas explícita e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num determinado meio (compreendendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educacional (o professor) para fins de apropriação desses alunos de um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, 1982, p.39, tradução nossa)[6].

Essas relações estabelecidas entre os parceiros da relação didática (professor e aluno), são de extrema importância para a compreensão dos fenômenos de aprendizagem ou de apropriação, pelo aluno, de um novo saber.

[6] Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un grupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ces élèves un savoir constitué ou en voie de constituition.

Tratando-se da mobilização de conhecimentos e saberes dos alunos, é importante destacar que nesta teoria, Brousseau faz a diferenciação entre conhecimento e saber. De modo geral, o conhecimento é tomado como algo de dimensão mais individual, não compartilhado socialmente, e o saber encontra-se em uma dimensão mais social, algo compartilhado, institucionalizado. Na seção a seguir estes dois conceitos serão retomados.

### 2.1.1 As Situações Adidáticas e o Papel de Mediador Desempenhado pelo Professor

Em nossa pesquisa estamos particularmente interessados em dois pressupostos deste dispositivo teórico: as situações adidáticas e o papel de mediador desempenhado pelo professor. Esses elementos nos interessam, uma vez que a nossa proposta de intervenção consiste em uma sequência de atividades disparadoras, ou seja, aquelas que terão por objetivo instigar o aluno a buscar as respostas por meio de tentativas, perguntas e discussões com seus pares. Além disso, para uma boa preparação dessas situações, bem como para a mediação durante sua realização, o professor desempenha um papel fundamental, o que explicitaremos nesta seção.

Dentro das situações didáticas, Brousseau (2008) apresenta as situações adidáticas, que possuem características especiais:

> [...] Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se *adidática*. (BROUSSEAU, 2008, p.35, grifo do autor).

Em outras palavras, essas situações podem ser entendidas como aquelas propostas ao aluno com uma intenção didática para se chegar a um determinado saber; tratam-se de atividades preparadas estrategicamente visando provocar, no aluno, o interesse em aceitar o problema proposto e então tentar resolvê-lo. A partir do momento em que o aluno aceita a responsabilidade para resolução de um problema, ou seja, aceita o problema como sendo seu, ocorre o que Brousseau denomina de devolução: a partir disso o aluno passa a trabalhar independentemente e, o professor atua como mediador, isto é, não indica os passos nem o saber que ele deseja que seu aluno alcance ao final da atividade proposta; o professor é responsável por manter o aluno no jogo. Nesse tipo de situação o aluno é ativo e constrói o saber a partir de suas conjecturas, tentativas, inferências e da interação com seus colegas. A situação adidática é um tipo de situação didática e nela ocorrem as situações de ação, formulação e validação.

Na situação de ação o aluno começa a tentar resolver a atividade proposta, sem muita pretensão de compreender ou justificar o que está por trás do objetivo da própria atividade, ou seja, ele interage com o meio pré-estabelecido pelo professor. Atua com seus conhecimentos prévios que, para ele, podem satisfazer o que é solicitado na atividade ou situação apresentada, embora não sejam os únicos e verdadeiros, mas não se preocupa em formulá-los.

Na situação de formulação o aluno utiliza "alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada [...]" (FREITAS, 2010, p. 96). Aqui o aluno pode ou não se preocupar com uma linguagem formal; caso não se preocupe, ainda assim o aluno tenta formular uma resolução para o problema proposto. Nesta situação ele interage com outros colegas da classe, para comparar suas conjecturas e reafirmá-las ou descartá-las.

A situação de validação é aquela na qual o aluno busca verificar a validade de suas conjecturas, passando a utilizar escritos mais formais, apoiado em elementos mais teóricos. A validação pode ter um caráter de demonstração sendo mais, ou menos, formal de acordo com o nível de desenvolvimento cognitivo do aluno.

Essas situações são chamadas de dialéticas por Brousseau, visto que "cada situação pode fazer com que o sujeito progrida, e por isso também pode progredir, de tal modo que a gênese de um conhecimento pode ser fruto de uma sucessão (espontânea ou não) de novas perguntas e respostas [...]" (BROUSSEAU, 2008, p. 32). Isso significa que essas situações podem, e devem, ocorrer de forma conjunta, não aparecendo como etapas, ou fases isoladas, que precisam acontecer em determinada ordem, ocorrendo idas e vindas entre elas; é esse caráter dialético que proporciona o debate das diferentes ideias e concepções mobilizadas pelos alunos.

Após essas situações adidáticas de aprendizagem, em que o aluno interagiu com o meio, pensou, fez conjecturas e elaborou algumas estratégias, e o professor fez a mediação durante todo este processo, surge a necessidade de outro momento, este agora, em sua maior parte, sob a responsabilidade do professor. As produções feitas pelos alunos, certas ou erradas, necessitam de uma certa "conferência" por parte do professor, antes de avançar para a situação seguinte. Surge então outra situação, muito importante nesta teoria, denominada institucionalização, que pode ser entendida como aquela em que o professor retoma tudo aquilo que foi colocado pelos alunos (suas produções) e então confere um *status* de verdade àquilo em que se pretendia obter, ou seja, é o momento de "passar a limpo" e deixar transparentes os conhecimentos que farão parte dos saberes daquela classe.

Na institucionalização fica evidente a importante diferença que Brousseau faz entre conhecimento e saber, uma vez que, durante o processo de interação com o meio preparado pelo professor, o aluno mobiliza conhecimentos prévios até chegar ao objetivo planejado para determinada situação, mas é apenas no momento de institucionalização que, ao retomar essas produções mobilizadas pelos alunos, o professor confere a eles um *status* de saber. Então, para que uma situação seja vivida como adidática, o professor deve propor problemas ao aluno de modo que ele tenha uma estratégia inicial para resolvê-los, pelo menos parcialmente (caso contrário, a situação está fadada ao fracasso), consiga aplicar essa estratégia pela própria dinâmica do problema e assim, "atue, fale, reflita e evolua." (ibidem, p. 35).

Cada um – professor e aluno – desempenha papel fundamental na relação didática para que a aprendizagem ocorra. O aluno precisa aceitar participar desse "jogo" proposto pelo professor, com finalidade didática, para que possa então agir, formular, provar e modificar seus conhecimentos e assim alcançar determinado saber. Já o professor, precisa preparar situações que tenham potencial para que o aluno aceite entrar no "jogo"; por isso é fundamental que a devolução ocorra. "O professor deve conseguir que o aluno resolva os problemas que ele lhe apresenta, a fim de constatar e de poder levá-lo a constatar que cumpriu sua tarefa." (BROUSSEAU, 1996, p. 65). Isto é, o professor deve propor situações que sejam desafiadoras e que, ao mesmo tempo, o aluno tenha condições de começar a trabalhar com elas. Além disso, o saber em jogo – ainda desconhecido pelo aluno – deve ser a ferramenta necessária para a resolução da situação proposta. O objeto matemático em jogo é de extrema importância nesta teoria, uma vez que a matemática está no centro da tradição da didática francesa. (ARTIGUE et al., 2014, p. 13).

Dessa forma, em uma situação adidática é de extrema importância a atenção dada à mediação que será realizada pelo professor, bem como para a organização do meio em que a atividade se desenvolverá, pois:

> A ação de um professor possui um forte componente de regulação dos processos de aquisição do aluno. O próprio aluno aprende pela regulação de suas relações com seu *meio*. As regulações cognitivas têm a ver com um *meio adidático*, em que parte da estrutura é determinada pela organização definida pelo professor. (BROUSSEAU, 2008, p. 56, grifo do autor).

O meio deve ser preparado pelo professor para que o aluno consiga construir seu conhecimento à medida que vai estabelecendo relações com este. Durante essas relações, em uma situação adidática, o professor aparece como mediador, uma vez que "o professor, mesmo que devolva uma situação adidática ao aluno, continua sendo o fiador da relação didática adequada." (MARGOLINAS, 2004, p. 19, tradução nossa)[7], com o objetivo de manter o aluno engajado na atividade proposta. Esse meio é dinâmico e Brousseau (2008, p.21) considera "o meio como subsistema autônomo, antagônico ao sujeito". Ainda sobre esse meio antagônico, Lima (2015, p.33) afirma que este "é composto pelo ambiente e as condições nas quais os alunos estarão inseridos ao vivenciarem as situações adidáticas propostas pelo professor". Ou seja, não se resume apenas à uma atividade impressa, a um jogo proposto ou a um material, mas sim a todos os elementos que compõem a situação inicialmente pensada pelo professor, como suas escolhas, materiais didáticos, os conhecimentos dos alunos, as discussões que serão desenvolvidas, entre outros. Isso reforça o dinamismo desse meio, visto que ele se altera a partir das relações estabelecidas em uma situação adidática.

O papel de mediador do professor inicia antes mesmo da aula, com as situações que ele elabora para que seus alunos vivenciem visando que estes alcancem determinada aprendizagem.

A utilização da Teoria das Situações Didáticas para a compreensão das dificuldades de aprendizagem que os alunos possuem com relação aos números inteiros relativos e para apresentação de uma proposta alternativa para o ensino desse objeto matemático, será fundamental também, pois, como afirmam Teixeira e Passos (2014, p.163),

> A Teoria das Situações Didáticas discute as formas de apresentação de determinado conteúdo matemático – ou parte dele – para os alunos, sempre que houver uma intenção clara do professor de possibilitar ao aluno a aprendizagem (aquisição de saberes), por meio da sequência didática planejada.

Dessa maneira, a partir da nossa proposta de intervenção, pensamos a introdução dos conceitos iniciais dos números inteiros relativos, trabalhando com os dois tipos situações, didáticas e adidáticas em atividades de uma sequência didática, que possibilitem o desequilíbrio de conhecimentos dos alunos para a construção desse novo saber. Para pensar na elaboração dessa sequência de atividades, utilizamos os pressupostos metodológicos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988).

[7] Le professeur même s'il dévolue une situation adidactique à l'élève, reste le garant de la relation didactique adéquate.

## 2.2 A Engenharia Didática

Nesta pesquisa, apresentamos o objeto matemático aos alunos por meio de uma sequência de atividades preparada à luz da Engenharia Didática, metodologia que surgiu na França, na década de 1980, e que tem sido amplamente usada por pesquisadores da didática da matemática.

> Com o objetivo de etiquetar uma forma de trabalho didático: aquela que é comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muito mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar. (ARTIGUE, 1988, p. 283).

Escolhemos esta metodologia pelo fato de que ao mesmo tempo em que ela nos permite estudar conhecimentos de caráter científico, em nosso caso, o conjunto dos números inteiros relativos desde o momento de sua criação, ela também se preocupa com a organização da proposta a ser realizada com os alunos, sem perder de vista o conhecimento em tela, ou seja, esta metodologia considera também questões relacionadas à ação docente. Como metodologia de pesquisa, ela "caracteriza-se antes de mais por um esquema experimental baseado em realizações *em sala de aula*, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino." (ibidem, p. 285, grifo nosso).

Além de ser coerente com os pressupostos teóricos da TSD, a Engenharia Didática é apropriada quando é identificado um ponto de desequilíbrio no sistema didático, pois ela apresenta alternativas para tentar buscar um novo equilíbrio.

> Um dos pontos de partida para a elaboração de uma engenharia didática pode ser a escolha de um tema para o qual se verifica que a aprendizagem não ocorre como desejado. [...] Trata-se então, de estudar condições que possam favorecer essa aprendizagem e é justamente para o estudo de condições que podem favorecer a aprendizagem que a engenharia didática aparece como uma ferramenta metodológica adequada. (BITTAR, 2017, p.104).

Uma das motivações para realização dessa pesquisa foi a percepção das dificuldades que alunos têm em relação aos números inteiros relativos, ou seja, o sistema didático relativo ao ensino do conjunto Z não parece estar em equilíbrio – não de acordo com o que acreditamos que deveria ser – e, assim, inferimos que a ED será fundamental para o desenvolvimento dessa investigação. Esta metodologia de pesquisa possui 4 fases: análises prévias, concepção e análise *a priori*, experimentação, e análise *a posteriori* e validação. Embora seja estruturada em quatro etapas, esta não é fechada, isto é, o pesquisador tem total liberdade para transitar entre as diferentes fases quando julgar necessário, além de realizar confronto contínuo, durante todo o seu desenvolvimento, entre as análises a priori e a posteriori. Na próxima seção explicitaremos em que consiste cada uma dessas fases.

### 2.2.1 As Fases da Engenharia Didática

A primeira fase da ED – análise prévia ou preliminar – é o momento de estudo a respeito do objeto matemático em questão. Nesta primeira parte o pesquisador investiga como geralmente é realizado o ensino deste objeto e para isso, ele pode recorrer a diferentes materiais. Verificam-se também as relações que os alunos, comumente, estabelecem com esse objeto matemático, as dificuldades e obstáculos; todo esse primeiro processo deve ser muito bem realizado, pois influencia diretamente na construção de uma sequência didática que favoreça a aprendizagem do conceito em tela. Artigue (1988) elenca algumas etapas deste momento inicial:

> – a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> – a análise do ensino habitual e de seus efeitos;
> – a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
> – a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
> – e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1988, p. 288-289).

Como apresentado no capítulo anterior, realizamos um levantamento de pesquisas que trabalharam com propostas de ensino sobre os números inteiros relativos, além de analisar as orientações presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a respeito desse objeto matemático. Com a leitura dessas pesquisas e das orientações curriculares foi possível identificar as etapas acima citadas, como o ensino habitual desse conjunto numérico, as dificuldades e os obstáculos apresentados pelos alunos nessas investigações, para que assim pensássemos na elaboração de nossas atividades.

A concepção e análise *a priori* – segunda fase da ED – consiste na elaboração da sequência didática pelo pesquisador que já dispõe de informações suficientes levantadas por ele na fase anterior. A sequência didática a ser construída deve conter atividades que serão propostas aos alunos em cada sessão e junto a elas as justificativas e seus objetivos, bem como possíveis estratégias de resolução que poderão ser feitas pelos alunos, tanto tentativas corretas, como as errôneas. Um aspecto muito importante a ser considerado na elaboração das atividades nesta fase são as chamadas variáveis didáticas. Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis importantes a serem analisadas para o objeto em questão, as variáveis didáticas globais, que se referem a características mais gerais da sequência didática, e as variáveis didáticas locais, relacionadas a disposições mais pontuais em alguma sessão ou atividade, por exemplo, a maneira que uma atividade é proposta, se ela apresenta uma figura, a posição dessa figura, ou seja, elementos que podem modificar a estratégia a ser adotada pelo aluno. Nesta fase o pesquisador (ou professor) prepara o meio, levando em consideração todo o estudo realizado na análise preliminar de modo que as situações possam ser vividas como adidáticas pelos alunos no momento da experimentação, próxima fase da ED.

A experimentação, terceira fase, é o momento em que o pesquisador aplica a sequência didática preparada, e observa como os alunos a realizam, confrontando o que está (ou não) ocorrendo com o que foi pensado inicialmente. “Refletindo: é essa a sessão prevista? Se não, em que difere dela? Por quê? Que regras norteiam as interações entre os diferentes atores na turma? É possível identificar as regras estáveis (costumes) e as regras variáveis? Em função de quê?” (BITTAR, 2017, p.108). Essas observações e considerações contribuem para a quarta fase da ED.

Na análise *a posteriori* e validação o pesquisador analisa todo o desenvolvimento dos alunos nas atividades propostas, seus comportamentos, suas respostas, comparando-as com os objetivos pretendidos que foram elencados na concepção e análise *a priori*. Porém, este momento de confronto não é exclusivo desta quarta fase, ele não é realizado ao final da experimentação e esta é uma característica fundamental que difere a ED de outras metodologias qualitativas. Na ED o confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* pode, e deve, ser feito ao longo de toda a realização da sequência didática.

> [...] é preciso enfatizar que uma das características marcantes da engenharia didática é o confronto contínuo, ao longo da realização da sequência, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, uma vez que é esse confronto que permite redefinir rumos, quando necessário. (ibidem, p. 109, grifo da autora).

Assim, por exemplo, se em uma aula o pesquisador percebe uma determinada concepção errônea sendo manifestada por algum aluno, ele pode propor uma atividade que permita que o aluno confronte o que está pensando. Não se trata de guiar o aluno para “a solução correta”, mas de não deixar o aluno continuar em um caminho que já se sabe não ser frutífero para somente ao final da experimentação fazer a avaliação. Se o objetivo é sua aprendizagem, então é preciso lhe oferecer condições para isso.

Elaboramos uma sequência de atividades definidas em algumas sessões para apresentar os conceitos iniciais do conjunto dos números inteiros relativos. No próximo capítulo apresentamos a análise *a priori* dessa sequência.

# 3 ANÁLISE *A PRIORI* DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentamos a sequência didática elaborada e sua análise *a priori*. Esta sequência didática é proposta aos alunos da turma de 7º ano, participantes de nossa pesquisa. Inicialmente, elaborada em 10 sessões a serem realizadas presencialmente, ela foi organizada em sessões visando a construção de conhecimentos dos estudantes acerca do conjunto dos números inteiros relativos. A construção dessa sequência de atividades ocorreu após a primeira fase da Engenharia Didática, a análise preliminar, em que foi realizado um levantamento das pesquisas que já apresentaram propostas para o ensino deste conjunto numérico, além da análise das orientações sobre este objeto matemático presentes na BNCC, apresentados no primeiro capítulo desta dissertação.

Na análise que segue tentamos evidenciar o papel do professor, desempenhado pelo pesquisador, que fará a mediação das atividades, isto é, as possíveis falas, encaminhamentos e a maneira que deverá se comportar durante a realização das atividades. Além disso, apresentamos também as variáveis didáticas que consideramos em algumas das atividades.

## 3.1 Sessão 01

O objetivo desta sessão é apresentar situações que suscitem discussões acerca da aparição de inteiros negativos, problemas que os alunos já estão acostumados a resolver e que trabalharão ideias algébricas iniciais. Além dessas situações, os alunos serão levados a perceber a necessidade de existência dos inteiros negativos por meio da resolução de operações matemáticas (CARAÇA, 1951) e da observação de algumas regularidades. Ao final da sessão o pesquisador apresentará para os alunos, no momento de institucionalização dessa primeira parte, a principal razão do surgimento dos números inteiros relativos.

**Atividade 1:** Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida ganhou 6 cartões e na segunda perdeu 9. Responda:
a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?
b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria? Você acha que isso seria possível? Explique sua resposta.
c) E se a gente não soubesse quantos cartões ele tinha no início, como podemos representar a quantidade de cartões que Nathan teria ao final do jogo?

O objetivo desta primeira atividade é propor uma situação familiar aos alunos, para que resolvam utilizando operações conhecidas, como nos itens a) e b), mesmo que no item b) o aluno possa apresentar uma resposta por extenso, sem apresentar um número, o que pode ocorrer também no item a). Já no item c) aparece uma situação nova para o aluno, na qual ele precisará mobilizar uma nova estratégia de resolução.

Para o item c) os alunos não têm ainda uma estratégia, mas podem tentar; o pesquisador, como mediador da situação, poderá sugerir aos alunos que utilizem alguma letra para representar a quantidade inicial de cartões de Nathan, introduzindo então, a ideia algébrica.

Acreditamos que os alunos podem mobilizar as seguintes estratégias de resolução: no item a) o aluno poderá resolver por meio da aritmética, $5 + 6 - 9 = 2$; no item b) de forma semelhante "$2 + 6 - 9$", mas aqui poderá responder "vai ficar faltando um", "vai dever um cartão". Para o item c) com a utilização das letras e inspirados das atividades anteriores é esperado que os alunos representem $x + 6 - 9$ e utilizando raciocínio anterior responda: "terminará com 3 cartões a menos do que iniciou".

**Atividade 2:** Complete os espaços em branco:

| | |
|---|---|
| a) 13 + ____ = 29 | d) 225 + ____ = 357 |
| b) 42 + ____ = 75 | e) 47 + ____ = 47 |
| c) 79 + ____ = 103 | f) 8 + ____ = 6 |

Esta atividade tem por objetivo permitir que os alunos utilizem conhecimentos prévios das operações de adição e subtração no conjunto dos naturais para completar os espaços em branco, e ao chegar ao item f) percebam que até o momento não conhecem um número que satisfaça a operação. Para o momento de realização do item f) o pesquisador fará algumas perguntas aos alunos como: "Você teve dificuldade em resolver algum item dessa atividade?", "Qual foi sua dificuldade?", para iniciar uma possível discussão sobre o item f) e novamente apresentar a necessidade de existência de outros números além dos naturais.

Aqui uma possível estratégia de resolução é por meio da subtração dos números apresentados para cada item de a) até d). Por exemplo, no item a) o aluno poderá fazer 29 – 13 para encontrar o 16. O item e) poderá ser resolvido de forma direta, e o item f) instigará à discussão desejada de que "falta algo" para responder este item. Continuando com a intenção de levar os alunos à percepção de um novo conjunto numérico por meio da ideia de regularidade, propomos a atividade a seguir.

**Atividade 3:** Efetue as seguintes subtrações:
a) 5 – 2= ____
b) 5 – 3= ____
c) 5 – 4= ____
d) 5 – 5= ____
e) 5 – 6= ____
f) 5 – 7= ____

Com esta atividade queremos que os alunos percebam a regularidade ao resolver as subtrações para que, ao chegarem aos itens e) e f), consigam pensar em respostas do tipo "vai faltar 1", "vai ficar faltando 2". A dificuldade que surgirá deve ser relativa à forma de escrever a resposta, uma vez que ainda não conhecem este novo número e é isto também que queremos suscitar com esta atividade: a necessidade de um novo conjunto numérico, como evidenciou Caraça (1951, p. 94).

O professor tem um papel importante nesta atividade, de manter os alunos atentos à resolução, possibilitando que eles observem e percebam a regularidade, com questões do tipo "O que você consegue observar nessas respostas?", "Consegue ver alguma regularidade? Qual?". Caso os alunos não observem alguma regularidade, poderá ser passado outro exemplo semelhante, como a) 7 – 3; b) 7 – 4; c) 7 – 5; d) 7 – 6; e) 7 – 7; f) 7 – 8; g) 7 – 9.

Nesta atividade o conhecimento em tela não é explícito e é novo para o aluno, mas com a mediação do professor, o aluno pode chegar à resposta desejada mesmo que esta não seja em linguagem numérica. Trata-se de uma aproximação com o objeto do conhecimento, ainda que implícita.

**Atividade 4:** Alice foi às compras em um brechó com R$ 100,00. Comprou um vestido que custou R$ 40,00 e depois comprou um par de sapatos. Por último ela comprou uma bolsa por R$ 10,00. Responda:
a) Quanto lhe sobrou?
b) Se Alice nos dissesse que ficou com R$ 5,00, é possível descobrir qual era o preço do sapato?

O objetivo desta atividade é o de retomar as ideias algébricas trabalhadas na primeira atividade, para que os alunos mobilizem a estratégia de utilização de uma letra para representação de um valor desconhecido, montem uma expressão algébrica e a resolva ainda que de forma implícita.

No item a) a estratégia de resolução poderá ser a de montar a expressão e realizar a simplificação para chegar ao resultado 50 – S, porque não conhecemos o valor do sapato. Para o item b) o aluno deverá mobilizar alguma estratégia para encontrar o valor do sapato, sem utilizar regras de resolução de uma equação do primeiro grau, uma vez que ainda não possuem esse conhecimento. Uma estratégia possível é a de retomar algumas ideias da atividade 2, como 50 – ___ = 5. Novamente, caso necessário, o pesquisador fará a mediação lembrando a possibilidade do uso de uma letra para representar um valor desconhecido, reforçando algumas ideias algébricas com eles. Porém, é possível responder à questão apenas com um cálculo mental, pensando algo como: "com o vestido e a bolsa ela gastou cinquenta reais, então ficou com cinquenta reais. E contando com a compra do sapato ficou com apenas 5 reais, então o sapato custou cinquenta reais menos cinco reais que dá quarenta e cinco reais." É importante ressaltar que o estudante pode ter diferentes maneiras de resolver a atividade, devendo ser inclusive incentivado a explorar tais estratégias. Ao propormos o uso de letras não se trata de forçar uma estratégia, mas, sim, de propor uma estratégia possível que permitirá atribuir significado ao conceito.

Ao final dessa primeira sessão, em um momento de fechamento, o pesquisador discutirá com os alunos as situações das atividades em que os números que eles conheciam não foram suficientes para respondê-las, levantando uma breve discussão sobre como os matemáticos da antiguidade também tiveram algumas dificuldades, em outras situações, para responder problemas matemáticos e que foi necessária a criação de outro conjunto, o qual iremos estudar nas próximas sessões.

## 3.2 Sessão 02

Esta sessão é uma extensão da anterior e tem por objetivo apresentar novas situações nas quais os inteiros negativos aparecem, bem como situações do cotidiano em que esses números são utilizados para interpretá-las. Ao final das atividades, o conjunto será apresentado formalmente.

**Atividade 1:** Carla e Fernando jogam um jogo utilizando cartas de duas cores: azuis e vermelhas. Cada carta azul dá ao jogador 2 pontos, e cada carta vermelha retira do jogador 3 pontos. Responda:

a) Carla terminou a partida com 10 cartas azuis e 8 vermelhas. Qual a pontuação final de Carla?

b) Fernando terminou a partida com 12 cartas azuis e 6 cartas vermelhas, qual foi sua pontuação final?

c) Quem venceu o jogo? Por quê?

O objetivo é possibilitar que o aluno realize operações já conhecidas ou até mesmo trabalhe com expressões algébricas, e que novamente apareçam números inteiros negativos, mesmo que ainda sem a utilização do número de fato (com o sinal de negativo), mas com respostas por extenso.

As estratégias de resolução dos itens a) e b) podem variar entre operações separadas dos pontos positivos e negativos obtidos pelos jogadores, para chegar ao resultado final; ou a elaboração de uma expressão algébrica para substituir os valores dados nos itens. Exemplo: + 2A – 3V (A para cartas azuis e V para cartas vermelhas). No item c) o aluno mobilizará alguma justificativa a partir da resposta dada nos itens anteriores como, “Fernando venceu o jogo porque terminou com 6 pontos e Carla devendo 4 pontos”, isso dependerá da estratégia utilizada nos itens anteriores.

| |
|---|
| **Atividade 2:** Camila gostaria de viajar para casa de sua avó e tinha apenas R$ 50,00. Na ida ela gastaria R$ 35,00 e na volta para sua casa gastaria mais R$ 20,00. Isso seria possível? Explique o que você pensou. |

O objetivo desta atividade é estimular a criatividade dos alunos para explicar a situação, sobre a possibilidade de se utilizar uma quantia sem que a tivesse disponível. Na situação, Camila gastaria R$ 35,00 para ida, após isso, gastaria R$ 20,00. Os alunos deverão julgar e justificar se isso é possível ou não. O pesquisador mediará as conjecturas feitas pelos alunos durante a resolução, apresentando algumas resoluções elaboradas por eles para discutir com toda a turma. Além disso essa atividade também é uma forma de apresentar outras situações em que os inteiros negativos aparecem. As respostas poderão variar de acordo com cada aluno. Uns dirão que não é possível resolver a atividade, porque não teria dinheiro suficiente para retornar para sua casa; outros poderão dizer que ela teria levado mais dinheiro com ela, ou que ganhou alguma quantia a mais na casa de sua avó, mas não falou. Acreditamos que esta situação tem potencial para propiciar a reflexão dos alunos sobre a possibilidade de ocorrência da situação, e utilizar diferentes justificativas, contribuindo para o debate e a troca de ideias entre eles.

| |
|---|
| **Atividade 3:** Márcia foi às compras com R$ 80,00. Ela comprou uma blusa de R$ 35,00 e um sapato de R$ 45,00. Ao retornar para sua casa, quanto lhe sobrou? |

Esta atividade tem por objetivo apresentar uma situação que apareça o número zero, para que os alunos compreendam que ele é um elemento pertencente a este conjunto. Uma possível estratégia de resolução pode ser por meio da expressão numérica (80 – 35 – 45 = 0) montada a partir das informações fornecidas no enunciado da atividade para verificar a quantia que sobra para a personagem, como também o aluno pode fazer a adição dos gastos de Márcia e depois subtrair do valor inicial que ela possuía.

**Atividade 4:** Observe o extrato bancário de Jorge no mês de Julho/2018:

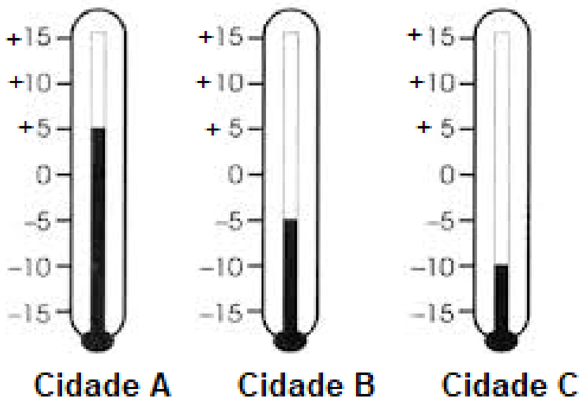
| BANCO SAN MARINO | | |
|---|---|---|
| Agência: 00165-y | Conta: 12345-9 | |
| Cliente: Jorge F. Souza | | |
| **MOVIMENTAÇÃO JULHO/2018** | | |
| **Dia/Mês** | **Ocorrência** | **Valor (R$)** |
| 02/07 | Salário | **+ 1.200,00** |
| 04/07 | Saque | **– 650,00** |
| 04/07 | Cheque | **– 50,00** |
| 06/07 | Boleto | **– 50,00** |
| 07/07 | Depósito | **+ 30,00** |
| 09/07 | Débito | **– 500,00** |

Até o dia 09 de julho Jorge recebeu ou gastou mais dinheiro?

O objetivo desta atividade é apresentar aos alunos uma situação cotidiana (modelo concreto) em que os números inteiros são utilizados. Esta atividade permite que o aluno se familiarize com o sinal de '+' para representação de quantidades positivas e o de '–' para quantidades negativas. As cores azul e vermelha são variáveis didáticas importantes nesta atividade, pois acreditamos que elas poderão auxiliar na diferenciação entre saldos negativos e positivos. Para resolver esta atividade o aluno mobilizará estratégias de cálculos aritméticos, conhecimento que ele já possui e que foi trabalhado em sessões anteriores.

Uma estratégia possível é fazer a adição de todos os saldos positivos, depois todos os saldos negativos e, em seguida, comparar os resultados obtidos para verificar qual valor é maior e afirmar se recebeu ou se gastou mais dinheiro (análise do módulo desses valores), ou montar uma expressão numérica e resolvê-la observando seu resultado.

**Atividade 5:** Em um certo dia, três cidades apresentavam temperaturas diferentes. Observe o termômetro de cada uma delas e responda:




a) Quantos graus o termômetro de cada cidade registrou?

b) Em qual cidade estava mais frio? Por quê?

Esta atividade tem por objetivo apresentar outra situação cotidiana (modelo concreto) em que os números inteiros relativos aparecem, novamente utilizando os sinais tanto para os inteiros positivos como para os inteiros negativos. Espera-se que o aluno compreenda que esses números podem ser utilizados para interpretar diferentes situações do cotidiano. Além disso, esta atividade também visa permitir que o aluno trabalhe com análise e tratamento da informação envolvendo os números inteiros relativos. Até este momento, estamos considerando o uso dos sinais para representar tanto os inteiros positivos como os inteiros negativos como uma variável didática, para evidenciar a diferença entre temperaturas positivas (calor) e negativas (frio).

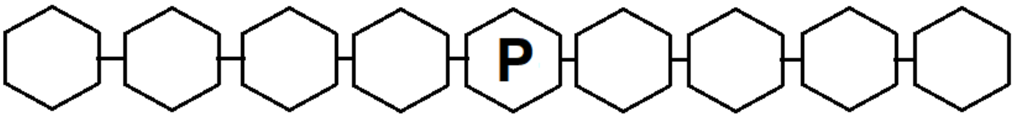
Para resolução do item a) os alunos poderão responder numericamente, como +15 graus/–5 graus/– 10 graus, uma vez que esses números aparecem na imagem e os alunos poderão estar familiarizados com os sinais para representação de quantidades positivas e negativas da atividade anterior; podem aparecer também respostas por extenso como “15 graus positivos/5 graus abaixo de zero”. No item c) espera-se que o aluno relacione a imagem do termômetro que representa a temperatura mais baixa com a temperatura mais fria e use isso como justificativa.

Ao final da sessão o pesquisador comentará sobre a aparição de alguns números com o sinal de – (menos) na frente, que são os inteiros negativos. Falará também sobre as diferentes situações que esses números podem aparecer e, então, introduzirá formalmente o conjunto dos números inteiros relativos por meio da reunião dos números naturais, os inteiros negativos e o zero. Após isso questionará se os alunos conhecem ou já viram outras situações que esses números apareceram.

### 3.3 Sessão 03

O objetivo desta sessão é apresentar ao aluno a representação dos números inteiros na reta graduada. Estas atividades levarão o aluno a pensar em possibilidades de construção de reta numérica. Nesta sessão será trabalhada apenas a reta no sentido horizontal e em sessão posterior será apresentada também no sentido vertical. Ao final, o pesquisador abordará esta forma de representação dos inteiros, utilizando a reta graduada.

**Atividade 1:** A figura abaixo representa uma trilha reta. Responda:




a) Se uma pessoa na posição P desta trilha andar 3 unidades para a direita e, após, andar 5 unidades em sentido contrário, ao final se encontrará em que posição?
b) Se uma pessoa na posição P andar 4 unidades para a esquerda e, após, andar 7 unidades em sentido contrário, em que posição se encontrará?
c) Se uma pessoa na posição P andar 2 unidades para a direita e, após, andar 3 unidades em sentido contrário, em que posição se encontrará?
d) Se uma pessoa na posição P andar 3 unidades para a esquerda e, após, 3 unidades para a direita, ao final em que posição se encontrará?

O objetivo desta atividade é propiciar aos alunos a compreensão sobre orientação e localização de pontos em uma trilha, a partir de situações de deslocamento. Essa compreensão será de extrema importância para as atividades que seguem, nas quais os alunos deverão mobilizar estratégias que envolvam esses conceitos para construção do conhecimento sobre a representação dos números inteiros relativos por meio da reta numérica. Nesta situação os alunos poderão usar a figura para contar as "casas" da trilha e realizar os deslocamentos indicados em cada item. Poderão surgir algumas dificuldades por parte de alunos que não dominam muito bem, ou não conseguem se orientar quanto aos lados esquerdo e direito, aqui o pesquisador (mediador) auxiliará quanto a essa orientação, caso essas dificuldades apareçam.

Esperamos respostas como “parou duas casas atrás de P”, “parou 3 casas depois de P”, “parou uma unidade à esquerda de P”.

**Atividade 2:** Considere a figura abaixo:


a) Utilizando números, complete as casas em branco da figura acima. Como você nomearia as casas à esquerda da letra P?

b) Vamos trocar o nome da casa P? Qual nome você escolheria?

c) Se você tivesse que trocar a letra P por um número, qual você acharia mais adequado? Por quê?

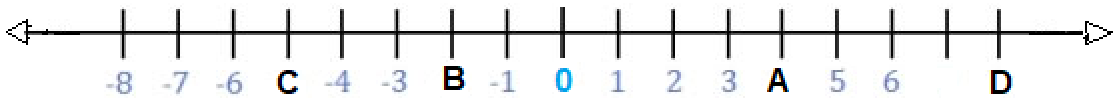
d) Uma pessoa deslocou-se 4 unidades para a direita e parou na posição +3. Qual era sua posição inicial?

e) Uma pessoa está na posição +1 e desloca-se 4 unidades para a direita. Qual será sua posição final?

O objetivo desta atividade é propor situações para que os alunos mobilizem conhecimentos para a construção da reta numérica. A cada item o aluno será levado a analisar e preencher elementos que estão faltando na trilha apresentada, de maneira que tais respostas contemplem a construção da reta.

Os alunos poderão utilizar as seguintes estratégias de resolução: no item a) espera-se que o aluno identifique os números inteiros negativos à esquerda de P; no item b) os alunos poderão responder “início, partida”, “origem” ou também “zero”, porém é no item c) que o aluno será levado a trocar a casa P por um número de fato, podendo aparecer novamente o “zero” junto a uma justificativa. Os itens d) e e) retomam estratégias de deslocamento semelhantes à atividade anterior. Acreditamos que, ao responder cada item desta atividade, o aluno poderá refletir e perceber que está representando este conjunto por meio da reta numérica.

**Atividade 3:** Observe a reta abaixo e responda:




a) Comparando esta reta com a trilha do exercício anterior, o que você consegue observar de diferente?

b) Quais são os números que estão representados pela letra:

A: ____ B: ____ C: ____ D: ____

Esta atividade tem por objetivo apresentar a reta numérica aos alunos, possibilitando que eles situem os pontos que estão faltando. Além disso, mostrar a eles que os números inteiros positivos podem ou não receber o sinal "+" em sua representação.

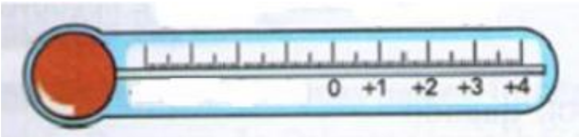
No item a) o aluno pode perceber algumas diferenças quanto ao tamanho do desenho, sua forma de representação, como também observar que os inteiros positivos não receberam o sinal de +, ou ainda que faltam alguns números na reta e que estão representados por letras do alfabeto. No item b) espera-se que eles observem a reta e completem com o número correspondente, utilizando ou não o "+" para os casos com inteiros positivos; para o ponto D alguns alunos podem se confundir e responder 7, pois o ponto foi ocultado do desenho, aparecendo apenas sua marcação; é uma tentativa de verificar a capacidade do aluno de observar que os espaços entre cada número possuem a mesma medida.

