

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

**GUILHERME DAS NEVES MATOS**

**A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DA APRENDIZAGEM E A MODELAGEM  
MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES E DESAFIOS**

**CAMPO GRANDE - MS**

**2021**

**GUILHERME DAS NEVES MATOS**

**A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DA APRENDIZAGEM E A MODELAGEM  
MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES E DESAFIOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Claudia Carreira da Rosa.

**CAMPO GRANDE - MS**

**2021**

**GUILHERME DAS NEVES MATOS**

**A TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DA APRENDIZAGEM E A MODELAGEM  
MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES E DESAFIOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Cláudia Carreira da Rosa (Orientadora)  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

---

Prof. Fernanda Malinosky Coelho da Rosa  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

---

Prof. Sonner Arfux de Figueiredo  
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Campo Grande – MS, \_\_ de \_\_\_\_\_ de 2021.

## DEDICATÓRIA

*Dedico este trabalho ao Matteo, meu filho, e a minha esposa.*

## RESUMO

O planejamento das aulas de um professor é um dos fatores primordiais para que este faça um trabalho coeso. Tal planejamento pode ser considerado como uma trajetória hipotética, onde o professor traça um caminho visando que seus alunos aprendam os conteúdos. Para conseguir que a aprendizagem aconteça, o professor estabelece estratégias de ensino e, em geral, quando essas estratégias são diferenciadas, existe a possibilidade do profissional refletir sobre sua prática, mesmo antes dela acontecer, pois esta reflexão começará a partir da sua trajetória hipotética. Nessa pesquisa utilizamos a Modelagem Matemática como uma estratégia de ensino que possibilita a reflexão do professor ao contextualizar conteúdos envolvendo situações reais, de forma que ao fazer seu planejamento, trace sua Trajetória Hipotética da Aprendizagem, elaborando tarefas que podem ser reformuladas conforme o desenvolvimento da aula. Neste sentido, o objetivo geral dessa pesquisa, é estudar a teoria da Trajetória Hipotética da Aprendizagem com o uso da Modelagem Matemática para compreender as modificações e encaminhamentos que podem surgir em um planejamento, contribuindo para que o professor reflita sobre sua prática, podendo assim buscar por uma melhoria no processo de aprendizagem. Por sua vez, os objetivos específicos são (1) Apresentar situações reais para desenvolver atividades em um curso de Matemática Elementar; (2) Realizar um planejamento inicial e reavaliá-lo no decorrer e final das atividades e, por fim, (3) Avaliar como a reformulação e a reflexão de um planejamento podem aprimorar uma aula. Na busca dos objetivos, desenvolvemos dois planejamentos, visando o ensino de Matemática básica em um curso de forma remota, com ênfase em Modelagem Matemática e então analisamos os planejamentos e suas respectivas alterações no decorrer do curso. Percebemos que oportunizar ao professor meios de análise da sua prática enquanto ela acontece, pode fazer diferença nos encaminhamentos dados, oportunizar ao mesmo adaptar ou criar novas ações quando necessário e, conseqüentemente, impactar na aprendizagem.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Planejamento; Estratégia de ensino; Reflexão.

## ABSTRACT

The planning of a teacher's classes is one of the main factors for him to do a cohesive. Such planning can be considered as a hypothetical trajectory, where the teacher traces a path so that his students learn the contents. To make learning happen, the teacher establishes teaching strategies and, in general, when these strategies are differentiated, there is the possibility for the professional to reflect on their practice, even before it happens, this reflection will start from their hypothetical trajectory. In this research, we used Mathematical Modeling as a teaching strategy that allows the teacher's reflection when contextualizing content involving real situations, so that when makes your planning, they trace their Hypothetical Learning Trajectory, developing tasks that can be reformulated according to the development of the class. In this sense, the main objective of this research is to study the theory of the Learning Hypothetical Trajectory with the use of Mathematical Modeling to understand the changes and directions that may emerge in a planning, contributing for the teacher to reflect on their practice, allowing to search for an improvement in the learning process. In turn, the specific objectives are (1) To present real situations to develop activities in an Elementary Mathematics course; (2) Carry out an initial planning and reassess it during and at the end of the activities and, finally, (3) Assess how the reformulation and reflection of a planning can improve a class. In search of the objectives, we developed two plannings, aiming at teaching Basic Mathematics in a course remotely, with an emphasis on Mathematical Modeling, and then we analyzed the plannings and their respective changes during the course. We realized that providing the teacher with means of analyzing their practice while it happens, can make a difference in the referrals given, providing opportunities for them to adapt or create new actions when necessary and, consequently, impact on learning.

**Keywords:** Mathematics Education; Planning; Teaching strategy; Reflection.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Três componentes da THA.....	15
Figura 2 – Ciclo de Ensino Matemático .....	18
Figura 3 – Domínio do conhecimento e saber docente .....	19
Figura 4 - Resumo das fases de acordo com Burak (2010), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Biembengut (2014) e Bassanezi (2002).....	40
Figura 5 - Imagens utilizadas para contextualização do tema COVID-19 – Corona vírus das questões 1 a 5 .....	52
Figura 6 – Figuras utilizadas para contextualização do tema Casa de Câmbio - Conversão de Moedas.....	54
Figura 7 - Figuras do Planejamento P1 utilizadas para contextualização do tema COVID-19 – Corona vírus das questões 1 a 5.....	59
Figura 8 - Figuras adicionadas no Planejamento P1 para contextualização do tema COVID-19 – Corona vírus .....	60
Figura 9 - Respostas das questões 4 e 5 do Questionário 1 do Planejamento P1.1 .....	62
Figura 10 – Questão 2 do questionário 2 do Planejamento P1.1 com resoluções diferentes .....	62
Figura 11 – Questões do questionário 2 do Planejamento P1.1 abordando conteúdos não planejados inicialmente .....	65
Figura 12 – Questão 7 do questionário 2 do Planejamento P1.3 com forma diferente de resolução.....	68
Figura 13 – Figuras do Planejamento P2 utilizadas para contextualização do tema Casa de Câmbio - Conversão de Moedas.....	73
Figura 14 – Respostas da questão 1 do Planejamento P2.1 do tema Casa de Câmbio - Conversão de Moedas.....	76
Figura 15 – Questão 6 do questionário 3 do Planejamento P2.2 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas.....	78
Figura 16 – Questão 3 do questionário 4 do Planejamento P2.2 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas.....	79
Figura 17 – Questão 4 do questionário 4 do Planejamento P2.2 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas.....	80

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Questionário 1 – COVID-19 – Corona vírus .....	51
Quadro 2 - Questionário 2 – COVID-19 – Corona vírus .....	52
Quadro 3 – Questionário 3 – Conversão de moeda.....	54
Quadro 4 - Questionário 4 – Casa de Câmbio - Conversão de moeda .....	55
Quadro 5 - Questionário 1 alterado do Planejamento P1 – COVID-19 – Corona vírus.	58
Quadro 6 - Questionário 2 alterado do Planejamento P1 – COVID-19 – Corona vírus.	60
Quadro 7 - Questionário 2 alterado do Planejamento P1.1 – COVID-19 – Corona vírus .....	63
Quadro 8 - Compilado das questões 2, 3 e 4 do Planejamento P1.1 de acordo com as cidades dos participantes .....	64
Quadro 9 - Objetivos específicos do Planejamento P1.3 - COVID-19 – Corona vírus .	66
Quadro 10 – Quadro de alterações no Planejamento P1, P1.1 e P1.2.....	69
Quadro 11 – Questionário 3 alterado do planejamento P2 – Casa de câmbio - Conversão de moeda.....	72
Quadro 12 - Questionário 4 alterado do Planejamento P2 - Casa de Câmbio - Conversão de moeda.....	74
Quadro 13 – Países utilizados pelos participantes para responder as questões 1, 4 e 5 do questionário 3 do Planejamento P2.1 .....	75
Quadro 14 – Questionário 3 alterado do planejamento P2.1 – Casa de câmbio - Conversão de moeda.....	75
Quadro 15 - Questionário 4 alterado do Planejamento P2.1 - Casa de Câmbio - Conversão de moeda.....	76
Quadro 16 – Objetivos específicos do Planejamento P2.3 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas.....	81
Quadro 17 – Quadro de alterações no Planejamento P2, P2.1 e P2.2 .....	82

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DA APRENDIZAGEM.....	13
1.1 Definindo Trajetória Hipotética da Aprendizagem.....	13
1.2 Trajetória Hipotética da Aprendizagem e a em sala de aula .....	20
1.3 Trajetória Hipotética da Aprendizagem na Educação Matemática.....	24
MODELAGEM MATEMÁTICA: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES.....	28
2.1 Modelagem Matemática na Educação Matemática .....	28
2.2 Modelagem Matemática em sala de aula .....	35
2.3 Modelagem Matemática na Educação Matemática .....	41
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS.....	46
3.1 Objetivo da pesquisa .....	46
3.2 Características da pesquisa.....	47
3.3 Contexto de pesquisa .....	48
3.3.1 Coleta e análise de dados.....	49
3.3.2 O curso.....	49
3.3.3 Participantes do curso .....	50
3.3.4 Planejamentos .....	50
3.3.5 Encaminhamentos do planejamento 1 (P1) .....	51
3.3.6 Encaminhamentos do Planejamento 2 (P2).....	53
3.4 Análise de dados .....	55
DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS.....	57
4.1 Desenvolvimento do primeiro Planejamento (P1) .....	57
4.2 Desenvolvimento do segundo Planejamento (P2).....	71
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	84
REFERÊNCIAS .....	87

## INTRODUÇÃO

Atualmente, uma das preocupações que envolve o ensino está relacionada ao planejamento do professor e, na busca de melhorar e demonstrar resultados satisfatórios, é que as discussões vêm se intensificando, uma vez que o professor precisa desenvolver em seus alunos o raciocínio lógico, estimular a curiosidade e possibilitar uma postura investigativa e argumentativa, de modo que o aluno seja um agente ativo na construção do conhecimento.

Assim, o desempenho do professor de Matemática é um fator importante para este trabalho, com isso, tal pesquisa foi motivada devido a Matemática em sala de aula por muitas vezes ainda se apresentar sem contexto e inflexível, o que dificulta aos alunos na sua hora de pensar, pois eles não conseguem observar a utilidade da Matemática em suas realidades. Logo, percebemos a importância do professor em considerar a realidade do aluno e articulá-lo aos processos de ensino e aprendizagem, possibilitando o mesmo enxergarem a Matemática no seu cotidiano, relacionando estratégias pedagógicas que serão estudadas nessa pesquisa para aumentar o interesse e aprendizagem dos alunos.

É nesta direção que se coloca o presente trabalho, com o intuito de desenvolver um curso de Matemática básica, utilizando a Modelagem Matemática em busca de encontrar a deficiência dos alunos durante o desenvolvimento das aulas, abordando conteúdos por meio de situações distintas, trazendo a Trajetória Hipotética de Aprendizagem para completar e possibilitar que o professor reformule os seus planejamentos. Neste contexto defendemos o uso da Modelagem Matemática em sala de aula, pois a mesma torna os alunos mais investigativos e participativos tornando-os mais ativos em seu processo de aprendizagem.

O interesse pela Modelagem<sup>1</sup> se deu através da participação no Grupo da Fronteira de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática (GFEPEM) o qual participo desde que ingressei no Mestrado. As discussões de tal grupo são voltadas às tendências da Educação Matemática, principalmente a Modelagem e formação inicial e continuada de professores.

Neste trabalho, consideramos a Modelagem uma alternativa pedagógica para o ensino da Matemática, que nos desafia na hora de relacionar conteúdos com o cotidiano dos alunos. Ao desenvolver uma atividade de Modelagem, esta precisa ser originada de uma situação real, sendo algo presente no cotidiano dos alunos e que possuam um certo

---

<sup>1</sup> Utilizaremos neste trabalho o termo Modelagem para se referenciar a Modelagem Matemática.

interesse, pois a ideia é motivar e incentivar a participação dos mesmos. Neste sentido, a formação do professor para o uso da Modelagem é relevante para o processo, pois pode incentivar o mesmo a desenvolver em suas aulas.

Quando falamos de Modelagem para professores, um fator que pode gerar muitas dúvidas é o planejamento da aula, uma vez que ao usar atividades de Modelagem o professor permite a participação direta do aluno e, algumas vezes, os encaminhamentos não vão em direção ao que o professor planejou. Dessa forma, o receio de encontrar ao longo da aula o “não planejado” pode ser um problema, mas se considerarmos que o professor tem a oportunidade de rever seu planejamento enquanto ele está sendo executado, o mesmo poderá repensá-lo e assim reformula-lo, tornando o seu planejamento mais flexível.

Quando falamos de planejamento, estamos nos referindo ao plano que o professor faz para dar sua aula. É a trajetória que ele traça, sem ter a certeza se será ou não possível executá-la da forma planejada, consideramos que é uma trajetória hipotética visando a aprendizagem dos alunos. Neste trabalho trazemos a THA<sup>2</sup> como é proposta por Simon (1995).

Nesse sentido, o professor planeja com base em suas suposições dos conhecimentos dos alunos que podem ser abordados em sala de aula, assim a palavra “trajetória” refere-se ao caminho que será percorrido pelos alunos. A palavra “hipotética” se refere a uma suposição inicial do planejamento que o professor elabora, com o que pode ser encontrado no desenvolver de sua atividade.

A THA tem por característica manter uma relação de um possível conhecimento dos alunos com a compreensão Matemática do professor (SIMON, 1995), logo inicialmente o professor não consegue se inteirar sobre todo o conhecimento dos alunos. Assim, o professor pode comparar a sua compreensão inicial com o momento em que os alunos começam a desenvolver seus entendimentos sobre a atividade, pois é pouco provável que o professor conheça de antemão todos os questionamentos que os alunos podem construir durante uma atividade.

A THA é construída de forma contínua, podendo ser reformulada a todo momento, neste sentido, considerando que atividades de Modelagem permitem a participação ativa do aluno, o professor poderá refletir sobre seus encaminhamentos, propondo novas tarefas de forma a atingir o seu objetivo pedagógico.

---

<sup>2</sup> Utilizaremos neste trabalho a sigla THA para se referenciar a Trajetória Hipotética da Aprendizagem, originada do inglês Hypothetical Learning Trajectory (HLT).

Neste contexto, o objetivo geral dessa pesquisa, é estudar a teoria da Trajetória Hipotética da Aprendizagem com o uso da Modelagem Matemática para compreender as modificações e encaminhamentos que podem surgir em um planejamento, contribuindo para que o professor reflita sobre sua prática, podendo assim buscar por uma melhoria no processo de aprendizagem. Especificamente, pretende-se (1) Apresentar situações reais para desenvolver atividades em um curso de Matemática Elementar; (2) Realizar um planejamento inicial e reavaliá-lo no decorrer e final das atividades e, por fim, (3) Avaliar como a reformulação e a reflexão de um planejamento podem aprimorar uma aula.

Neste contexto é que pretendemos investigar **quais os impactos na prática do professor, quando o mesmo planeja e utiliza atividades de Modelagem Matemática com auxílio da Trajetória Hipotética da Aprendizagem?**

Para responder tal questionamento, desenvolvemos um curso de Matemática básica de forma remota, utilizando como estratégia de ensino a Modelagem, tendo por base a THA. A proposta foi o desenvolvendo de duas atividades a fim de analisar o percurso dos planejamentos, verificando como e por que foram necessárias as alterações realizadas no decorrer do desenvolvimento. O curso foi ministrado pelo autor desta dissertação. Segue abaixo a estrutura que foi realizada o trabalho, a fim de cumprir com os objetivos propostos.