Ao final desta sessão o pesquisador retomará a forma de representar esses números na reta numérica, apresentando como ela pode ser construída na horizontal, abordando suas características como os sentidos para direita com os inteiros positivos e para a esquerda os inteiros negativos, a distância entre cada ponto da reta possuir a mesma unidade de medida, além de representar os inteiros positivos utilizando, ou não, o sinal de +. Toda essa construção será feita em conjunto com a turma, retomando discussões feitas ao longo das atividades da sessão.

### 3.4 Sessão 04

Continuando a sessão anterior, as atividades desta reforçam a representação dos números inteiros a partir da reta numérica, mas agora também no sentido vertical com a utilização do termômetro. São apresentadas ainda situações do cotidiano (modelos concretos), nas quais este conjunto é utilizado para interpretá-las. Possivelmente, o aluno já entenderá o uso do sinal " – "para representar situações que envolvam quantidades negativas.

**Atividade 1:** Observe a figura abaixo:



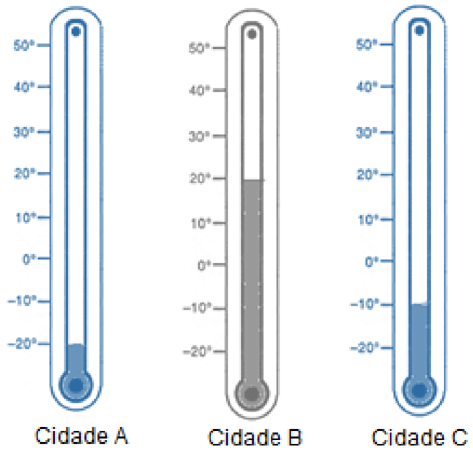

a) Você acha que está faltando algo na figura? Se sim, o quê?

b) Se você pudesse completá-la, o que acrescentaria?

O objetivo desta atividade é mostrar para o aluno um exemplo da reta numérica a partir de um modelo concreto que possivelmente pode estar presente em seu cotidiano (termômetro). O intuito é estimular o aluno para que ele relacione a imagem anterior com a representação da reta numérica no sentido horizontal, visualize a falta dos inteiros negativos e complete o desenho.

No item a) espera-se que os alunos identifiquem a falta dos números à esquerda do zero (inteiros negativos), visto que nas atividades da sessão anterior os alunos tiveram contato com a reta numérica, e a partir dessa percepção no item b) completem esses números na própria figura. Trata-se de um reinvestimento de conhecimentos previamente trabalhados em atividades da sessão anterior, porém, com outro tipo de representação.

**Atividade 2:** Uma situação em que os números negativos são utilizados é no registro de temperaturas abaixo de zero. Observe os registros dos termômetros abaixo:




a) Quais cidades registraram temperaturas positivas? Por quê?

b) Quantos graus o termômetro registrou em cada cidade?

c) Em qual dessas cidades você acha que fez mais frio? Qual delas estava mais quente? Justifique.

d) Você se lembra qual foi a temperatura mais fria que o termômetro registrou em sua cidade? E a mais quente?

Além de apresentar novamente um modelo concreto, esta atividade apresenta uma outra maneira de representação por meio da reta, agora no sentido vertical. Aqui os inteiros positivos também aparecem sem o sinal “+” para sistematização do uso dos sinais de + e – para representação dos números inteiros relativos.

As estratégias de resolução podem variar: no item a) o aluno pode justificar a temperatura positiva pelo fato de o termômetro estar de cor diferente, ou pelo número estar acima de zero; no item b) acredita-se que responderão numericamente, no item c) os alunos poderão usar justificativas de acordo com o “preenchimento” dos termômetros apresentados. Com a pergunta do item d), embora a resposta seja pessoal, o objetivo é verificar se o aluno consegue associar temperaturas maiores como mais quentes e menores como mais frias, lembrando de situações que já vivenciou. Esta atividade permite que os alunos trabalhem com o tratamento de informação, identificando e respondendo os itens a partir da imagem apresentada.

**Atividade 3:** Outra situação em que os números negativos são utilizados é referente ao sistema monetário. No extrato bancário, por exemplo, utiliza-se créditos (valores positivos) e débitos (valores negativos). Observe cada situação do extrato bancário abaixo e represente a partir de um número inteiro.

| Data | Movimentação da conta | Representação numérica |
|---|---|---|
| 01/10/2018 | Crédito de R$ 750,00 | |
| 02/10/2018 | Depósito de R$ 250,00 | |
| 05/10/2018 | Boleto pago de R$ 150,00 | |
| 06/10/2018 | Débito de R$ 25,00 | |
| 09/10/2018 | Saque de R$ 225,00 | |
| 11/10/2018 | Depósito de R$ 100,00 | |
| 15/10/2018 | Saque de R$ 800,00 | |

O objetivo desta atividade é apresentar para os alunos um outro exemplo de situação cotidiana, o extrato bancário. Nesta atividade os alunos precisarão interpretar as situações descritas e representá-las com um número inteiro, possivelmente não mais utilizando o sinal “+” para quantidades positivas, uma vez que ao final da terceira sessão, no momento de construção da reta numérica com os alunos, o pesquisador terá indicado a possibilidade de representar os números inteiros positivos utilizando ou não o sinal de mais. Trata-se de uma situação de reinvestimento, pois os alunos já foram apresentados a esses conceitos e agora poderão retomá-los.

**Atividade 4:** No final do dia 15/10 esta pessoa ficou com um saldo positivo ou negativo no banco? De quantos reais?

O objetivo com esta atividade é permitir que o aluno elabore alguma estratégia para verificar as perdas e ganhos do personagem da atividade anterior, faça as operações aritméticas e identifique se uma quantidade é positiva ou negativa.

Para a resolução desta atividade, os alunos poderão somar todas as perdas e todos os ganhos separadamente para depois compará-los. Nesse caso como o resultado final é uma quantidade negativa, espera-se que os alunos já tenham compreendido a utilização do sinal de menos para representá-la. Os alunos poderão também montar e resolver uma expressão numérica. Pelo fato de mobilizar conhecimentos já trabalhados de forma semelhante em sessões anteriores, consideramos uma situação de reinvestimento.

**Atividade 5:** Para cada situação abaixo represente utilizando um número inteiro:

| | |
|---|---|
| a) 5 graus abaixo de zero ________ | f) 5 unidades à esquerda do zero ________ |
| b) 10 graus positivos ________ | g) recuar seis metros ________ |
| c) Um débito de R$ 350,00 ________ | h) algum valor positivo ________ |
| d) Uma dívida de R$ 100,00 ________ | i) o dobro de um valor negativo ________ |
| e) 4 unidade à direita do zero ________ | j) o triplo de prejuízo do valor inicial _______ |

Esta atividade tem por objetivo apresentar algumas situações concretas e algébricas para que o aluno utilize números inteiros e/ou letras para representá-las. A utilização de números inteiros para interpretar situações do cotidiano vem sendo trabalhada ao longo da sequência, aqui é esperado que os alunos já tenham se apropriado dessas formas de representação.

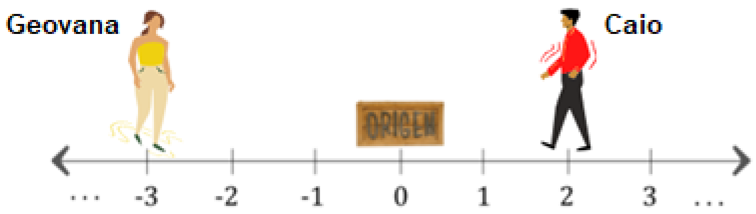
As variações de resolução novamente podem aparecer nos casos em que aparecem os inteiros positivos, pois alguns alunos podem optar por não utilizar o sinal "+". Nos itens h), i) e j) é possível surgir algumas dificuldades com relação aos termos dobro e triplo; o pesquisador mediará essa situação, retomando as ideias de utilização de uma letra para representar um valor desconhecido.

No fechamento desta sessão o pesquisador retomará as ideias gerais sobre a reta numérica, reforçando sua outra forma de representação, agora no sentido vertical, além de institucionalizar o uso do sinal de menos para representação dos inteiros negativos, uma vez que antes os alunos estavam acostumados apenas a utilizá-lo para representar subtrações.

## 3.5 Sessão 05

Esta sessão apresenta o conceito de módulo de um número inteiro, utilizando a reta numérica no sentido horizontal e o conceito de distância. Acredita-se que neste momento os alunos já estarão habituados com a representação dos inteiros relativos por meio da reta numérica, bem como com os números inteiros positivos sendo representados sem o sinal “+”. Após as atividades será realizada a institucionalização sobre a definição de módulo de um número inteiro.

**Atividade 1:** Tomando a ORIGEM como ponto de referência, responda:



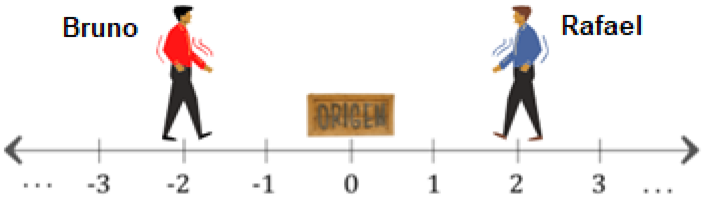

a) Quantas são as unidades de distância de cada um até a origem?

b) Quem está mais perto da origem? Por quê?

Por meio da situação de posição e deslocamento, objetiva-se que os alunos comecem a fazer conjecturas que contribuirão posteriormente para introdução do conceito de módulo de um número inteiro. O conceito de distância será trabalhado nesta atividade durante seu desenvolvimento.

Esperamos que no item a) o aluno observe a posição dos personagens da reta numérica e conte sua distância até a origem, uma vez que, na institucionalização da sessão 3, os alunos já tiveram conhecimento de que na reta numérica a distância entre os números possui mesma medida. No item b) é possível que eles visualizem por meio do desenho quem está mais próximo da origem, porém a justificativa poderá ser feita pela quantidade de unidades de distância de cada um. Um possível erro que pode aparecer é o aluno responder “-3” para distância da personagem em amarelo, neste momento será importante a mediação do pesquisador para trabalhar o conceito de distância com os alunos.

**Atividade 2:** Na figura abaixo, Bruno e Rafael estão em pontos diferentes sobre a reta numérica, caminhando em direção à origem. Responda:




a) Quantas unidades de distância cada um deles está da origem?

b) Quem está mais próximo da origem?

c) Você consegue observar algo em comum referente às posições de Bruno e de Rafael com relação à origem? Justifique.

Juntamente com a atividade anterior, novamente por situações de posição sobre a reta numérica, esta atividade tem por objetivo apresentar situação em que os personagens distam unidades iguais da origem para que os alunos possivelmente iniciem a construção do conceito de módulo de um número inteiro, com o auxílio do conceito de distância.

Para resolução do item a) os alunos poderão utilizar a mesma estratégia de observação e contagem das unidades a partir da posição dos personagens, assim como na atividade anterior. A partir do questionamento do item b) os alunos que ainda não perceberam, perceberão que os personagens estão à mesma distância da origem e, no item c) eles terão que explicitar tal conjectura. Novamente o aluno pode diferenciar, erroneamente, apresentando como resposta o ponto da reta em que cada personagem se encontra, –2 e 2, isto é, não considerando a distância de 2 unidades para ambos.

Após essas duas primeiras atividades será feita uma discussão sobre as percepções dos alunos e uma apresentação/institucionalização do conceito de módulo ou valor absoluto de um número inteiro retomando as situações presentes na segunda atividade.

Na atividade 2, mesmo que Bruno e Rafael estavam em lados opostos da reta, os dois estavam à mesma distância da origem, ou seja, duas unidades da origem. A distância representada entre um ponto da reta numérica até a origem é chamada de módulo ou valor absoluto do número inteiro. Podemos representar a situação da atividade 2 da seguinte forma: $|-2| = 2$, lê-se, módulo de menos dois é igual a dois; $|+2| = 2$, lê-se, módulo de mais dois é igual a dois. Discutiremos com os alunos que o módulo de um número diferente de zero é sempre positivo e que o módulo de zero é o próprio zero.

Em seguida serão apresentadas duas novas atividades para os alunos praticarem esses conceitos recém-apresentados.

**Atividade 3:** Determine:

| | | |
|---|---|---|
| a) $\lvert +7 \rvert =$ _____ | f) $\lvert -45 \rvert =$ _____ | k) $\lvert a \rvert + \lvert -b \rvert =$ _____ |
| b) $\lvert 8 \rvert =$ _____ | g) $\lvert 0 \rvert =$ _____ | l) $\lvert b \rvert + \lvert -b \rvert =$ _____ |
| c) $\lvert -2 \rvert =$ _____ | h) $\lvert -6 \rvert + \lvert 4 \rvert =$ _____ | |
| d) $\lvert -75 \rvert =$ _____ | i) $\lvert a \rvert =$ _____ | |
| e) $\lvert 10 \rvert =$ _____ | j) $\lvert -b \rvert =$ _____ | *Com a e b pertencentes aos naturais. |

Esta atividade tem por objetivo permitir que o aluno encontre o módulo das situações apresentadas em cada item, bem como se familiarizem com a representação utilizada para módulo de um número.

Para resolução é esperado que os alunos encontrem esses módulos a partir da definição do item a) ao item g); do item h) ao l) os alunos deverão encontrar o módulo e resolver pequenas operações, além de estenderem a definição para as letras apresentadas. Será possível verificar se o aluno compreendeu o conceito de módulo, se conseguir aplicá-lo de forma genérica como nos casos dos quatro últimos itens.

**Atividade 4:** Responda:

a) Qual é o módulo de +12?

b) Qual é o valor absoluto de – 5?

c) Quais números inteiros têm módulo igual a – 6? Justifique.

d) Quais números inteiros têm valor absoluto igual a 8?

O objetivo desta atividade é apresentar outras situações que façam com que os alunos mobilizem conhecimentos do conceito de módulo ou valor absoluto e que não são representadas com “|    |”, para que eles compreendam que podem aparecer de diferentes formas.

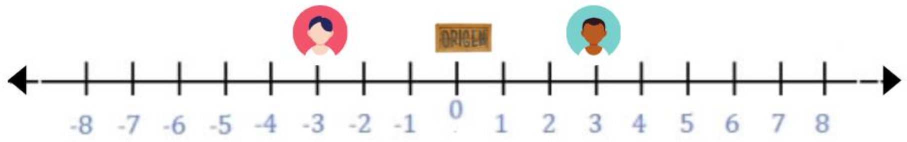
Para a resolução dos itens a) e b) os alunos utilizarão a definição de módulo. Para o item c) o aluno deverá perceber que não há um número para o qual o resultado de seu módulo seja um número inteiro negativo e, para o item d) perceber que os números opostos possuem o mesmo valor absoluto, retomando as ideias da atividade 2.

### 3.6 Sessão 06

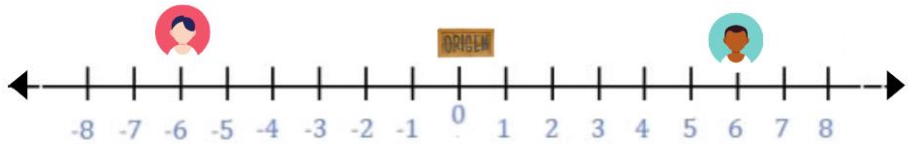
Utilizando a ideia da reta numérica estas atividades têm por objetivo favorecer a construção, pelos alunos, do conceito de oposto ou simétrico de um número inteiro. Ao final da sessão é prevista a institucionalização relativa a esse conceito, além da explicação sobre esses números também serem chamados de inteiros relativos.

**Atividade 1:** Vamos observar as diferentes posições de duas pessoas sobre a reta numérica:

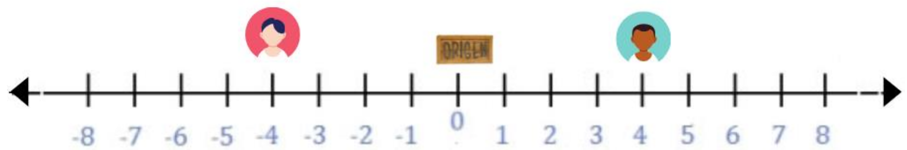
**1ª Situação**




**2ª Situação**




**3ª Situação**




a) As 3 situações acima têm algo em comum? Se sim, o quê?

b) Indique na tabela abaixo qual posição da reta está sendo ocupada por cada bonequinho nas três situações:

| |  |  |
|---|---|---|
| 1ª Situação | | |
| 2ª Situação | | |
| 3ª Situação | | |

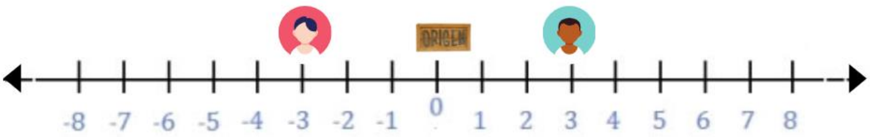
c) Calcule e compare o módulo da posição de cada bonequinho em cada situação:

d) O que você consegue afirmar sobre esses módulos do item anterior?

O objetivo desta atividade é possibilitar que o aluno observe semelhanças com relação às posições dos personagens sobre a reta numérica nas diferentes situações apresentadas. Essas semelhanças auxiliarão na construção do conceito de oposto ou simétrico de um número inteiro.

Para resolução do item a) espera-se que os alunos consigam observar que nas três situações os personagens sempre estão à mesma distância da origem, embora em lados contrários. No item b) pedimos para indicarem a posição em cada situação para que, completada a tabela, observem regularidades presentes. No item c), além de retomar o cálculo do módulo, o aluno poderá reforçar a percepção que, em distância, os personagens possuem a mesma quantidade de unidades, para que no item d) relate isso e a discussão sobre oposto de um número inteiro continue se encaminhando. As conjecturas feitas pelos alunos sobre cada situação servirão como disparadoras para introduzir o conceito desejado.

**Atividade 2:** Retomando a situação 1, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):




a) ( ) Se o bonequinho azul deslocar 2 unidades para a direita, e o vermelho 2 unidades para a esquerda, então os dois estarão à mesma distância da origem.

b) ( ) Se o vermelho deslocar 1 unidade para a direita e o azul 3 para a esquerda, os dois continuam com a mesma distância da origem.

c) ( ) Sempre que os bonequinhos caminharem a mesma quantidade em sentidos opostos, os dois estarão à mesma distância em relação à origem.

Com esta atividade temos por objetivo permitir que o aluno generalize as situações relacionadas ao conceito de oposto ou simétrico. É possível que durante a resolução de cada item surjam discussões sobre as possibilidades de resposta, já encaminhando para a institucionalização. Nesta atividade embora esteja claro o que o aluno precisa responder, será necessário refletir sobre as possíveis situações colocadas em cada item, para verificar sua validade, provavelmente, com base nas atividades anteriores; o pesquisador, por meio da mediação, retomará as ideias das atividades anteriores e discutirá com os alunos sobre possíveis respostas.

Para a resolução, os alunos poderão discutir entre os colegas justificativas para compartilhar com a turma posteriormente.

De forma semelhante à sessão anterior, após essas duas primeiras atividades será feito um momento de apresentação/institucionalização do conceito de oposto ou simétrico de um número inteiro, utilizando as situações respondidas pelos alunos.

Discutiremos com os alunos que na reta numérica, pontos que têm a mesma distância da origem O são ditos opostos ou simétricos. Por exemplo, o oposto ou simétrico do número positivo +3 é o número negativo – 3, como representado pelos bonequinhos vermelho e azul na primeira situação da atividade 1. O oposto do número negativo – 6 é o número positivo +6, como na segunda situação.

Na reta com os números inteiros, o zero representa a origem e também é chamado de ponto de simetria da reta, pois qualquer ponto da reta que considerarmos, sempre haverá outro ponto com a mesma distância que este como relação a origem. Para esse momento de discussão o pesquisador utilizará como apoio a representação da reta numérica no quadro da sala.

Após essa apresentação/institucionalização do conceito desejado, novas atividades serão apresentadas:

**Atividade 3:** Determine:

| | |
|---|---|
| a) O oposto de – 27 _____ | d) O simétrico de x _____ |
| b) O simétrico de 9 _____ | e) O oposto de – a _____ |
| c) O oposto de – 13 _____ | f) O oposto de 0 _____ |

O objetivo desta atividade é possibilitar que o aluno mobilize os conhecimentos construídos na institucionalização feita após a atividade 2; trata-se de um reinvestimento dos conceitos estudados.

**Atividade 4:** Para cada item abaixo, escreva uma situação oposta e seu número correspondente, como indicado no primeiro item já resolvido:

a) Um lucro de R$ 20,00 (+20): <u>Um prejuízo de R$ 20,00 (–20)</u>___

b) 3 graus abaixo de zero (– 3): ______________________________

c) 50 metros acima do nível do mar (+50): ________________________________

d) 5 andares acima do térreo (+5): ______________________________________

e) Um débito de R$ 35,00 (– 35): ________________________________________

Além de novamente retomarmos situações cotidianas que utilizam os números inteiros relativos, nesta atividade temos por objetivo trabalhar o conceito de oposto de um número inteiro, estimulando a criatividade do aluno ao pensar em situações contrárias às apresentadas.

Para resolução de cada item, os alunos pensarão em situações contrárias podendo utilizar termos como “um prejuízo”, “graus acima de zero”, “abaixo do térreo”, “subsolo”, entre outros. Aqui espera-se que o aluno já tenha conhecimentos suficientes para criar situações contrárias e saiba representá-las numericamente, novamente, caracterizando uma situação de reinvestimento.

### 3.7 Sessão 07

Esta sessão tem por objetivo apresentar situações para que os alunos comparem números inteiros, entendendo cada contexto e utilizando uma estratégia qualquer não formalizada ainda. Novamente será retomada a representação de situações a partir de um número inteiro e possivelmente justificativas para tais comparações. Ainda não será feita qualquer relação com as regras estabelecidas para comparação de números inteiros, mas é possível que alguns alunos comecem a observar algumas correspondências e façam conjecturas.

**Atividade 1:** Observe cada situação abaixo e responda:

1ª Situação – Ana possui R$ 10,00 e Lucas possui R$ 7,00

Quem tem mais dinheiro? Quem tem menos dinheiro?

2ª Situação – Márcia está com um crédito de 80,00 no banco, já Jorge está com um saldo negativo de R$ 100,00.

Quem está com menos dinheiro no banco? Justifique.

3ª Situação – Certo dia a cidade de Vacaria registrou 4 graus abaixo de zero em seu termômetro, enquanto isso, Passo Fundo registrou 2 graus positivos.

Qual cidade registrou a maior temperatura? Por quê?

4ª Situação – Mateus está devendo R$ 10,00 na cantina de sua escola, enquanto Júlia deve R$ 40,00.

Quem está devendo mais?

Você acha que é melhor ter uma dívida de 10 reais ou de 40 reais? Por quê?

Nesta atividade serão apresentadas algumas situações do cotidiano seguidas de questionamentos para que os alunos estabeleçam comparações entre os dados de cada situação mobilizando alguma estratégia pessoal, justificando como for possível, da maneira que conseguir, ou poderão estabelecer algum tipo de relação com estratégias mobilizadas em sessões anteriores, como por exemplo do contexto bancário e registro de temperaturas.

**Atividade 2:** Represente cada situação do exercício anterior utilizando um número inteiro:

1ª Situação – Ana: _____ Lucas: _____

2ª Situação – Márcia: _____ Jorge: _____

3ª Situação – Vacaria: _____ Passo Fundo: _____

4ª Situação – Mateus: _____ Julia: _____

Esta é apenas uma atividade inicial que tem por objetivo possibilitar ao aluno a representação das situações apresentadas, a partir de um número inteiro. Como é uma situação para retomar ideias anteriores, e que os alunos já possuem conhecimento, é uma situação de reinvestimento.

Para resolução os alunos representarão numericamente, utilizando, ou não, o sinal “+” para os números inteiros positivos.

**Atividade 3:** Represente utilizando os sinais de maior (>), menor (<) ou igual (=) as situações do exercício anterior:

1ª Situação: ____ ...... ____ 2ª Situação: ____ ..... ____

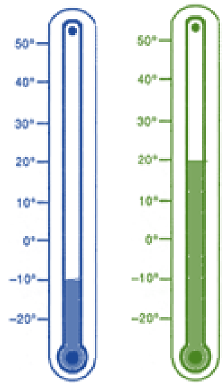
3ª Situação: ____ ..... ____ 4ª Situação: ____ ..... ____

Com esta atividade queremos introduzir os sinais de maior (>), menor (<) e igual (=) para comparação de números inteiros a partir de situações apresentadas na sessão. Os alunos já conhecem e utilizam esses sinais para comparação de números naturais.

Para a resolução poderão surgir algumas dificuldades referentes aos próprios sinais de comparação, pois isso gera um pouco de confusão nos alunos até mesmo no conjunto dos números naturais. Quanto às dificuldades de comparação entre os números inteiros relativos, acredita-se que os alunos poderão retomar suas justificativas apresentadas na atividade 1 e façam apenas a representação utilizando os sinais de comparação.

**Atividade 4:** Observe as temperaturas registradas nos termômetros abaixo e responda:

a) Termômetros 1 e 2:

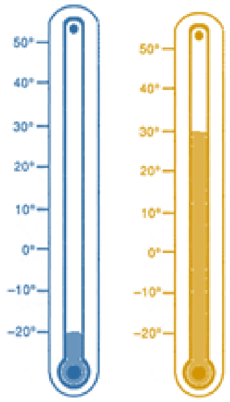



Qual termômetro registrou a temperatura mais baixa?

Qual deles apresenta a temperatura mais quente?

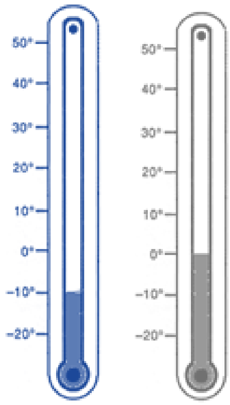
Qual termômetro registrou o menor número? Por quê?

b) Termômetros 2 e 3:




Qual termômetro apresenta menor temperatura? Por quê?

c) Termômetros 3 e 4:




Qual termômetro registrou a temperatura mais alta? Por quê?

Qual deles apresenta o menor número?

O objetivo desta atividade é utilizar o modelo concreto (registro de temperatura em termômetros) para que os alunos mobilizem estratégias de comparação entre números inteiros relativos. A diferença é que aqui os alunos terão o auxílio da reta numérica no sentido vertical, para análise da comparação, desta forma a figura servirá como uma variável didática. Em atividades de sessões anteriores, já foram utilizados termômetros no sentido vertical, mas apenas para que o aluno indicasse a temperatura registrada, nesta atividade a figura passa a ser uma variável didática, pois servirá como suporte para comparação.

Para a resolução dos itens a), b) e c) os alunos poderão utilizar estratégias que vêm formulando nas atividades anteriores, bem como observarem a representação da imagem dos termômetros. Os questionamentos feitos em cada item podem permitir que o aluno comece a estabelecer alguma relação e a fazer conjecturas sobre regras gerais para comparação entre números inteiros.

**Atividade 5:** Utilizando os sinais de maior (>), menor (<) ou igual (=) preencha os espaços abaixo referente a atividade anterior:

a) – 10 ___ +20 b) – 20 ___ +30 c) – 10 ___ 0

Semelhante à atividade 3, o objetivo desta é retomar a utilização dos sinais de maior (>), menor (<) e igual (=) para comparação dos números inteiros, mas nesta atividade os números das situações anteriores já aparecem para que os alunos apenas coloquem os sinais de comparação. Neste momento, por meio da mediação, o pesquisador retomará esses sinais (>, <, =) caso os alunos apresentem dificuldades em sua utilização, bem como levantará discussões sobre as estratégias utilizadas por alguns estudantes para comparação, verificando sua validade.

No fechamento desta sessão, o pesquisador não falará sobre as regras de comparação, mas listará aquelas utilizadas pelos alunos, para que as atividades da próxima sessão propiciem a institucionalização dessas regras.

### 3.8 Sessão 08

Esta sessão visa complementar a anterior sobre comparação de números inteiros. Nesta sessão os estudantes terão o auxílio de duas formas de representação da reta graduada (horizontal e vertical) para observar a disposição dos números inteiros. Visa-se a compreensão das regras de comparação desses números, e a elaboração de conjecturas e inferências na última atividade, caminhando assim para a institucionalização dessas estratégias.

**Atividade 1:** A escola em que Juca, Maria e Luísa estudam possui ar-condicionado em todas as salas de aula. Certo dia o ar-condicionado da sala deles estava ligado na temperatura de 19º C. Os alunos estavam reclamando de frio e decidiram falar com a professora:

**I. Juca pediu para a professora "diminuir o ar-condicionado"**

**II. Maria disse que a professora deveria "abaixar a temperatura"**

**III. Luísa falou que a professora deveria "aumentar a temperatura"**

Diante da fala dos três alunos, quem a professora deveria atender para resolver o "problema de frio" dos alunos? Por quê?

O objetivo desta atividade é apresentar uma situação do cotidiano, bem próxima da realidade dos alunos. Esta situação, comumente, gera confusão por conta de termos que causam equívocos de interpretação como "diminuir a temperatura" ou "aumentar o ar-condicionado".

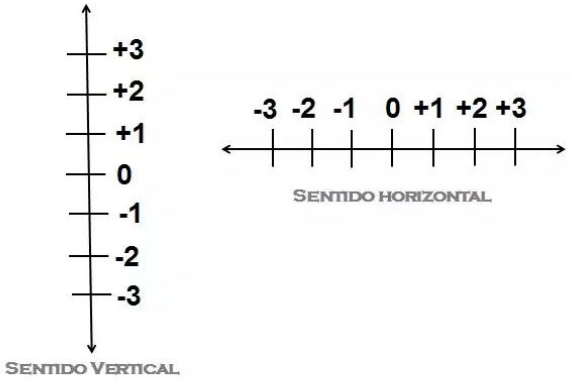
Para resolução espera-se que os alunos compreendam que quanto maior a temperatura, mais quente fica o ambiente, identificando o item III como o correto e justificando. As ideias de temperatura já foram trabalhadas em atividades de sessões anteriores, assim é possível que os alunos estabeleçam relações. Ainda assim, podem aparecer respostas erradas, principalmente julgando o item I como correto, no sentido de "diminuir o ar-condicionado" como se diminuísse a potência do ar e não a temperatura do ambiente, assim ficaria mais quente e resolveria o "problema de frio" dos alunos.

Os alunos deverão fazer inferências sobre essa situação e justificar sua resposta ao questionamento, o que auxiliará na validação das regras gerais de comparação entre números inteiros relativos. Essa atividade poderá gerar o debate entre os alunos sobre as possíveis compreensões, permitindo que eles comparem entre si suas justificativas.

**Atividade 2:** Com relação à atividade 1, caso a professora atendesse o pedido de Maria o que aconteceria? Justifique sua resposta.

Esta atividade tem por objetivo continuar as discussões sobre a situação anterior, apresentando para os alunos a afirmação de Maria, para que eles também justifiquem o porquê não funcionaria, semelhante como justificaram no questionamento anterior. Em sua resolução esperamos que os alunos compreendam que "abaixar a temperatura" torna o ambiente mais frio. Esta atividade continuará estimulando o debate e a reflexão sobre a situação apresentada e, junto a mediação do pesquisador, contribuirá para a compreensão das regras de comparação posteriormente.

**Atividade 3:** Observe duas formas de representação da reta numérica para o conjunto dos números inteiros abaixo.




Represente utilizando os sinais de maior (>), menor (<) ou igual (=) as seguintes situações:

a) +2 está acima de – 1.

b) + 3 fica à direita de 0

c) – 1 ºC é uma temperatura maior do que – 3 ºC

d) – 1 está acima de – 2.

e) A altitude – 2 está abaixo do nível do mar (0).

f) Um crédito de 3 reais é melhor do que um débito de 2 reais.

O objetivo desta atividade é possibilitar que o aluno utilize duas formas de representação da reta numérica para criar estratégias de comparação entre números inteiros. Para resolução os alunos utilizarão os sinais de maior, menor ou igual. Nos itens a), c), d) e e) os alunos poderão recorrer a reta no sentido vertical, no item b) no sentido horizontal e no item f) possivelmente terão capacidade de responder utilizando qualquer uma das representações, juntamente com conhecimentos trabalhados em sessão anterior. Esta atividade, junto a mediação feita pelo pesquisador, permitirá que os alunos comecem a estabelecer relações mais gerais sobre comparação entre dois números inteiros.

A imagem com a reta numérica representada em ambos os sentidos (horizontal e vertical) aparece como uma variável didática importante desta atividade, pois a cada item para comparação, as palavras-chave presentes permitem que a situação seja "confrontada" em uma das retas apresentadas (com exceção do item f)). O aluno estabeleceria relações totalmente diferentes e, talvez, apresentaria mais dificuldades sem o auxílio dessas representações.

**Atividade 4:** Analisando as situações anteriores responda as sentenças abaixo dando um exemplo em cada uma:

a) Quando comparamos um número positivo com um número negativo, o maior deles é sempre o:

( ) positivo ( ) negativo

Exemplo: ________________

b) Quando comparamos um número negativo com o zero, o maior deles é sempre o:

( ) negativo ( ) zero

Exemplo: ________________

c) Quando comparamos um número positivo com o zero, o maior deles é sempre o:

( ) zero ( ) positivo

Exemplo: ________________

d) Quando compramos dois números positivos, o maior deles é o que possui o módulo:

( ) maior ( ) menor

Exemplo: ________________

e) E quando comparamos dois números negativos, qual deles é o maior?

Diante das conjecturas e estratégias mobilizadas anteriormente pelo aluno, o objetivo desta atividade é estimular o pensamento de generalização quanto às regras de comparação entre números inteiros. Nos itens a), b) e c) o aluno poderá responder e exemplificar facilmente, retomando a representação da reta numérica no sentido vertical da atividade anterior, pois como foi trabalhado ao longo da sequência essa representação, o aluno possivelmente estará habituado em identificar nesta reta qual número é maior ou menor. O item d) retoma o conceito de módulo, aqui o aluno primeiramente poderá escolher dois números inteiros positivos, calcular seu módulo e analisar para responder. No item e) o aluno poderá justificar também pela orientação na reta numérica, lembrando que para números inteiros negativos o maior é sempre aquele que fica mais próximo do zero.

Esta atividade permitirá que os alunos retomem ideias trabalhadas no início desta e na sessão anterior para responder cada item e, com os questionamentos feitos pelo pesquisador durante a mediação sobre os exemplos que eles apresentarão, solicitando contraexemplos ou que eles justifiquem suas afirmações, poderá mediar uma discussão de forma conjunta com toda a turma.

Ao final dessa sessão serão retomadas as estratégias feitas pelos alunos desde a sessão anterior, verificando a validade das mesmas e institucionalizando as regras de comparação de números inteiros utilizando ideias da reta numérica em duas formas de representação (horizontal e vertical).

### 3.9 Sessão 09

Nesta sessão o aluno será levado a observar e completar sequências que contêm números inteiros negativos e positivos, representar situações utilizando um número (retomada da utilização do sinal "–" para quantidades negativas), e também a ordenação de números inteiros, para que sejam verificadas as estratégias mobilizadas na compreensão, comparação e ordenação de números inteiros.

**Atividade 1:** Complete os espaços em branco das sequências abaixo:

a)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - 8 | - 6 | | - 2 | 0 | | | | |

b)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | - 25 | - 20 | | | - 5 | | 5 | | |

c)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| - 20 | | - 14 | - 11 | | | - 2 | | | 7 |

O objetivo desta atividade é retomar ideias de percepção de regularidade tanto sequenciais quanto da disposição e orientação dos números inteiros relativos. Como já foram bastante trabalhadas as ideias da reta numérica, esperamos que os alunos as utilizem quanto à orientação das sequências apresentadas.

Para a resolução é esperado que os alunos se orientem quanto aos números inteiros negativos à esquerda e os inteiros positivos à direita e, completem os espaços em branco. Apesar de o enunciado deixar claro onde o aluno deve chegar, o mesmo deverá observar a regularidade com que os números estão aparecendo em cada sequência, além disso, observar também a disposição desses números relacionando com a representação dos números inteiros na reta numérica, o que demandará reflexão e discussão entre seus pares.

Observe o saldo bancário de 5 pessoas para responder às atividades 2, 3 e 4:

- João: saldo negativo de R$ 300,00
- Marta: saldo positivo de R$ 220,00
- Lúcia: saldo positivo de R$ 180,00
- Marcelo: saldo negativo de R$ 200,00
- André: saldo zero

**Atividade 2:** Represente o saldo de cada pessoa utilizando o sinal adequado.

O objetivo da atividade 2 é retomar as noções da utilização dos sinais “+” e “–“ para representação de quantidade positivas e negativas. Trata-se de uma situação reinvestimento, pois serve como retomada de conhecimentos construídos ao longo da sequência. Na resolução os alunos poderão representar as quantidades positivas com ou sem o sinal de +.

**Atividade 3:** Responda:

a) Quem possui a maior dívida com o banco?

b) Quem tem mais dinheiro no banco?

A atividade 3 retoma ideias de comparação entre números inteiros, a partir de um modelo concreto, neste caso, situação bancária. Trata-se de uma situação de reinvestimento utilizando dados da atividade anterior.

**Atividade 4:** Escreva esses saldos em ordem CRESCENTE.

Esta é uma atividade que tem por objetivo levar os alunos a utilizar as estratégias já criadas de comparação de números inteiros para ordenar os números apresentados, além disso, as ideias de orientação sobre a reta numérica também poderão ser mobilizadas aqui.