### **Estrutura do trabalho**

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, além da introdução, considerações finais e referências bibliográficas. Na introdução apresentamos o que será abordado nesta investigação de forma geral, bem como o questionamento, os objetivos e a estrutura desta pesquisa.

No primeiro capítulo apresentamos as concepções da THA, o seu desenvolvimento e características em sala de aula; no segundo capítulo abordamos as diferentes concepções de Modelagem no contexto da Educação Matemática.

No terceiro capítulo apresentamos os caminhos metodológicos que foram percorridos nessa pesquisa e no quarto capítulo trazemos as descrições e análises dos planejamentos desenvolvidos e, em seguida, apresentamos as considerações que nos levaram as conclusões desta investigação e, por fim, as referências bibliográficas.

## CAPÍTULO 1

### TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DA APRENDIZAGEM

O objetivo deste capítulo é explanar a teoria da THA usando diferentes autores, mas tendo como base os aspectos destacados principalmente por Simon (1995). Também relacionamos a teoria com questões advindas da sala de aula bem como situamos as pesquisas que existem sobre o tema.

#### 1.1 Definindo Trajetória Hipotética da Aprendizagem

Em busca de atingir bons resultados no ensino da Matemática e na compreensão dos seus conceitos, existem várias ferramentas para auxiliar na aprendizagem do aluno e, neste sentido, o trabalho do professor é essencial. Para usar qualquer uma dessas ferramentas é primordial um bom planejamento. Este, quando bem feito, consegue fazer o professor e o aluno trabalharem suas tarefas previamente estipuladas, de uma forma mais proveitosa e ampla, facilitando o entendimento do aluno e o desenvolver da aula.

Uma teoria capaz de ajudar no planejamento da aula é a THA que segundo Simon (1995) tem a ver com o planejamento do professor, os caminhos escolhidos e planejados por ele para alcançar seus objetivos didáticos. Para o autor “o caminho pelo qual você viaja é a sua trajetória e o caminho que você havia planejando é a sua trajetória hipotética” (SIMON, 1995, p. 35), já a palavra “aprendizagem”, segundo o Dicionário Michaelis (1998), pode ser definida como a forma que uma nova informação é inserida à estrutura cognitiva do indivíduo, com isso, consegue-se formar o termo THA. A trajetória é considerada hipotética, pois não se pode conhecer previamente a trajetória real, mas é uma tendência esperada, visto que a aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática<sup>3</sup>, apesar de por vezes ter caminhos similares.

Dessa forma, para entender melhor o que o autor define por THA ele faz uma analogia com uma viagem. De acordo com Simon (1995), supõe-se que se queira realizar uma viagem em torno do mundo, mas não possui de antemão um roteiro pré-determinado. Isto pode acarretar problemas, visto que poderia perder-se muitas oportunidades interessantes sem um planejamento prévio considerando o destino almejado. Para isso, é

---

<sup>3</sup> Traço comportamental característico de um indivíduo ou de um grupo de pessoas.

preciso buscar uma rota e depois o maior número de informações possíveis sobre ela, formulando um plano de viagem, uma rota a ser seguida, ou seja, é a viagem planejada.

A intenção inicial segundo Simon (1995), logicamente, é que o plano seja seguido, mas no decorrer da viagem podem aparecer imprevistos, e por causa desses, pode ser necessário uma reorganização no plano de viagem, por diferentes motivos, seja ficar mais tempo em algum lugar do roteiro, seja mudar determinada rota, entre outras. Estes ajustes, em geral serão necessários mesmo que o planejamento da viagem seja preciso e detalhado.

Neste sentido é que Simon (1995) comenta que na THA é aonde o professor desenvolve um plano para a sala de aula, mas este pode ser modificado de acordo com a necessidade. Essas modificações podem ocorrer tanto durante o planejamento quanto durante as aulas, visto que “[...] alterações e modificações podem ser feitas em um ou em todos os três componentes da THA: a meta, as atividades ou o processo hipotético de aprendizagem” (SIMON, 1995, p. 138), sendo que os componentes de uma atividade envolvendo THA serão explanados no próximo subcapítulo deste trabalho.

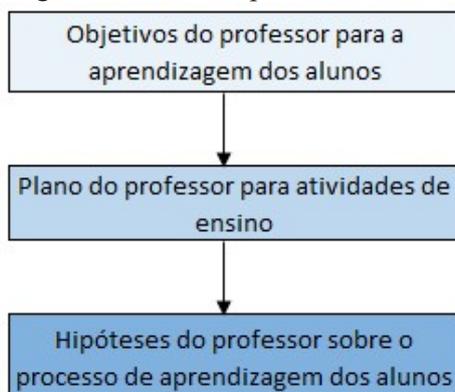
Diferentes estudantes de uma mesma sala de aula podem se beneficiar de uma mesma atividade, pois cada aluno possui uma forma de pensar trazendo irregularidade nas trajetórias realizadas em cada atividade, por isso uma THA possibilita ao professor a realização de uma análise racional para planejar como ele irá trabalhar em sala de aula. Neste sentido, o professor pode tomar as decisões baseadas nas melhores suposições de como a aprendizagem pode acontecer, sendo essa uma das características da THA segundo Simon (1995): a relação entre a compreensão do professor acerca da Matemática e suas hipóteses em relação ao conhecimento dos estudantes.

Nesse contexto, Steffe (2004) afirma que durante o desenvolvimento da atividade planejada, o professor precisa interagir com os alunos a fim de observar e interpretar as suas ações, pois o que o professor pensou hipoteticamente se transforma, assim podendo criar uma nova THA, com novas perspectivas para a próxima atividade. A trajetória de aprendizagem deve levar em conta o conceito inicial que os estudantes possuem e considerar as mudanças atingidas em relação as interações Matemáticas. Segundo o autor,

A construção de trajetórias hipotéticas de aprendizagem dos estudantes é um dos problemas mais difíceis, porém urgentes que a Educação Matemática enfrenta atualmente. É também um dos problemas mais empolgantes porque é nela que podemos construir uma compreensão da Matemática dos estudantes e como nós professores podemos afetar de forma rentável essa Matemática (STEFFE, 2004, p. 130).

O professor não é capaz de acessar o conhecimento real dos estudantes e seus entendimentos, mas, por sua vez, pode comparar a sua compreensão de um conceito específico a partir da construção de entendimento dos estudantes de forma hipotética. Com isso, Simon (1995) dividiu a THA em três componentes, mostrados na Figura 1.

Figura 1 – Três componentes da THA



Fonte: Adaptado de Simon (1995, p. 134)

Primeiro é preciso definir o objetivo que o professor pretende chegar para ocorrer a aprendizagem dos estudantes, ou seja, o objetivo de ensino (primeiro quadro da Figura 1). Posteriormente, o professor precisa de um planejamento para suas aulas, com direções bem definidas, sempre mantendo a interação com os alunos, mantendo uma posição investigativa. Os professores devem se atentar às considerações realizadas pelos alunos, pois expressa o entendimento sobre o que está sendo estudado, visto que o ambiente de aprendizagem é a interação entre as duas partes (alunos e o professor) e os resultados dessa interação (segundo quadro da Figura 1). Por fim, o professor precisa desenvolver o processo hipotético de aprendizagem, em que ocorre uma previsão de como será a evolução do pensamento e da compreensão dos alunos acerca do tema abordado, que será confirmado ou não no desenvolvimento da atividade.

Deve-se considerar que a THA é mutável e flexível, confrontando as necessidades e especificidades dos estudantes de acordo com o conteúdo a ser estudado. Com isso, Simon (1995) afirma que o objetivo deve ser previamente definido, mas não deve ser fixo e, quanto a trajetória, não se deve ser fixa, portanto o professor deverá realizar uma análise racional, para a tomada de decisões e a natureza hipotética do pensamento.

De acordo com Gómez, González e Lupiáñez (2007), o professor precisa dispor de informações verdadeiras e organizadas em um processo sistemático, a fim de tentar alcançar os objetivos estabelecidos previamente. Logo, se o professor pretende planejar

tarefas para alcançar o objetivo, isso deve ser caracterizado e traçado de tal forma que cada atividade contribua para a realização.