**Atividade 5:** Observe o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Responda:

a) Qual é o menor número inteiro positivo?

b) Qual é o maior número inteiro positivo?

c) Qual é o menor número inteiro negativo?

d) Qual é o maior número inteiro negativo?

O objetivo desta atividade é possibilitar que os alunos reflitam sobre características dos elementos pertencentes ao conjunto Z, que foram trabalhadas ao longo de toda a sequência. Para a resolução os alunos farão inferências mobilizando conhecimentos que foram construídos ao longo da sequência, como o conceito de um número inteiro ser maior ou menor do que o outro. Além disso, terão suporte da representação do conjunto entre chaves para análise.

Trata-se de uma situação de reinvestimento, para retomar algumas características dos números inteiros relativos, bem como estratégias de comparação.

**Atividade 6:** Organize os números abaixo em ordem DECRESCENTE:

**– 12 – 3 4 +2 0 6 – 8**

Semelhante ao objetivo da atividade 4, esta permite que os alunos mobilizem as estratégias de comparação de números inteiros para ordenar os números apresentados do maior para o menor. Para a resolução os alunos poderão ordenar esses números como o enunciado pede, classificando do maior para o menor, ou mobilizar a mesma estratégia da atividade 4 e depois escrever esta ordenação "ao contrário" como resposta final. Poderão também iniciar a representação colocando o 0 no centro e organizando os números a disposição comum na reta numérica e por fim, organizar de forma inversa (do maior para o menor).

## 3.10 Sessão 10

Esta sessão tem por objetivo retomar alguns elementos dos problemas iniciais que trabalharam com ideias algébricas e apenas introduzir noções de adição e subtração de números inteiros por meio da reta numérica.

**Atividade 1:** Vamos retomar a seguinte questão: 8 + ___ = +6. Uma maneira de interpretá-la, pode ser por meio da reta numérica.

**1º passo:** desenhe uma reta numérica com no mínimo 9 unidades positivas, 9 negativas e o zero em sua origem;

**2º passo:** marque o ponto +8 e pense na seguinte situação: uma pessoa estava na posição +8 na reta e deslocou-se certa quantia, de modo que parou na posição +6.

Quantas unidades e para qual sentido ela se deslocou para chegar nessa posição?

Diante de sua resposta anterior, complete: 8 + ___ = +6.

Esta atividade tem por objetivo retomar um item presente na segunda atividade da 1ª sessão para introduzir ideias iniciais da operação de adição por meio da reta numérica. A situação de deslocamento apresentada nos passos da atividade, também foi trabalhada em atividades da 3ª sessão.

Para resolução, espera-se que, com o auxílio da reta numérica desenhada por eles, os alunos façam o deslocamento e cheguem a respostas do tipo "deslocou-se duas unidades para a esquerda" ou "duas unidades para trás", e assim completem o espaço em branco com – 2. Aqui o pesquisador reforçará sobre os sentidos da reta numérica: esquerdo (←) negativo, direito (→) positivo. O pesquisador mediará uma discussão sobre a representação com o sinal "+" ou "–" de acordo com o deslocamento para a direita ou esquerda.

Esta atividade permitirá que o aluno mobilize diversas estratégias trabalhadas em sessões anteriores, como a construção da reta numérica e o deslocamento sobre essa reta, dessa forma refletindo e discutindo sobre suas escolhas.

**Atividade 2:** Utilizando o mesmo raciocínio do exercício anterior, complete:

a) 2 + 7 = ____

Estava na posição ____, deslocou-se ____ unidades para a ___________ e parou na posição ____.

b) 5 – 7 = ____

Estava na posição ____, deslocou-se ____ unidades para a ___________ e parou na posição ____.

c) – 2 + (– 4) = ____

Estava na posição ____, deslocou-se ____ unidades para a ___________ e parou na posição ____.

Esta atividade tem por objetivo permitir que o aluno continue utilizando estratégias da atividade anterior, mas que agora compreenda também a operação de subtração. Para resolução o aluno poderá desenhar, ou apenas imaginar, a reta numérica para realizar os deslocamentos e preencher os espaços em branco. Acreditamos que as estratégias utilizadas pelos alunos nesta atividade contribuirão para a construção de ideias iniciais de adição e subtração.

**Atividade 3:** Utilizando qualquer estratégia, calcule:

a) (– 5) + (+3) = ____  b) (– 2) + (– 2) = ____  c) (+2) + (+8) = ____  d) (+7) + (– 3) = ____

O objetivo desta atividade é permitir que o aluno aplique estratégias sistematizadas nas duas atividades anteriores, ou utilize novas estratégias para realizar as operações de adição e subtração. Embora a atividade permita outras estratégias para resolução, acreditamos que os estudantes utilizarão as ideias de deslocamento na reta numérica como suporte por estas terem sido apresentadas a eles. Optamos por apresentar os sinais de todos os números e o sinal da operação para que o aluno possa situar com maior facilidade esses pontos, caso utilize a estratégia da reta numérica.

A discussão entre os alunos e o pesquisador, por meio da mediação, será fundamental para os encaminhamentos desta atividade.

**Atividade 4:** Retomando o problema dos cartões de Nathan:
Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida perdeu 9 cartões e na segunda ganhou 6. Responda:
a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?
b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria?
c) Para Nathan não terminar o jogo devendo nenhum cartão, com quantos cartões no mínimo ele deveria começar?

A quarta atividade, além de retomar o problema inicial apresentado na primeira sessão, tem por objetivo permitir que os alunos realizem a operação, de fato, não respondendo apenas com palavras chaves como "devendo", "faltando", como feito na primeira sessão.

Para a resolução dos itens a) e b) esperamos que o estudante monte a expressão numérica a partir do enunciado e a resolva, possivelmente com o suporte da reta numérica. Para o item c) o aluno poderá também montar uma expressão ou interpretá-la por meio de palavras chaves, por exemplo: "Perdeu nove e ganhou seis → $-9 + 6 = -3$, então ele teria que começar com pelo menos 3 cartões para não ficar devendo nenhum".

Ao retomar o problema apresentado na primeira sessão, o objetivo é que os alunos utilizem os conhecimentos adquiridos sobre adição e subtração de números inteiros para responder de uma forma diferente apresentada na primeira sessão.

### 3.11 Sobre a classificação das situações

As atividades presentes na sequência didática elaborada têm potencial para permitir que os alunos reflitam, discutam e infiram para construir seus conhecimentos a respeito do objeto matemático em questão. Acreditamos que grande parte dessas atividades possuem elementos com potencial para que sejam vividas de forma adidática pelos alunos, pois poderão gerar a reflexão e o debate entre eles, fazendo com que perpassem pelas dialéticas apresentadas no capítulo 2 (ação, formulação e validação).

Por exemplo, a atividade 1 da primeira sessão apresenta uma situação familiar aos alunos de uma brincadeira que eles conhecem – e até mesmo costumam jogar na escola durante o intervalo – e que eles têm condições de que, com seus conhecimentos prévios, possam mobilizar estratégias iniciais para resolvê-la. Nos itens seguintes desta mesma atividade, aparece uma situação em que os números inteiros negativos começam a ser trabalhados, talvez o aluno não tenha condições de responder imediatamente, mas pelo fato de ele já estar envolvido com a situação, o interesse de buscar uma resposta, ainda que errônea para estes itens, fará com que ele reflita e discuta com os seus pares, vivenciando, assim, uma situação adidática. Ao longo da sequência há outras atividades que possibilitarão isso aos alunos.

Um fator muito importante para que uma situação tenha potencial para ser vivida como adidática pelos alunos é a devolução, isto é, faz-se necessário que o professor escolhas boas atividades, não tão difíceis, porém, não tão fáceis, para que despertem o interesse do aluno. A devolução é a chave para que uma situação se encaminhe para ser desenvolvida de forma adidática.

Além dessas situações que acreditamos que possam ser vividas como adidáticas, trazemos também algumas que chamamos de “situações de reinvestimento”, estas são aquelas que aparecem para que o aluno coloque em prática o que foi aprendido, retomando conhecimentos que foram mobilizados anteriormente. A atividade 4 da sexta sessão é um exemplo desse tipo de “situação”, pois solicita ao aluno que apresente situações contrárias às apresentadas, trabalhando o conceito de oposto ou simétrico, possivelmente, construído nas atividades anteriores da sessão.

Determinar qual situação é didática ou adidática antes da aplicação da sequência de atividades pode não ser uma tarefa proveitosa, pois sua ocorrência está, também, diretamente ligada à estruturação do meio. Quando indicamos que grande parte das atividades presentes em nossa sequência podem ser vivenciadas como situações adidáticas, acreditamos que elas têm elementos com potencial para serem vividas como tal, além disso, indica as expectativas da maneira como cada membro da relação didática, professor e aluno, poderá/deverá se comportar diante de cada uma das situações propostas. Em outras palavras, é uma hipótese que fazemos a ser validada durante a realização da sequência.

### 3.12 Considerações Sobre a Aplicação da Sequência Didática

Inicialmente, essa era nossa proposta: elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática alternativa sobre os números inteiros relativos; consideramos alternativa por trabalhar com os conceitos iniciais desse conjunto numérico com alguns elementos algébricos, uma vez que as outras propostas se preocuparam mais em trabalhar somente com as operações, utilizando materiais manipuláveis como jogos, por exemplo. Esta proposta deveria ser realizada como a grande maioria das engenharias didáticas clássicas, ou seja, sessões em sala de aula, para uma turma do 7º ano do ensino fundamental no primeiro semestre do ano de 2021, mais especificamente entre março e abril. Porém, como em muitas situações de nossa vida, nem tudo ocorre como planejamos e, devido às mudanças que o mundo todo passou a vivenciar, algumas adaptações se tornaram necessárias ao longo do desenvolvimento da nossa pesquisa; algumas delas foram mais imediatas, como alterações na sequência de atividades, outras demandaram tempo maior de estudo e preparação, mas todas as mudanças contribuíram para a continuidade de realização da pesquisa proposta que teve seu objetivo principal também modificado como mostraremos no capítulo 4.

A pandemia do novo coronavírus que chegou ao Brasil em março de 2020, mês de ingresso do pesquisador no curso de mestrado, alterou de forma repentina o funcionamento das escolas, que adotaram o ensino remoto e, por alguns momentos até a suspensão por tempo indeterminado das aulas. Mesmo assim, havia em nós uma esperança, ainda que mínima, de que esta doença desconhecida não “fugiria do controle” e que no início do ano letivo de 2021, a vida poderia começar a voltar ao “normal”, por isso, seguimos com nossa proposta inicial, realizando a análise *a priori*, os estudos sobre o conjunto dos números inteiros e a construção da sequência didática. Infelizmente as coisas não voltaram ao normal no ano de 2021, por diversas situações, como omissão do poder público e outros fatores, a pandemia apenas se agravou em nosso país e no mundo, ceifando muitas vidas, desestruturando famílias e exigindo novos comportamentos e rotinas de todos os brasileiros.

Devido a esse caminhar repleto de incertezas, mudanças repentinas, medos, inseguranças e, principalmente, de muitas adaptações, sobretudo próximo à terceira fase da engenharia didática, já no início do ano de 2021, percebemos que a realidade seria outra e que o ensino remoto, adotado por grande parte das escolas de nosso estado, ainda continuaria a ser realidade ao menos no 1° semestre de 2021, o que impediria a aplicação da nossa sequência de forma presencial com os alunos. Isso foi bastante desafiador, uma vez que a maior parte das atividades da nossa sequência possuíam caráter disparador e necessitavam da ação mediadora do pesquisador em sala com os alunos. Como discutido no capítulo 2, em uma situação que se pretende ser adidática, esta mediação deve ser cuidadosamente pensada. Ela é fundamental para que a situação possa ocorrer. Dessa maneira, não poderíamos simplesmente fechar os nossos olhos para tudo o que estava acontecendo e aplicar a sequência da forma como pensada inicialmente: precisávamos fazer algumas modificações para seguir com nossa proposta.

Além disso, as consequências da pandemia passaram a influenciar a forma como o ensino estava ocorrendo, e fatores externos à sala de aula começaram a pesar sobre os processos de ensino e aprendizagem. Não poderíamos olhar apenas para situações do ponto de vista epistemológico do conjunto dos números inteiros relativos e não considerar o que o mundo todo estava vivenciando: uma pandemia. Percebemos então que era preciso dar atenção especial a esta nova variável que surgiu no cenário, uma variável que influenciava diretamente o fazer docente e a aprendizagem dos alunos. Era preciso estudar os fatores externos à sala de aula que agiam, de uma forma ou de outra, sobre os processos de ensino e de aprendizagem, e foi então que decidimos analisar estes fatores à luz dos níveis de co-determinação didática (CHEVALLARD, 2002).

O cenário pandêmico que enfrentamos ao longo desses dois anos de desenvolvimento da pesquisa, nos fez (re)pensar, (re)organizar, além de realizar diversas mudanças em nossa proposta inicial para que ela fosse mantida. Foram momentos de muita reflexão, análise e escolhas, diante das condições e restrições que nos eram impostas. No próximo capítulo abordamos as principais mudanças que precisamos fazer em nossa sequência de atividades para dar continuidade em nossa proposta, bem como, explicitaremos o novo referencial teórico que nos auxiliou tanto para realizar essas mudanças, como para fazer as análises posteriores, os Níveis de Co-determinação Didática Superiores (CHEVALLARD, 2002).

# 4. MUDANÇAS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E O USO DE UM NOVO REFERENCIAL

Neste capítulo apresentamos algumas situações que vivenciamos devido ao contexto pandêmico, os problemas que surgiram e as principais mudanças que realizamos em nossa sequência de atividades inicial, apresentada de forma completa no capítulo anterior. Além disso, abordamos os Níveis de Co-determinação Didáticas Superiores (CHEVALLARD, 2002), justificando a necessidade de sua utilização em nossa pesquisa. Devido ao andamento da pandemia, no final de 2020 percebeu-se que o ensino remoto seria uma realidade também para o primeiro semestre de 2021; dadas as condições sanitárias, não seria possível voltar a ter aulas de forma presencial no início do ano. Nesse momento começamos a nos questionar: como aplicar a sequência didática que havíamos pensado? Seria possível aplicar aquela sequência sem a presença física do professor? Como aquela era a realidade a ser vivida por alunos e professores da educação básica, então deveríamos trabalhar com aquela realidade, com as condições e restrições provenientes desta nova situação. Em reunião realizada com a coordenação da escola sobre a aplicação da sequência didática, fomos oficialmente informados de algumas destas condições que relatamos a seguir e que implicaram em modificações nas atividades da sequência.

## 4.1 A Continuidade da Pandemia e Outras Problemáticas

No início do ano de 2021, finalizada a elaboração e análise *a priori* da sequência didática, alguns problemas começaram a surgir, problemas comuns que podem aparecer no desenvolvimento de uma pesquisa, outros não tão comuns, como a continuidade de forma descontrolada e assustadora de uma pandemia que permanecia alterando a realidade de todos os indivíduos e, consequentemente, de nossa pesquisa.

O primeiro deles foi a troca de professores da escola onde seria realizada a pesquisa. Isso ocorreu pelo fato de que a professora que inicialmente participaria da investigação, cedendo uma turma de 7º ano, assumiu a coordenação de uma outra escola na mesma cidade e nos apresentou duas opções: ou continuávamos na escola inicial, uma vez que a coordenação da escola já tinha conhecimento do projeto e havia concordado com a realização da pesquisa na escola, mas precisaríamos entrar em contato com o novo professor que assumiria as aulas dela; ou aplicaríamos o projeto na escola onde ela assumiu a coordenação cujo professor da turma de

7º ano e a direção já haviam aceitado participar da pesquisa. Optamos por transferir o projeto para a outra escola, uma vez que a professora, agora coordenadora, demonstrou grande interesse de participação no projeto, afirmando que mesmo na coordenação daria suporte para sua realização. Além disso, a parceria entre ela e o pesquisador ocorria desde a graduação, em que ela era a professora do PIBID em que ele desenvolvia atividades.

Mudadas as escolas e os professores, precisávamos marcar uma reunião para apresentar nossos objetivos para o novo professor e a diretora da escola e organizar a documentação necessária para realização da pesquisa. No dia 26 de fevereiro do 2021, o Governo do Estado decidiu o retorno às aulas da Rede Estadual de Ensino (REE) de forma híbrida a partir do dia 01 de março, ou seja, apenas alguns dias antes de seu início. Para este retorno, inicialmente seria realizado um processo de "acolhimento" dos alunos para entrega de alguns equipamentos de proteção (máscara e álcool), uniformes e kits escolares. Durante este período de acolhimento, que duraria todo o mês de março com o rodízio do número de alunos de cada sala, os professores deveriam aplicar testes diagnósticos para assim preparar seu planejamento para continuidade das aulas a partir do mês de abril que poderia acontecer tanto de forma híbrida como remota. Ainda não estava definido, de fato, como as aulas seriam realizadas neste ano, devido à instabilidade da pandemia.

Os alunos foram recebidos nas escolas estaduais a partir do dia 01 de março para esse acolhimento, mas devido ao expressivo número de casos de contaminação, mortes, taxa de transmissão e ocupação dos leitos pela COVID-19 naquela semana, o Governo do Estado interrompeu o acolhimento e estabeleceu o ensino remoto na Rede Estadual a partir do dia 10 de março; ou seja, apenas alguns alunos tiveram a oportunidade de ir à escola nesse primeiro momento. Os professores não tiveram a oportunidade de conhecer toda a turma, pois não deu tempo de realizar o rodízio completo de todos os alunos em apenas uma semana.

Esse retorno foi bastante agitado, pois as escolas estavam se organizando para respeitar os protocolos de biossegurança, realizar o rodízio de alunos e ainda recebê-los para dar as orientações. Somente após a suspensão desse "acolhimento", conseguimos marcar uma reunião com a coordenação da nova escola na qual desenvolveríamos a pesquisa, que foi realizada no dia 11 de março de 2021. A partir dessa reunião foram definidas as formas como desenvolveríamos as atividades e, consequentemente, alguns dos principais ajustes que precisaríamos fazer em nossa sequência de atividades.

### 4.2 Sobre a Reunião e o Contexto da Escola

Nesta reunião, apresentamos à coordenação e ao novo professor participante do projeto, o objetivo geral de nosso estudo, a sequência de atividades, como havíamos pensado em aplicar, e tiramos as dúvidas levantadas por eles. Antes de entrar nos detalhes da reunião, é importante esclarecer, ainda que de forma breve, sobre o contexto em que esta escola e seus alunos estão inseridos, pois isso influenciou diretamente algumas escolhas antes e durante a aplicação das atividades, bem como a maneira que a escola estava conduzindo suas atividades.

Esta é uma escola pública da rede estadual de ensino localizada em uma área mais carente do município de Aquidauana/MS. Apresenta uma boa infraestrutura, com salas amplas e bem ventiladas, pátio extenso e coberto, quadra de esportes, salas de tecnologia, com uma área bem grande e toda murada. Funciona durante os três períodos, atendendo cerca de 900 estudantes e oferece as modalidades de Ensino Fundamental I e II nos períodos matutino (2º ano ao 6º ano) e vespertino (5º ao 9º ano); Ensino Médio no período vespertino (1º ao 3º ano) e Projeto AJA[8] no período noturno. Além disso, oferece alguns projetos que promovem a Arte e a Cultura.

De acordo com seu Projeto Político Pedagógico (PPP), a clientela da escola é:

> [...] carenciada de modo geral, muitas vezes proveniente de lares desfeitos ou desestruturados pela falta de emprego ou atividade econômica. Sendo cerca de 80% beneficiários de programas sociais. Entre os alunos matriculados encontramos crianças indígenas da etnia Terena originárias das aldeias existentes no município de Aquidauana. (SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO/MS, 2020).

Além desse perfil de alunos, a escola conta também com crianças da zona rural que dependem de transporte escolar para chegar até a escola, entretanto esse grupo não compõe a maioria das crianças da escola, que são provenientes de 4 bairros que ficam em suas adjacências.

Após sermos bem recebidos pela coordenação da escola, iniciamos a reunião com a apresentação do projeto de pesquisa, abordando nossos objetivos gerais e comentamos sobre a sequência didática preparada que estava organizada em uma sequência de atividades, estruturadas em 10 sessões com aproximadamente 5 questões cada uma delas. Definimos que a turma em que aplicaríamos a sequência de atividades seria a do 7º ano A, que contava com 35 alunos matriculados, nesse momento o professor explicou que não conhecia grande parte de seus alunos, devido à interrupção do período de acolhimento descrito anteriormente. Não

[8] AJA – Avanço do Jovem na Aprendizagem.

somente o professor de matemática, mas professores de outras disciplinas, não tiveram a oportunidade de conhecer suas turmas completas. Ao longo da conversa sobre como poderíamos encaminhar a realização das atividades de nossa proposta, como havíamos pensado em aplicá-la e a forma de trabalho que a escola estava adotando diante daquele momento, alguns pontos foram sendo colocados pela coordenação da escola:

- No ano anterior (2020), houve uma tentativa de se trabalhar com os alunos por meio da plataforma *Google Classroom*, porém o professor expôs que não houve um retorno bom, e citou alguns exemplos que em turmas com 30 alunos apenas 6 acessavam esta plataforma.
- Indicaram que momentos síncronos com os alunos eram bastante complicados por conta do acesso a recursos tecnológicos e/ou acesso à internet; devido à baixa adesão dos alunos, os professores não realizavam atividades com momentos síncronos.
- Os professores e a coordenação da escola observaram que os alunos interagiam mais pelo *WhatsApp;* a interação e o retorno das atividades solicitadas ocorriam melhor por este aplicativo, embora houvesse algumas restrições indicadas pelos pais ou responsáveis dos alunos; por exemplo, alguns deles reclamavam que o envio de vídeos consumia bastante internet. Apesar disso, era pelo *WhatsApp* que os professores e alunos conseguiam manter uma melhor interação.

A coordenação informou também que estava trabalhando os conteúdos com os alunos por meio de Atividades Pedagógicas Complementares (APC), método adotado pela rede estadual de ensino. Cada turma possuía um grupo no *WhatsApp* com os alunos, ou com os responsáveis daqueles que ainda não tinham celular, onde só os professores tinham a permissão de enviar mensagens. Então, as atividades eram disponibilizadas tanto de forma impressa para serem retiradas na escola pelos alunos, como também eram enviadas pelo *WhatsApp,* e os alunos respondiam e devolviam na conversa privada de cada professor.

A turma de 7º ano em questão tinha dois dias da semana destinados às aulas de Matemática (terças e quartas-feiras), sendo 2h/a cada um desses dias, porém não se "cumpria" de fato essas 2h/a, visto que o professor era responsável por passar uma atividade nesse dia/horário e ficar à disposição para fornecer atendimento aos alunos. Após apresentar a sequência de atividades e definir a turma em que seria aplicada, o professor da turma disponibilizou 4 semanas, ou seja, 8 dias de aula para a realização da sequência didática, começando na semana seguinte, dia 16 de março.

Ficou decidido então que deveríamos aplicar a sequência didática semelhante a modalidade de Atividades Pedagógicas Complementares, disponibilizando as folhas com as atividades de cada sessão para que os alunos as retirassem na escola. Além disso, a cada dia de aplicação, era necessário postar no grupo as orientações sobre cada sessão e o pesquisador deveria ficar à disposição dos alunos para tirar dúvidas na conversa privada com aqueles que entrassem em contato, utilizando principalmente mensagens de texto e de áudio, evitando o envio de vídeos para não comprometer o consumo de internet, pois a coordenação precisava enviar, eventualmente, alguns vídeos nos grupos com orientações aos pais.

Sobre a impressão das sessões, a diretora solicitou que fossem disponibilizadas todas elas impressas para serem entregues de uma única vez aos alunos, pois devido a pandemia seria inviável solicitar que os pais dos alunos passassem para retirar essas atividades semanalmente na escola, porém isso comprometeria uma característica da engenharia didática que é a reorganização das sessões, caso necessário, ao longo de seu desenvolvimento. Expusemos nossa necessidade à diretora e então ficou acordado que seriam feitas duas entregas das atividades impressas, a primeira no dia 15/03/2021 e a segunda no dia 29/03/2021.

Fomos percebendo, a partir desta reunião, algumas condições que precisaríamos nos adequar, como também algumas restrições que não poderíamos alterar para realizar a aplicação da sequência didática na escola. Por exemplo, inicialmente a sequência foi estruturada em 10 sessões; tínhamos em mente trabalhar uma sessão por dia (aula), porém com o tempo disponibilizado pelo professor teríamos apenas 8 aulas, ou seja, ou teríamos que aplicar mais de uma sessão em dois dias ou adequar para 8 sessões e assim trabalhar uma por dia, que era nossa ideia inicial. Outro exemplo é a restrição do não envio de vídeos para os alunos para não comprometer o consumo de internet de seus celulares ou dos celulares dos responsáveis. Neste último exemplo, percebemos que alguns fatores que influenciavam a maneira que o ensino estava sendo realizado eram externos à sala de aula. Não eram mais apenas problemas de cunho epistemológico de um conteúdo matemático, ou de dificuldades dos alunos, mas sim de outras instituições que vivem em harmonia (ou não) com o ambiente escolar e que causam grande impacto sobre ele.

O fato de trabalharmos com alunos de uma escola de uma área mais carente de um município do interior de Mato Grosso do Sul, influenciaria diretamente nossas escolhas da situação, uma vez que as condições financeiras e, consequentemente, tecnológicas, destes estudantes são bem diferentes de alunos com boas condições de uma escola particular ou de uma escola da região central. Tomemos como exemplo países mais ricos, em que alunos e professores possuíam computadores com acesso à internet, isso permitia que o ensino remoto acontecesse sem grandes problemas; países pobres nos quais nem alunos, nem professores dispunham desses recursos tecnológicos, determinavam uma outra forma de condução do ensino, que muitas vezes consistia no ensino remoto apenas via papel.

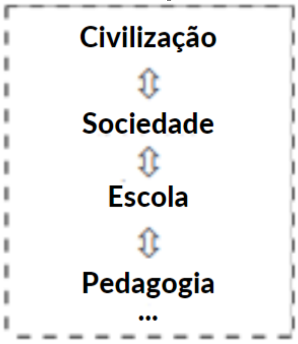
Estávamos diante de uma situação em que precisaríamos disponibilizar as atividades impressas aos alunos e manter uma interação com eles apenas pelo *WhatsApp*, devido à dificuldade de acesso a recursos tecnológicos e à internet. Isso com certeza influenciaria o desenvolvimento da nossa proposta. Não poderíamos dar continuidade em nossa pesquisa sem considerar o que estava acontecendo no mundo: uma pandemia. Precisávamos realizar algumas mudanças em nossa proposta inicial para assim dar continuidade à mesma, porém para fazer essas alterações, era necessário compreender os fatores externos que estavam influenciando o ambiente escolar e compreender as novas "condições escolares" dos alunos, uma vez que agora a escola de cada um passava a ser sua casa ou a da avó, da tia, entre outros espaços. O conceito de sala de aula mudou drasticamente.

Para compreender alguns desses fatores, surge então a necessidade de adotar mais um referencial teórico em nossa pesquisa, a Escala dos Níveis de Co-Determinação Didática (CHEVALLARD, 2002), uma vez que essas tentativas de mudanças de caráter emergencial implicaram em fatores nunca experienciados pelos professores e nem pelos alunos. Sejam eles a dificuldade ou facilidade de acesso a aparelhos tecnológicos, problemas de conexão, falta de familiaridade com esses recursos que, consequentemente, afetaram a difusão dos saberes. Nesse sentido, esta escala tornou-se fundamental para ampliar nossas análises, compreendendo que alguns dos motivos e, principalmente, das dificuldades encontradas em nossa proposta eram consequência de fatores externos à sala de aula, alguns desencadeados pelo cenário pandêmico vivenciado, outros que já se faziam presentes no contexto educacional, mas que se tornaram mais evidentes durante esse período. Em outras palavras, a educação básica já apresentava diversos problemas, a pandemia apenas colocou uma lupa sobre eles, colocando-os em evidência. Além disso, o fato de a aplicação da sequência didática ocorrer de forma remota, da maneira que trabalharíamos de acordo com a escola, nos impediria de verificar a ocorrência das situações adidáticas pensadas nas atividades; dessa maneira esta nova ferramenta teórica compõe nosso corpo de análise dos dados produzidos. Antes de apresentarmos as principais mudanças que fizemos para seguir com nossa proposta, apresentamos brevemente a escala de níveis de co-determinação didática superiores.

## 4.3 Os Níveis de Co-Determinação Didática Superiores

Os níveis de co-determinação didática introduzidos por Chevallard (2002) permitem compreender alguns dos fatores que influenciam na difusão dos saberes. Este autor apresenta uma escala composta de níveis superiores e inferiores de co-determinação didática. Para análise de algumas situações em nossa pesquisa, utilizamos apenas os níveis superiores desta escala, apresentados na figura 1.

**Figura 1** - Escala de co-determinação didática - Níveis Superiores




Fonte: (CHEVALLARD, 2007, p.32)

“Os níveis mais altos da escala correspondem às condições e restrições relacionadas à forma geral de organização dos processos de ensino e aprendizagem.” (CASABÒ, 2018, p. 4035). Cada um desses níveis comporta, então, elementos que podem contribuir para a existência de condições e restrições oriundas de diferentes instituições e que pesam sobre o que pode ou não ocorrer em sala de aula.

Se queremos compreender as razões de algumas das coisas que acontecem em sala de aula, muitas vezes é preciso olhar para fora dela, principalmente no contexto em que estávamos vivenciando; é nesse sentido que esses níveis superiores aparecem como uma ferramenta de análise. “As condições que um professor pode criar em sua sala e as restrições que delimitam sua ação não podem ser compreendidas se não olharmos para o que está além da sala de aula, que passam por aquelas instituições que a negligenciam e estão em constante interação com ela.” (BOSCH, 2010, p. 19, tradução nossa)[9]. Além disso,

> A identificação destes níveis de codeterminação permite, portanto, entender melhor as condições e restrições institucionais sobre os sistemas didáticos e permite aos pesquisadores elaborar infraestruturas matemáticas alternativas, porém viáveis, em uma instituição [...]. (CHAACHOUA; BITTAR, 2018, p. 36).

[9] Les conditions que peut créer un professeur dans sa classe et les contraintes qui délimitent sa marge de manoeuvre ne peuvent s’appréhender sans aller voir ce qui se passe au-delá de la classe, dans les institutions qui la surplombent et sont constamment en interaction avec elle.

Assim, diante do contexto pandêmico que vivenciamos durante o momento de proposição da pesquisa e que se estendeu até a produção de dados de forma mais grave, a utilização desses níveis nos permitiu compreender esses fatores que tiveram grande influência em nossas escolhas e nos permitiu pensar em maneiras alternativas para a continuidade desta engenharia didática.

O nível da pedagogia compreende aquilo que os componentes da relação didática (professor(es) e alunos) fazem para que o sistema didático funcione. Leituras interativas, aprendizagem cooperativa, entre outros, são alguns exemplos (CASABÒ, 2018). Nesse nível podemos encontrar as formas como são propostas o ensino para gerir a difusão dos saberes, independendo do conteúdo a ser ensinado. "O nível das escolas inclui todas as infraestruturas fornecidas pelas instituições de ensino para organizar os sistemas didáticos e ajudá-los a funcionar." (ibidem, p. 4035). Podemos situar nesse nível desde fatores da infraestrutura física da escola, como a quantidade de salas, a maneira como as carteiras são dispostas em sala de aula, a existência ou não de laboratórios, os materiais disponibilizados aos alunos, até àqueles relacionados a sua organização quanto aos horários de aula, intervalo, palestras, projetos, entre outros.

O nível da sociedade determina as condições de existência das escolas. Chevallard afirma que este nível é claramente o lugar com uma série de restrições tanto restritivas como habilitadoras. "Uma sociedade pode olhar para a instrução ministrada na sua escola de vários pontos de vista, que não são didaticamente equivalentes, ou seja, que não criam *a priori* as mesmas condições, na sala de aula, diante de um objeto de estudo". (CHEVALLARD, 2002, p. 14, grifo do autor). Neste mesmo texto, ele apresenta dois pontos de vista, o primeiro, dominante atualmente, pautado no sistema das disciplinas (organização dos saberes em matérias) e um segundo, emergente, que é a organização dos saberes em competências variadas. Esses dois pontos de vista podem criar condições diferentes tratando-se de um mesmo objeto em questão.

No nível da civilização estão situados aqueles fatores que são compartilhados por diferentes sociedades; além disso, Mariana Bosch em um de seus textos (CASABÒ, 2018) retoma esta escala introduzida por Chevallard e discute também sobre o nível da humanidade – acima do nível civilização – afirmando que este possui um caráter bem geral.

> Os níveis situados na extremidade superior da escala incluem a forma como os processos de ensino e aprendizagem são concebidos e gerenciados nas sociedades ou, quando compartilhados por diferentes sociedades nas civilizações. A escala termina no nível mais geral, que é o nível da humanidade. (CASABÒ, 2018, p. 4036).

Embora esses níveis vivam em constante interação uns com os outros, esses que estão presentes na parte mais alta da escala (humanidade e civilização) possuem um caráter mais geral e, portanto, têm sido menos utilizados nas pesquisas até o momento. Esta escala apresenta também os níveis inferiores, mais relacionados às especificidades do conteúdo em jogo, são eles: disciplina, setor, tema e questão. Apesar desta escala tomar como referência o nível da disciplina, que é aquele específico do ensino de um conteúdo, este interage com os níveis superiores da escala. (BOSCH, 2010).

Em nossa pesquisa, utilizamos apenas os níveis presentes na parte superior da escala, uma vez que as questões relacionadas ao objeto matemático investigado (números inteiros relativos), foram contempladas desde suas análises preliminares até a análise da produção de dados à luz dos pressupostos teóricos da TSD e da ED. Ou seja, a escolha de utilizar a escala dos níveis de co-determinação didática se deu pela sua principal utilidade de "ampliar nossa visão em direção a certos campos empíricos que são tradicionalmente mantidos fora da perspectiva dos didáticos e, portanto, são tidos como certos." (CASABÒ, 2018, p. 4037).

Na próxima seção abordaremos as principais mudanças realizadas em nossa engenharia didática, após tentativa de compreensão desses fatores externos que estavam pesando sobre a nossa pesquisa.

## 4.4 Principais Mudanças Realizadas

Após a reunião com a coordenação da escola, precisamos adequar nossa sequência didática inicial para dar continuidade à realização da nossa pesquisa. Diante das condições e restrições apresentadas e de todo cenário pandêmico que ainda persistia em nosso país, se aplicássemos a sequência da mesma forma que foi pensada inicialmente, dificilmente contribuiria para o processo de aprendizagem dos alunos. Já sabíamos que o pesquisador não estaria mais presente na sala de aula e, todas as atividades foram pensadas para serem discutidas em sala de aula, com uma forte participação da mediação do pesquisador com os alunos da turma. Essa foi uma das principais questões sobre a qual nos debruçamos: seria possível realizar, no modo remoto, a mediação pensada para situações adidáticas no modo presencial? Como realizar tal mediação, uma vez que teríamos como meio de comunicação com os alunos apenas os textos impressos e o *WhatsApp* e não poderíamos usar vídeos?

A seguir descrevemos as principais mudanças implementadas, que se concentraram em torno do agrupamento de algumas sessões, da inserção de perguntas mais abertas, da inclusão de balõezinhos de fala (*post-it*) e de quadros de retomada/institucionalização ao final das sessões.

**Agrupamento das sessões.** Diante da condição tempo, imposta pela escola para realização da pesquisa, fizemos uma reorganização das sessões, visando diminuir o tempo total da sequência didática. Para isso unimos a sessões 03 e 04, uma vez que uma era extensão da outra; e fizemos o mesmo com as sessões 07 e 08, pois ambas tratavam comparação entre números inteiros. Para essa reorganização das sessões, olhamos novamente para cada atividade retirando algumas para que a nova sessão elaborada permanecesse com a média de 5 atividades. Com essa nova reorganização, conseguimos moldar nossa sequência em 08 sessões para serem trabalhadas de forma individual em cada dia de aula da turma de 7º ano. Atendemos, assim, à restrição advinda da escola: uma restrição, visto que se trata de uma condição que não é possível modificar.

**Inserção de perguntas abertas.** O pesquisador não estaria na sala de aula em contato direto com os alunos, podendo gravar, anotar, identificar falas, comentários e impressões dos estudantes sobre as atividades, para poder analisar suas compreensões sobre o conhecimento em tela, então como ter acesso ao menos a parte do que os alunos pensaram ao realizar as atividades? É fato que ter acesso à componente privada do pensamento do aluno é uma dificuldade presente qualquer que seja a forma de trabalho com ele, entretanto, ao trabalhar no modo remoto esta dificuldade aumenta consideravelmente. Presencialmente, até suas expressões faciais, muitas vezes involuntárias, indicam o que estão sentindo/pensando ao realizar as atividades propostas. Assim sendo, o modelo de ensino imposto pela pandemia nos obrigou a pensar em uma forma de tentar contornar esta ausência de informação e uma das soluções que tentamos foi a inserção de perguntas abertas para que os alunos registrassem o máximo de informação possível no papel. Em algumas atividades inserimos perguntas pedindo que os alunos comentassem sobre a atividade, como nos dois exemplos apresentados a seguir. A inserção de tais questões permite, por um lado, ter acesso à parte do pensamento do aluno, caso ele responda à pergunta posta, e, por outro lado, contribuir com a análise da engenharia didática realizada no modo remoto.

| |
|---|
| **Atividade 2:** Complete os espaços em branco:<br>a) 13 + ____ = 29 d) 225 + ____ = 357<br>b) 42 + ____ = 75 e) 47 + ____ = 47<br>c) 79 + ____ = 103 f) 8 + ____ = 6<br>Você teve dificuldade em resolver algum item dessa atividade? Escreva com suas palavras qual foi sua dificuldade. |

Na atividade 2 da primeira sessão, inserimos essa pergunta considerando que o estudante poderia apresentar algumas dificuldades para a resolução do item f) que é relativo ao conhecimento em tela. Assim, esperávamos respostas como “não é possível somar um número a 8 e obter um resultado menor”, “não encontrei um número para o item f”.

| |
|---|
| **Atividade 3:** Efetue as seguintes subtrações:<br>a) 5 – 2= ____<br>b) 5 – 3= ____<br>c) 5 – 4= ____<br>d) 5 – 5= ____<br>e) 5 – 6= ____<br>f) 5 – 7= ____<br>Você consegue observar alguma regularidade nos itens acima? Escreva aqui o que você percebeu. |

Na atividade 3 da mesma sessão, também solicitamos ao aluno que expusesse suas impressões sobre as respostas apresentadas, identificando algum tipo de regularidade, esperando respostas como “foi diminuindo de um em um”, “a cada item diminuía uma unidade”. Com essas perguntas, desejávamos que os alunos, de certa forma, “conversassem” conosco sobre a atividade.