Foi estabelecido por Simon e Tzur (2004) uma forma de esclarecer as características entre a THA e as sequências de ensino, ou seja, foram consideradas as tarefas que seriam realizadas atendendo um processo de construção de um novo aprendizado matemático. Isso permite refletir sobre essa atividade e o efeito que ela causaria, sendo elaborado na forma de THA.

De acordo com Van Den Heuvel-Panhuizen (2001; 2010), deve haver uma interação entre três aspectos: (1) uma THA que fornece uma visão geral do processo de aprendizagem; (2) uma trajetória de ensino, com determinação didática de como articular com o processo de aprendizagem e (3) ter os conteúdos esquematizados, indicando quais são os elementos centrais que devem ser ensinados. Porém, acredita-se que a trajetória não deve ser considerada um passo a passo linear, deve ser vista de forma ampla e levar em conta processos individuais de aprendizagem dos estudantes, descontinuidades no processo de aprendizagem, múltiplas habilidades que podem se desenvolver ao mesmo tempo durante a aprendizagem dos conceitos (relacionado ou não com a Matemática) e também diferentes processos de aprendizagem, devido a diferença de situações que cada estudante vive fora da sala de aula e, por fim, os diferentes níveis de habilidades dos mesmos.

Na experiência de Simon (1995) com alunos, ele se questiona de como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos. Durante o seu estudo, o autor concluiu que o plano do professor para as atividades de ensino que considera o pensamento dos alunos permite trazer a participação dos mesmos nas atividades. Assim, mostrou que é necessário compreender como é o processo de entendimento dos alunos, isso permite a melhor condução do professor para formular ideias de THA. Essa geração de ideias pelo professor provém das hipóteses que são desenvolvidas sobre o pensamento e aprendizagem dos alunos, com isso, o autor afirma que:

[...] o desenvolvimento de um processo de trajetória hipotética de aprendizagem e o desenvolvimento de atividades de aprendizagem têm um relacionamento simbiótico; a geração de ideias para atividades de aprendizagem é dependente das hipóteses do professor sobre o desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem dos estudantes, além disso a geração de hipóteses do desenvolvimento conceitual do estudante depende da natureza de atividades antecipadas (SIMON, 1995, p. 136).

Neste sentido também, Simon e Tzur (2004) selecionam as atividades que serão utilizadas e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes, sendo variáveis interdependentes e subjacentes à elaboração da THA. Por sua vez, o desenvolvimento de uma THA para uma aula, de acordo com Fernandes e Pires (2013, p. 2), é “[...] uma descrição detalhada de uma aula hipotética que evidencia possíveis dúvidas que possam aparecer, com encaminhamentos e caminhos para discussões”.

Porém, o autor acredita que isso só pode ter resultados positivos se o professor possuir domínio da trajetória de aprendizagem, pois necessitará saber em que momento as resoluções e ideias podem ser utilizadas, se certificando que nem todos os alunos seguirão o mesmo caminho e nem na mesma velocidade no decorrer da atividade.

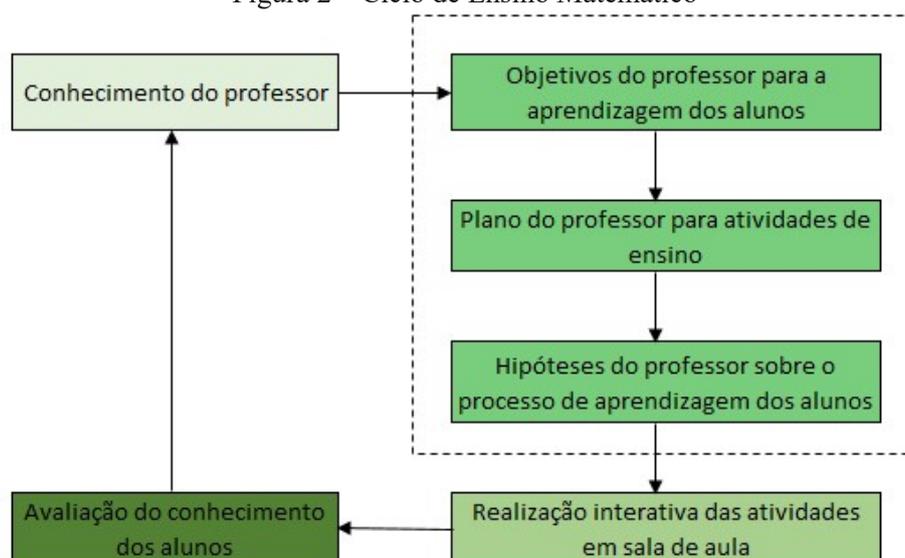
Neste contexto Shulman (1986) propõe um modelo de formação para o professor, com o objetivo de mesclar o conhecimento específico com o pedagógico, não trabalhando com o conceito de forma isolada, visto que as formas de ensinar de professores especializados e menos especializados diferem.

De acordo com Simon (1995), é necessário realizar mudanças na forma de ensinar Matemática, desenvolvendo um modelo de forma construtiva e harmônica na relação entre aluno-professor, ou seja

O professor, ao propor atividades planejadas, se comunica com os alunos e os observa. Os alunos passam a resolver estas atividades. A observação leva o professor a uma nova compreensão da concepção dos estudantes e com isso há a evolução do ambiente de aprendizagem com o resultado desta interação entre professor e alunos e como eles se envolvem com o conteúdo matemático. O potencial de aprendizagem é determinado pela relação entre os alunos e a tarefa proposta pelo professor e sua experiência com ela (SIMON, 1995, p. 132).

Simon (1995) desenvolveu um modelo cíclico de inter-relacionamento que envolve o conhecimento do professor, seus pensamentos, reflexões e tomada de decisões para o planejamento da aula, chamado de Ciclo de Ensino de Matemática apresentado na Figura 2, em que utilizou para apresentar a THA de forma abreviada.

Figura 2 – Ciclo de Ensino Matemático



Fonte: Adaptado de Simon (1995, p. 136)

O Ciclo de Ensino de Matemática foi desenvolvido através da vivência de Simon (1995) em episódios de ensino, iniciando pelo conhecimento do professor, que além de realizar a hipótese acerca do conhecimento dos alunos, é necessário possuir o saber sobre as teorias de ensino da Matemática, materiais didáticos, atividades diversas, representações Matemáticas e outros.

Em seguida incorpora-se os três componentes da THA (Objetivo, Plano e Hipóteses) e posteriormente é desenvolvida a atividade em sala de aula, a fim de colocar em prática o planejamento realizado para posterior avaliação do entendimento dos alunos sobre o que foi estudado. Esta avaliação tem um papel importante no desenvolvimento das atividades de ensino, pois pode trazer ajustes a respeito do conhecimento do professor, possibilitando que a THA seja modificada a qualquer momento, voltando para o conhecimento do professor, se tornando um ciclo.

Quanto ao conhecimento do professor, de acordo com Gómez, González e Lupiáñez (2007), são fontes básicas para elaborar uma THA que apoie o processo de aprendizagem, sua experiência e literatura disponível. Pois, ao elaborar uma THA, o professor precisa ter em mente possíveis rotas e situações que podem ocorrer durante o contexto das tarefas escolhidas.

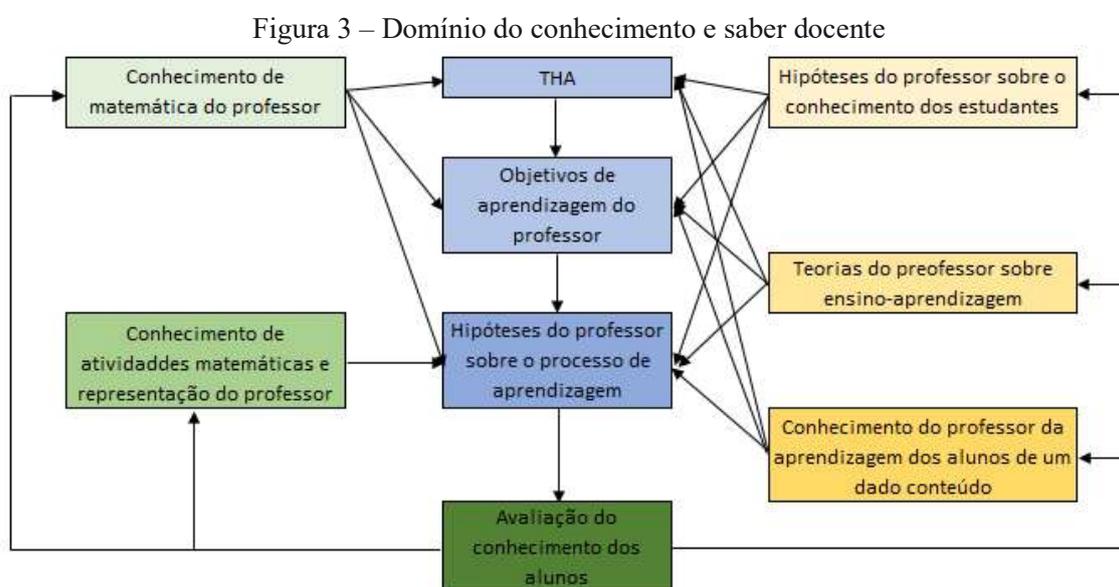
Assim, Simon e Tzur (2004) afirmam que quando uma tarefa Matemática escolhida previamente não for o suficiente para perceber o entendimento dos alunos, ou que os alunos não aprenderam da forma que se esperava, ele deve ajustar a trajetória, geralmente modificando a tarefa, ou alterar a forma de interpretação que o professor

possuía em relação aos conceitos dos estudantes, ou também, propondo novas tarefas em diferentes contextos.

Nesse sentido, Pires (2009, p. 164) afirma que “os jovens professores precisam de conhecimentos sobre os saberes dos alunos, para gerar trajetórias hipotéticas de aprendizagem e análises conceituais para que possam ensinar Matemática”.

Pensando na resolução das atividades, de modo geral, o professor pode utilizar diferentes estratégias de resolução que supõe que os estudantes irão utilizar, também é possível basear suas hipóteses em experiências anteriores em que utilizou a mesma aula, ou ainda em experiências vividas por outros professores e pesquisadores que trabalham com o mesmo assunto, assim como o Silva (2015).

A seguir, na Figura 3, contém um fluxograma complementando a Figura 2 em que descreve as relações entre o domínio do conhecimento do professor, interação com os estudantes e a THA. Simon (1995) inicia a explicação da figura pelo topo do fluxograma, representando o conhecimento acerca da Matemática pelo professor interagindo com as hipóteses sobre o conhecimento dos estudantes, contribuindo na identificação do objetivo de aprendizagem.



Fonte: Adaptado de Simon (1995, p. 137)

Posteriormente ao objetivo de aprendizagem, o professor pode reformular a THA avaliando o trabalho que desenvolveu, sendo que sempre a avaliação dos estudantes é realizada de forma contínua, trazendo adaptações ao conhecimento do professor e do aluno, gerando uma nova trajetória. E assim, trazendo novos conteúdos e

questionamentos para a aprendizagem mais ampla dos alunos, cada conteúdo citado tem domínios de conhecimento diferentes que contribuem para o desenvolvimento das atividades de um processo de aprendizagem hipotético e, por final, o professor faz uma avaliação para determinar se o aluno construiu novas formas de conhecimento.

Ao levantar hipóteses acerca do conhecimento dos estudantes, o professor deve relevar os conhecimentos teóricos e levar em consideração as vivências e experiências que adquiriu ao longo de sua formação e atuação, caso não tenha sido orientada para a THA, pois, com isso, acredita-se que a THA é uma estratégia que deve ser ensinada na formação docente, permitindo com o que professor domine o seu planejamento e o modo de lidar com determinadas situações de ensino-aprendizagem.

## **1.2 Trajetória Hipotética da Aprendizagem em sala de aula**

Ao trazer a THA para o ambiente da sala de aula, buscamos nos alunos uma maior participação e interesse durante as aulas e, em relação aos professores, um maior alcance acerca dos conteúdos e um aperfeiçoamento no planejamento. O compartilhamento de ideias e as observações feitas pelos alunos contribuem para que o professor possa rever sua aula, seu planejamento e sua trajetória, tanto a imaginada quanto a realizada e, neste contexto, fazer o replanejamento das tarefas. Este novo planejamento de tarefas baseia-se na interpretação feita pelo professor em todo contexto da aula, em como percebeu as dificuldades do aluno, em como se deu a interação no geral. Com a realização do trabalho de investigação do professor, surgem novas tarefas que acabam modificando a trajetória inicial e assim permite identificar as especificidades e as necessidades dos estudantes acerca do conteúdo a ser estudado.

Foi identificado por Simon e Tzur (2004) três tipos de tarefas que permitem auxiliar os alunos na construção e compreensão de um novo conceito, permitindo ao professor refletir acerca do efeito que a atividade proporcionou:

1. Tarefas iniciais: usadas para o reconhecimento e possível criação de certas experiências. Devem ser realizadas levando em conta o conhecimento prévio dos alunos e a participação do mesmo;
2. Tarefas de reflexão: o objetivo é direcionar a atenção dos alunos para a atividade-efeito, levando que o aluno reflita sobre o seu desenvolvimento;
3. Tarefas de antecipação: é desenvolvida para identificar e analisar se existe regularidade na atividade-efeito.

Nesse contexto, os autores afirmam que ao gerar uma THA é possível obter a relação entre uma aprendizagem na forma conceitual e as tarefas Matemáticas, visto que a realização de atividades não é de total responsabilidade de uma instituição, mas também do professor que possui responsabilidade em estruturar, elaborar e pensar como a tarefa pode contribuir e ampliar o processo de aprendizagem.

No momento em que o professor realiza a classificação e comparação dos tipos de tarefa, são levados a identificar as relações entre as atividades e os efeitos, ou seja, os padrões, com isso, a ação identifica um novo conceito, operacionalizando os estágios de desenvolvimento e reconstrução, referenciado por Piaget (1971), a fim de explicitar o processo de abstração por parte do aluno.

Com isso, é suposto que a elaboração da THA é baseada na compreensão do conhecimento atual dos estudantes envolvidos no processo, sendo uma forma de planejamento do processo de aprendizagem de determinados conceitos matemáticos, visto que as atividades relacionadas a Matemática permitem a aprendizagem de um conceito de Matemática particular, se tornando um elemento primordial no processo de ensino. De acordo com Simon e Tzur (2004),

1. A geração de um THA é baseada na compreensão do conhecimento atual dos estudantes envolvidos. 2. Uma THA é um veículo para o planejamento da aprendizagem de conceitos matemáticos particulares. 3. As atividades Matemáticas fornecem ferramentas para promover a aprendizagem de conceitos matemáticos particulares e são, portanto, uma parte chave para o processo. 4. Dada a natureza hipotética e inerentemente incerta desse processo, o professor está frequentemente envolvido em modificar cada aspecto da THA (SIMON; TZUR, 2004, tradução nossa).

Van Den Heuvel-Panhuizen (2000; 2001; 2010) expõe que ao utilizar a THA implica que a realização de tarefas possui uma perspectiva longitudinal, ou seja, não se limita apenas em resolver e discutir as resoluções, mas sim em explorar os conteúdos matemáticos envolvidos na atividade e também nas estratégias de Matemática a partir das resoluções dos alunos. Esses podem ser convidados pelos professores a explicar regularmente as suas ideias que levaram a resolução, com a finalidade de discuti-las com a classe e relacionar umas com as outras, criando a possibilidade de progresso.