**Inclusão de balõezinhos de fala.** O papel do professor na condução de uma situação adidática é central: o aluno é responsável pela construção do conhecimento, é ele que age sobre a situação; o professor não dá respostas ou dicas, mas tem o papel fundamental de mediar a situação fazendo com que ocorra a devolução e que o aluno continue na situação. Assim, diante da restrição “não estar presente com os alunos em sala de aula”, era preciso pensar como realizar a comunicação com o aluno, como estar mais próximo dele, uma vez que o contato presencial não seria possível. Para tentar “burlar” esta ausência, analisamos toda a sequência e tentamos identificar os momentos em que, em sala de aula, provavelmente faríamos alguma intervenção.

Esta análise foi apoiada nas duas primeiras fases da engenharia didática, as análises prévias e a concepção e análise *a priori*. Assim, ao longo de toda a nova sequência incluímos balõezinhos de fala com pequenos textos (semelhantes a *post-it*) com falas que supúnhamos que seriam ditas pelo pesquisador em sala de aula. Esses balõezinhos de fala nos permitiriam "conversar" com os alunos, utilizando uma linguagem bem próxima da que eles usam. Apresentamos um exemplo do item c) da atividade 1 da primeira sessão:

**Atividade 1:** Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida ganhou 6 cartões e na segunda perdeu 9. Responda:

a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?

b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria? Você acha que isso seria possível? Explique sua resposta.

c) E se a gente não soubesse quantos cartões ele tinha no início, como podemos representar a quantidade de cartões que Nathan teria ao final do jogo?

Dica: Você pode utilizar qualquer letra do alfabeto para representar um valor desconhecido.

Neste exemplo, o *post-it* indica a utilização de letras do alfabeto para representação de um valor desconhecido. Essa discussão, para introdução de elementos algébricos, seria feita durante a mediação do pesquisador em sala de aula, porém, tentamos suprir essas possíveis discussões nesses balõezinhos como feito nesse exemplo ao longo de toda a sequência.

**Quadro de retomada/institucionalização.** Como não conseguiríamos realizar momentos síncronos com toda a turma por meio de plataformas *on-line*, que foi indicado pela coordenação da escola na reunião realizada, seria necessário suprir possíveis momentos de institucionalização ou retomada do que foi trabalhado ao longo das sessões. Nesse sentido, ao final de cada sessão inserimos um quadro intitulado "Para concluir...", no qual eram retomadas as ideias principais apresentadas na sessão, bem como definições ou considerações parciais. Apresentamos a seguir o exemplo do quadro feito para a primeira sessão.

**Para concluir...**

Você observou que em algumas situações matemáticas acima os números naturais, que já conhecemos, não foram suficientes. Como resolver a subtração 5 – 7? Ou então, como pensar em um número para somar a 8 e obter resultado 6?

Por motivos semelhantes a esses, os matemáticos da antiguidade precisaram criar um novo conjunto de números que pudesse responder essas situações de forma adequada. Este conjunto recebe o nome de números inteiros relativos e nós vamos aprender mais sobre ele nas próximas sessões.

Como o objetivo da primeira sessão era de apenas trabalhar situações que apresentassem a necessidade de existência dos números inteiros relativos, neste quadro “Para concluir...” seriam feitas algumas reflexões sobre as atividades desenvolvidas evidenciando as possíveis dificuldades que os alunos encontraram para respondê-las utilizando apenas os números naturais.

Para não retomar toda a análise a priori da sequência didática após as alterações, sintetizamos as informações das 08 sessões em um quadro, retomando o objetivo de cada sessão, a quantidade de atividades e o conteúdo envolvido. A sequência completa com todos os elementos de mudança é disponibilizada ao final junto aos anexos. Colocamos a seguir no quadro 2 como ficou organizada a sequência.

**Quadro 2** - Síntese da sequência didática após alterações

| SESSÃO | Nº DE ATIVIDADES | OBJETIVO DA SESSÃO | AS ATIVIDADES ENVOLVEM |
|---|---|---|---|
| **01** | **04** | Apresentar situações que suscitem discussões acerca da necessidade de existência de números inteiros negativos, além de operações matemáticas que apresentam algumas regularidades. Serão trabalhadas algumas ideias algébricas iniciais. | - Resolução de problemas<br>- Método indutivo<br>- Elementos algébricos iniciais |
| **02** | **05** | Uma “extensão” da sessão anterior, tem por objetivo apresentar novas situações que apareçam números inteiros negativos, bem como situações do cotidiano em que esses números são utilizados para interpretá-las. Ao final o conjunto é apresentado formalmente, bem como sua razão de existência. | - Resolução de problemas<br>- Modelos concretos (neutralização) |
| **03** | **07** | Estimular os alunos à construção da reta numérica, exibindo-a, ao final, como uma maneira de representação dos inteiros relativos. Apresentação de situações com a reta numérica nos sentidos horizontal e vertical. Apresentar situações para que o aluno compreenda os sinais de + e – para representação de quantidades positivas e negativas, respectivamente. | - Modelos concretos (deslocamento e registro de temperaturas)<br>- Orientação e localização de pontos sobre a reta numérica |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **04** | **04** | Introduzir, por meio de situações na reta numérica, o conceito de módulo de um número inteiro. Definir no quadro de sistematização este conceito aos alunos ao final da sessão. | - Modelos concretos (deslocamento)<br>- Conceito de distância |
| **05** | **04** | Possibilitar a construção do conceito de oposto ou simétrico de um número inteiro relativo, também utilizando situações sobre a reta numérica no sentido horizontal. | - Modelos concretos (deslocamento)<br>- Conceito de distância |
| **06** | **05** | Apresentar situações cotidianas para que, inicialmente, os alunos mobilizem estratégias de comparação entre números inteiros. Com o suporte da reta numérica em ambos os sentidos (horizontal e vertical) e também o conceito de módulo, validar as regras de comparação neste conjunto numérico. | - Resolução de problemas<br>- Modelos concretos (registro de temperaturas e sistema monetário) |
| **07** | **06** | Retomar alguns conceitos apresentados ao longo das sessões anteriores sobre as características dos elementos pertencentes ao conjunto $\mathbb{Z}$ e possibilizar que o aluno observe e complete sequências com elementos deste conjunto. | - Método indutivo<br>- Modelos concretos (sistema monetário) |
| **08** | **04** | Retomar problemas iniciais que trabalharam com elementos algébricos e, apenas introduzir noções de adição e subtração de números inteiros relativos utilizando a reta numérica no sentido horizontal. | - Resolução de problemas<br>- Reta numérica |

Fonte: (AUTOR)

Queremos ressaltar que todas as mudanças realizadas no material impresso a ser entregue aos alunos, tiveram a intenção de adequar a sequência didática para ser aplicada no contexto do ensino remoto tentando manter, na medida do possível, algumas características de uma engenharia didática com situações adidáticas. Sabíamos que esta era uma aposta alta; não conhecíamos ED desenvolvidas nesta modalidade, porém tudo tem um começo: a pandemia mostrou a necessidade de inovar em vários setores da educação e a educação matemática precisava acompanhar este movimento. Assim, vemos esta investigação como um primeiro passo na direção de pensar engenharias didáticas para serem realizadas em ambientes diferentes do ambiente presencial.

Até o momento apresentamos as modificações realizadas no material impresso, no qual tentamos conversar com os alunos por meio de balõezinhos – o pesquisador foi, de certa forma, colocado no papel – porém, tínhamos consciência de que esta interação não seria suficiente. Sabemos das dificuldades dos alunos, da diversidade dessas dificuldades e queríamos poder interagir com eles de outra forma, entretanto, conforme relatado anteriormente, não podíamos enviar vídeos, por mais curtos que fossem. A única opção disponível, e isso somente para alguns alunos, era o contato pelo *WhatsApp*, porém, sabíamos que dos 35 alunos da turma, nem todos entrariam em contato para tirar dúvidas: muitos alunos não têm celular e usam, quando necessário, o celular da mãe ou mesmo da avó, como veremos no capítulo 5. Há alunos que moram em locais que não tem internet. Assim sendo, este meio de comunicação foi também disponibilizado para trabalhar com os alunos, podendo usar apenas troca de mensagens, e sabendo que nem todos os alunos acessariam o *WhatsApp*. Dessa forma, o material a que todos os alunos teriam, com certeza, acesso, é o material impresso.

Embora já tivéssemos essas mudanças em mente, pensadas e analisadas, desde o início do ano de 2021, elas foram efetivadas, de fato, em um curto espaço de tempo, pois a reunião de alinhamento com a coordenação foi realizada no dia 11 de março de 2021 (quinta-feira), e o professor informou que iniciaria o conteúdo dos números inteiros com a turma de 7º ano na terça-feira seguinte (16), ou seja, precisávamos entregar o material impresso de pelo menos as 4 primeiras sessões na escola na segunda-feira (15) para que os alunos começassem a retirar e iniciássemos as atividades na terça-feira. Feitos os ajustes, impressões e entrega na escola, passamos então para a produção de dados que será abordada no próximo capítulo junto com a análise *a posteriori* de cada sessão.

# 5. PRODUÇÃO DE DADOS E ANÁLISE *A POSTERIORI*

Neste capítulo apresentamos como ocorreu a produção de dados na turma de 7º ano, abordando as alterações que aconteceram durante este processo, e evidenciando as diferentes maneiras que os alunos interagiram com a sequência de atividades preparada e com o pesquisador.

Para a análise das sessões decidimos agrupá-las em pares, considerando que eram aplicadas duas sessões por semana (uma terça e outra quarta-feira), destacando os principais fatores externos presentes no contexto dos alunos escolhidos e como estes influenciaram na forma como estabeleceram relações com as atividades e com o pesquisador.

## 5.1 Da Produção de Dados

Definidas as formas de aplicação da sequência didática, como não foi possível realizar uma reunião com os pais dos alunos da turma, uma vez que a pandemia do coronavírus ainda continuava com taxas elevadas de contaminação e morte, a diretora da escola fez um vídeo de aproximadamente 4 minutos apresentando o projeto para os pais, falando sobre o pesquisador, o funcionamento da retirada e devolução das atividades na escola, a assinatura dos termos de participação, e outras questões relacionadas à nossa pesquisa para enviar no grupo do *WhatsApp*; esse vídeo foi enviado no dia 15 de março de 2021.

No quadro a seguir, apresentamos as datas da realização de cada sessão com os alunos.

**Quadro 3** - Datas da aplicação da sequência didática

| Data | Sessão |
|---|---|
| 16/03/2021 | 01 |
| 17/03/2021 | 02 |
| 23/03/2021 | 03 |
| 24/03/2021 | 04 |
| 30/03/2021 | X |
| 31/03/2021 | X |
| 06/04/2021 | 05 |
| 07/04/2021 | 06 |
| 13/04/2021 | 07 |
| 14/04/2021 | 08 |

Fonte: (AUTOR)

A previsão de término da aplicação das atividades era para o dia 07/04, totalizando as 4 semanas disponibilizadas pelo professor, porém como apresentado no quadro 3, não conseguimos aplicar as sessões 05 e 06 nos dias 30 e 31 de março, devido ao aumento na taxa de contaminação da COVID-19, resultando em um aumento da ocupação de leitos e no número de mortes. Como consequência, no dia 25 de março o Governo do Estado publicou um decreto com medidas restritivas para evitar a proliferação do coronavírus, suspendendo o funcionamento das Escolas da Rede Estadual de Ensino e das postagens das atividades entre os dias 26 de março e 04 de abril. Com isso, ficamos impedidos de dar continuidade às sessões 05 e 06 durante essa semana.

Ao fim do decreto, no dia 05 de abril fizemos a segunda entrega das sessões que faltavam (sessões 05, 06, 07 e 08) para retomar a aplicação com os alunos no dia 06 de abril e, assim, conseguimos realizar as quatro últimas sessões de forma consecutiva, sem interrupções, finalizando a aplicação de toda a sequência no dia 14 de abril.

Todas as terças-feiras, primeiro dia da semana de aplicação da sequência didática, em acordo firmado com a direção da escola, precisávamos cumprir o horário das aulas de matemática presencialmente na escola, assim como os professores o cumpriam. Dessa maneira, íamos para a escola às 13h15min, enviávamos as orientações no grupo e ficávamos em uma sala de aula, até 15h, auxiliando os alunos que entrassem em contato por *WhatsApp*. Embora estivéssemos na escola nesse período, ficávamos à disposição dos estudantes em outros horários e outros dias para atendê-los, quando possível e necessário. Na quarta-feira não íamos à escola, apenas enviávamos as orientações de casa mesmo.

Durante a realização das atividades os alunos se envolveram de diferentes formas com as atividades e com o pesquisador, pois muitos deles estavam inseridos em diferentes contextos. Alguns estavam na zona urbana da cidade, outros, com a suspensão de aulas presenciais, foram com a família para fazenda (zona rural), onde o acesso à internet era mais complicado. Além disso, por se tratar de crianças (aproximadamente entre 11 e 12 anos), muitos deles não tinham seu próprio aparelho celular e utilizavam o de seus pais quando retornavam do trabalho. Em outros casos, alguns alunos só tinham acesso a um aparelho celular quando iam para a casa de algum familiar que emprestava o aparelho para uso naquele momento.

Dessa maneira, alguns alunos conseguiram retirar as atividades impressas na escola, outros não, pois não estavam na zona urbana da cidade. Porém, embora não retirassem na escola, podiam ter acesso às atividades pelo *WhatsApp*. Outros alunos, por não terem aparelho celular, não tinham acesso às atividades pelo *WhatsApp* nem às orientações para retirá-las na escola. Alguns conseguiam manter uma interação contínua com o pesquisador por ter seu próprio aparelho celular, outros só quando conseguiam acesso à internet ou celular. Além dessas interações pesquisador-alunos, houve também interações pais/responsáveis-pesquisador, perguntando sobre datas de retirada e devolução de atividades na escola, ou algumas dúvidas sobre as atividades, pois estavam ajudando seus filhos, entre outras questões. Tentamos sintetizar na tabela 5 as diferentes formas de engajamento dos alunos para o desenvolvimento da sequência didática.

**Tabela 5** - Engajamento dos alunos com a sequência didática

| **Situação** | **Quantidade de alunos** |
|---|---|
| Sobre a retirada das atividades | |
| Total de alunos matriculados na turma | 35 |
| Alunos que retiraram as atividades impressas na escola | 20 |
| Alunos que não retiraram as atividades impressas, mas responderam pelo *WhatsApp* | 02 |
| Alunos que não retiraram as atividades na escola e nem responderam pelo *WhatsApp* | 13 |
| Sobre a entrega das atividades | |
| Alunos que devolveram as 8 sessões | 14 |
| Alunos que devolveram apenas 4 sessões | 08 |
| Sobre a interação durante as atividades | |
| Alunos que entraram em contato apenas uma vez durante a realização das atividades | 08 |
| Alunos que apresentaram uma interação maior sobre as atividades da sequência | 04 |
| Total de alunos que entraram em contato pelo *WhatsApp* | 12 |

Fonte: (AUTOR)

Para a análise das 08 sessões, focamos nos 04 alunos que apresentaram uma interação maior conosco, tirando dúvidas e comentando, praticamente, ao longo de todas as sessões, visto que estamos interessados em analisar como se deu a interação pesquisador-alunos diante das condições dadas. Como os contextos do grupo de alunos eram bem diferentes, antes de iniciarmos a análise, é preciso caracterizar cada um deles.

- A1: esta aluna conseguiu retirar todas as sessões impressas na escola, possuía seu próprio celular, pois utilizava a sua conta de *WhatsApp*, com sua foto de perfil[10]. Ela apresentava bastante dificuldade de interpretação das atividades; foi quem mais interagiu durante toda a realização da sequência, resolvendo as

[10] Essa é uma informação relevante, uma vez que, estando distante dos alunos, não ver o perfil do aluno que entrava em contato era bastante complicado. Muitas pessoas do grupo de turma de 7º ano não tinham foto de perfil, ou eram fotos de paisagens, desenhos animados; alguns ainda estavam com imagens de "luto", homenageando a perda de próximos, possivelmente pela pandemia.

atividades e entrando em contato com o pesquisador corretamente nos dias e horários destinados às aulas de matemática.

- A2: este aluno retirou todas as sessões impressas na escola, porém não possuía celular próprio. Quem participava do grupo da turma de 7º ano era sua irmã mais velha (já formada no ensino médio), que o ajudava durante a realização das atividades, entrando em contato para tirar as dúvidas e explicar para ele.
- A3: não retirou as 4 primeiras sessões na escola, mas realizou a impressão delas para resolver e devolver. Após isso, retirou todas as sessões, inclusive as 4 primeiras, e respondeu novamente para entregar. Apesar de não ter aparelho celular, entrou em contato diversas vezes para tirar dúvidas, porém em dias diferentes aos da aplicação das sessões, inclusive em finais de semana. Ele utilizava o celular de sua avó quando ia para a casa de sua mãe; alternava uma semana na casa do pai e outra na casa da mãe e, realizava mais de duas sessões por semana, pois aproveitava quando tinha o celular de sua avó para tirar as dúvidas.
- A4: este aluno não conseguiu retirar as atividades impressas na escola, pois com a suspensão das aulas foi para a fazenda (zona rural) com sua família. Lá onde estava não tinha acesso à internet e não estava inserido no grupo de *WhatsApp* da turma de 7º ano. Após algum tempo a família conseguiu acesso à internet na fazenda e sua mãe foi inserida no grupo da turma. Inicialmente a mãe entrou em contato, explicando a situação e solicitando o envio de todas as atividades, uma vez que não estava no grupo anteriormente. Apesar de ter começado depois, realizou todas as sessões e manteve uma boa interação sobre algumas atividades, utilizando o celular de sua mãe. Respondeu às atividades recebidas somente pelo *WhatsApp* copiando todas as questões (inclusive os desenhos) para responder.

Esses diferentes contextos nos permitiram refletir sobre como os fatores externos influenciaram na realização da sequência didática por cada um desses alunos e, principalmente, sobre a organização do sistema didático no ensino remoto. Por exemplo, o fato de A4 ir para a zona rural e não ter, inicialmente, internet nessa área, evidencia claramente restrições impostas no nível da sociedade: município de Aquidauana, área rural, condições econômicas, difícil acesso à internet, tudo isso influenciaria a maneira que este aluno estabeleceria relações com as atividades; além disso temos a escola (Estado) que não fornecia condições para esses alunos, como um aparelho celular. Essas e outras questões serão evidenciadas nas análises de cada sessão, apresentadas a seguir.

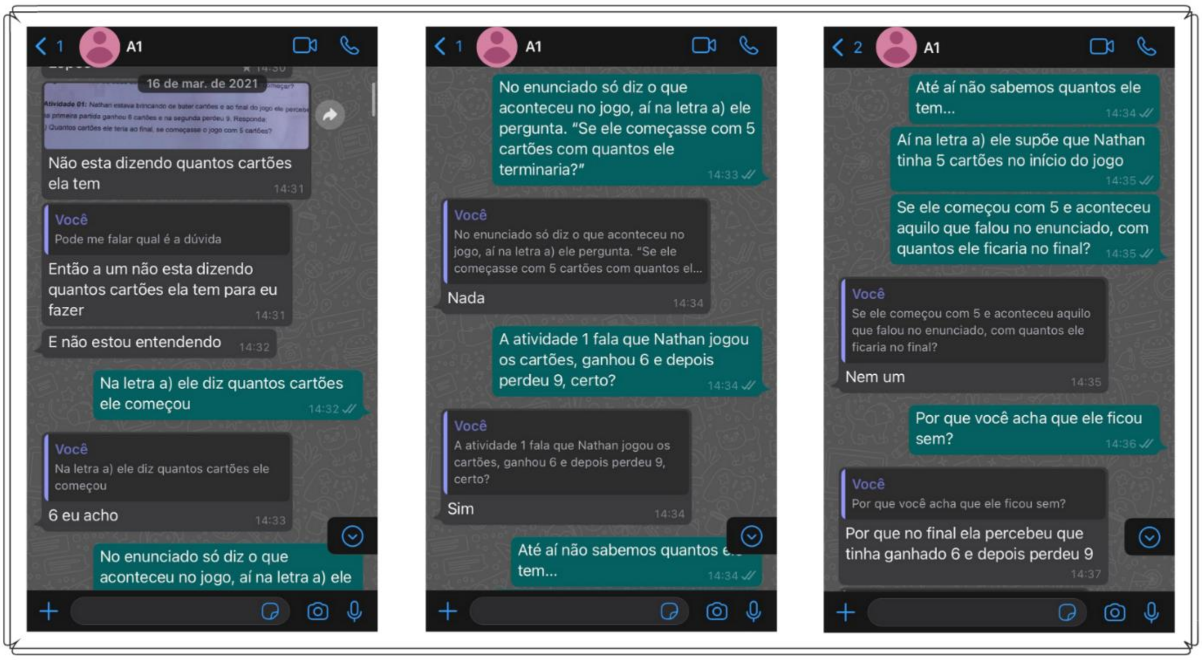
## 5.2 Análise *a Posteriori* das Sessões

Como dito anteriormente, devido à baixa interação alunos-pesquisador sobre as atividades propostas e diante de todas as dificuldades durante o percurso de pesquisa, o foco principal da análise será justamente sobre como se deu essa interação e os fatores que contribuíram para favorecê-la ou não.

### 5.2.1 Primeira Semana: Sessões 01 e 02

Na aplicação das duas sessões iniciais, primeira semana com os alunos, apenas dois deles entraram em contato conosco no dia em que foram aplicadas, A1 e A2. A primeira, A1, apresentou dificuldade de interpretação logo na primeira atividade da sessão 01 e esse foi o motivo do contato. Ela não conseguiu identificar quantidade de cartões que Nathan teria para fazer a operação. Na figura 2 apresentamos o início do diálogo realizado pelo *WhatsApp* com A1.

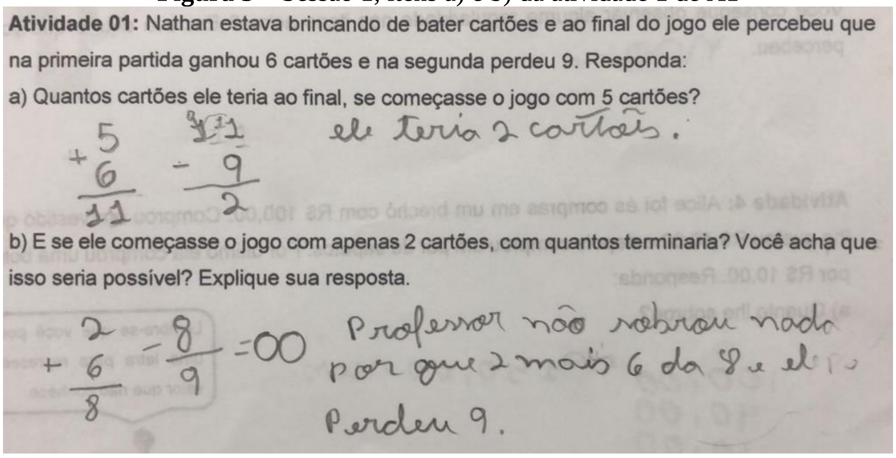
**Figura 2** - Interação com A1




Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente, A1 não estava compreendendo que cada item da primeira atividade apresentava uma situação hipotética da quantidade inicial de cartões do personagem, o que impede a devolução da situação. Mantivemos contato por cerca de 15 minutos para que ela compreendesse o que a atividade estava solicitando, e, finalmente, conseguisse realizar a atividade.

**Figura 3** – Sessão 1, itens a) e b) da atividade 1 de A1



**Atividade 01:** Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida ganhou 6 cartões e na segunda perdeu 9. Responda:

a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?

$5 + 6 = 11$ $\quad 11 - 9 = 2$ ele teria 2 cartões.

b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria? Você acha que isso seria possível? Explique sua resposta.

$2 + 6 = 8$ $\quad 8 - 9 = 00$ Professor não sobrou nada por que 2 mais 6 da 8 e ele Perdeu 9.

Fonte: dados da pesquisa

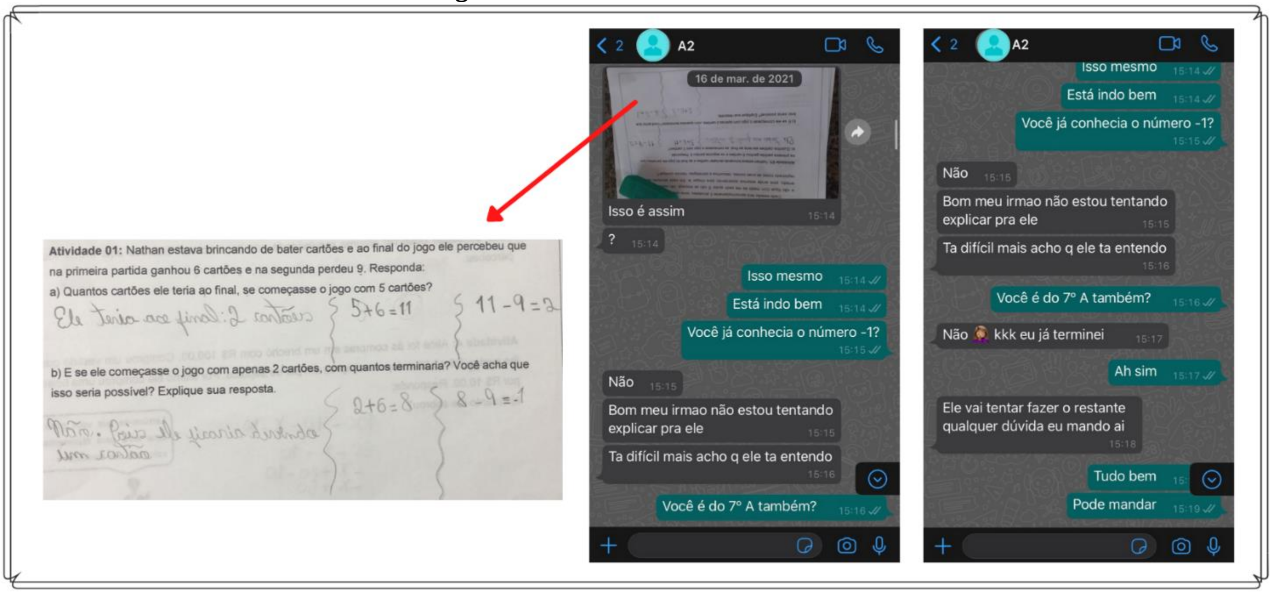
Conseguimos observar no item b) que embora A1 tenha percebido que Nathan perdeu mais cartões do que tinha, ela respondeu que ele ficou sem cartão, não se incomodando com a situação de perder um valor maior do que possuía ou que ele ficaria devendo um cartão na brincadeira.

Em seguida, esta mesma aluna pediu ajuda no item c), o que já era esperado, por se tratar do início do trabalho com a álgebra. A discussão para a resolução deste item durou mais de 30 minutos, com trocas de mensagens instantâneas, o que chamamos aqui de “diálogo síncrono”, ou seja, aquele com mensagens trocadas de forma simultânea. A1 apresentou muita dificuldade na representação do valor desconhecido; em diversos momentos da conversa ela dizia que não estava entendendo; depois de um certo tempo de discussão ela até perguntou, “tá, mas o que eu preciso fazer aqui?”. O diálogo sobre a atividade apenas por mensagens de texto estava se estendendo muito e, aparentemente, ela estava se cansando. Esse foi um grande desafio para nós: como manter A1 engajada naquela situação apenas por mensagens de texto? Em sala de aula é possível trocar ideias com colegas, tornar a atividade mais dinâmica, porém, no caso da situação proposta, a interação era apenas entre professor e aluna o que pode significar certa pressão sobre ela, além de ser no modo remoto, o que pode prejudicar certa dinamicidade na relação.

Naquele momento essa era nossa tarefa, pensar em maneiras de mantê-la ativa na situação, especialmente por ser a única da turma de 35 alunos que estava em contato conosco. Após mais algum tempo de interação, a aluna conseguiu dar continuidade à resolução das atividades e, passados alguns minutos, A2 entra em contato.

O contato inicial de A2 foi para verificar se as respostas dos itens da primeira atividade estavam corretas; ele queria esta confirmação para continuar respondendo às atividades seguintes. As respostas estavam corretas, então houve uma tentativa de iniciar um diálogo sobre os números inteiros negativos, apresentado abaixo na figura 4.

**Figura 4** - Contato inicial de A2

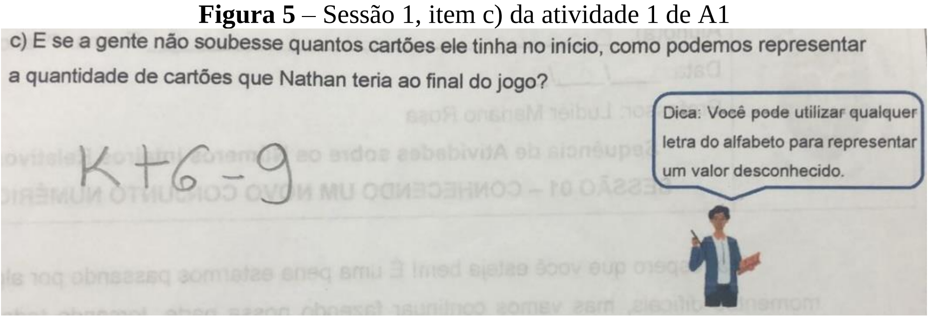



Fonte: dados da pesquisa

Nesse momento percebemos que, estando em casa, muitos alunos poderiam não responder à sequência didática sozinhos, pois poderiam contar com a ajuda de alguns de seus familiares, como era o caso de A2. Mesmo se isso acontece quando as aulas ocorrem no modo presencial, acreditamos que no ambiente remoto este ator “externo” ao sistema didático inicialmente pensado, tem papel muito mais forte: inclusive durante a pandemia os meios de comunicação divulgaram vários exemplos de estudantes sendo ajudados por familiares e a dificuldade que isso implicava, uma vez que estes não são especialistas na área. No diálogo apresentado na figura 4, percebemos claramente a importância da ajuda de uma pessoa mais experiente, a irmã do estudante, tentando explicar a atividade para ele e foi ela que entrou em contato conosco. O aluno ainda não conhecia esse número, mas ela estava tentando explicar para ele, ou seja, o sistema didático estava constituído de outra maneira.

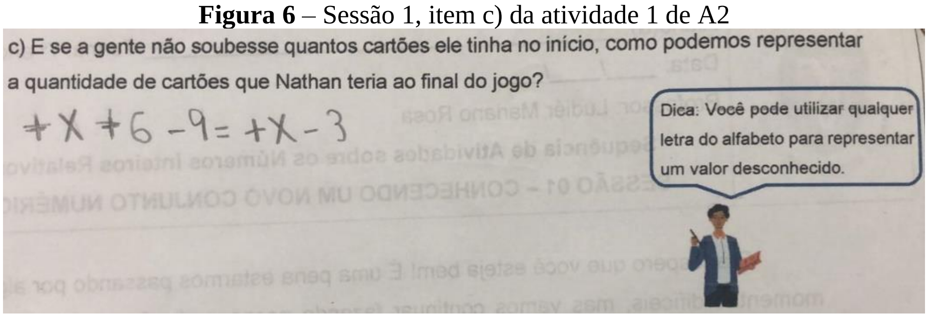
Nos momentos de análise das atividades, percebemos então certa diferença nas respostas de A1 que estava respondendo sozinha e A2 que contava com a ajuda de sua irmã. No item c) da primeira atividade que trabalhava a introdução de uma letra para representar um valor desconhecido, é possível observar claramente essa diferença, como vemos a seguir nas resoluções apresentadas por esses dois alunos.

**Figura 5** – Sessão 1, item c) da atividade 1 de A1




Fonte: dados da pesquisa

**Figura 6** – Sessão 1, item c) da atividade 1 de A2

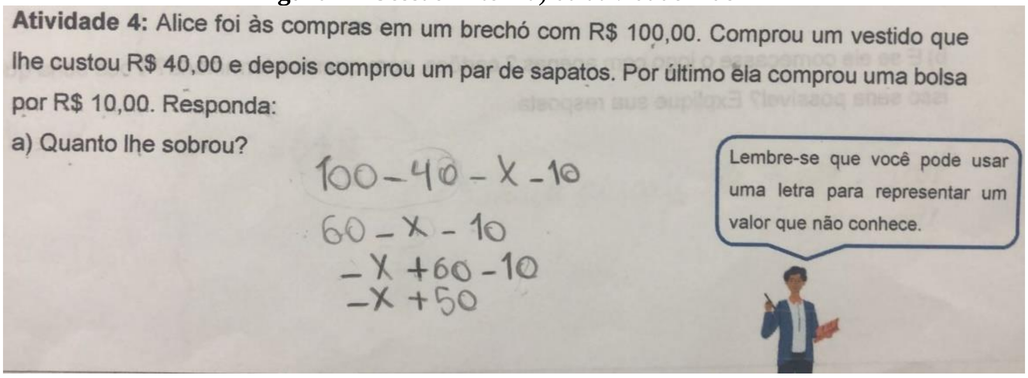



Fonte: dados da pesquisa

Embora A1 tenha representado a situação ocorrida na atividade de forma correta, não representou a expressão que indica a quantidade de cartões que Nathan teria ao final do jogo, inferimos que seja pelo fato de desconhecer a resolução de uma expressão algébrica, especialmente da parte +6 – 9. Além disso, no diálogo inicial (figura 2), antes de identificar a quantidade inicial de cartão, A1 afirma que Nathan terminaria sem nenhum cartão, pois ele “ganhou 6 e perdeu 9”, ou seja, ela poderia indicar em sua resposta “k + 0”, de forma errônea.

Por outro lado, A2 chega à expressão que representa a quantidade que Nathan terminaria ao final do jogo, + x – 3. No contato inicial sua irmã informou que ele estava com dificuldades para compreender o – 1 como resposta do item b), mas que estava tentando explicar. Da mesma forma, inferimos que a simplificação da expressão + x + 6 – 9 = + x – 3, passa pela resolução dela, com nova tentativa de explicação a seu irmão. O mesmo ocorre no item a) da quarta atividade da primeira sessão, em que A2 consegue representar a expressão correta do valor que Alice ficou após fazer compras.

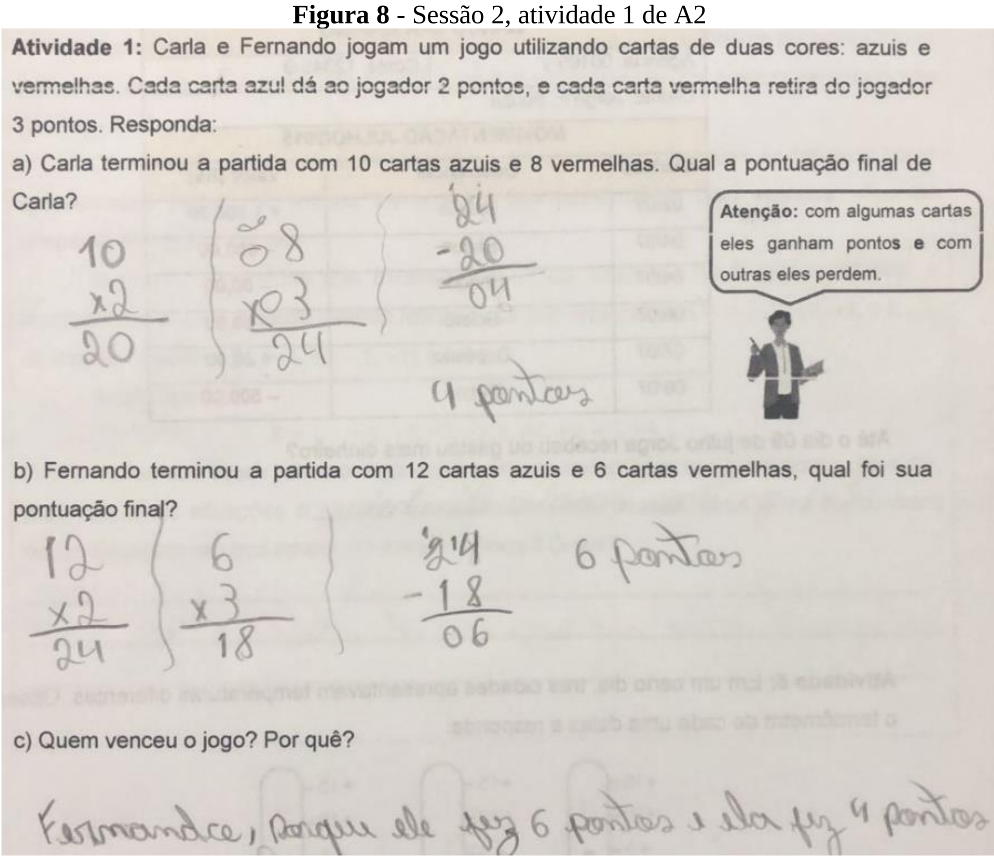
**Figura 7** - Sessão 1 item a) da atividade 4 de A2




Fonte: dados da pesquisa

Embora A2 tenha apresentado respostas adequadas às atividades que exigiam alguns conhecimentos algébricos, possivelmente, pela presença de sua irmã que tinha familiaridade com esses conceitos, em outras atividades que envolviam conhecimentos dos números inteiros relativos ele manifestou dificuldades. Observemos a primeira atividade da sessão 02.