Durante a elaboração da THA, ao selecionar as tarefas, o professor considera as hipóteses que podem ocorrer de forma detalhada, para isso, ele deve considerar as possíveis dúvidas dos estudantes que vão surgir durante o desenvolvimento das tarefas. Ao levantar as possíveis dúvidas, o professor antecipa as respostas que vai responder, permitindo com que os estudantes consigam compreender claramente a atividade e

também permite ao professor uma maior segurança no gerenciamento da trajetória. Para se planejar, os professores podem utilizar diálogos hipotéticos com os alunos, prevendo perguntas que possa fazer aos alunos a fim de fazê-los refletir e pensar a respeito da tarefa, logo, o professor precisa se acostumar e entender que sempre poderá receber questionamentos dos seus alunos.

Em suma, para desenvolver a THA em sala de aula, Gravemeijer (2004) propõe três fases:

a) elaborar um desenho preliminar das atividades (THA); b) concretizar a THA em sala de aula; e c) realizar uma análise da THA aplicada em sala de aula e indica em suas teorias locais de ensino que sua proposta é a descrição e a fundamentação para o caminho de aprendizagem prevista em sua relação com uma coleção de atividades de ensino relacionados a um tema (GRAVEMEIJER, 2004, p. 107).

Oliveira (2014) afirma que é interessante que o ambiente escolar propicie maior interação entre os estudantes, permitindo com que participem de forma ativa das aulas, para isso, é comum trabalhar em grupos, resultando em um ambiente barulhento, com conversas e discussões, sendo debatido o conteúdo e trocando informações entre aluno-aluno e aluno-professor. O professor deve guiar durante todo o tempo as aulas, a fim de realizar os encaminhamentos necessários para que os alunos continuem trabalhando, com isso, é comum que esteja sendo trabalhado diferentes resoluções para os problemas, pois os conteúdos não são trabalhados de forma estanque.

Raramente, a construção dessas práticas em sala de aula é orientada na formação do professor, porém o seu conhecimento, concepções e experiências que possui com suas vivências podem contribuir. A formação docente permite ao professor desenvolver habilidades e técnicas para realizar os planejamentos, tomar decisões em sala de aula, reorganizar a estratégia de THA e realizar e criar as metas de ensino. As práticas didáticas possuem a função de guiar as ações dos alunos e a interação do ensino com a efetiva aprendizagem deve se dar em um ambiente que desperte significado para os alunos, permitindo desenvolver o conhecimento que está adquirindo, sendo auxiliado pelo professor.

Em relação a formação docente, Simon (1995) a fim de organizar a maneira que será ensinado, introduz a noção de THA no ensino da Matemática e identifica como pilar principal a reconstrução das práticas construtivistas simultaneamente com a planificação do ensino. Esse processo é o planejamento das ações para um determinado período de ensino, sendo composto por metas e estratégias.

O significado de construtivismo, de acordo com Simon (1995), é apresentado em diferentes perspectivas pois tem sido amplamente abordado por pesquisadores e profissionais da educação. Segundo o autor,

O construtivismo deriva de uma posição filosófica na qual nós, enquanto seres humanos, não temos acesso a uma realidade objetiva, isto é, uma realidade independente de nossa maneira de conhecê-la. Pelo contrário, nós construímos nosso conhecimento do nosso mundo a partir de nossas percepções e experiências, que são mediadas através de nossos conhecimentos prévios (SIMON, 1995, p. 115).

Partindo desta percepção, os objetivos de aprendizagem, as atividades e o conhecimento dos estudantes são elementos-chave para a construção da THA. A visão construtivista de Simon (1995) fornece a sustentação a pesquisas no campo da Educação Matemática e permite a compreensão e antecipação da construção dos conhecimentos dos alunos. Para alcançar o objetivo, o estudante durante a aula deve realizar a tarefa determinada, prestando atenção nos efeitos das atividades, isso permite ao aluno criar registros mentais da atividade-efeito.

Simon (1995) analisou que durante as suas experiências em sala de aula, as discussões levaram a reavaliar diversos conhecimentos que favorecem a elaboração do seu “mapa conceitual”, sendo o mapa se referindo a construção da compreensão dos alunos em relação ao conhecimento do professor. Foi ressaltado também que ao observar os alunos, foi alterada a perspectiva sobre o conhecimento dos alunos em relação a concepção da Matemática envolvida. Na perspectiva construtivista, a responsabilidade principal do professor é identificar o conhecimento matemático prévio dos estudantes e articular o seu método de ensino com a natureza deste conhecimento já adquirido. Neste encaminhamento, Simon (1995) estuda a função dos diferentes aspectos do conhecimento do professor, no sentido de explorar as dificuldades de integrar os objetivos definidos e a aprendizagem efetiva dos alunos, por meio da THA. Com isso, para Simon (1995), em uma perspectiva construtivista, é construído os conhecimentos por meio das experiências vividas e, quando essa experiência leva a resultados contrários ao que foi planejado, a experiência fica em desequilíbrio, o que leva a realizar o processo adaptado, permitindo chegar a novos conceitos ou a conceitos modificados.

Porém, Simon (1995) elenca como desafio para a Educação Matemática as transformações experimentais necessárias para permitir a construção do conhecimento de forma teórica, visto que não é possível a produção de métodos e ideias fixas. A seguir serão apresentadas pesquisas na área da Educação Matemática envolvendo a THA.

### **1.3 Trajetória Hipotética da Aprendizagem na Educação Matemática**

Os autores apresentados nesta seção realizaram pesquisas acerca da THA na Educação Matemática, estes autores foram escolhidos por trabalharem em diferentes níveis de escolaridade, alguns desenvolveram a THA nas aulas regulares e outros através de minicurso, sendo utilizado diferentes procedimentos no desenvolvimento, como trabalhar com outras tendências de ensino da Educação Matemática e, conseqüentemente, obtiveram resultados distintos.

Na pesquisa de Silva e Schimiguel (2014) sobre o uso da THA na aprendizagem da Matemática financeira no Ensino Superior, tinha como objetivo apresentar uma proposta de ensino de Fluxo de Caixa para os estudantes, por meio das formulações de Simon (1995). O desenvolvimento da pesquisa foi de caráter qualitativo e a coleta de dados de forma observativa, sendo realizada por meio de registros sobre a forma de aplicação, intervenção dos alunos durante a atividade e suas perspectivas. A metodologia utilizada foi com a aplicação de uma sequência de atividades envolvendo Fluxo de Caixa, considerando o conhecimento prévio dos estudantes e, através deste conhecimento, foi realizado o direcionamento do professor de forma planejada, resultando no aprendizado de novos conceitos e novas formulações.

Após a aplicação da THA, foi notado uma evolução no aprendizado, sendo comprovado com os acertos em uma atividade posteriormente realizada com o mesmo conteúdo. Porém, em relação ao professor, foi observada a dificuldade em construir a THA, visto que além de elencar a sequências de atividades, deve também as contextualizar e adequar ao momento exato em que os alunos realizam intervenções e que seja necessário que o professor apresente novas problematizações para sanar qualquer dúvida sobre o novo conhecimento. Por fim, a elaboração e aplicação da THA, permitiu aos autores o reconhecimento da complexidade do método proposto por Simon (1995), mostrando que é possível aperfeiçoar o aprendizado da Matemática, inclusive em outras áreas do conhecimento.

Na dissertação de Rossetto (2016), sobre o olhar realístico da THA, foi realizado um estudo interpretativo sendo analisada a elaboração de uma THA por professores da Educação Básica, a fim de conhecer como esses professores que ensinam Matemática lidam com a THA. De modo geral, os docentes apresentaram estratégias e procedimentos da Matemática escolar comumente trabalhada na Educação Básica e em alguns momentos os professores se comportaram como alunos, em relação a falar ao mesmo tempo e a

conversa paralela ao longo do desenvolvimento das atividades. Foi observado o quanto é importante o trabalho em grupo, para promover a interação entre os alunos e professor e também auxiliar na troca de ideias e argumentação. Ao longo da resolução das tarefas, foi verificado momentos de discussões das estratégias para resolução. Por fim, foi concluído que houve um maior empenho e entusiasmo dos professores durante a THA.

No artigo de Silva e Ferreira (2016) o objetivo era desenvolver a THA a fim de hipotetizar uma aula na perspectiva da Modelagem Matemática. O trabalho foi realizado em forma de minicurso, em que foi desenvolvido uma tarefa proposta inicialmente, com a elaboração de trajetórias de ensino. Acredita-se que a discussão gerada em sala de aula possa contribuir para a formação dos professores participantes e que as informações relacionadas pudessem servir de subsídio para as próximas elaborações.

A dissertação de Oliveira (2014) possui o objetivo de apresentar uma alternativa para o ensino de logaritmos, por meio da THA na perspectiva da resolução de problemas e analisar as possíveis contribuições. Após várias tentativas de elaboração da trajetória, chegou-se a versão apresentada, em que mostra de forma detalhada como pode ser explorado os problemas. O intuito é que o professor selecione qual seria mais interessante para abordar em suas aulas, podendo escolher mais de uma opção. Com esta dissertação, conclui-se que o trabalho com a resolução de problemas pode gerar mais autonomia para os alunos, visto que “o estudante passa a compreender o seu papel em sala de aula enquanto construtor de seu próprio conhecimento” (OLIVEIRA, 2015, p. 9).

Silva (2015), em seu artigo que investiga aplicação e análise da THA para ensino de Geometria Espacial, especificamente poliedros, utiliza um software de geometria dinâmica, apresentando um grande potencial pedagógico para o 2º ano do Ensino Médio. Visto a tamanha dificuldade encontrada pelo autor em construir novos conceitos, devido aos alunos carregarem dificuldades em conceitos elementares, foi possível desenvolver uma maior observação por parte dos alunos acerca do conteúdo abordado. Acredita-se que seja devido as proposições de atividades que permitem ao aluno visualizar e explorar as propriedades do objeto. Por fim, foi concluído que quando as atividades oportunizam uma construção de pensamento geométrico espacial, é obtido um melhor resultado.

O artigo de Pires (2009), possui como propósito apresentar reflexões de um grupo de pesquisadores que estudam a THA, levando em conta a organização, o desenvolvimento e a implementação curricular em Matemática. A autora espera contribuir para o conhecimento acerca da “aprendizagem dos alunos do Ensino Médio em

tarefas que envolvem resolução de problemas, investigação, uso de tecnologias, abordagens interdisciplinares” (PIRES, 2009, p. 147).

A autora concluiu que os professores devem obter maior consciência sobre o conhecimento matemático dos alunos, planejamento e construção de atividades e inovações curriculares; visto que o aluno é elemento central na construção da sua aprendizagem. Quanto ao desenvolvimento de hipóteses, objetivos de ensino e formulação de atividades devem e vão alterar de forma contínua, promovendo novos conhecimentos.

A tese de Figueiredo (2015) aborda sobre a Prática como Componente Curricular (PCC) na estrutura pedagógica de um curso de Licenciatura em Matemática, na matéria de trigonometria. A pesquisa tem o objetivo de atuar na disciplina de Matemática Elementar abordando o conteúdo de Trigonometria, a fim de entender como é o processo de integração entre a prática e o componente curricular na estrutura pedagógica em um curso de Matemática. A metodologia da pesquisa foi de natureza qualitativa e suas características permitiram a realização de ajustes tanto para o processo formativo quanto investigativo. O autor conclui que é evidenciado as características do PCC no ensino de trigonometria, devido a integração de diversos instrumentos pedagógicos e também a forma que os conceitos foram representados concomitantemente com a fundamentação teórica. Por fim, foi notado a relação positiva entre a prática que o docente obtinha e o aprendizado do aluno.

Oliveira, Frias e Omodei (2014) escreveram um artigo sobre o ensino de função usando a THA na perspectiva da Resolução de Problemas, em um curso de formação continuada. A elaboração deste trabalho possibilitou maior segurança ao professor, devido a antecipação dos possíveis questionamentos em sala de aula, fornecendo um suporte a formação inicial do professor de forma a melhor prepara-lo para trabalhar em sala de aula.

As bibliografias pesquisadas permitiram a ampliação das discussões sobre como o professor de Matemática precisa atuar durante as atividades de planejamento e a importância de como o aluno deve ser o elemento central da construção de sua aprendizagem, sendo necessário destacar a importância da interação entre os alunos e professores.

Enfim, é fundamental que professores se apropriem efetivamente de resultados de pesquisas relevantes sobre o conhecimento matemático de crianças e jovens, inovações curriculares, planejamento, construções de atividades; e é mais importante ainda que se

apropriem da ideia de que suas hipóteses e metas sobre as aprendizagens dos alunos (e a própria formatação de atividades) mudam continuamente e promovem novos conhecimentos e seu efetivo envolvimento na cultura Matemática em sala de aula.

Os seguintes autores contribuíram para a presente pesquisa nos mostrando as suas experiências com o desenvolvimento da THA, nos permitindo ter uma base de como desenvolver o minicurso de Matemática Elementar com esta teoria.

De acordo com as pesquisas na área da Educação Matemática, temos resultados significativos acerca da aprendizagem usando THA, que mostram que podem contribuir para a potencialização do ensino. Com isso, consideramos que a THA pode levar a evolução do ensino e do aprendizado quando utilizada em conjunto com a Modelagem Matemática.

## CAPÍTULO 2

### MODELAGEM MATEMÁTICA: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Neste capítulo vamos explicar sobre Modelagem Matemática, visando diferentes concepções, suas aproximações e diferenciações no âmbito da sala de aula.

#### 2.1 Modelagem Matemática na Educação Matemática

Ao se preocupar com a educação, especificamente a Educação Matemática, pensar em estratégias de aprendizagem é um dos fatores que causa inquietação nos professores. Fazer com que o aluno seja um participante ativo em sua própria aprendizagem é o objetivo da maioria dos professores.

Neste sentido, o trabalho do professor na formação do aluno está diretamente relacionado com às estratégias pedagógicas em que pratica e como essas influenciam no desenvolvimento da aula. Trazer o diferente, propor discussões que possam motivar a aprendizagem é uma possibilidade para prender a atenção daquele que precisa compreender o conteúdo. Uma estratégia que pode oportunizar tais ações é a Modelagem Matemática.

Muitos autores definem a Modelagem no âmbito da Educação Matemática de diferentes formas, enfatizando características diferentes, porém todos consideram que é uma forma de ensinar matemática, utilizando problemas reais, que pode facilitar a aprendizagem. Nesta presente pesquisa será utilizada a concepção de estudo acordo com as perspectivas de Almeida, Silva e Vertuan (2012). São utilizadas várias expressões para se referir ao tema, como: metodologia de ensino e aprendizagem, ambiente de aprendizagem, alternativa pedagógica, entre outras.

Burak (2005, p.15) define “Modelagem Matemática como uma metodologia de ensino, capaz de transformar situações do cotidiano em situações matemáticas e nesse meio estudar as relações matemáticas envolvidas”, considerando a Modelagem uma motivação para o ensino.

No dia a dia do aluno, ele vai se deparar com várias situações que envolvem proporção e porcentagem, por exemplo, porém nem sempre ele consegue desenvolver o conhecimento adquirido nessas situações. Por isso, é primordial que o cotidiano dos estudantes seja envolvido na aprendizagem dos conteúdos, a fim de tornar a matemática

mais significativa para o aluno e permitir a construção de “um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões” (BURAK, 1992, p. 62).

O termo “Modelagem”, segundo Biembengut (2011), “ou arte de modelar, é o processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento” (BIEMBENGUT, 2011, p. 11), por sua vez, “Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo” (BIEMBENGUT, 2011, p. 12).