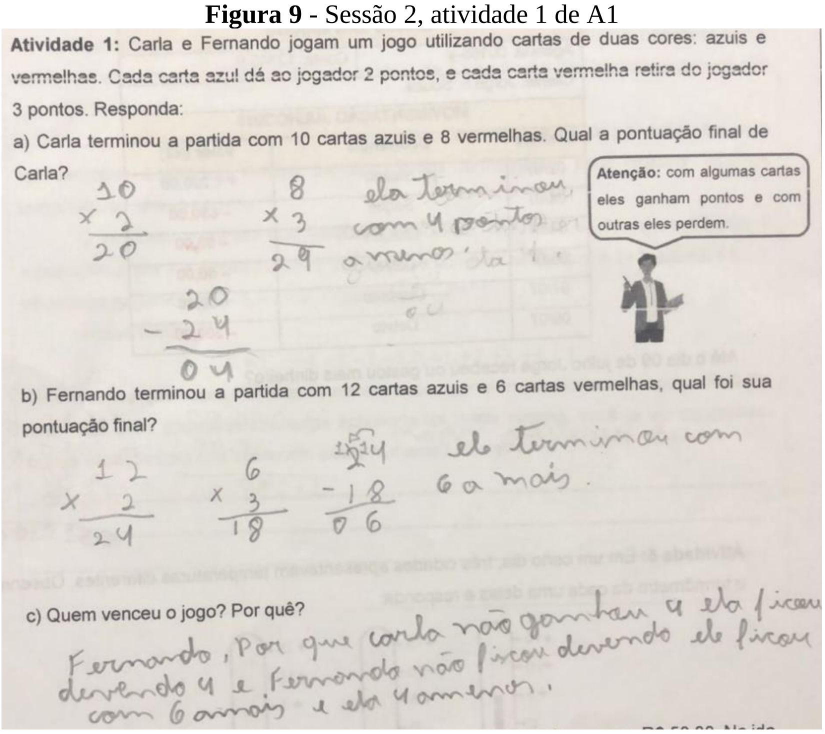
**Figura 8** - Sessão 2, atividade 1 de A2




Fonte: dados da pesquisa

No item a), A2 indica que Carla finalizou o jogo com 4 pontos, sem distinção sobre a pontuação ser positiva ou não, fez o mesmo para o item b). Embora a resposta final do item c) esteja correta, pois Fernando venceu o jogo, o caminho para esta não foi o correto, pela coincidência da pontuação de Fernando ser maior do que a de Carla independente do módulo nesta situação, ou seja, a justificativa correta seria que Fernando venceu por obter a pontuação 6 positiva, e Carla 4 negativa. Essa explicação, ainda que sem o rigor da utilização dos termos “pontuação positiva/negativa” aparece na resolução de A2, figura 9 a seguir.

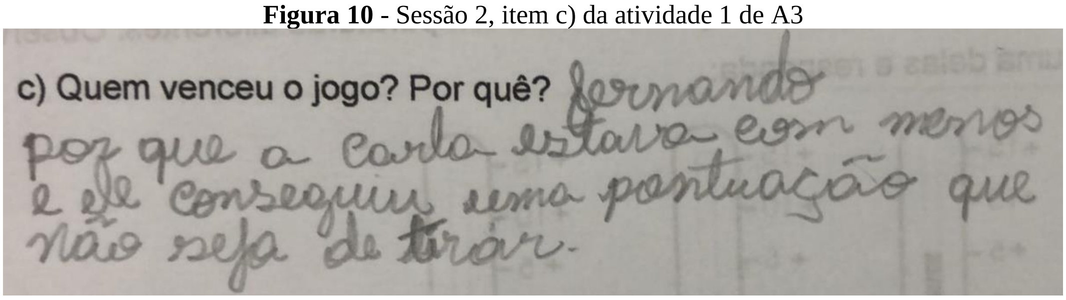
**Figura 9** - Sessão 2, atividade 1 de A1




Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que A2 consegue indicar que a pontuação no item a) é negativa, mas sem usar a notação “negativo”; ela emprega a linguagem comum para expressar a resposta, escrevendo “ela terminou com 4 pontos a menos”, da mesma forma no item b) “ele terminou com 6 a mais”, o que era esperado por nós nessa atividade. Para a justificativa de quem vence o jogo, A2 utiliza o mesmo raciocínio, “Fernando, porque Carla não ganhou 4, ela ficou devendo 4 e Fernando não ficou devendo, ele ficou com 6 a mais e ela 4 a menos”. A3 também usa uma justificativa semelhante para o vencedor do jogo.

**Figura 10** - Sessão 2, item c) da atividade 1 de A3




Fonte: dados da pesquisa

Ao compararmos as resoluções da primeira atividade da segunda sessão de A1 e A2, percebemos que, mesmo com a ajuda de sua irmã, a resolução envolvendo os números inteiros relativos apresentou dificuldades, o que mostra que elas não estão presentes somente em alunos no primeiro contato com esse conjunto, mas que persistem em alunos de outros níveis escolares. Outra questão a ressaltar é o fato de que a comunicação com A1 era direta, pois era ela que escrevia as mensagens; já na comunicação com A2 tínhamos uma espécie de intermediária, sua irmã, pois era ela que escrevia as mensagens, indicando as dificuldades de seu irmão que ela não conseguia explicar. A ideia era que ela buscasse compreender para então explicar para o irmão. Por consequência, o contato direto com A2 foi menor, uma vez que, sua irmã só entrava em contato em atividades que ela não sabia explicar.

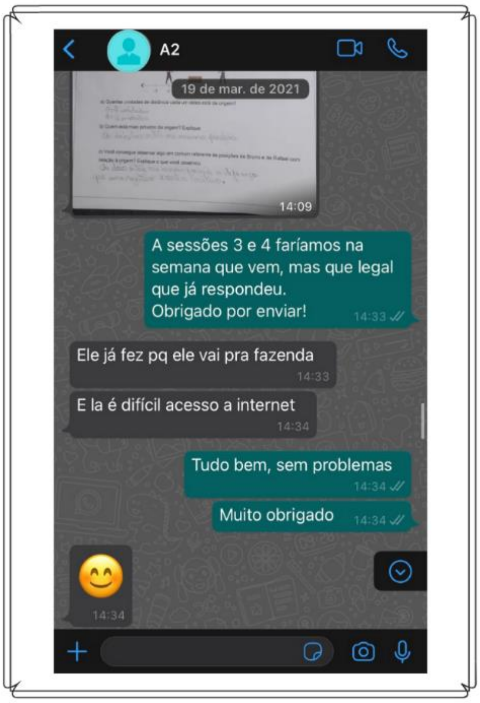
Para o fechamento dessa primeira semana, final da segunda sessão, o quadro "Para concluir..." discutia sobre a aparição dos números inteiros negativos nas atividades ao longo da sessão e comentava sobre alguns contextos que esses números poderiam aparecer. Em seguida, apresentava formalmente o conjunto aos alunos, para depois, por meio de uma pergunta, solicitar que os alunos indicassem outras situações em que esses números poderiam aparecer, caso conhecessem. Porém, esses dois alunos indicaram que "nunca viram" esses números anteriormente, sem qualquer comentário adicional no *WhatsApp* sobre isso.

Essa era uma outra dificuldade, os alunos entravam em contato para discutir apenas algumas atividades da sequência, não todas, e assim davam algumas respostas equivocadas ou errôneas em outras, as quais tínhamos acesso somente após esses alunos devolverem as sessões respondidas na escola. Assim, os alunos já estavam desenvolvendo outras sessões e tirando dúvidas sobre outras atividades, o que dificultava a retomada de respostas equivocadas para iniciar uma discussão. No ensino presencial o professor tem a possibilidade de, ao perceber as ações dos alunos, lançar questões, estimular um debate, o que não foi possível no formato em que esta atividade foi desenvolvida. Talvez, se houvesse um momento conjunto com a turma para o fechamento de cada sessão, ou pelo menos, a cada semana, solicitando já as respostas de todas as atividades, esses equívocos poderiam ser retomados e discutidos. Mas isso não seria possível por dois motivos, o primeiro é que na primeira semana nem todos os alunos haviam retirado as atividades para dar início a resolução, e o segundo seria encontrar uma plataforma *on-line* que todos tivessem acesso para participar desse momento. Essas e outras dificuldades foram se manifestando ao longo das sessões seguintes.

No dia 18 de março de 2021, quinta-feira, A3 entrou em contato para tirar dúvidas sobre as atividades da sessão 04 que trabalhava módulo de um número inteiro; esta sessão seria aplicada no dia 23 de março, segunda semana de trabalho com os alunos. Houve um questionamento se ele já havia chegado na quarta sessão, afirmando que poderia fazer somente as sessões 01 e 02 nesta semana e deixar as sessões 03 e 04 para a próxima. A4 respondeu dizendo que gostaria de terminar todas as tarefas dele naquele dia porque depois teria que ir para a casa do pai, afirmando que mora com a mãe; então gostaria de terminar as sessões porque teria outras tarefas para fazer na casa de seu pai. Ele enviou essa mensagem pelo celular de sua avó, que era quem estava no grupo de alunos da turma de 7º ano, ou seja, ele só via as atividades enviadas pelos professores quando estava na casa de sua mãe e tinha acesso ao grupo pelo celular de sua avó. Então ele acabava realizando mais sessões por semana, bem como entrava em contato para tirar suas dúvidas em outros dias diferentes àqueles reservados para as aulas de matemática. Novamente estamos diante de fatores externos à sala de aula que estavam influenciando a relação desse aluno com o conhecimento – o nível da sociedade. As condições da família desse aluno em que ele só tinha acesso pelo celular de sua avó, obrigavam que ele se reorganizasse de certa forma para que atendesse às atividades das diferentes disciplinas na semana que ficava na casa de sua mãe, o que influenciava o seu tempo de estudo reservado para cada disciplina.

Além disso, no dia 19 de março, a irmã de A2 enviou foto das quatro primeiras sessões respondidas, sem nenhum tipo de interação para tirar dúvidas além daquela realizada na primeira sessão. Na figura 11 podemos observar a justificativa de envio.

**Figura 11** - Justificativa de A2




Fonte: dados da pesquisa

Começamos a perceber então como esses fatores externos estavam pesando sobre a difusão dos saberes; é possível notar que a baixa interação com os alunos se devia a vários motivos; muitos deles não tinham acesso à internet, ainda que pelo celular no *WhatsApp*. Isso foi possível notar pois ao enviar as orientações de cada sessão no grupo, era possível verificar quantas pessoas recebiam a mensagem e quantas visualizavam. Outro motivo, é que muitos alunos estavam na zona rural, além disso, muitos pais estavam no grupo, ou seja, os alunos utilizavam os aparelhos celulares de seus pais, que muitas vezes trabalhavam durante o dia todo e só voltavam para casa no final da tarde/início da noite (nível da sociedade). Assim sendo os alunos somente poderiam tirar dúvidas de noite, o que não configura uma situação ideal para o estudo.

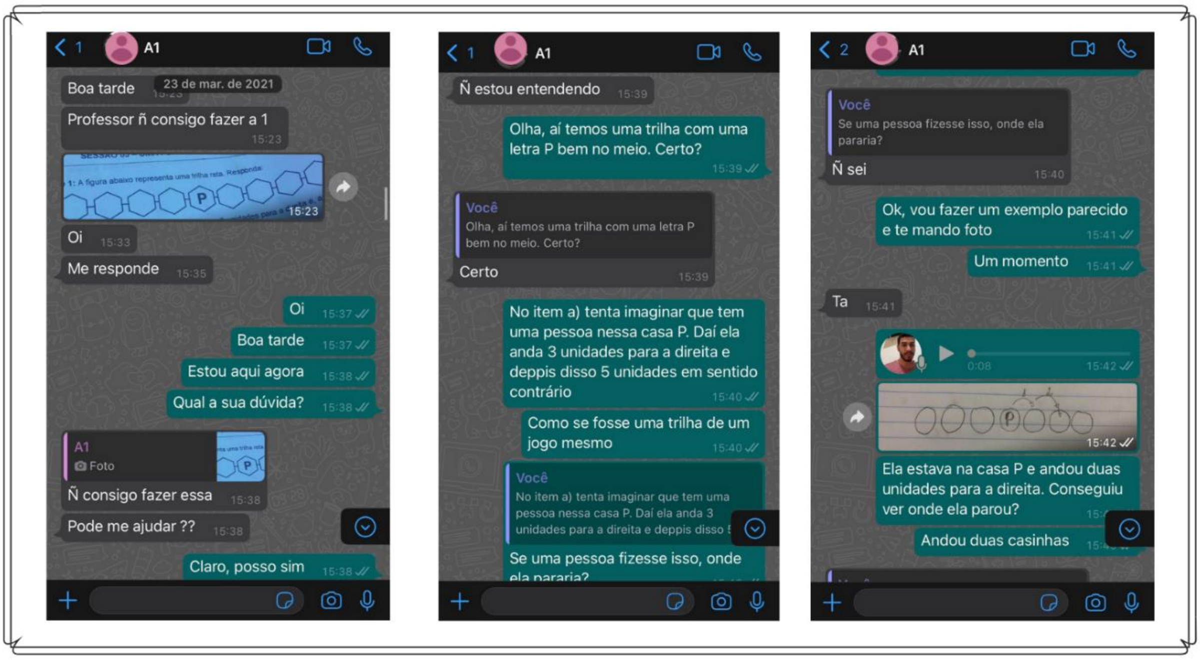
Finalizada a primeira semana de aplicação com os alunos, passamos para a análise das sessões aplicadas na semana seguinte.

### 5.2.2 Segunda Semana: Sessões 03 e 04

A segunda semana de aplicação, foi a que os alunos menos entraram em contato para discutir sobre as atividades, mesmo os 03 primeiros que já haviam entrado em contato na semana anterior. Como vimos, dois deles já haviam realizado as sessões 03 e 04 ainda na primeira semana; A3 porque estava na casa da mãe e tinha o celular de sua avó e A2 porque iria para a fazenda (zona rural) e teria dificuldades de acesso à internet.

Nas atividades da terceira sessão, que trabalharam ideias para construção da reta numérica, os alunos mobilizaram diferentes estratégias de resolução. Nesta, apenas A1 entrou em contato para tirar dúvidas pontuais sobre a primeira atividade, pois não estava compreendendo como fazer os deslocamentos sobre a trilha presente na primeira atividade.

**Figura 12** - Diálogo com A1, sessão 3

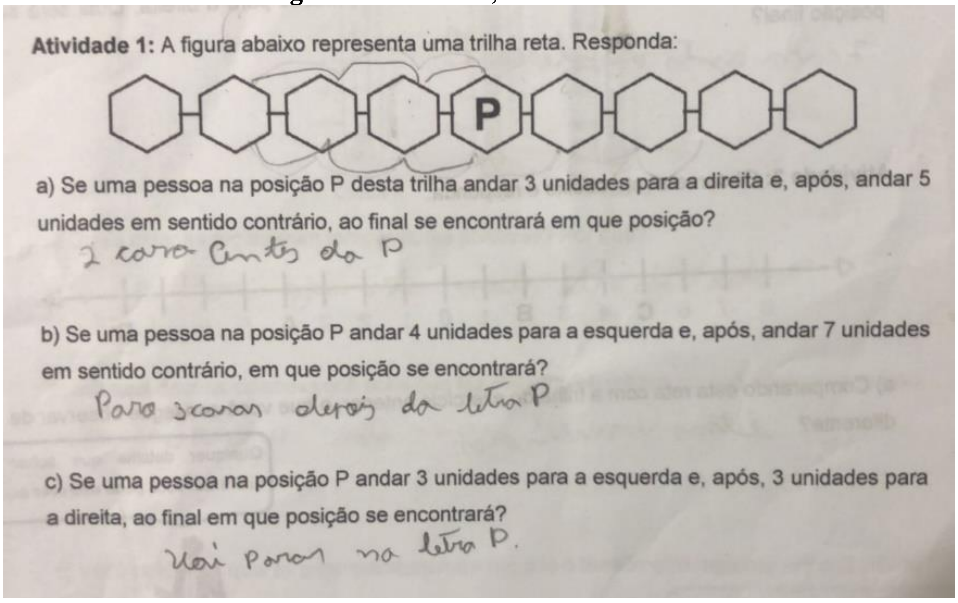



Fonte: dados da pesquisa

A1 era uma aluna que gostava de respostas instantâneas. Podemos observar, no início do diálogo, uma pequena demora de resposta pelo pesquisador, pois estava dirigindo da escola para casa e não estava com o celular; ao chegar em casa e receber suas mensagens o diálogo foi iniciado. Na figura 12 apresentamos apenas o diálogo inicial sobre a primeira atividade da terceira sessão, A1 apresentou muita dificuldade para compreender como fazer os deslocamentos de cada item desta atividade. As discussões para compreensão apenas sobre os três itens presentes nesta primeira atividade duraram cerca de 30 minutos, em que o pesquisador teve que apresentar outros dois exemplos semelhantes àquele enviado para A1 no último *print* de tela. A1 era a aluna que mais participava e interagia durante as sessões, talvez pelo fato de ter dificuldades para compreender as atividades.

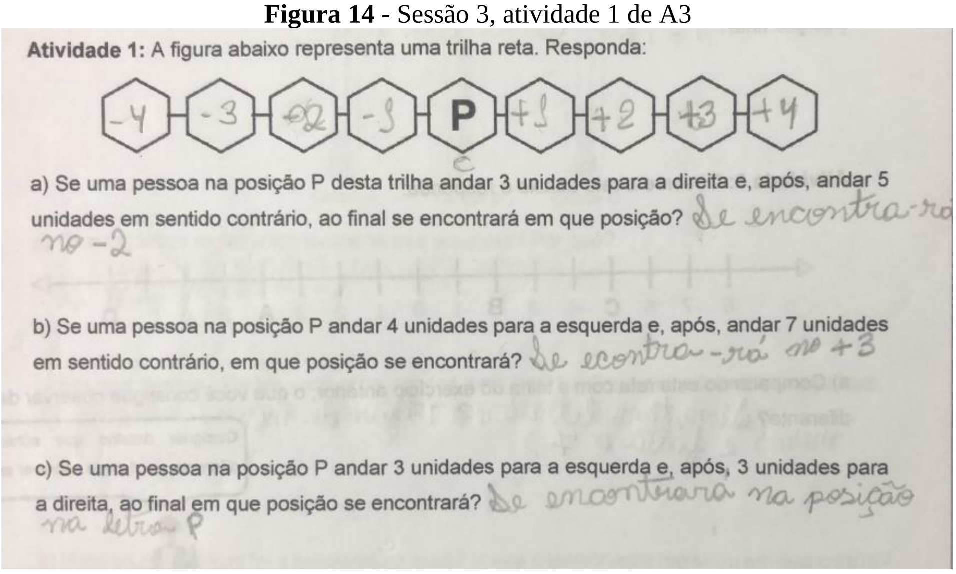
As estratégias mobilizadas por A1 nas duas primeiras atividades foram diferentes das mobilizadas por A3, conforme vemos nas figuras 13 e 14:

**Figura 13** - Sessão 3, atividade 1 de A1




Fonte: dados da pesquisa

**Figura 14** - Sessão 3, atividade 1 de A3



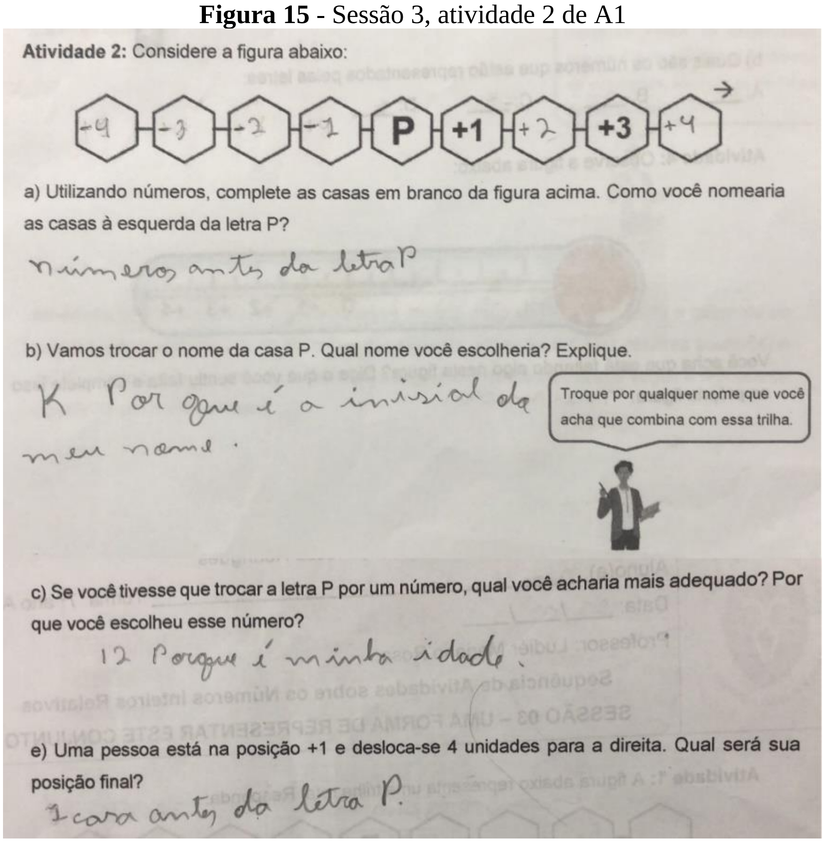

Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que A1 fez os deslocamentos de forma correta e indicou as posições utilizando a casa P como referência de localização, porém, não identificou cada casa da trilha. Por outro lado, A3 fez a identificação de cada casa na trilha de acordo com a reta numérica e, acreditamos que isso possa ter ocorrido por dois motivos: o primeiro é que na atividade seguinte essa mesma trilha aparecia com a casa P e os números +1 e +3 em suas respectivas posições e era solicitado que o aluno completasse a trilha, então ele poderia ter feito a transposição dessa atividade para responder a primeira; o segundo é que ao final da sessão o quadro “Para concluir...” apresentava a construção e representação dos números inteiros relativos na reta numérica, o que pode ter influenciado no completamento da trilha já na primeira atividade, caso o aluno tivesse feito a leitura de toda a sessão.

Quando escolhemos incluir os quadros de retomada/fechamento das sessões, essa seria mais uma possibilidade de auxílio para os estudantes. Alguns alunos, ao receberem uma lista de atividade ou prova, podem ter o costume de realizar, primeiramente, a leitura integral de todas as páginas para depois começar a responder e, algumas ideias, elementos e conceitos estavam presentes nesses quadros, o que poderia auxiliar alguns alunos na resolução das atividades.

Embora A1 tenha conseguido responder essas atividades, percebemos que as dificuldades de deslocamento sobre a trilha apresentada, ainda persistiam. Observamos que na segunda atividade, que continuava trabalhando noções de construção da reta numérica, as respostas de A1 não indicavam uma relação com os deslocamentos realizados na primeira atividade.

**Figura 15** - Sessão 3, atividade 2 de A1


**Atividade 2:** Considere a figura abaixo:

-4 -3 -2 -1 P +1 +2 +3 +4

a) Utilizando números, complete as casas em branco da figura acima. Como você nomearia as casas à esquerda da letra P?

números antes da letra P

b) Vamos trocar o nome da casa P. Qual nome você escolheria? Explique.

K Por que é a inicial do meu nome.

Troque por qualquer nome que você acha que combina com essa trilha.

c) Se você tivesse que trocar a letra P por um número, qual você acharia mais adequado? Por que você escolheu esse número?

12 Porque é minha idade.

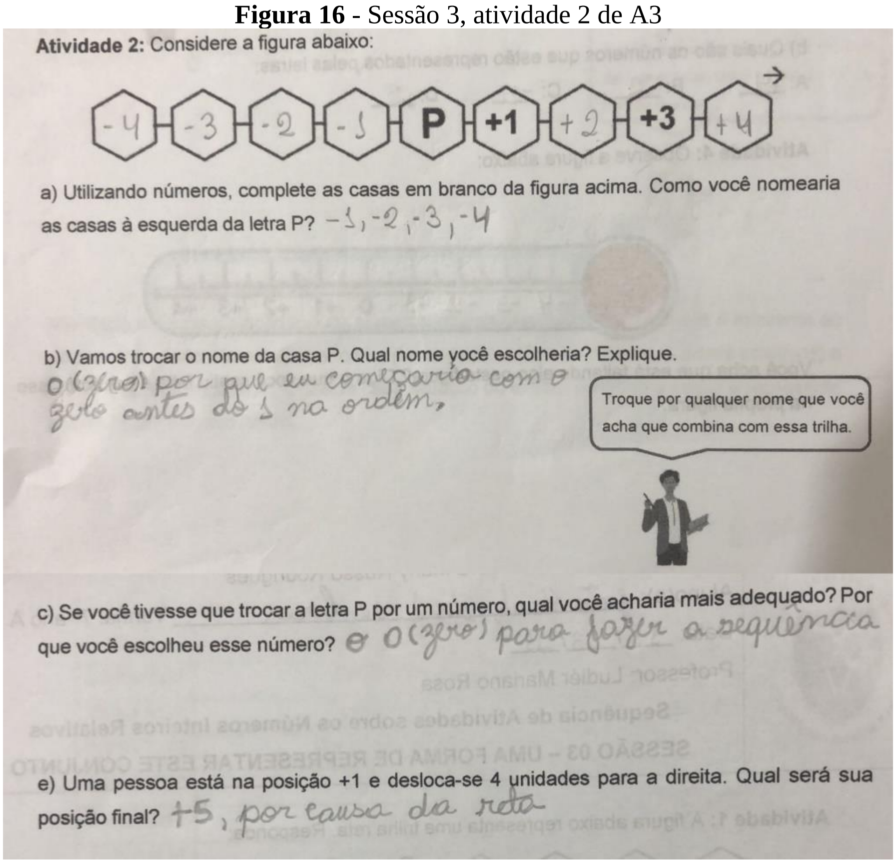
e) Uma pessoa está na posição +1 e desloca-se 4 unidades para a direita. Qual será sua posição final?

1 casa antes da letra P.

Fonte: dados da pesquisa

Apesar de completar corretamente as casas que estavam faltando na trilha, especialmente aquelas posicionadas à esquerda de P, que poderia causar certa confusão, nos itens seguintes as justificativas dadas por A1 indicam que as ideias da reta numérica não foram manifestadas, uma vez que na troca da casa P por outro nome não foi feita nenhuma relação com início, começo, partida; e no item c) ao ter que trocar a casa P por um número, A1 escolhe 12 por ser sua idade. Além disso, não consegue responder o último item de forma correta, mesmo depois da trilha preenchida. Por outro lado, essas noções da reta numérica foram mobilizadas por A3, como vemos na figura 16.

**Figura 16** - Sessão 3, atividade 2 de A3


**Atividade 2:** Considere a figura abaixo:

-4 -3 -2 -1 P +1 +2 +3 +4

a) Utilizando números, complete as casas em branco da figura acima. Como você nomearia as casas à esquerda da letra P? -1, -2, -3, -4

b) Vamos trocar o nome da casa P. Qual nome você escolheria? Explique.
0 (zero) por que eu começaria com o zelo antes do 1 na ordem,

Troque por qualquer nome que você acha que combina com essa trilha.

c) Se você tivesse que trocar a letra P por um número, qual você acharia mais adequado? Por que você escolheu esse número? ~~0~~ 0 (zero) para fazer a sequência

e) Uma pessoa está na posição +1 e desloca-se 4 unidades para a direita. Qual será sua posição final? +5, por causa da reta

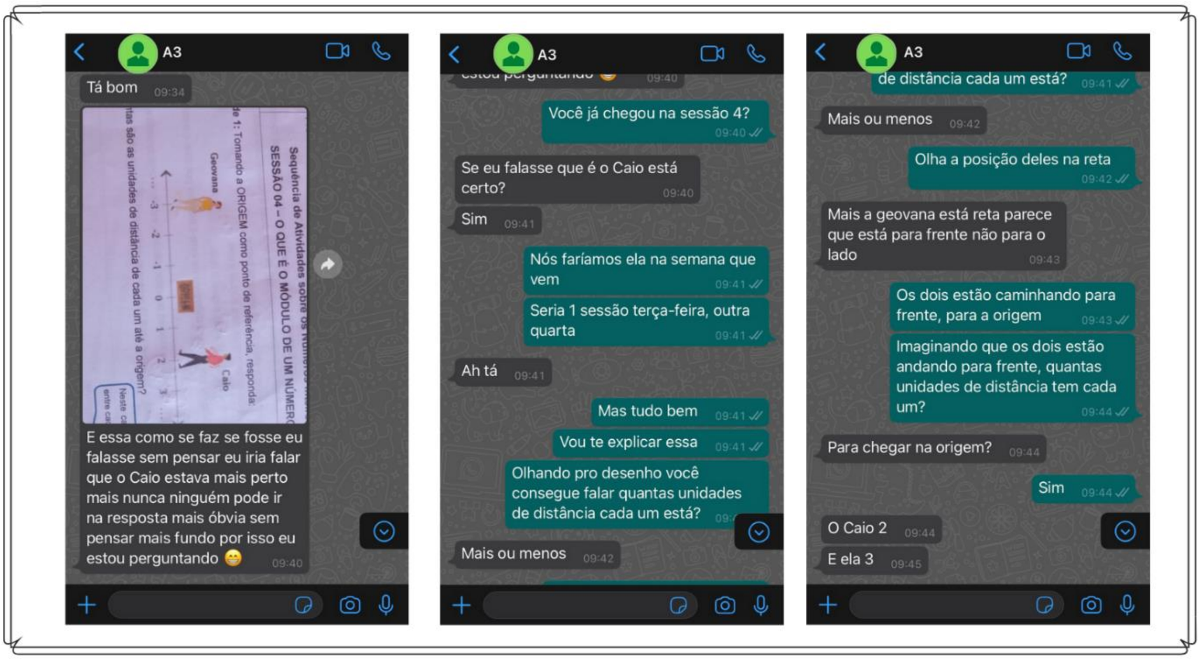
Fonte: dados da pesquisa

É possível observar que já no item b) A3 indica a mudança da casa P por zero, justificando que começaria com ele “antes do 1 na ordem”, e retoma essa justificativa no item c), indicando que já observou uma sequência na disposição dos números daquela trilha. Além disso, realiza o deslocamento do próximo item de forma correta, ainda que esta casa final não “apareça” na reta representada na trilha da atividade 2, que vai até a casa +4.

Anteriormente, numa atividade, em um breve momento de interação com A3, ele afirma que estava resolvendo as atividades juntamente com seu padrasto e que estava entrando em contato, pois os dois haviam ficado em dúvida; novamente percebemos que o sistema didático havia sido ampliado, como no caso de A2 com sua irmã. Quando outros indivíduos constituem esse sistema, os elementos que passam a fazer parte do meio preparado pelo professor, também se modificam, pois não são apenas os conhecimentos do aluno que entram em jogo, mas também os de seus familiares e nesse caso é muito mais complexo para o pesquisador ter acesso a tais conhecimentos.

Queremos apresentar aqui também uma questão relacionada aos ostensivos utilizados nas atividades da sessão 4. O objetivo dessa sessão era trabalhar posições sobre a reta numérica para introduzir o conceito de módulo de um número inteiro relativo. Na figura 17 apresentamos um diálogo com A3.

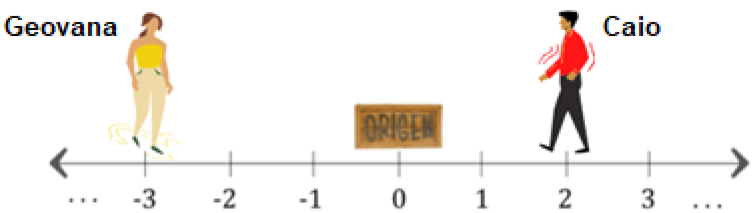
**Figura 17** - Interação com A3, sessão 4, atividade 1




Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente A3 questiona sobre Caio estar mais próximo da origem, porém, ficou com dúvidas por achar que estava "muito óbvio", e decidiu perguntar. Ao iniciar o debate sobre a atividade com A3, solicitando que ele observasse a posição dos personagens na reta numérica, ele diz que Geovana, umas das personagens, parece não estar caminhando em direção a origem. A seguir colocamos a imagem da atividade em questão.

**Figura 18** - Imagem da atividade 1, sessão 4

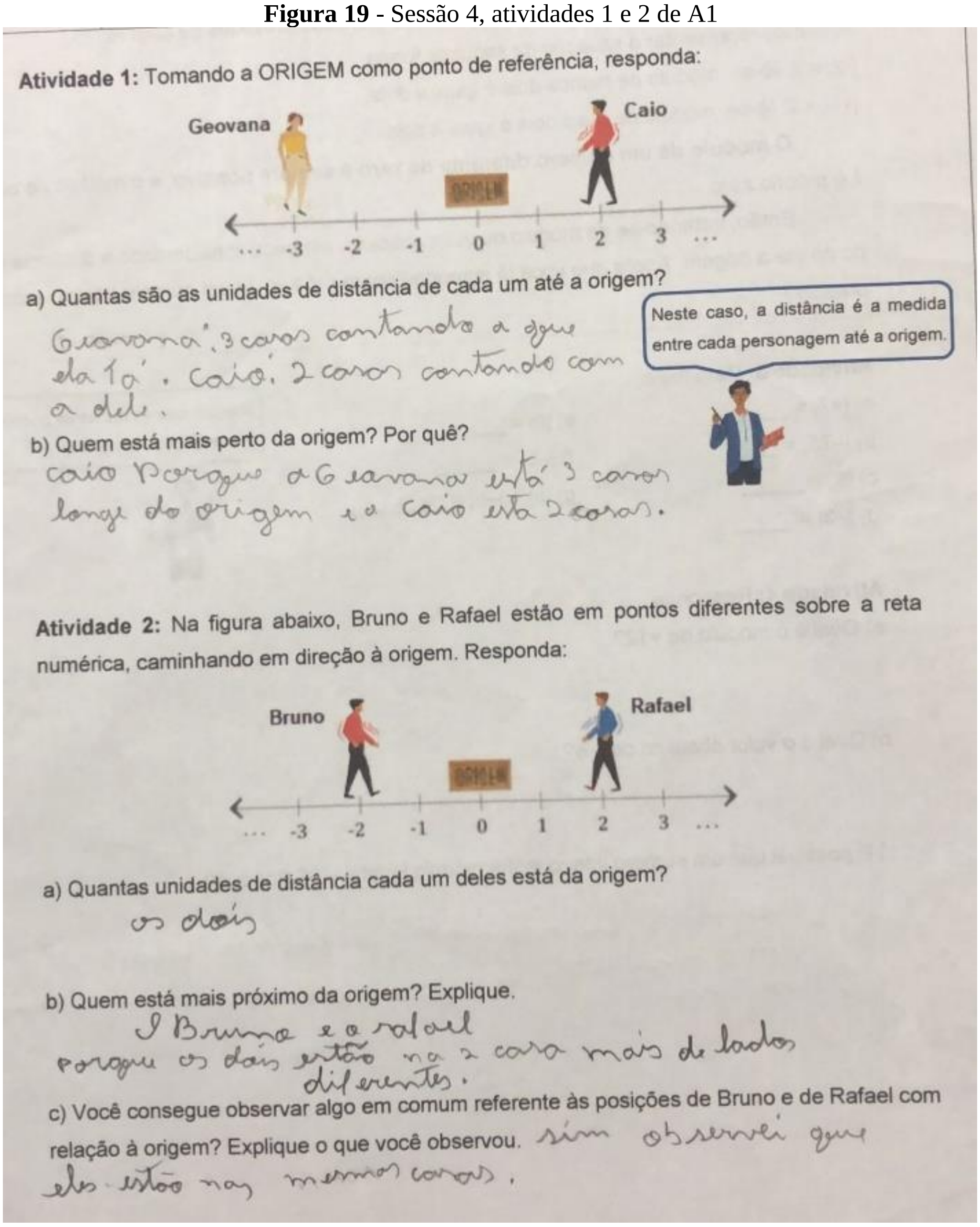



Fonte: (AUTOR, 2020)

Isso reforça a importância da escolha dos ostensivos a serem utilizados nas atividades. No momento de elaboração desta imagem, não observamos que a imagem utilizada para representar Geovana parecia não caminhar na mesma direção que Caio, e que isso poderia causar certa confusão na interpretação dos alunos. Após afirmar que ambos estavam caminhando sobre a reta, indo para a origem, A3 afirmou que sua resposta estava correta e conseguiu desenvolver as atividades seguintes.

Apresentamos aqui as respostas dadas por A1 e A2 nas duas primeiras atividades desta sessão.

**Figura 19** - Sessão 4, atividades 1 e 2 de A1



**Atividade 1:** Tomando a ORIGEM como ponto de referência, responda:



a) Quantas são as unidades de distância de cada um até a origem?

Geovana: 3 casas contando a que ela tá. Caio: 2 casas contando com a dele.



b) Quem está mais perto da origem? Por quê?

caio porque a Geovana está 3 casas longe da origem e o caio esta 2 casas.

**Atividade 2:** Na figura abaixo, Bruno e Rafael estão em pontos diferentes sobre a reta numérica, caminhando em direção à origem. Responda:



a) Quantas unidades de distância cada um deles está da origem?

os dois

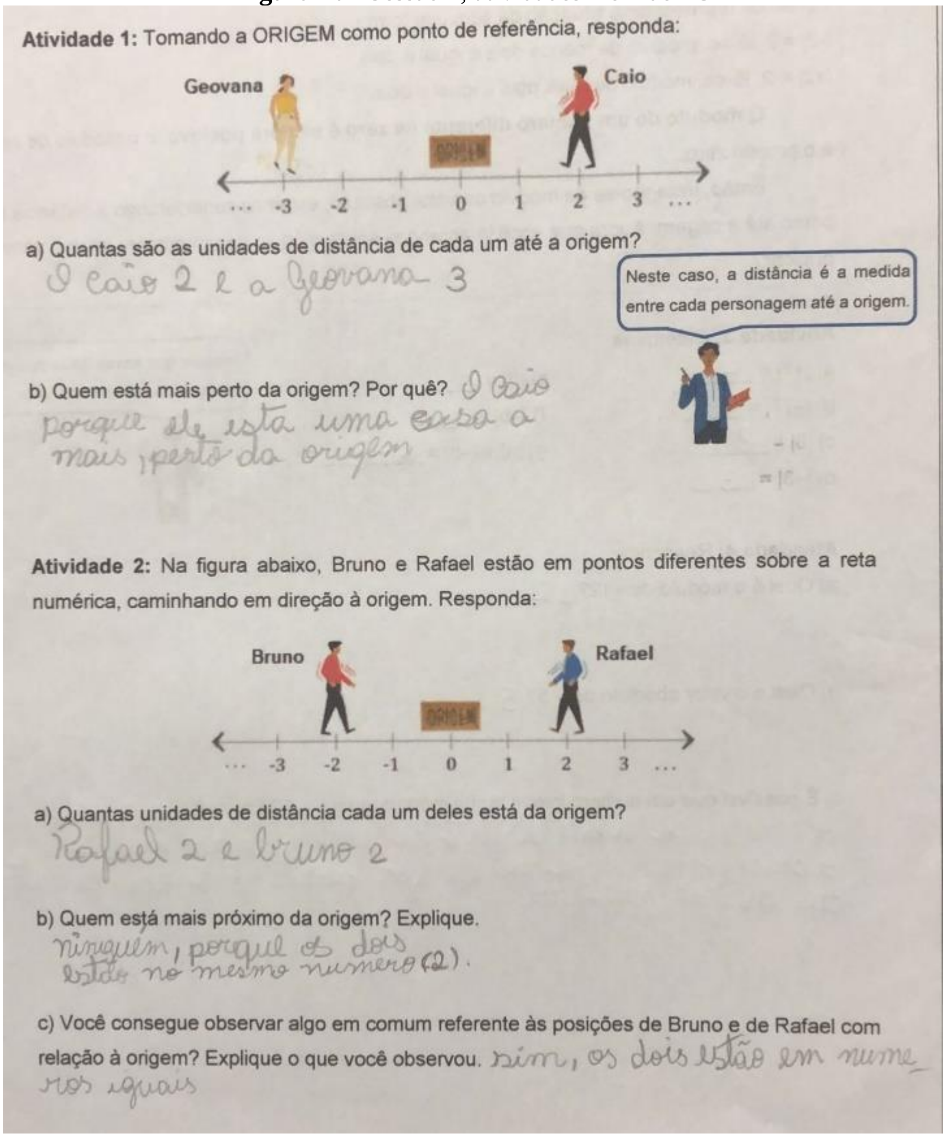
b) Quem está mais próximo da origem? Explique.

O Bruno e o rafael porque os dois estão na 2 casa mais de lados diferentes.

c) Você consegue observar algo em comum referente às posições de Bruno e de Rafael com relação à origem? Explique o que você observou. sim observei que eles estão nas mesmas casas.

Fonte: dados da pesquisa

**Figura 20** - Sessão 4, atividades 1 e 2 de A3




Fonte: dados da pesquisa

Percebemos que ambos conseguiram identificar as respectivas posições do personagem sobre a reta numérica, justificando o item b) pela diferença de uma casa a mais para a distância de Geovana. Na atividade seguinte, apesar de compreenderem que os dois estavam à mesma distância da origem, não apresentam uma justificativa correta; A1 afirma que eles estão na “mesma casa”, e A2, confundindo o conceito de distância, afirma que eles estão “em números iguais”.

Até as sessões 3 e 4 grande parte da turma ainda não tinha retirado as atividades, nem entrado em contato conosco para tirar dúvidas. Estávamos ficando preocupados pelo acúmulo de sessões que poderia ficar para esses alunos e, caso eles pegassem as anteriores para fazer e entrassem em contato, seria complicado atender a todos de forma simultânea pelo *WhatsApp*.

Em alguns momentos dessas primeiras sessões, A1 e A2, que costumavam fazer as sessões nos horários destinados às aulas de matemática, entraram em contato ao mesmo tempo e, foi um grande desafio respondê-los para mantê-los ativos na resolução da atividade. A1 gostava de respostas imediatas, algumas vezes até ligava e desligava para chamar atenção para que respondêssemos imediatamente. E se mais estudantes entrassem em contato para discutir as atividades, como essa mediação seria feita? Esta é uma questão que nos parece fundamental para reflexão nesta modalidade de ensino se o objetivo não é dar respostas diretas, mas, sim, fomentar a reflexão, como propõe a teoria das situações didáticas.

Na quinta-feira dessa segunda semana de aplicação da sequência didática (25/03/2021), foi publicado um decreto estadual suspendendo o funcionamento das escolas da rede estadual de ensino, bem como a postagem de atividades em plataformas *on-line* para os estudantes no período de 26 de março a 04 de abril de 2021. Dessa maneira, os professores ficaram impedidos de enviar atividades pelo *WhatsApp* para os alunos durante esse período; a escola informou que retomaria as atividades no dia 05/04/2021 (segunda-feira).

Isso ocorreu por mais uma onda com altas taxas de contágio, ocupação dos leitos e número de mortes pela COVID-19 em Mato Grosso do Sul. Aqui retomamos novamente a importância de analisar os fatores externos à sala de aula, pois essa "parada" nas atividades, super necessária diante da situação, comprometeria o desenvolvimento da sequência de atividades, uma vez que nessa semana muitos alunos poderiam não ter momentos de estudo e, nesse retorno, precisaríamos encontrar novamente um ritmo de interação e de desenvolvimento das atividades com os alunos participantes. Tais fatores, advindos do nível Sociedade (ou, até mesmo, humanidade, uma vez que a pandemia foi/é fato mundial), fogem à esfera de "domínio" da sala de aula, mas pesam sobre a difusão dos saberes.

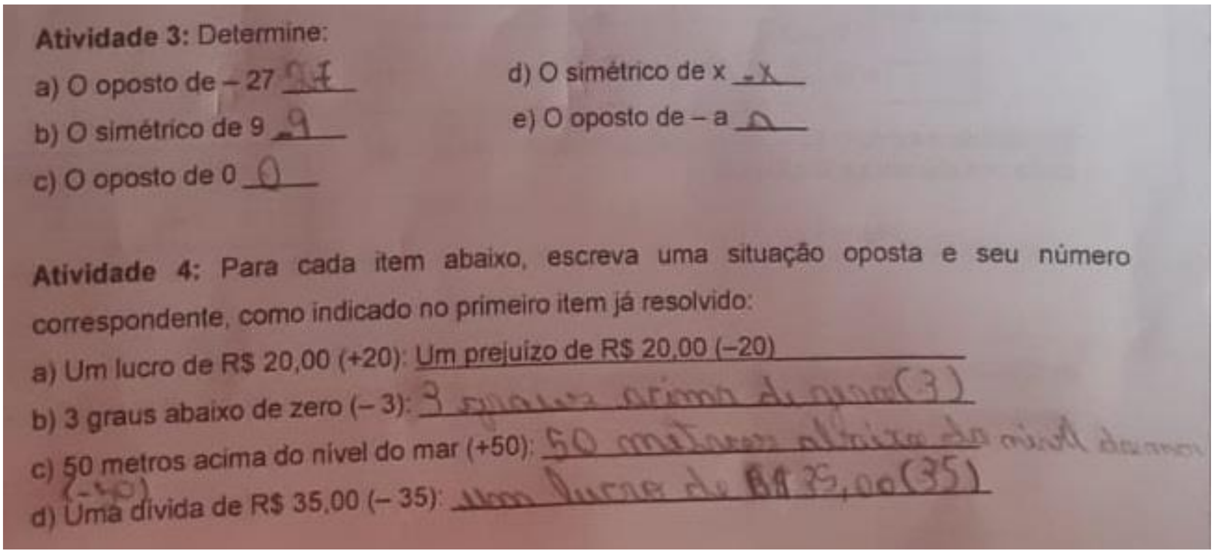
Nessa semana de suspensão faríamos a entrega das 4 sessões impressas que faltavam para os alunos, pois já havíamos finalizado as 4 primeiras. Ficamos um pouco preocupados, pois o professor da turma de 7º ano havia cedido 4 semanas para trabalharmos com os alunos, porém, diante da situação ele disponibilizou mais uma semana para trabalharmos com a turma. Passada essa semana de suspensão, fizemos a entrega das sessões restantes na escola para retirada e demos continuidade à realização das atividades, passando então para a terceira semana, de fato, trabalhada com os estudantes.

5.2.3 Terceira semana: Sessões 05 e 06

Nessa terceira semana foram trabalhadas as sessões 05 e 06. Como previsto anteriormente, após esse período de suspensão, na retomada das atividades o ritmo de interação com os alunos diminuiu ainda mais. Na quinta sessão os 4 alunos quase não entraram em contato, tiraram apenas dúvidas pontuais sobre como encontrar o módulo do um número inteiro, como era solicitado no item b) da primeira atividade. A interação era apenas para verificar se os resultados estavam corretos e se eles estavam no caminho certo, quando isso acontecia, tentávamos iniciar uma conversa sobre a resposta apresentada pelo estudante, evitando responder “certo” ou “errado”, geralmente solicitando que ele falasse sobre como pensou para chegar àquela resposta ou se alguma outra também satisfaria, para iniciar uma discussão sobre a atividade.

A quinta sessão trabalhava o conceito de oposto ou simétrico de um número inteiro e os estudantes conseguiram responder às atividades sem grandes problemas. Apresentamos aqui as respostas de A2 e A3 para as atividades 03 e 04, consideradas por nós como “situações de reinvestimento” trabalhadas ao final da quinta sessão após o quadro “Para concluir...”

**Figura 21** - Sessão 5, atividades 3 e 4 de A2


**Atividade 3:** Determine:

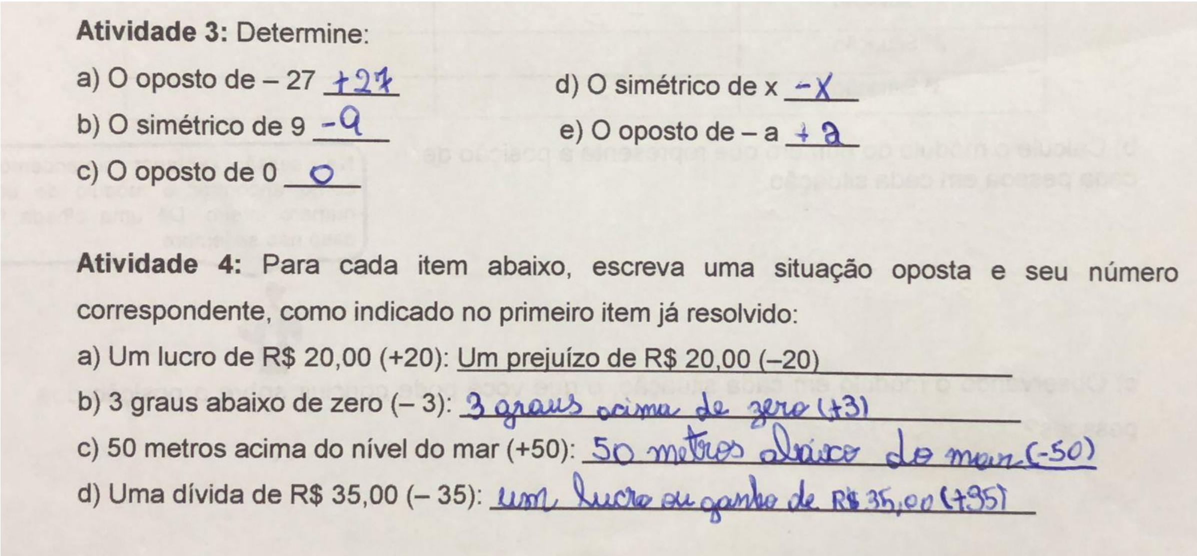
a) O oposto de – 27 27
b) O simétrico de 9 -9
c) O oposto de 0 0
d) O simétrico de x -x
e) O oposto de – a a

**Atividade 4:** Para cada item abaixo, escreva uma situação oposta e seu número correspondente, como indicado no primeiro item já resolvido:

a) Um lucro de R$ 20,00 (+20): Um prejuízo de R$ 20,00 (–20)
b) 3 graus abaixo de zero (– 3): 3 graus acima de zero (3)
c) 50 metros acima do nível do mar (+50): 50 metros abaixo do nível do mar (-50)
d) Uma dívida de R$ 35,00 (– 35): um lucro de R$ 35,00 (35)

Fonte: dados da pesquisa

**Figura 22** - Sessão 5, atividades 3 e 4 de A3



**Atividade 3:** Determine:

a) O oposto de – 27 +27

b) O simétrico de 9 -9

c) O oposto de 0 0

d) O simétrico de x -x

e) O oposto de – a + a

**Atividade 4:** Para cada item abaixo, escreva uma situação oposta e seu número correspondente, como indicado no primeiro item já resolvido:

a) Um lucro de R$ 20,00 (+20): Um prejuízo de R$ 20,00 (–20)

b) 3 graus abaixo de zero (– 3): 3 graus acima de zero (+3)

c) 50 metros acima do nível do mar (+50): 50 metros abaixo do mar (-50)

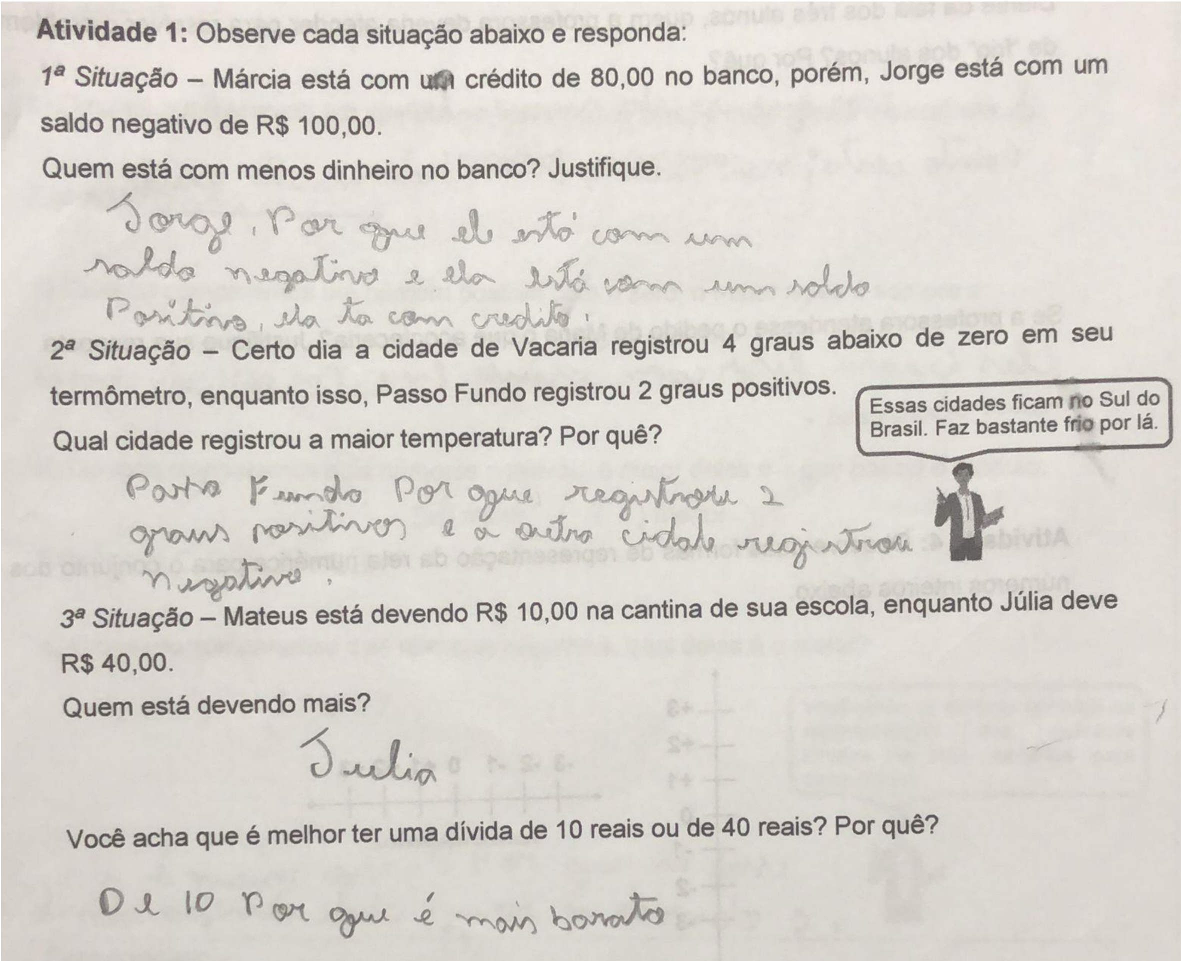
d) Uma dívida de R$ 35,00 (– 35): um lucro ou ganho de R$ 35,00 (+35)

Fonte: dados da pesquisa

Após o desenvolvimento das atividades presentes na sessão, os alunos conseguiram responder às questões 3 e 4 identificando os módulos solicitados, bem como determinar situações contrárias apresentadas na atividade 4. Inferimos que as atividades anteriores, utilizando posições na reta numérica e o conceito de módulo, favoreceram para que os alunos construíssem o conceito de oposto de um número inteiro.

Nas atividades da sexta sessão, que traziam exemplos de situações do cotidiano para que os alunos fizessem a comparação entre números inteiros, eles conseguiram apresentar justificativas pertinentes para cada situação. Inferimos que essa certa "facilidade" está ligada ao conhecimento cotidiano que eles possuem: como discutido anteriormente, esse conhecimento desse ser aproveitado para que seja estabelecida a relação com o conhecimento escolar. No início dessa sessão procuramos propor situações bem próximas das que eles vivenciam. Nas próximas figuras trazemos algumas resoluções dos alunos.

**Figura 23** - Sessão 6, atividade 1 de A1



**Atividade 1:** Observe cada situação abaixo e responda:

*1ª Situação* – Márcia está com um crédito de 80,00 no banco, porém, Jorge está com um saldo negativo de R$ 100,00.

Quem está com menos dinheiro no banco? Justifique.

Jorge. Por que ele está com um saldo negativo e ela está com um saldo Positivo, ela ta com credito.

*2ª Situação* – Certo dia a cidade de Vacaria registrou 4 graus abaixo de zero em seu termômetro, enquanto isso, Passo Fundo registrou 2 graus positivos.

Qual cidade registrou a maior temperatura? Por quê?

Essas cidades ficam no Sul do Brasil. Faz bastante frio por lá.

Passo Fundo Por que registrou 2 graus positivos e a outra cidade registrou negativo.

*3ª Situação* – Mateus está devendo R$ 10,00 na cantina de sua escola, enquanto Júlia deve R$ 40,00.

Quem está devendo mais?

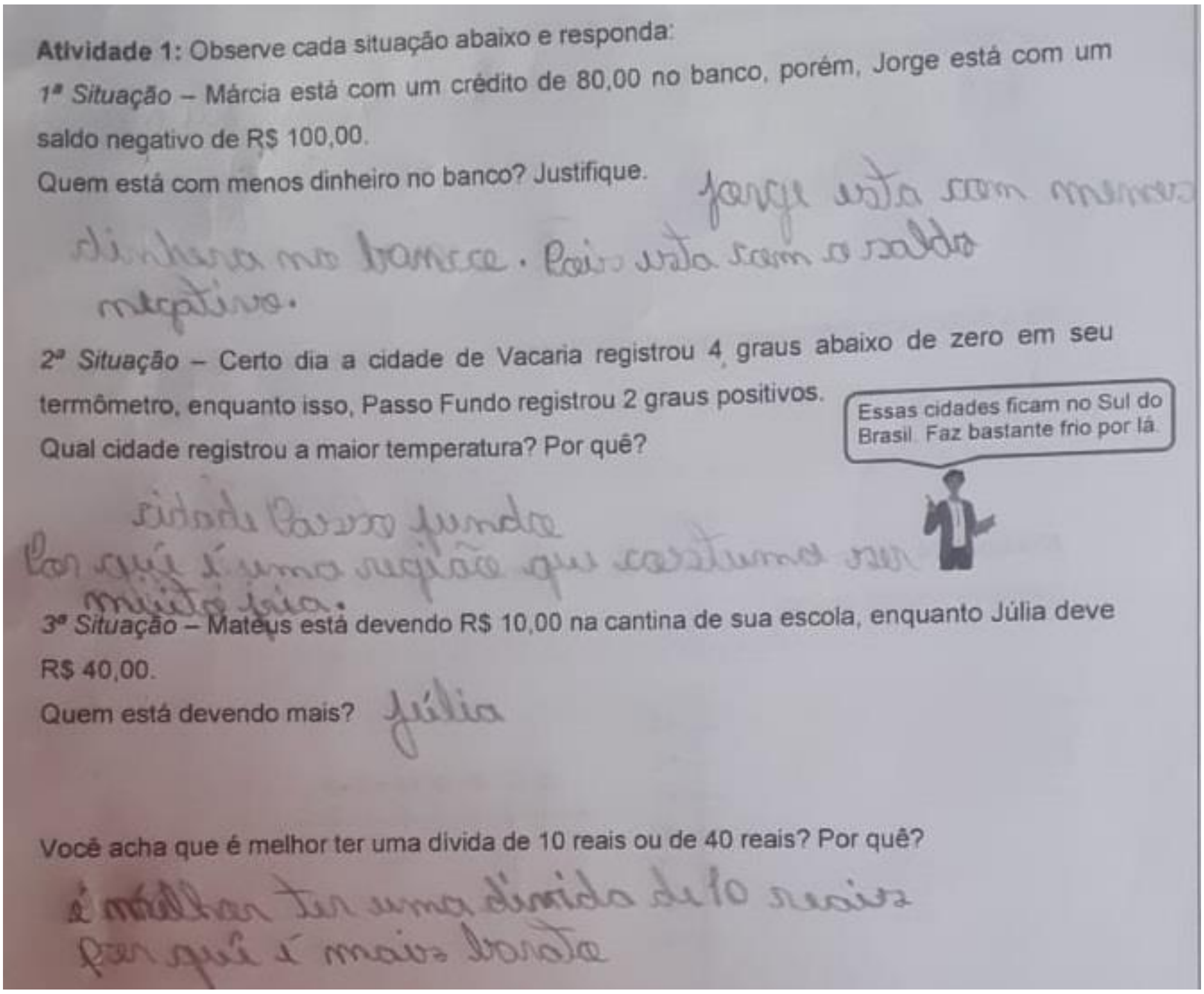
Julia

Você acha que é melhor ter uma dívida de 10 reais ou de 40 reais? Por quê?

De 10 Por que é mais barato

Fonte: dados da pesquisa

**Figura 24** - Sessão 6, atividade 1 de A2


**Atividade 1:** Observe cada situação abaixo e responda:

*1ª Situação* – Márcia está com um crédito de 80,00 no banco, porém, Jorge está com um saldo negativo de R$ 100,00.

Quem está com menos dinheiro no banco? Justifique. Jorge esta com menos dinheiro no banco. Pois esta com o saldo negativo.

*2ª Situação* – Certo dia a cidade de Vacaria registrou 4 graus abaixo de zero em seu termômetro, enquanto isso, Passo Fundo registrou 2 graus positivos.

Qual cidade registrou a maior temperatura? Por quê?

cidade Passo fundo
Por quê é uma região que costuma ser muito fria.



*3ª Situação* – Mateus está devendo R$ 10,00 na cantina de sua escola, enquanto Júlia deve R$ 40,00.

Quem está devendo mais? Júlia

Você acha que é melhor ter uma dívida de 10 reais ou de 40 reais? Por quê?

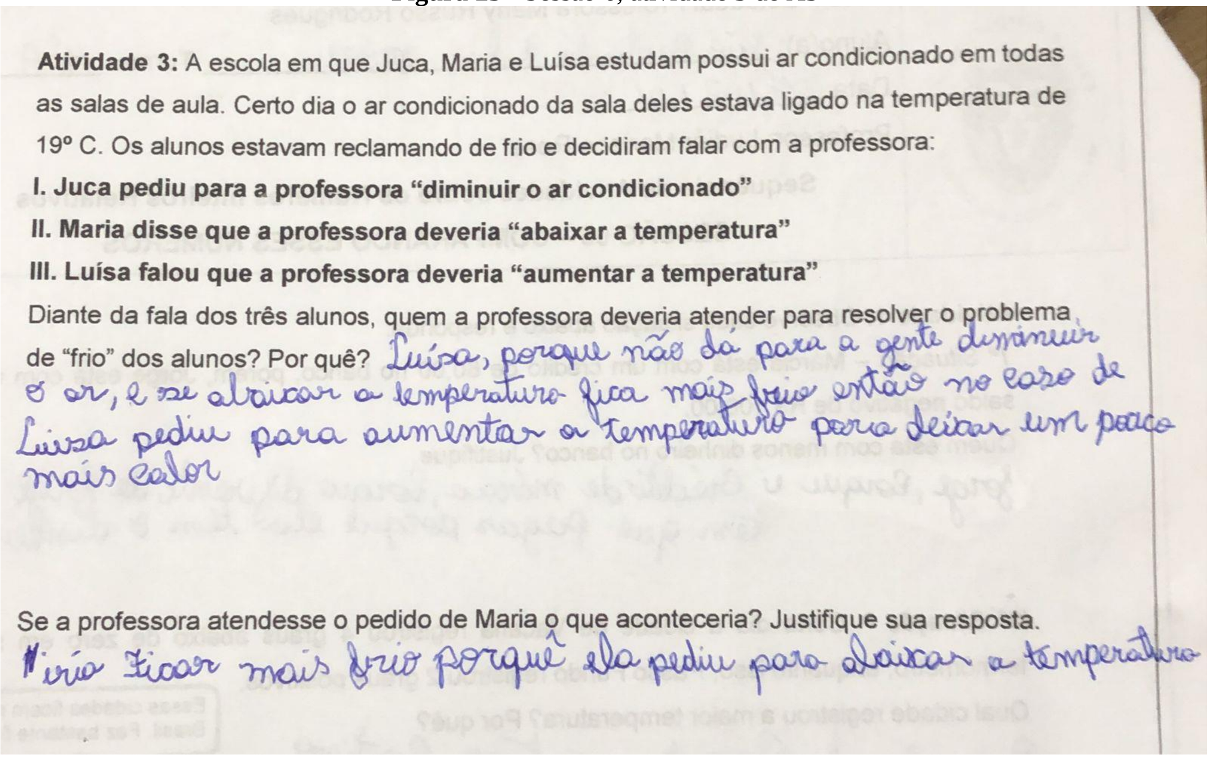
é melhor ter uma divida de 10 reais
porquê é mais barato

Fonte: dados da pesquisa

Observamos que nos três itens, A1 e A2 conseguem responder de forma correta, comparando indiretamente os números inteiros de cada situação. O objetivo dessa atividade era que eles mobilizassem qualquer estratégia para comparação. Embora na segunda situação A2 tenha dado uma justificativa incorreta para sua resposta, a cidade indicada por ele com maior temperatura está correta. Acreditamos que termos como "negativo", "abaixo de zero" começaram a tornar-se familiares aos estudantes, uma vez que foram bastante trabalhados em sessões anteriores. Podemos observar isso na justificativa de A1 para a segunda situação, pois, ainda que em seu enunciado apareça que "a cidade de Vacaria registrou 4 graus abaixo de zero", sem sua justificativa, a estudante faz a transposição dizendo que essa cidade "registrou negativo".

A situação apresentada na atividade 3 desta mesma sessão, possuía elementos para que, se realizada de forma presencial, pudesse ser vivenciada de forma adidática pelos alunos. Era uma situação muito conhecida dos alunos, por já terem presenciado quase diariamente, com questionamentos que os levariam à reflexão, inferência e debate entre seus pares. A seguir apresentamos apenas a resolução de A3 para esta atividade.

**Figura 25** - Sessão 6, atividade 3 de A3



**Atividade 3:** A escola em que Juca, Maria e Luísa estudam possui ar condicionado em todas as salas de aula. Certo dia o ar condicionado da sala deles estava ligado na temperatura de 19º C. Os alunos estavam reclamando de frio e decidiram falar com a professora:

**I. Juca pediu para a professora "diminuir o ar condicionado"**

**II. Maria disse que a professora deveria "abaixar a temperatura"**

**III. Luísa falou que a professora deveria "aumentar a temperatura"**

Diante da fala dos três alunos, quem a professora deveria atender para resolver o problema de "frio" dos alunos? Por quê? Luísa, porque não dá para a gente diminuir o ar, e se abaixar a temperatura fica mais frio então no caso de Luísa pediu para aumentar a temperatura para deixar um pouco mais calor

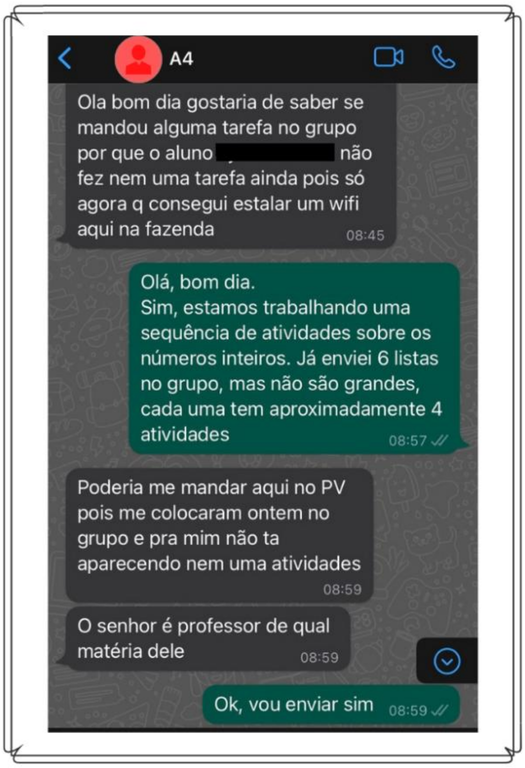
Se a professora atendesse o pedido de Maria o que aconteceria? Justifique sua resposta. Iria ficar mais frio porquê ela pediu para abaixar a temperatura

Fonte: dados da pesquisa

É possível observar que A3 consegue estabelecer a relação, já trabalhada anteriormente, que quanto maior a temperatura, mais quente (ou menos frio) fica o ambiente. Em parte de sua resposta, apresenta como justificativa "Luísa pediu para aumentar a temperatura para deixar um pouco mais calor". Quando elaboramos essa atividade, foi justamente para discutir sobre esses temos relacionados a aumentar ou diminuir a temperatura, especificamente em situações envolvendo ar condicionado, pois eles costumam gerar bastante confusão entre os alunos ou entre pessoas envolvidas na situação.

Nesta terceira semana de aplicação, a mãe de A4 entrou em contato solicitando o envio das atividades desde o início do bimestre, pois estava na fazenda (zona rural) e não tinha acesso à internet. Ela não estava inserida no grupo da turma, dessa forma, até aquele momento, não havia recebido atividade de nenhuma disciplina, uma vez que o grupo do *WhatsApp* era o principal canal de informações sobre todas as disciplinas. A seguir apresentamos este diálogo.

**Figura 26** – Interação com a mãe de A4



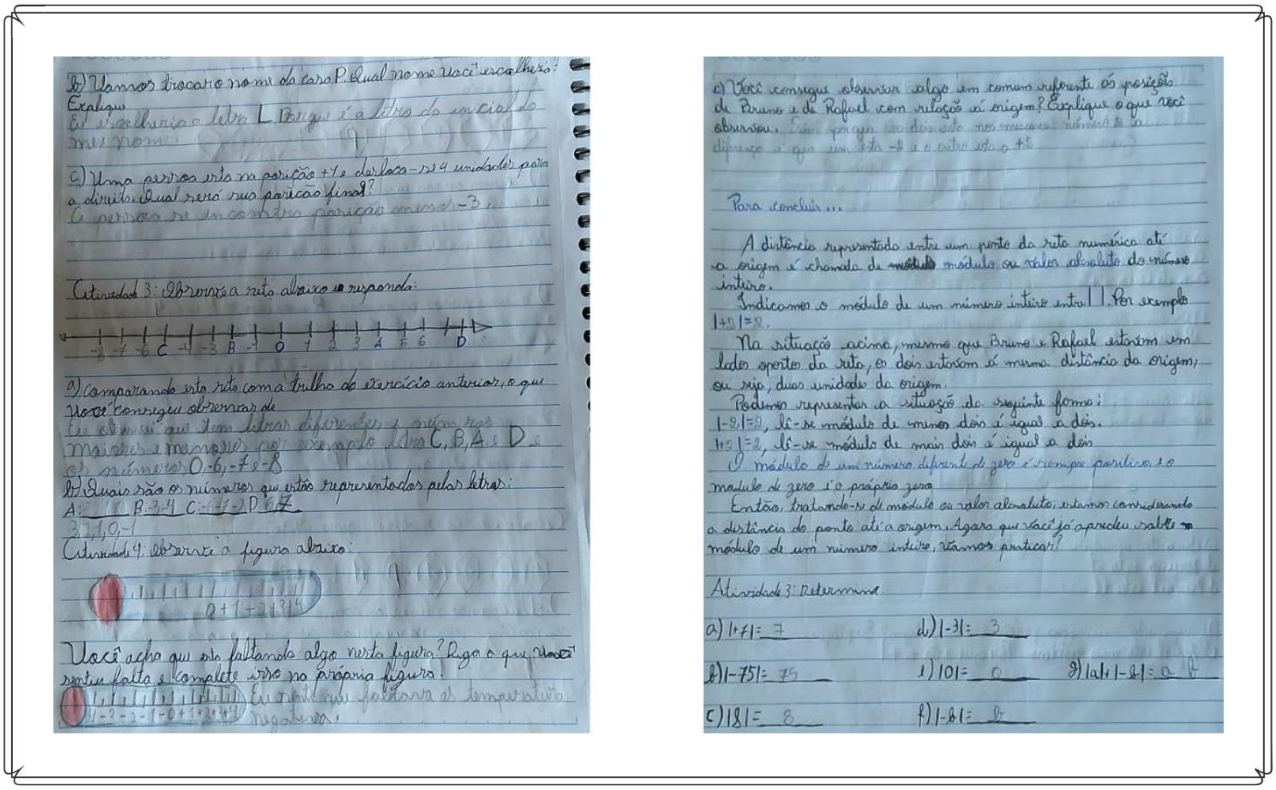

Fonte: dados da pesquisa

Novamente estamos diante de fatores que não são relacionados ao cunho epistemológico do conjunto dos números inteiros relativos ou de dificuldades de aprendizagem. A4 estava na zona rural da cidade juntamente com sua família, onde o acesso à internet é bastante restrito: características da zona rural de Mato Grosso do Sul. Provavelmente, zona rural na Alemanha, por exemplo, difere bastante da zona rural em MS, inclusive e sobretudo no que diz respeito ao acesso a tecnologias como a rede de internet. Portanto, temos aqui claramente uma restrição característica da sociedade em que vive este estudante, A4. Essa interação ocorreu no dia 09/04/2021, na sexta-feira da terceira semana de aplicação, já estávamos trabalhando a sexta sessão e esse aluno não teve acesso à nenhuma das sessões anteriores, além das atividades das outras disciplinas.

A condição do local em que ele se encontrava e a dificuldade de conexão não permitiu que ele iniciasse a realização da sequência didática no dia 16/03/2021, como a maioria dos alunos. A maneira com que A4 estabeleceria relações com as atividades da sequência seria totalmente diferente daqueles que já haviam iniciado a resolução semanalmente das sessões anteriores, visto que, A4 poderia se sentir "atrasado" com relação as atividades que tinha para fazer. Considerando também a quantidade de disciplinas que uma turma de 7º ano do ensino fundamental possui, o número de atividades que esse aluno teria para "colocar em dia" não seria pequeno.

Ainda assim, explicamos como estávamos trabalhando, dizendo que a qualquer momento ele poderia entrar em contato, caso não entendesse alguma atividade, porém quase não tivemos interação com esse aluno. O que nos chamou a atenção foi o empenho de A4 na realização das atividades; antes de iniciar ele questionou se era preciso copiar todas as atividades no caderno para responder. Informamos que poderia apenas indicar o número da atividade e colocar a resposta e, ainda assim, ele copiou todo o material impresso, desde o enunciado da atividade, os desenhos dos termômetros, das trilhas, até o quadro "Para concluir..." ao final das sessões. Apresentamos duas das fotos[11] das atividades de sessões diferentes enviadas por este aluno.

**Figura 27** – Atividades enviadas por A4



Fonte: dados da pesquisa

Sabemos que muitos alunos ao transcreverem um texto para o caderno, geralmente, não prestam atenção no conteúdo do que estão escrevendo, porém percebemos que algumas dúvidas que outros alunos tiveram, que poderiam ser encontradas no quadro "Para concluir...", não foram explicitadas por A4: como dito anteriormente, esses quadros ao final de cada sessão

[11] As fotos não apresentam boa qualidade de resolução devido ao dispositivo de celular utilizado por A4.

traziam informações importantes e que poderiam servir como auxílio para os estudantes. Por exemplo, em um diálogo com A1, ela não havia entendido como encontrar o módulo quando representado por |-3|, que era solicitado em uma atividade de reinvestimento logo após o quadro “Para concluir...” da quinta sessão. Quando foi solicitado que ela realizasse a leitura novamente deste quadro, ela disse que encontrou o que estava procurando. Isso não ocorreu com A4. Inferimos que copiar, de forma integral, todas as sessões enviadas, permitiu que A4 conseguisse identificar esses elementos.

Este aluno pouco entrou em contato para discutir sobre as atividades, mas conseguiu realizar todas as sessões, enviando fotos de suas respostas. Por ter começado bem depois do início da aplicação, este aluno também terminou algumas semanas depois do encerramento da aplicação da sequência didática na escola.

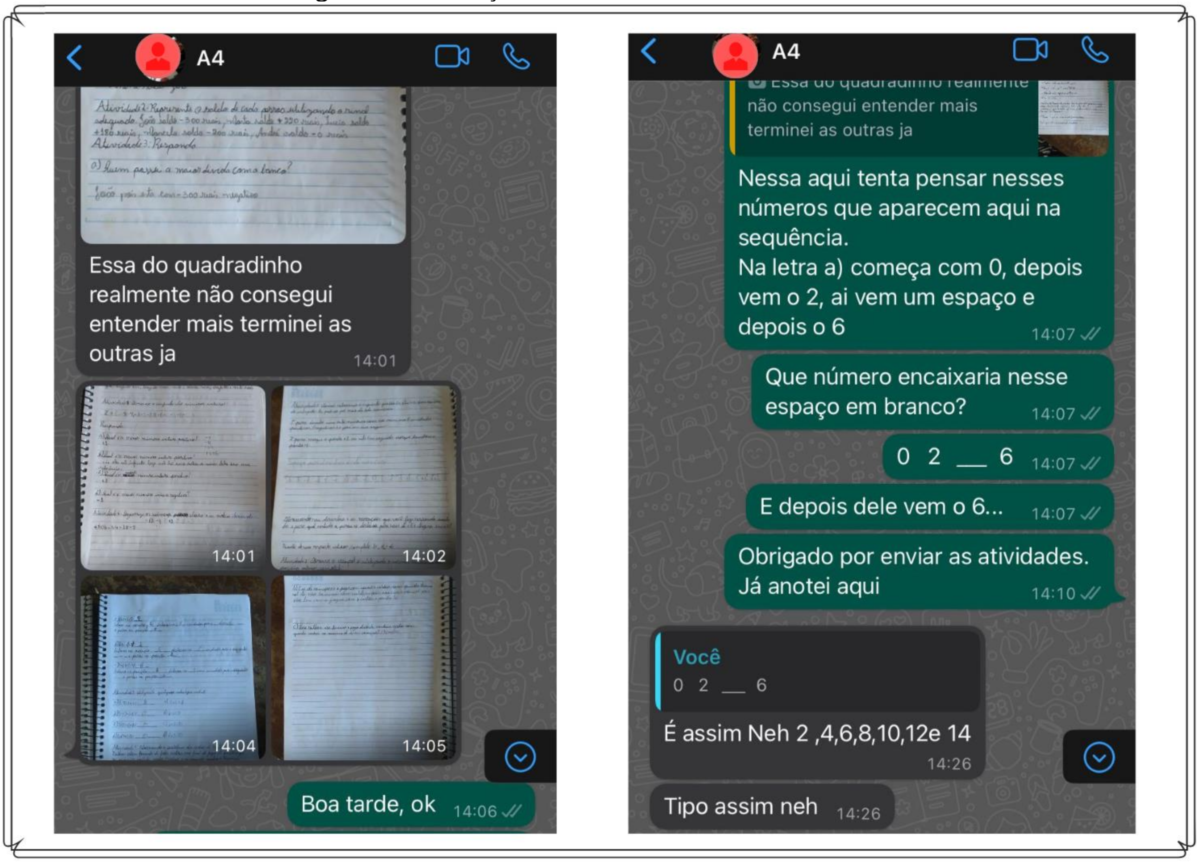
### 5.2.4 Quarta semana: Sessões 07 e 08

A quarta e última semana de aplicação da sequência didática com os alunos seria para trabalhar sessões com atividades para retomar os conceitos trabalhados anteriormente, como a comparação entre números inteiros, ordenação, entre outras situações.

O ritmo de interação por parte dos alunos não se alterou, mesmo com alguns avisos sobre o término do bimestre e a devolução das atividades pela coordenação no grupo da turma, eram os mesmos alunos que entravam em contato.

Na sétima sessão, A4 enviou as respostas desta e comentou que não havia compreendido como resolver a primeira atividade, que solicitava o completamento de sequência com espaços em branco contendo alguns números inteiros. Após esse comentário, foi explicado o objetivo da atividade abordando a percepção de regularidades. Apresentamos esse diálogo na figura 27.

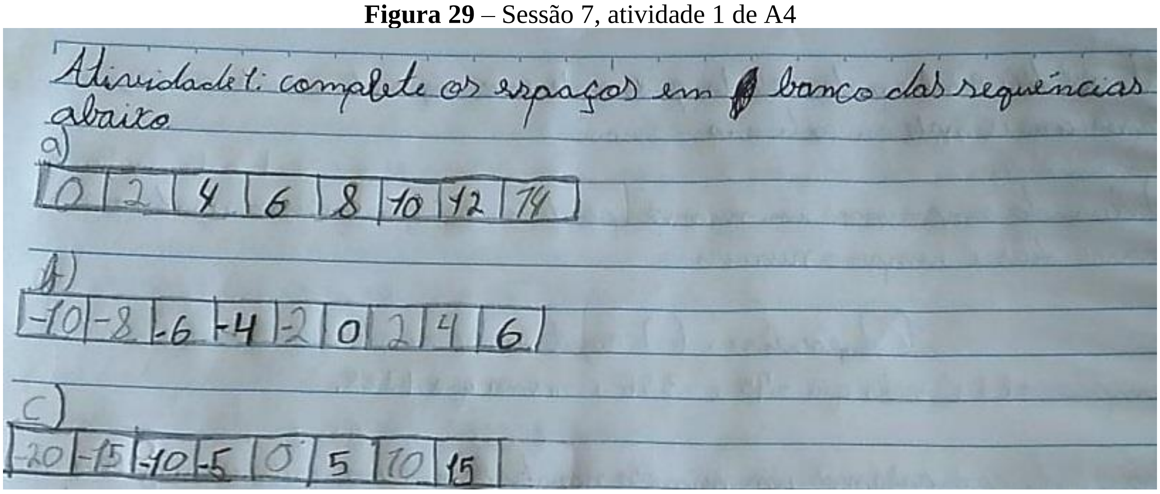
**Figura 28** - Interação com A4 sobre atividade 1, sessão 7




Fonte: dados da pesquisa

Após esse comentário, A4 conseguiu compreender o desenvolvimento da atividade e alguns minutos depois enviou a resolução, apresentada na figura 29.

**Figura 29** – Sessão 7, atividade 1 de A4

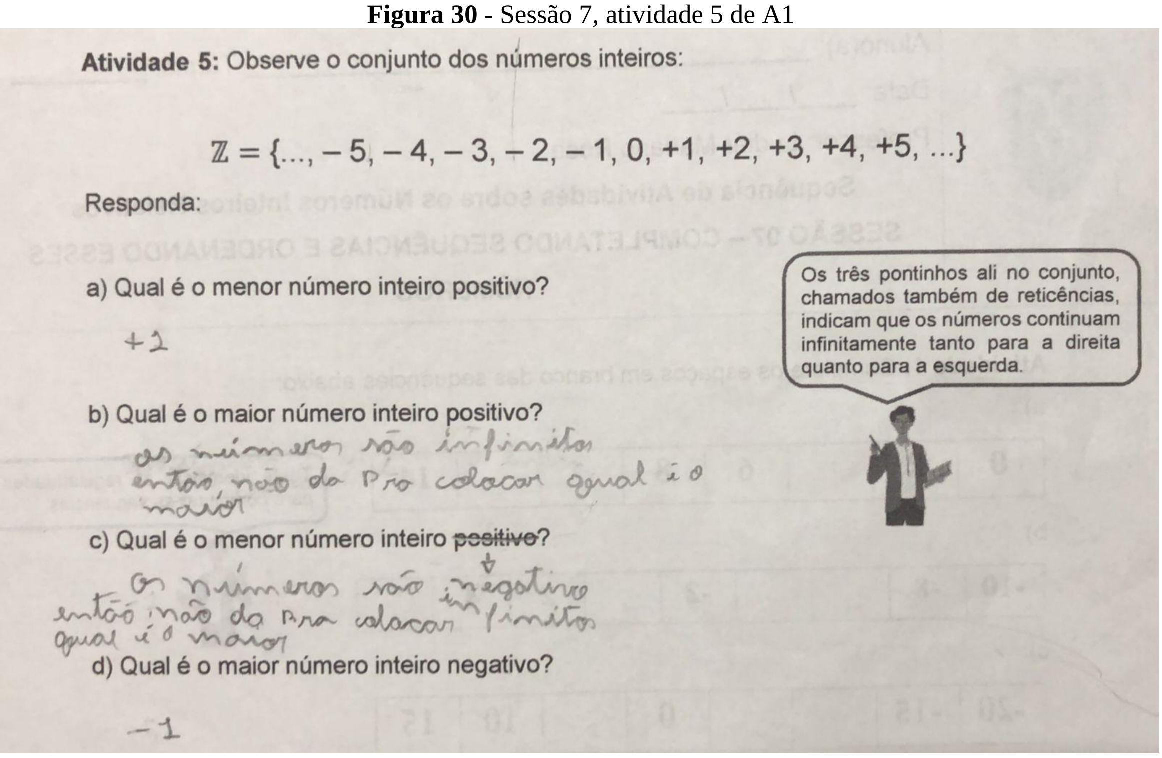



Fonte: dados da pesquisa

A4 dificilmente discutia sobre as atividades no momento de sua resolução, ele costumava responder as atividades da lista e, no momento de enviar as fotos, indicava qual ele não conseguia desenvolver. Essas devoluções geralmente ocorriam em dias diferentes aos de aplicação e, especificamente no caso de A4, até mesmo dias após o término de aplicação da sequência com os alunos, por ele ter iniciado depois.

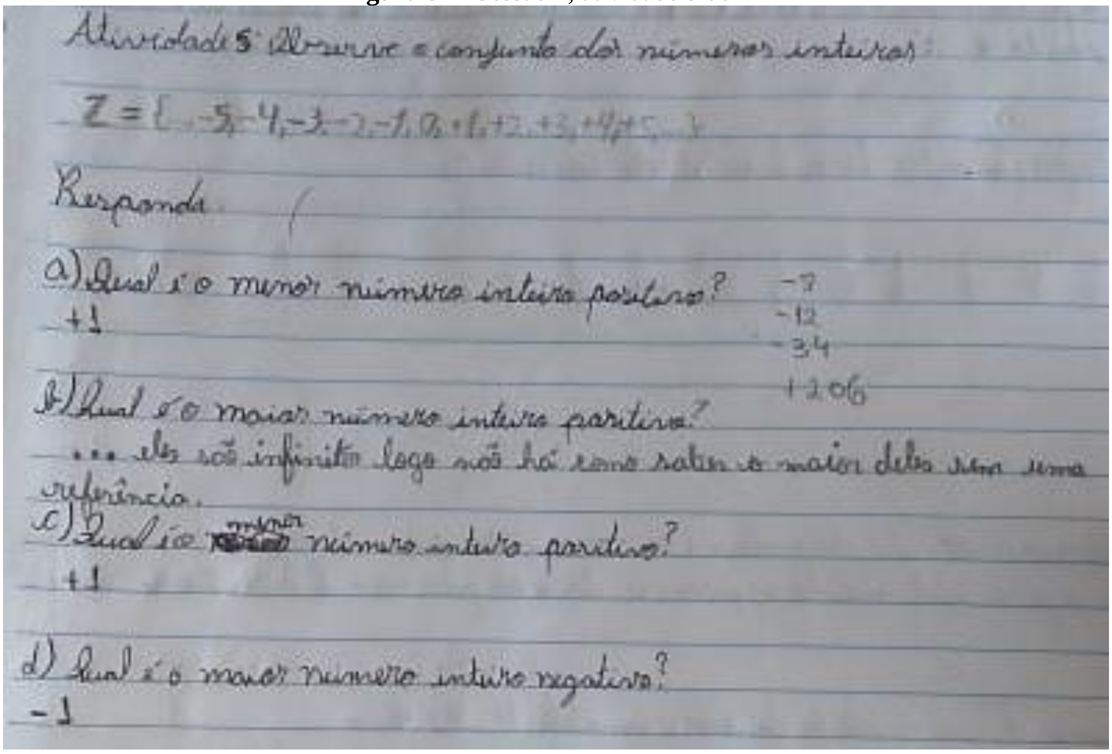
A quinta atividade desta mesma sessão tratava algumas características do conjunto dos números inteiros relativos, juntamente com questões de comparação entre seus elementos. Dada a representação deste conjunto era solicitado que o estudante identificasse alguns de seus elementos. Apresentamos as resoluções de A1 e A4 para esta atividade.

**Figura 30** - Sessão 7, atividade 5 de A1




Fonte: dados da pesquisa

**Figura 31** - Sessão 7, atividade 5 de A4




Fonte: dados da pesquisa

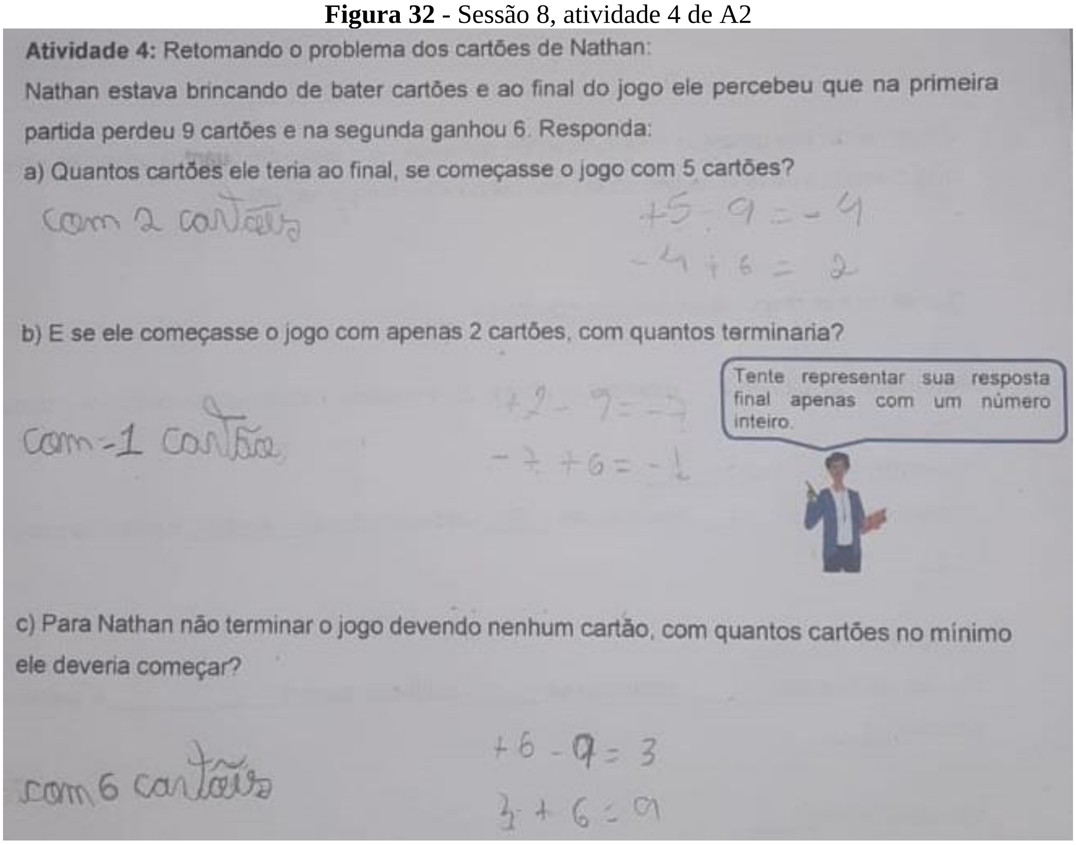
No momento de elaboração e impressão da sequência não percebemos que o item a) e o item c) apresentaram a mesma pergunta; o item c) deveria solicitar que o aluno indicasse qual seria o menor número inteiro negativo. Ao perceber essa repetição, A1 entrou em contato para tirar essa dúvida e informamos sobre o erro, que ela corrigiu, como podemos observar na figura 30, riscando a palavra positivo e substituindo por negativo. Ela responde corretamente os itens a), b) e d), mas se confunde no final da justificativa do item c) colocando a palavra "maior", quando o item solicitava o menor.

Já A4 não entrou em contato para falar sobre o item repetido e apresentou a mesma resposta para os itens a) e c) de forma correta, e para o item b) como justificativa escreve "... eles são infinitos logo não há como saber o maior deles sem uma referência".

Na oitava sessão, que tinha por objetivo introduzir noções de adição e subtração por meio da reta numérica, os estudantes, em geral, conseguiram resolver as operações com o apoio da reta numérica; acreditamos que isso ocorreu pelo fato de as ideias de deslocamento terem sido trabalhadas em diversas sessões anteriores, tornando-se familiar para eles.

Queremos destacar a última atividade da oitava e última sessão, que foi uma tentativa de retomada da primeira atividade apresentada na sessão 1 para dar início à discussão da necessidade de "outros números", o problema dos cartões de Nathan. Esta foi retomada, após terem sido trabalhadas noções iniciais de adição e subtração com os números inteiros, para que os alunos a respondessem realizando a operação aritmética, evitando apresentar respostas como “faltando um número”, “não é possível”, uma vez que agora teriam ao menos uma estratégia para mobilizar (deslocamento sobre a reta numérica). Trazemos para discussão as resoluções de A2 e A3 nas figuras a seguir.

**Figura 32** - Sessão 8, atividade 4 de A2



**Atividade 4:** Retomando o problema dos cartões de Nathan:
Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida perdeu 9 cartões e na segunda ganhou 6. Responda:
a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?

com 2 cartões

$+5 - 9 = -4$
$-4 + 6 = 2$

b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria?

com -1 cartão

$+2 - 9 = -7$
$-7 + 6 = -1$

Tente representar sua resposta final apenas com um número inteiro.

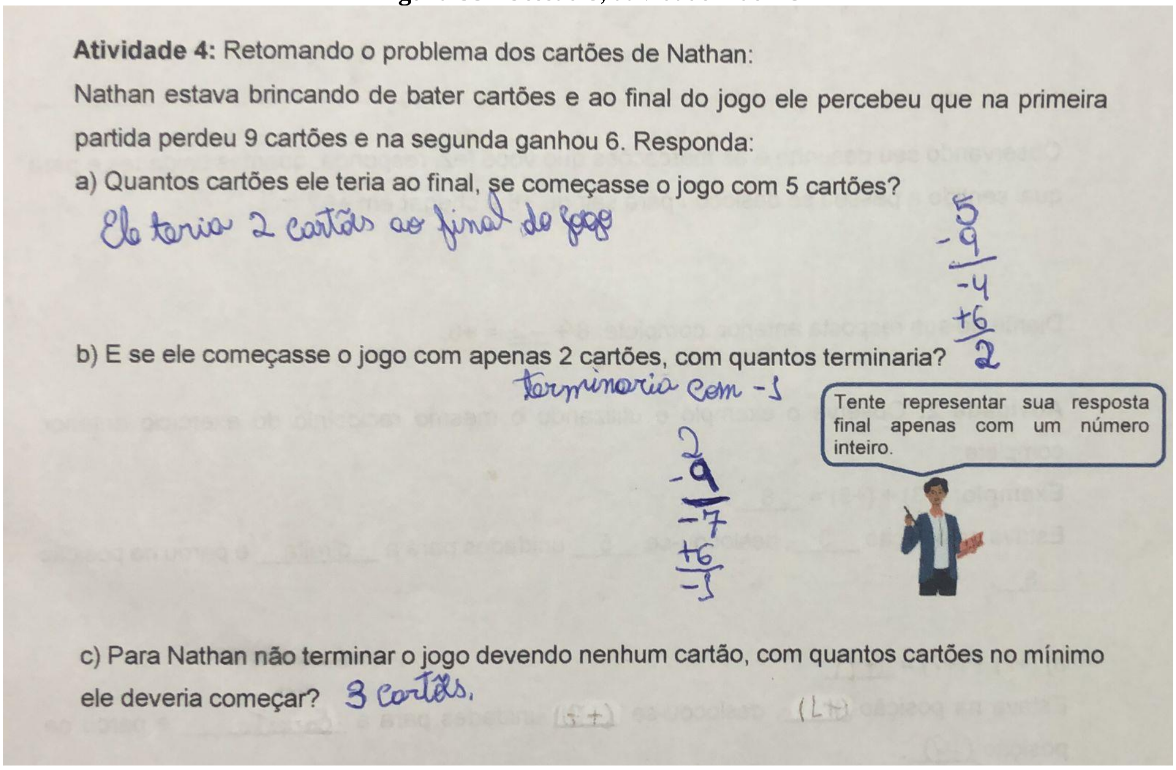
c) Para Nathan não terminar o jogo devendo nenhum cartão, com quantos cartões no mínimo ele deveria começar?

com 6 cartões

$+6 - 9 = 3$
$3 + 6 = 9$

Fonte: dados da pesquisa

**Figura 33** - Sessão 8, atividade 4 de A3


**Atividade 4:** Retomando o problema dos cartões de Nathan:

Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida perdeu 9 cartões e na segunda ganhou 6. Responda:

a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?

Ele teria 2 cartões ao final do jogo

5
-9
-4
+6
2

b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria?

terminaria com -1

2
-9
-7
+6
-1

Tente representar sua resposta final apenas com um número inteiro.

c) Para Nathan não terminar o jogo devendo nenhum cartão, com quantos cartões no mínimo ele deveria começar? 3 cartões.

Fonte: dados da pesquisa

Podemos observar que nos itens a) e b) A2 consegue realizar as operações aritméticas de forma correta para dar uma resposta final expressa em um número inteiro, já no item c) acaba se confundindo quando realiza a primeira operação “6 – 9 = 3”, que consequentemente leva esta resposta como parcela da próxima adição “3 + 6”, resultando, erroneamente, em 9 como resposta final.

O aluno A3 também consegue realizar as operações dos dois primeiros itens de forma correta, mas observamos que ele utilizou o algoritmo, o que aparentemente indica que não utilizou a estratégia do deslocamento sobre a reta numérica, anteriormente trabalhada. Para o item c) A3 chega à resposta correta, mas sem apresentar qualquer cálculo, tornando impossível determinar qual foi a estratégia mobilizada por ele. Além disso, como dito anteriormente, A3 costumava fazer as atividades da sequência com o auxílio de seu padrasto, o que torna difícil saber se o aluno realmente compreendeu esta atividade.

## 5.3 Considerações sobre a análise a posteriori

Ficou evidente, desde a tabela apresentando o engajamento dos alunos da turma com a sequência de atividade (tabela 5) até as análises mais apuradas dos 4 alunos com maior interação durante sua realização, que cada estudante, devido ao contexto que estava inserido, estabeleceu diferentes relações com a sequência de atividades.

Em diversos momentos não ocorria a troca de mensagens instantâneas, não houve a possibilidade de momentos síncronos, o que dificultou alguns momentos de mediação. Além disso, dificilmente esses alunos discutiram entre si essas atividades, que pela teoria das situações didáticas é fundamental para que eles tivessem a oportunidade de transitar entre as diferentes dialéticas da situação adidática.

Muitos alunos contavam com a ajuda de seus familiares, alterando assim o sistema didático pensado inicialmente, sendo que, muitas vezes só tínhamos acesso às resoluções de suas atividades quando eles devolviam na escola, não dando a oportunidade de retomada e discussão daquelas respostas errôneas ou equivocadas.

Realizar uma engenharia didática durante o ensino remoto emergencial em uma escola da rede pública foi desafiador, mas, ao mesmo tempo, nos fez refletir sobre o contexto da concepção das teorias que utilizamos, bem como sobre a evolução da educação matemática como campo de pesquisa. Assim, no próximo capítulo apresentamos algumas dessas reflexões e fazemos alguns questionamentos.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Findas as análises chegou o momento de refletir sobre todo o desenvolvido da pesquisa que realizamos buscando evidenciar o que aprendemos e o que podemos/precisamos reinvestir, estudar, aprofundar, em novos estudos.

A dificuldade de se adequar uma engenharia didática pensada e elaborada para o ensino presencial – que dava grande peso para o papel de mediador do professor, especialmente pelo referencial teórico adotado – para ser aplicada no ensino remoto, instaurado de modo emergencial devido ao cenário pandêmico vivenciado em todos o país, perpassa diversos aspectos do processo de ensino. Se pensássemos em uma engenharia didática para ser realizada à distância, as condições e restrições que poderiam aparecer seriam outras, uma vez que para este modelo há (ou deve haver) toda uma estrutura pensada *a priori* para o seu funcionamento. Porém, até mesmo para este modelo de ensino há necessidade de se refletir sobre realização de engenharias didáticas, uma vez que parece ser ausente o estudo deste tipo de investigação e, como salientou Artigue em palestra no III LADIMA[12], o cenário atual nos leva a investigar como a engenharia se comporta nestes novos espaços. Tratando-se do ensino remoto de caráter emergencial, como foi o caso, as condições e restrições que pesam sobre o ensino são ainda mais "fortes", dado que este ensino foi imposto sem quaisquer tipos de estudos anteriores, dado o problema sanitário que o mundo atravessa. Não houve tempo para planejamento, para compra de material, entre outros, e todos os estudantes foram submetidos a este modelo de ensino.

Foi um grande desafio continuar com a proposta inicial de aplicação da sequência didática sem nem mesmo saber como o ensino retornaria no ano de 2021. Além disso, a pandemia estava afetando a população e consequentemente estabelecendo elementos que precisaram ser considerados utilizando a escala dos níveis de co-determinação didática superiores. Não apenas o contexto em que os alunos daquela escola estavam inseridos, mas, também, as consequências da pandemia do coronavírus precisavam ser levadas em conta.

Esse cenário pandêmico, em um meio que sofreu tantas alterações e passou a ter tantas variáveis, restrições e situações que fogem do nosso controle, fez que com que saíssemos da nossa zona de conforto para darmos continuidade à pesquisa guardando a essência da proposta inicial, porém, realizando modificações para que ela fosse exequível. Entramos em um campo totalmente incerto e com apostas, muitas vezes, altas; realizamos adaptações que julgamos

[12] Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. Site do evento: https://ladima.atelierdigitas.net/

necessárias para a continuidade da pesquisa e também com o intuito de dar um pequeno passo para pensar na realização de engenharias didáticas nesse ambiente.

Tratando-se da interação com os alunos, observamos que nos momentos que conseguimos estabelecer com eles um "diálogo síncrono", ainda que pelo *WhatsApp*, o desenvolvimento das atividades ocorria um pouco melhor, pois tais momentos guardavam semelhança com aqueles que seriam estabelecidos em sala de aula. Porém, apesar de tais semelhanças, há também diferenças cruciais entre o trabalho no ambiente presencial e o trabalho no ambiente remoto (ou mesmo à distância) que exigem uma nova cultura escolar, especialmente nas condições escolares que nos encontrávamos, com carência quase absoluta de tecnologia digital. O que ocorre no ensino presencial, quando o aluno faz uma pergunta e o professor está lá, naquele momento, para interagir com eles, difere de ambientes como o *WhatsApp* em que uma mensagem enviada em certo momento pode até ser visualizada, porém nem sempre pode ser respondida imediatamente. Por outro lado, nesses diálogos estabelecidos com os alunos houve uma tentativa de prosseguir com os ideais teóricos da TSD, realizando perguntas instigadoras para que o processo de devolução ocorresse durante as atividades (com aqueles que entravam em contato), para manter os alunos engajados na situação, porém, no *WhatsApp* a troca de mensagens de texto acabava tornando-se cansativa e os alunos ficavam, muitas vezes, desmotivados. Percebemos isso em mensagens recebidas como: "Ah, professor, então eu não sei!", "O que eu preciso fazer?", "Acho que não vou conseguir fazer esta atividade!".

A partir do exposto surgem então alguns questionamentos: como seria uma situação adidática no ensino remoto diante das condições e restrições que nos encontrávamos? Como garantir ou ao menos fomentar que o aluno vivencie uma situação adidática mantendo contato apenas pelo *WhatsApp*? Isso é possível? De que modo? Que elementos podem favorecer esta interação? Como mediar a situação sem estar presente com os alunos?

Com essas reflexões, entendemos como a estruturação do meio tem um papel fundamental na Teoria das Situações Didáticas e como ele contribui, ou não, para a aprendizagem dos alunos. Talvez se conseguíssemos momentos síncronos com os estudantes, esses diálogos seriam mais produtivos e os desequilíbrios provocados pelas atividades das sessões teriam um maior sentido para eles, além de auxiliar no desenvolvimento das atividades em que seriam feitos os processos constantes de devolução para os alunos como também para institucionalização ao final de cada sessão.

A partir disso surge outro questionamento: como seria pensar uma engenharia didática para ser desenvolvida na modalidade do ensino remoto? Nossa engenharia não foi elaborada para esse contexto, mas sim para o presencial, porém, com as mudanças impostas pela necessidade de adequação para continuidade da pesquisa consideramos que esta seria uma oportunidade ímpar de investigar espaços desconhecidos. Além disso, acreditamos que após as alterações a nossa sequência de atividades não se tornou exclusiva para o modelo do ensino remoto, e então questionamos: uma pesquisa do tipo da que fizemos pode ser desenvolvida no ensino presencial? Como fazer a adaptação no sentido inverso?

Isso nos leva a refletir sobre teorias que estudamos e utilizamos: será que seus pressupostos continuam adequados para realizar pesquisas no contexto pandêmico? Se considerarmos os casos de A2, que desenvolvia as atividades com sua irmã, e A3, que as desenvolvia com seu padrasto, observamos que é preciso ampliar o modelo de sistema didático do tipo S (X; Y; Q), em que X seriam os alunos, Y os professores e Q um programa de estudo. Não se tem mais apenas o professor no papel do sujeito que ajuda X no estudo; Y parece ser composto de mais elementos, ele sofre modificações. Em um dado momento Y é o professor, em outro, é a irmã ou algum membro da família, o que modifica totalmente a relação de X com Q. Isso nos leva ao estudo de sistemas didáticos prováveis ou possíveis, e alguns deles sendo imprevisíveis e que são muito difíceis de serem "controlados" pelo professor ou pesquisador. Em alguns casos conseguíamos identificar como o aluno estava fazendo as atividades (se acompanhado ou sozinho), em outros não. Como analisar a aprendizagem do aluno se outras pessoas estavam fazendo parte deste sistema e que, inclusive, muitas vezes não conseguimos saber quem compõe o sistema ou, mesmo sabendo, não conhecemos, de fato, estes outros sujeitos que ajudam X em seu estudo? E como pensar uma situação adidática para ser vivenciada nesse ambiente? Como preparar tal meio?

Até o momento é muito difícil apresentarmos respostas para esses questionamentos, pois esse contexto vivenciado ainda é muito novo e a cada dia que passa aparecem novas alterações, novas determinações, encaminhamentos, isto é, está em constante mudança. Por outro lado, sabemos que o meio, segundo a TSD, é dinâmico, e que também se altera a todo momento. O grande desafio para o professor, e para o pesquisador, é olhar para essas diversas variáveis que podem aparecer durante o trabalho com o objeto matemático, o contexto vivenciado e, diante disso tudo, refletir sobre sistemas didáticos que podem ser estabelecidos, para que assim possa pensar como realizar a estruturação do meio para seus estudantes.

Uma das nossas tentativas de mediar a situação sem estar presencialmente com os estudantes foi a inserção de balões do tipo *post-it* com linguagens próximas do aluno para "conversar" com eles durante o desenvolvimento das atividades. Não tivemos um retorno claro da utilidade desta ferramenta, mas acreditamos que as falas ali presentes podem auxiliar os estudantes em pontos importantes da sequência didática e, portanto, pensamos que esta é uma ferramenta a ser reinvestida. Da mesma forma, os quadros "Para concluir...", utilizados para realizar a retomada/institucionalização de cada sessão, foram fundamentais, visto que não tivemos momentos síncronos com os alunos para o "fechamento" das sessões. Para esta segunda mudança, tivemos o retorno do aluno A4 que estava na zona rural e que copiou integralmente a sequência de atividades em seu caderno para resolver, pois algumas dúvidas manifestadas por outros alunos, não foram explicitadas por A4, uma vez que encontrava esses elementos nesses quadros. Além de alguns momentos de interação com outros estudantes, que ao retomar a leitura desses quadros, compreendiam os conceitos trabalhados.

O fato de o único contato possível dos alunos com o professor/pesquisador ser via o *WhatsApp,* representou uma restrição para diversos alunos, pois impediu que grande parte da turma entrasse em contato conosco por motivos diversos como, não disporem de um aparelho celular ou ter que utilizar o celular de seus pais ou de outros familiares. Além disso, concluímos que a comunicação por este aplicativo não seria a ideal, visto que ficaria complicado manter certo número de alunos engajados nas atividades caso entrassem em contato simultaneamente, pois eles poderiam acabar desistindo da situação pela demora de retorno. Mas, dadas essas dificuldades do nível da sociedade, como este era o único meio que poderíamos nos comunicar com os estudantes, questionamos: com essa restrição, o que seria possível fazer? Será que os alunos com muita dificuldade não são mais prejudicados por essa restrição? E aqueles que não têm nenhum tipo de acesso? Haveria uma outra forma de pensar a interação pelo *WhatsApp* para que ela se tornasse mais proveitosa? Seria fundamental pensarmos um outro espaço via tecnologia (programa/aplicativo) para manter contato com os alunos que fosse viável, considerando as possibilidades e limites de conexão dos estudantes. Para isso o apoio do Estado é fundamental para, por meio de políticas públicas, garantir melhores condições para esses estudantes.

Apesar de, nessas considerações finais, apresentarmos mais questionamentos do que conclusões, acreditamos que a investigação que realizamos aponta elementos interessantes para iniciar a reflexão sobre desenvolvimento de engenharias didáticas em ambientes remotos na perspectiva da teoria das situações didáticas. Esperamos que os questionamentos aqui levantados possam servir como norte para futuras pesquisas.

## REFERÊNCIAS


ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble, France: v. 9, n. 3, pp. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. et al. Introduction to the Theory of Didactical Situations (TDS). In: BIKNER-AHSBAHS, A.; PREDIGER, S. (Eds). **Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education**, Advances in Mathematics Education. Switzerland, Springer. p. 47-65, 2014.

ARTIGUE, M. et al. The French Didactic Tradition in Mathematics. In: BLUM, W.; ARTIGUE, M.; MARIOTTI, M. A.; STRÄBER, R.; HEUVEL-PANHUIZEN, M, V. (Eds). **European Traditions in Didactics of Mathematics**. Nova Iorque, Springer Open, p. 11-56, 2016.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de Matemática. In: Teles, R. A. M.; Borba, R. E. S. R, Monteiro, C. E. F. (org) **Investigações em Didática da Matemática**; Editora UFPE, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação, **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BROUSSEAU, G. D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. **Actes de la 2ème école d'été de didactique des mathématiques**. Olivet, 1982, IREM d'Orléans.

______. Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática. In: BRUN, J (Org.). **Didática das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

______. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. 1ª ed. São Paulo: Ática, 2008.

BOSCH, M. L'ecologie des Parcours d'ètude et de Recherche au Secondaire. Conferência. In: GUEDET, G.; ALDON, G.; DOUAIRE, J.; TRGALOVA, J. (Eds). **Apprendre, enseigner, se former em mathématiques**: quels effets des ressources? Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique, p. 19-34, 2010.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 1.ed. Portugal: Lisboa, 1951.

CASABÒ, M. B. **Study and research paths:** a model for inquiry. In: International Congress of Mathematics. Rio de Janeiro, Brasil, 2018.

CHAACHOUA, H; BITTAR, M. A Teoria Antropológica do Didático: Paradigmas, Avanços e Perspectivas. **Teorias e Métodos em Didática da Matemática**. v. 9, n. 1, p. 29-44, 2018.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. Cours 3 - Ecologie & Regulation. **Actes de la XIième Ecole d'été de didactique des mathématiques**. Grenoble, La Pensée Sauvage, p. 41-56. 2002.

______. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. **Anales de la Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico**. Jaén, Epaña, p. 705-746, 2007.

CID, E. La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. **Pre-publicaciones del seminario matematico**. Universidad de Zaragoza, n. 25, 2003.

______. **Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos.** 368 f. Tese (Doutorado em Matemática). – Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 2015.

D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da Matemática**. São Paulo, Escrituras Editora, 2005. 1.ed.

DANCZUK, F. E. **Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos números inteiros.** 2016. 195 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2016.

FERREIRA, R. N. R. **A Sequência Fedathi como proposta de mediação do professor no ensino dos números inteiros.** 2018. 104 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Ceará, 2018.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. *In*: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Educação matemática: uma (nova) introdução**. Revisada. São Paulo: Educ, 2010, p.77-111.

GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. **Boletim do GEPEM - Grupo de estudos e pesquisas em educação Matemática.** Rio de Janeiro: UFRJ, n. 17, 1985.

GONCALVES, K. R. **A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas: o caso das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental**. 2016. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

LIMA, R. G. A. **Problemas de Combinatória: Um estudo dos conhecimentos mobilizados por uma turma de licenciandos em Matemática.** 2015. 198f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

MARGOLINAS, C. **Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques**. Habilitation à diriger les recherches em sciences de l'éducation (HDR). Université de Provence – Aix-Marseille I, 2004.

NASCIMENTO, R. **Explorando a reta numérica para identificar obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos**. *In*: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), 2004, Pernambuco. **Anais** [...]. Pernambuco: UFPE, 2004.

PASSONI, J. C. **(Pré-) álgebra: introduzindo os números inteiros negativos.** 2002. 226f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

PEREIRA, C. C. **Números Relativos: uma proposta de ensino.** 2014. 224f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014.

SANTOS, J. dos. **A utilização de números inteiros relativos na resolução de problemas de estruturas aditivas nas séries iniciais do ensino fundamental.** 2013. 122f. Mestrado (Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

SANTOS, S. G. dos. **Números inteiros: estratégias que visam facilitar a compreensão de conceitos e operações.** 2016. 96f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO/MS. **Projeto Político Pedagógico da Escola xxxxxxxx**, 2020.

SILVA, R. C. da. **O ensino de números inteiros por meio de atividades com calculadora e jogos.** 2011. 272f. Mestrado (Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2011.

SOUZA, J. T. S.; ALVARENGA, A. M.; SILVEIRA, D. S. **Obstáculos epistemológicos com números inteiros negativos de estudantes de 7º ano do ensino fundamental.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Pampa/Campus Caçapava do Sul, 2014.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. **Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Zetetiké – FE/Unicamp – v.21, n. 39 – jan/jun 2013.

TEODORO, M. M. **Obstáculos e dificuldades relacionados à aprendizagem de números inteiros.** 2013. 120f. Mestrado (Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2013.

## ANEXOS

## ANEXO I: Sequência Didática com Alterações

### SESSÃO 01 – CONHECENDO UM NOVO CONJUNTO NUMÉRICO

**Aluno:________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

Olá, espero que você esteja bem! É uma pena estarmos passando por alguns momentos difíceis, mas vamos continuar fazendo nossa parte, tomando todos os cuidados para sairmos dessa em breve. Fico muito feliz que mesmo diante desse momento, você esteja empenhado em continuar seus estudos para aprender ainda mais.

A partir de agora, nós vamos iniciar uma sequência de atividades, todas elas semelhantes a essa primeira sessão que você irá desenvolver. Ao todo serão 08 sessões bem parecidas com essa aqui. Eu sei que é um pouquinho complicado fazer algumas atividades sozinho(a) em sua casa, mas eu quero dizer para você não ficar com medo de responder as atividades nesses próximos dias: lembre-se que todos nós estamos aprendendo juntos, e caso você não entenda algo ou queira tirar alguma dúvida, pode entrar em contato comigo pelo WhatsApp no número (67) x xxxx-xxxx (Professor Ludiér).

Cada sessão terá aproximadamente 5 atividades, tente responder todas elas, e não fique com medo de me pedir ajuda. E não se esqueça, não existe certo ou errado, pois ainda estamos aprendendo para chegar lá. Em cada atividade deixe registrado todas as suas contas, rascunhos e estratégias. Vamos começar?

**Atividade 01:** Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida ganhou 6 cartões e na segunda perdeu 9. Responda:

a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?

b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria? Você acha que isso seria possível? Explique sua resposta.

c) E se a gente não soubesse quantos cartões ele tinha no início, como podemos representar a quantidade de cartões que Nathan teria ao final do jogo?

Dica: Você pode utilizar qualquer letra do alfabeto para representar um valor desconhecido.

**Atividade 2:** Complete os espaços em branco:

a) 13 + ____ = 29

b) 79 + ____ = 103

d) 47 + ____ = 47

e) 8 + ____ = 6

Você teve dificuldade em resolver algum item dessa atividade? Escreva com suas palavras, qual foi sua dificuldade?

**Atividade 3:** Efetue as seguintes subtrações:

a) 5 – 2= ____

b) 5 – 3= ____

c) 5 – 4= ____

d) 5 – 5= ____

e) 5 – 6= ____

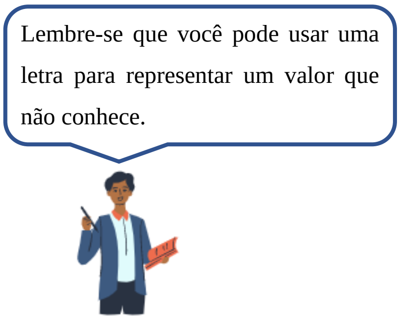
f) 5 – 7= ____

Regularidade: que acontece de forma contínua, regular.

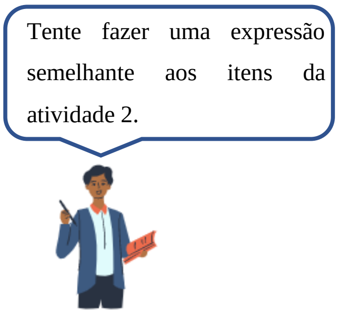
Você consegue observar alguma regularidade nos itens acima? Escreva aqui o que você percebeu.

**Atividade 4:** Alice foi às compras em um brechó com R$ 100,00. Comprou um vestido que lhe custou R$ 40,00 e depois comprou um par de sapatos. Por último ela comprou uma bolsa por R$ 10,00. Responda:

a) Quanto lhe sobrou?



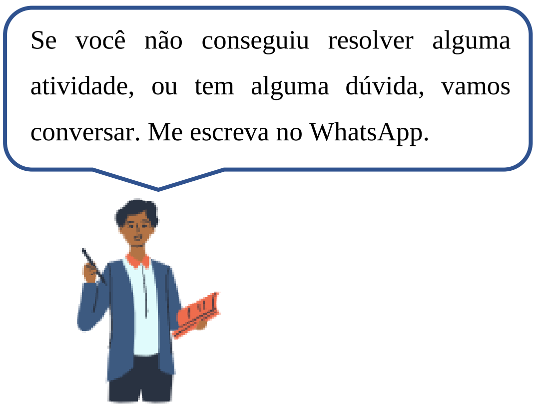

b) Se Alice nos dissesse que ficou com R$ 5,00, é possível descobrir qual era o preço do sapato?




**Para concluir...**

Você observou que em algumas situações matemáticas acima os números naturais, que já conhecemos, não foram suficientes. Como resolver a subtração 5 – 7? Ou então, como pensar em um número para somar a 8 e obter resultado 6?

Por motivos semelhantes a esses, os matemáticos da antiguidade precisaram criar um novo conjunto de números que pudessem responder essas situações de forma adequada. Este conjunto recebe o nome de números inteiros relativos e nós vamos aprender mais sobre ele nas próximas sessões.

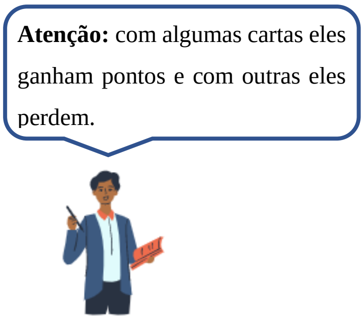


**SESSÃO 02 – NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS? QUAIS SÃO? ONDE ESTÃO?**

**Aluno:________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

**Atividade 1:** Carla e Fernando jogam um jogo utilizando cartas de duas cores: azuis e vermelhas. Cada carta azul dá ao jogador 2 pontos, e cada carta vermelha retira do jogador 3 pontos. Responda:

a) Carla terminou a partida com 10 cartas azuis e 8 vermelhas. Qual a pontuação final de Carla?




b) Fernando terminou a partida com 12 cartas azuis e 6 cartas vermelhas, qual foi sua pontuação final?

c) Quem venceu o jogo? Por quê?

**Atividade 2:** Camila gostaria de viajar para casa de sua avó e tinha apenas R$ 50,00. Na ida ela gastaria R$ 35,00 e na volta para sua casa gastaria mais R$ 20,00. Isso seria possível? Explique o que você pensou.

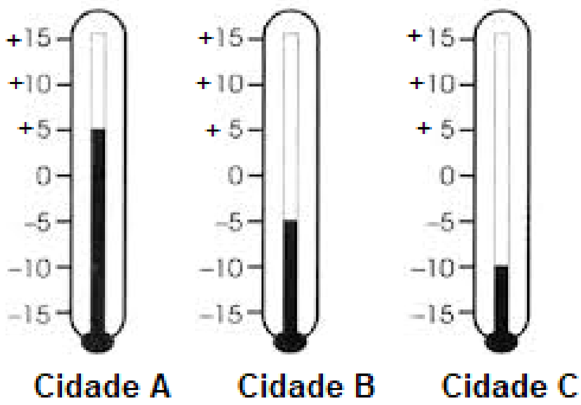
**Atividade 3:** Márcia foi às compras com R$ 80,00. Ela comprou uma blusa de R$ 35,00 e um sapato de R$ 45,00. Ao retornar para sua casa, quanto lhe sobrou?

**Atividade 4:** Observe o extrato bancário de Jorge no mês de Julho/2018:

| BANCO SAN MARINO | | |
|---|---|---|
| Agência: 00165-y | Conta: 12345-9 | |
| Cliente: Jorge F. Souza | | |
| MOVIMENTAÇÃO JULHO/2018 | | |
| **Dia/Mês** | **Ocorrência** | **Valor (R$)** |
| 02/07 | Salário | **+ 1.200,00** |
| 04/07 | Saque | **– 650,00** |
| 04/07 | Cheque | **– 50,00** |
| 06/07 | Boleto | **– 50,00** |
| 07/07 | Depósito | **+ 30,00** |
| 09/07 | Débito | **– 500,00** |

Até o dia 09 de julho Jorge recebeu ou gastou mais dinheiro?

**Atividade 5:** Em um certo dia, três cidades apresentavam temperaturas diferentes. Observe o termômetro de cada uma delas e responda:




a) Quantos graus o termômetro de cada cidade registrou?

b) Em qual cidade estava mais frio? Por quê?

**Para concluir...**

Nos exercícios anteriores você observou que alguns números inteiros negativos foram utilizados, aqueles que apareceram com o sinal de '–' na frente. Os inteiros negativos são $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$.

Observou também que esses números são utilizados em situações do cotidiano como apresentadas acima, do extrato bancário e dos termômetros para registrar algumas temperaturas abaixo de zero.

O conjunto numérico que estamos estudando, chamado de Números Inteiros, é representado por $\mathbb{Z}$ e é obtido quando reunimos os números naturais $\mathbb{N} = \{+1, +2, +3, +4, \dots\}$, os inteiros negativos $\{\dots, -4, -3, -2, -1\}$ e o zero.

Assim temos:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots\}$$

Vimos que esses números aparecem tanto na matemática como em nosso dia a dia. Além das duas situações cotidianas apresentadas nesta sessão, você já viu ou conhece outras situações em que aparecem esses números? Quais?

____________________________________________________________

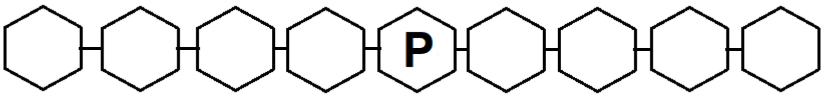
____________________________________________________________

____________________________________________________________

**SESSÃO 03 – UMA FORMA DE REPRESENTAR ESTE CONJUNTO**

**Aluno:________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

**Atividade 1:** A figura abaixo representa uma trilha reta. Responda:




a) Se uma pessoa na posição P desta trilha andar 3 unidades para a direita e, após, andar 5 unidades em sentido contrário, ao final se encontrará em que posição?

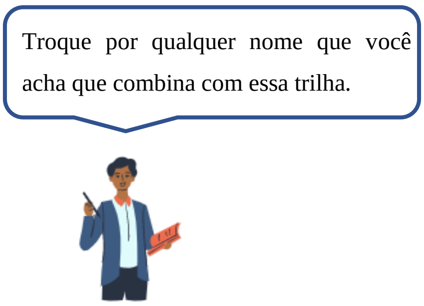
b) Se uma pessoa na posição P andar 4 unidades para a esquerda e, após, andar 7 unidades em sentido contrário, em que posição se encontrará?

c) Se uma pessoa na posição P andar 3 unidades para a esquerda e, após, 3 unidades para a direita, ao final em que posição se encontrará?

**Atividade 2:** Considere a figura abaixo:


a) Utilizando números, complete as casas em branco da figura acima. Como você nomearia as casas à esquerda da letra P?

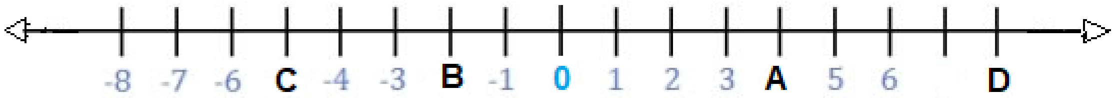
b) Vamos trocar o nome da casa P. Qual nome você escolheria? Explique.



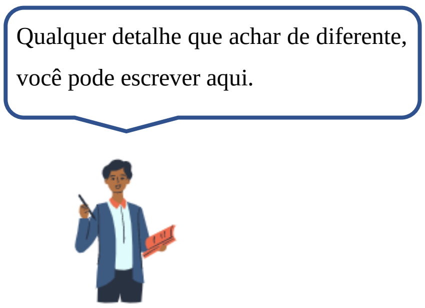
c) Se você tivesse que trocar a letra P por um número, qual você acharia mais adequado? Por que você escolheu esse número?

e) Uma pessoa está na posição +1 e desloca-se 4 unidades para a direita. Qual será sua posição final?

**Atividade 3:** Observe a reta abaixo e responda:



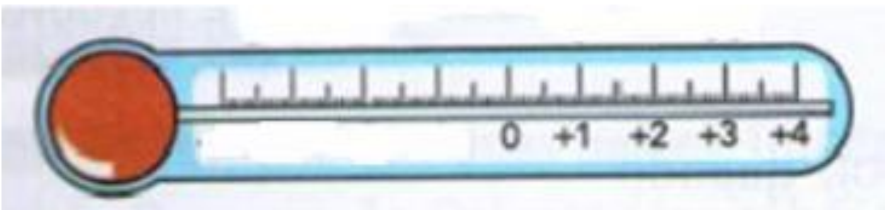

a) Comparando esta reta com a trilha do exercício anterior, o que você consegue observar de diferente?




b) Quais são os números que estão representados pelas letras:

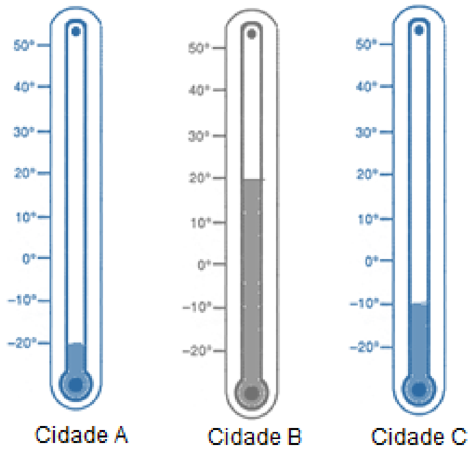
A: ____ B: ____ C: ____ D: ____

**Atividade 4:** Observe a figura abaixo:




Você acha que está faltando algo nesta figura? Diga o que você sentiu falta e complete isso na própria figura.

**Atividade 5:** Uma situação em que os números inteiros negativos são utilizados é no registro de temperaturas abaixo de zero. Observe os registros dos termômetros abaixo:




a) Quais cidades registraram temperaturas positivas? Por quê?

b) Em qual dessas cidades você acha que fez mais frio? Explique porquê você pensou isso.

c) Você se lembra qual foi a temperatura mais fria que o termômetro registrou em sua cidade? E a mais quente?

Tente se lembrar de temperaturas que você já viu em algum termômetro de sua cidade, em notícias da TV ou no seu celular.

**Atividade 6:** Outra situação que os números inteiros negativos são utilizados é referente ao sistema monetário. No extrato bancário, por exemplo, utiliza-se créditos (valores positivos) e débitos (valores negativos). Observe cada situação do extrato bancário a seguir e represente a partir de um número inteiro.

| Data | Movimentação da conta | Representação numérica |
|---|---|---|
| 01/10/2018 | Crédito de R$ 750,00 | |
| 02/10/2018 | Depósito de R$ 250,00 | |
| 05/10/2018 | Boleto pago de R$ 150,00 | |
| 06/10/2018 | Débito de R$ 25,00 | |
| 09/10/2018 | Saque de R$ 225,00 | |
| 11/10/2018 | Depósito de R$ 100,00 | |
| 15/10/2018 | Saque de R$ 800,00 | |

**Atividade 7:** Para cada situação abaixo represente utilizando um número inteiro (não se esqueça de utilizar o sinal):

a) 5 graus abaixo de zero ________

b) Um crédito de R$ 100,00 ________

c) Uma dívida de R$ 200,00 ________

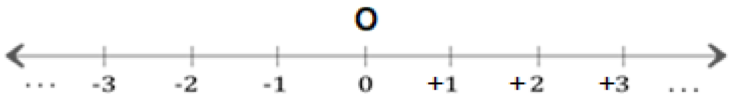
f) 4 unidades à direita do zero ________

g) algum valor positivo ________

h) algum valor negativo ________

**Para concluir...**

Uma maneira de representar o conjunto dos números inteiros, utilizando a reta numérica, é a seguinte:




Uma reta numérica na horizontal, com o ponto ‘O’ na origem representado pelo número zero; à direita do zero ficam os números inteiros positivos {+1, +2, +3,...} e à esquerda do zero, os números inteiros negativos {-1, -2, -3,...}. A distância de um número ao outro deve possuir sempre a mesma medida.

Você observou nos exercícios anteriores que algumas vezes os inteiros positivos não apareceram com o sinal de +, não tem problema, isso pode acontecer. Os números inteiros positivos podem ser representados com ou sem o sinal de mais. Ou seja, podemos representar 8 positivo das seguintes formas: +8 ou apenas 8.

Já os inteiros negativos necessitam do sinal de ‘–‘ para dizer que é um número negativo.

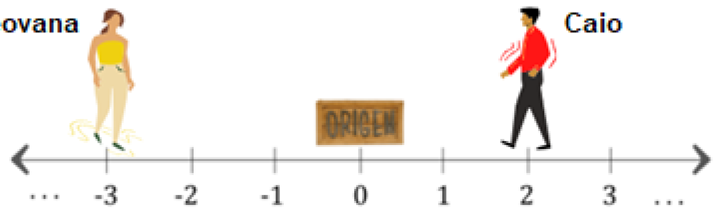
Como o conjunto dos números inteiros é infinito, sua representação na reta numérica também é infinita para ambos os lados.

Nas próximas sessões entenderemos melhor as regras de funcionamento deste conjunto.

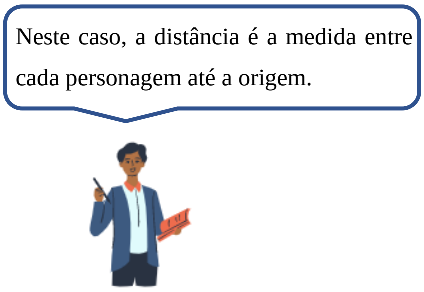
**SESSÃO 04 – O QUE É O MÓDULO DE UM NÚMERO INTEIRO?**

**Aluno:___________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

**Atividade 1:** Tomando a ORIGEM como ponto de referência, responda:

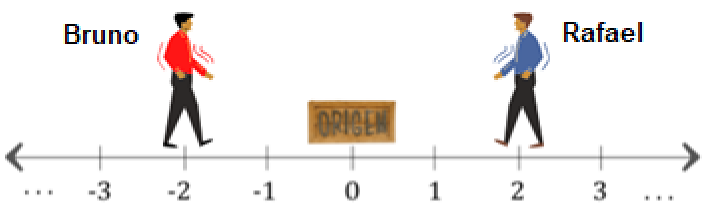



a) Quantas são as unidades de distância de cada um até a origem?




b) Quem está mais perto da origem? Por quê?

**Atividade 2:** Na figura abaixo, Bruno e Rafael estão em pontos diferentes sobre a reta numérica, caminhando em direção à origem. Responda:




a) Quantas unidades de distância cada um deles está da origem?

b) Quem está mais próximo da origem? Explique.

c) Você consegue observar algo em comum referente às posições de Bruno e de Rafael com relação à origem? Explique o que você observou.

**Para concluir...**

A distância representada entre um ponto da reta numérica até a origem é chamada de **módulo** ou **valor absoluto** do número inteiro.

Indicamos o módulo de um número inteiro entre $|\ \ |$. Por exemplo $|+2| = 2$.

Na situação acima, mesmo que Bruno e Rafael estavam em lados opostos da reta, os dois estavam à mesma distância da origem, ou seja, duas unidades da origem.

Podemos representar a situação da seguinte forma:

$|-2| = 2$, lê-se, módulo de menos dois é igual a dois.

$|+2| = 2$, lê-se, módulo de mais dois é igual a dois.

**O módulo de um número diferente de zero é sempre positivo**, e o módulo de zero é o próprio zero.

Então, tratando-se de módulo ou valor absoluto, estamos considerando a distância do ponto até a origem. Agora que você já aprendeu sobre módulo de um número inteiro, vamos praticar?

**Atividade 3:** Determine:

a) $|+7| =$ ______

b) $|-75| =$ ______

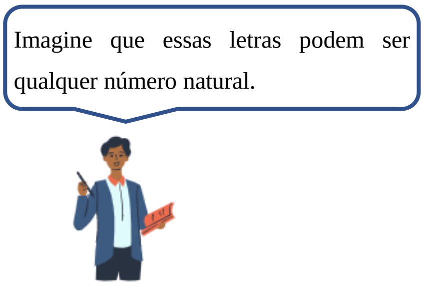
c) $|8| =$ ______

d) $|-3| =$ ______

e) $|0| =$ ______

f) $|-b| =$ ______

g) $|a| + |-b| =$ __________




**Atividade 4:** Responda:

a) Qual é o módulo de +12?

b) Qual é o valor absoluto de – 5?

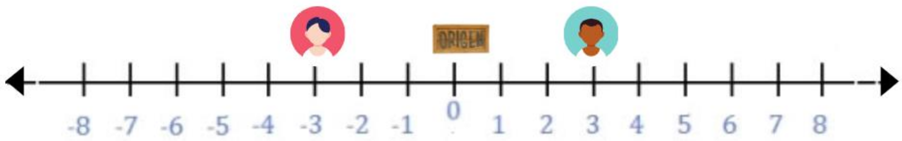
c) É possível que um número inteiro tenha módulo igual a – 6? Por quê?

## SESSÃO 05 – O QUE É O MÓDULO DE UM NÚMERO INTEIRO?

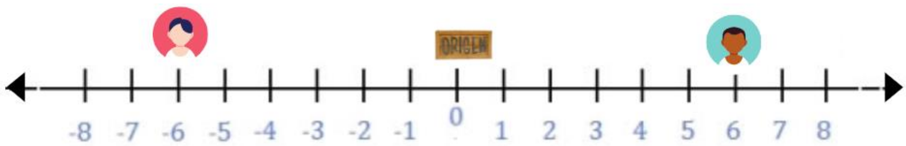
**Aluno:________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

**Atividade 1:** Vamos observar as diferentes posições de duas pessoas sobre a reta numérica:

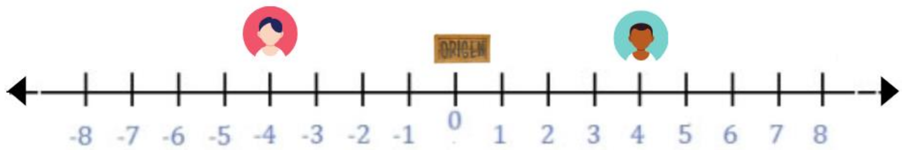
**1ª Situação**




**2ª Situação**




**3ª Situação**




a) Indique na tabela abaixo a posição da reta ocupada por cada pessoa nas três situações:

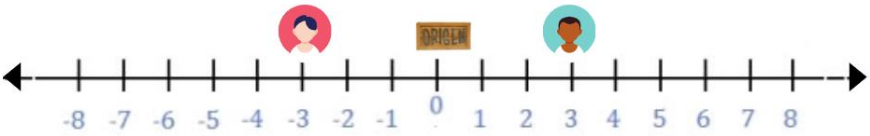
| |  |  |
|---|---|---|
| 1ª Situação | | |
| 2ª Situação | | |
| 3ª Situação | | |

b) Calcule o módulo do número que representa a posição de cada pessoa em cada situação:

Na sessão anterior aprendemos como encontrar o módulo de um número inteiro. Dê uma olhada lá caso não se lembre.

c) Observando o módulo em cada situação, o que você pode concluir sobre a posição das pessoas?

**Atividade 2:** Retomando a situação 1, classifique em verdadeiro (V) ou falso (F):




a) (    ) Se o bonequinho azul deslocar 2 unidades para a direita, e o vermelho 2 unidades para a esquerda, então os dois estarão à mesma distância da origem.

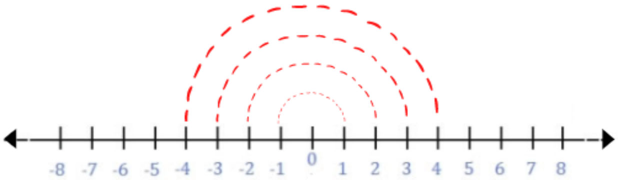
b) (    ) Se o vermelho deslocar 1 unidade para a direita e o azul 3 para a esquerda, os dois continuam com a mesma distância da origem.

c) (    ) Sempre que os bonequinhos caminharem a mesma quantidade em sentidos opostos, os dois estarão à mesma distância em relação à origem.

**Para concluir...**

Na reta numérica, pontos que têm a mesma distância da origem O são ditos **opostos** ou **simétricos**. Por exemplo, o oposto ou simétrico do número positivo +1 é o número negativo – 1; o oposto ou simétrico do número negativo – 5 é o número positivo +5.

Na reta numérica com os números inteiros, o zero representa a origem e também é chamado de ponto de simetria da reta, pois qualquer ponto da reta que considerarmos, sempre haverá outro ponto, que tem a mesma distância que este com relação à origem. Por exemplo, vamos considerar o número +7; sua distância até a origem é 7. E o seu oposto ou simétrico é o número – 7. Todo número inteiro possui oposto ou simétrico.




**Atividade 3:** Determine:

a) O oposto de – 27 _____

b) O simétrico de 9 _____

c) O oposto de 0 _____

d) O simétrico de x _____

e) O oposto de – a _____

**Atividade 4:** Para cada item abaixo, escreva uma situação oposta e seu número correspondente, como indicado no primeiro item já resolvido:

a) Um lucro de R$ 20,00 (+20): Um prejuízo de R$ 20,00 (–20)______________

b) 3 graus abaixo de zero (– 3): ________________________________________

c) 50 metros acima do nível do mar (+50): ________________________________

d) Uma dívida de R$ 35,00 (– 35): _______________________________________

**SESSÃO 06 – COMPARANDO ESSES NÚMEROS**

**Aluno:_________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

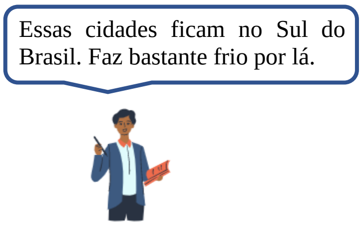
**Atividade 1:** Observe cada situação abaixo e responda:

*1ª Situação* – Márcia está com um crédito de 80,00 no banco, porém, Jorge está com um saldo negativo de R$ 100,00.

Quem está com menos dinheiro no banco? Justifique.

*2ª Situação* – Certo dia a cidade de Vacaria registrou 4 graus abaixo de zero em seu termômetro, enquanto isso, Passo Fundo registrou 2 graus positivos.

Qual cidade registrou a maior temperatura? Por quê?




*3ª Situação* – Mateus está devendo R$ 10,00 na cantina de sua escola, enquanto Júlia deve R$ 40,00.

Quem está devendo mais?

Você acha que é melhor ter uma dívida de 10 reais ou de 40 reais? Por quê?

**Atividade 2:** Represente cada situação do exercício anterior utilizando um número inteiro:

1ª Situação – Márcia: _____ Jorge: _____

2ª Situação – Vacaria: _____ Passo Fundo: _____

3ª Situação – Mateus: _____ Julia: _____

**Atividade 3:** Faça como o primeiro exemplo e represente utilizando os sinais de maior (>), menor (<) ou igual (=) as situações da atividade anterior:

1ª Situação: $\underline{+80 > -100}$ (lê-se: 80 é maior do que 100 negativos ou 80 é maior que menos 100).

2ª Situação: ______________

3ª Situação: _____________

**Atividade 3:** A escola em que Juca, Maria e Luísa estudam possui ar condicionado em todas as salas de aula. Certo dia o ar condicionado da sala deles estava ligado na temperatura de 19º C. Os alunos estavam reclamando de frio e decidiram falar com a professora:

**I. Juca pediu para a professora "diminuir o ar condicionado"**

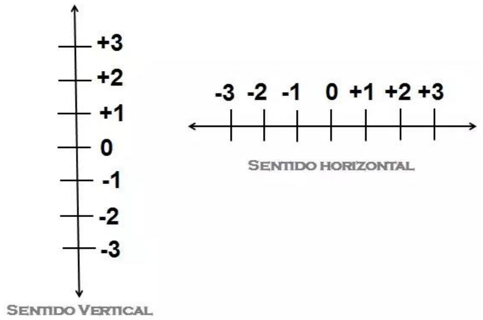
**II. Maria disse que a professora deveria "abaixar a temperatura"**

**III. Luísa falou que a professora deveria "aumentar a temperatura"**

Diante da fala dos três alunos, quem a professora deveria atender para resolver o problema de "frio" dos alunos? Por quê?

Se a professora atendesse o pedido de Maria o que aconteceria? Justifique sua resposta.

**Atividade 4:** Observe duas formas de representação da reta numérica para o conjunto dos números inteiros abaixo.




Represente utilizando os sinais de maior (>), menor (<) ou igual (=) as seguintes situações:

a) +2 está acima de – 1 __________

b) + 3 fica à direita de 0 __________

c) – 1 ºC é uma temperatura maior do que – 3 ºC __________

d) – 1 está acima de – 2 __________

e) A altitude – 2 está abaixo do nível do mar (0) __________

**Atividade 5:** Analisando as situações anteriores responda as sentenças a seguir dando um exemplo em cada uma:

a) Quando comparamos um número positivo com um número negativo, o maior deles é sempre o número:

( ) positivo ( ) negativo

Exemplo: _________________

b) Quando comparamos um número negativo com o zero, o maior deles é sempre o:

( ) negativo ( ) zero

Exemplo: _________________

c) Quando comparamos um número positivo com o zero, o maior deles é sempre o:

( ) zero ( ) positivo

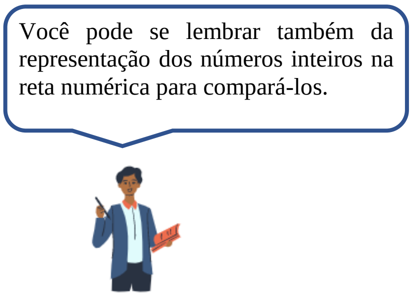
Exemplo: _________________

d) Quando compramos dois números positivos, o maior deles é o que possui o módulo:

( ) maior ( ) menor

Exemplo: _________________

e) E quando comparamos dois números negativos, qual deles é o maior?




| |
|---|
| **Para concluir...**<br>Comparar números inteiros significa dizer se um é maior, menor ou igual ao outro. Utilizar a ideia da reta numérica pode ser uma boa alternativa para auxiliar nesta comparação, mas você pode utilizar a estratégia que você preferir. |

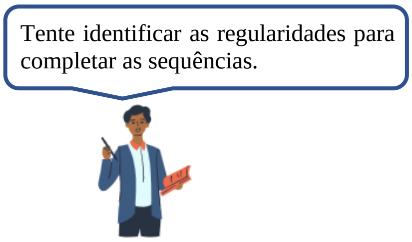
**SESSÃO 07 – COMPLETANDO SEQUÊNCIA E ORDENANDO ESSES NÚMEROS**

**Aluno:___________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

**Atividade 1:** Complete os espaços em branco das sequências abaixo:

a)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | | 6 | 8 | | | 14 |




b)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -10 | -8 | | | -2 | | 2 | 4 | |

c)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| -20 | -15 | | | 0 | | 10 | 15 |

**Observe o saldo bancário de 5 pessoas para responder às atividades 2, 3 e 4:**

- João: saldo negativo de R$ 300,00
- Marta: saldo positivo de R$ 220,00
- Lúcia: saldo positivo de R$ 180,00
- Marcelo: saldo negativo de R$ 200,00
- André: saldo zero

**Atividade 2:** Represente o saldo de cada pessoa utilizando o sinal adequado.

**Atividade 3:** Responda:

a) Quem possui a maior dívida com o banco?

b) Quem tem mais dinheiro no banco?

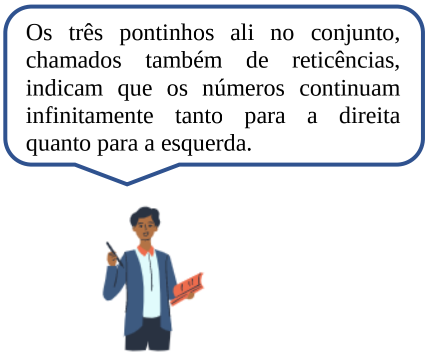
**Atividade 4:** Escreva esses saldos em ordem CRESCENTE.

**Atividade 5:** Observe o conjunto dos números inteiros:

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$$

Responda:

a) Qual é o menor número inteiro positivo?




b) Qual é o maior número inteiro positivo?

c) Qual é o menor número inteiro negativo?

d) Qual é o maior número inteiro negativo?

**Atividade 6:** Organize os números abaixo em ordem DECRESCENTE:

**– 12 – 3 4 +2 0 6 – 8**

**SESSÃO 08 – ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM A RETA NUMÉRICA**

**Aluno:________________________________ Data: _____/_____/_____ Turma: 7º ano A**

**Atividade 1:** Vamos retomar à seguinte questão: 8 + ___ = +6. Uma maneira de interpretá-la, pode ser por meio da reta numérica.

**1º passo:** desenhe uma reta numérica com no mínimo 9 unidades positivas, 9 negativas e o zero em sua origem;

**2º passo:** marque o ponto +8 na reta. Em seguida marque também o ponto +6.

| Espaço para desenhar a reta numérica |
| --- |

Observando seu desenho e as marcações que você fez, responda: quantas unidades e para qual sentido a pessoa se deslocou para sair de +8 e chegar em +6?

Diante de sua resposta anterior, complete: 8 + ___ = +6.

**Atividade 2:** Observe o exemplo e utilizando o mesmo raciocínio do exercício anterior, complete:

**Exemplo:** (+3) + (+5) = __8__.

Estava na posição __3__, deslocou-se __5__ unidades para a __direita__ e parou na posição __8__.

a) (+2) + (+7) = _____

Estava na posição _____, deslocou-se _____ unidades para a ____________ e parou na posição _____.

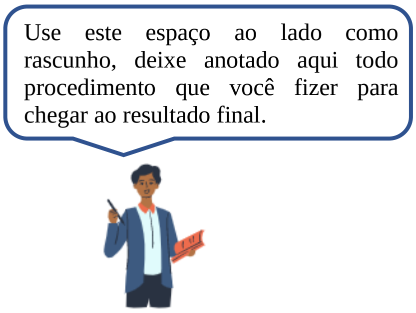
b) (+5) + (–7) = _____

Estava na posição _____, deslocou-se _____ unidades para a ____________ e parou na posição _____.

c) (– 2) + (– 4) = ______

Estava na posição ______, deslocou-se ______ unidades para a ____________ e parou na posição ______.

**Atividade 3:** Utilizando qualquer estratégia, calcule:




a) (– 5) + (+3) = _____

b) (– 2) + (– 2) = _____

c) (+2) + (+8) = _____

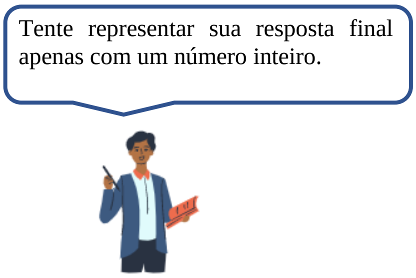
d) (+7) + (– 3) = _____

**Atividade 4:** Retomando o problema dos cartões de Nathan:

Nathan estava brincando de bater cartões e ao final do jogo ele percebeu que na primeira partida perdeu 9 cartões e na segunda ganhou 6. Responda:

a) Quantos cartões ele teria ao final, se começasse o jogo com 5 cartões?

b) E se ele começasse o jogo com apenas 2 cartões, com quantos terminaria?




c) Para Nathan não terminar o jogo devendo nenhum cartão, com quantos cartões no mínimo ele deveria começar?