Neste sentido, a Modelagem possibilita ao professor abordar conteúdos matemáticos a partir de situações reais, ou seja, é uma estratégia de ensino com o objetivo de educar matematicamente, explorando diferentes áreas do conhecimento. Bassanezi (2006) considera a Modelagem uma atividade cujo desenvolvimento está integrado nos problemas da vida pessoal e social dos alunos, podendo ser entendido de maneiras diferentes por eles.

Para o autor, a Modelagem consiste na arte de tornar os problemas matemáticos em problemas da realidade, permitindo resolvê-los utilizando as interpretações e soluções na linguagem do mundo real.

[...] se propõe analisar um fato ou uma situação real cientificamente, isto é, com o propósito de substituir a visão ingênua desta realidade por uma postura crítica e mais abrangente, deve-se procurar uma linguagem adequada que facilite e racionalize o pensamento (BASSANEZI, 2015, p. 18).

Ao utilizar a Modelagem o professor precisa estar disposto a ser ouvinte e, neste processo, tentar entender como ocorre a aprendizagem do seu aluno. Desenvolver tais atividades, pode tornar a aula mais interessante, instigar a curiosidade, oportunizando a participação na sua própria aprendizagem, proporcionando uma maior interação entre alunos e entre aluno e professor.

Acreditamos que a Modelagem é um meio de integrar a Matemática e a realidade. Análogo a isto, D’Ambrosio (1986) concebe a Modelagem como uma forma interativa entre o conteúdo matemático e situações reais. Para o autor a “Modelagem Matemática é um processo muito rico de encarar situações reais, e culmina com a solução efetiva do problema real e não uma simples resolução formal de um problema artificial” (D’AMBRÓSIO, 1986, p.121). O mesmo comenta que a “todo instante os indivíduos estão comparando, classificando, quantificando, medindo, explicando, generalizando, inferindo e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais

que são próprios à sua cultura” (D’AMBRÓSIO, 2005, p.22). Neste sentido, consideramos que a Modelagem torna presente o objeto matemático em estudo.

Ao trabalharmos com Modelagem, tornamos presente os conteúdos a serem ensinados. O ponto de partida de uma atividade envolvendo Modelagem é uma situação inicial/problemática e o ponto de chegada é a situação final, ou seja, é a solução para a situação inicial. Na situação inicial nem os procedimentos para solucionar o problema e nem as soluções não são predefinidas e conhecidas, pois ocorre a investigação do problema e, no processo entre a situação inicial e final, são utilizadas estratégias de ação para os sujeitos envolvidos e conhecimentos matemáticos são introduzidos e aplicados, ocorrendo a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

As situações-problema podem surgir a partir do cotidiano dos alunos ou de uma realidade que possuem interesse, contextualizando a utilização de elementos matemáticos e assim construindo modelos. Bassanezi (2002) esclarece que não existem modelos que são definitivos e perfeitos, pois a Modelagem é um processo que, como todo modelo, pode ser melhorado e, se necessário, modificado.

Os autores Almeida, Silva e Vertuan (2012) apresentam a definição de Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica, sendo,

A Modelagem Matemática, como processo de ensino-aprendizagem, surgiu entre nós mais por necessidade do que por acaso. A criação de problemas novos era muitas vezes, mais interessante e atraente que sua própria resolução. Este procedimento de criação/resolução de problemas, enfocando o ensino e a aprendizagem da Matemática ganhou força e tomou rumos distintos entre os pesquisadores da área de Educação Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 7).

Almeida e Brito (2005) acreditam que a Modelagem Matemática permite que o aluno possua um entendimento mais global acerca do problema, pois a consideram uma alternativa pedagógica que se realiza em uma abordagem matemática a partir de um problema não necessariamente matemático, ou seja, pode-se buscar uma resposta para um determinado problema cuja origem não esteja na matemática.

Estes autores evidenciam que tanto o ensino quanto a aprendizagem e a responsabilidade da aprendizagem em sala de aula precisam ser divididas entre o aluno e o professor, sendo o professor visto como um mediador do conhecimento, ou seja, orientador em Matemática.

De acordo com Almeida e Ferruzi (2009), o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem exige que o aluno formule um problema, defina as metas para resolução,

defina hipóteses, formule previsões e apresente as soluções. Complementando este entendimento, Almeida, Silva e Vertuan (2012), destacam que

[...] um aspecto importante numa atividade de modelagem matemática é a necessidade de os próprios alunos, a partir de uma situação-problema não matemática, fazerem a associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema e possibilitar a sua análise (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 627).

Vale destacar que, por meio da Modelagem, é possível associar a matemática com outras áreas do conhecimento, por exemplo, a Física, Química, Biologia, Astrofísica, entre outros. Assim vislumbramos um trabalho mais completo e interdisciplinar, aumentando o conhecimento do aluno e do professor, visto que este é questionado a todo momento e levado a reflexão sobre a prática (BARBOSA, 2001; BASSANEZI, 2006).

Barbosa (2001, p.6) afirma que “a Modelagem é um ambiente de Aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”, o mesmo afirma que a Modelagem,

[...] trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. Os conceitos e ideias matemáticas exploradas dependem do encaminhamento que só se sabe à medida que os alunos desenvolvem a atividade (BARBOSA, 2001, p. 5).

Assim, mesmo se uma atividade igual for desenvolvida em duas turmas diferentes, os resultados serão sempre distintos, pois vai depender do conhecimento dos alunos, de sua forma de pensar e de como o professor vai encaminhá-los. Por isso, é necessário que os professores aprendam a perguntar e esperar pela resposta, reflitam sobre suas práticas, não trabalhem de forma repetitiva, a fim de gerar ideias diferenciadas, permitindo a liberdade dos alunos em criar e desenvolver suas habilidades.

Burak (2010) afirma que quando um professor diz que utiliza a Modelagem, deve ser levado em questão o que ele considera que a Modelagem pode trazer como possibilidades dentro da Educação Matemática; visto que toda prática educativa é atrelada a um objetivo de estudo e concepção de aprendizagem, esta, por sua vez, atrelada ao tipo de pessoa que se deseja formar para o mundo. O autor afirma que a Modelagem,

Promove o aluno, de mero expectador passivo, para participante ativo do processo e, em consequência, torna o trabalho com os conteúdos mais propícios à aprendizagem significativa, pois trabalha de forma contextualizada e, sobretudo, com o “interesse do aluno ou do grupo”, o que possibilita um aprendizado mais efetivo da Matemática (BURAK, 2005, p.161).

Abordar um conhecimento de interesse do aluno, é o que pode tornar o ensino mais significativo, vivo e dinâmico. Dessa forma, se pensarmos na construção de um modelo matemático, sem nenhum contexto, teremos algo construído de forma abstrata, mas, se pensarmos nele em um contexto, teremos a representação de uma realidade. No processo de construção temos os seguintes objetivos: discutir caminhos e procedimentos matemáticos; discutir a Matemática em um contexto real, oportunizar ao aluno a chance de se expressar e usar de um conhecimento que já existe.

Bassanezi (2004), traz que

A Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A Modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2004, p.24).

Para o autor quando se pretende analisar uma situação real pelo ponto de vista científico, é necessário colocar em uma linguagem adequada ao meio, que facilite e fundamente o pensamento; permitindo substituir uma visão ingênua por uma visão crítica e, sobretudo, Bassanezi (2006) coloca que a Modelagem não permite apenas ampliar o conhecimento, mas também trabalha-se a estruturação da maneira de agir e de pensar do aluno, adquirindo o senso crítico através do entendimento comum.

Nessa concepção, o autor afirma que o desenvolvimento da Modelagem em sala de aula é uma estratégia de aprendizagem, em que "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem-sucedido, mas caminhar seguindo etapas nas quais o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado" (BASSANEZI, 2006, p. 38) a fim de diminuir a resistência do aluno pela matemática. Com isso, ao abordar a Modelagem como uma alternativa pedagógica, trata-se em trabalhar a matemática com situações que não estejam diretamente ligadas a essa área, de modo que consiga interligar um saber matemático a um assunto em discussão, possibilitando ao aluno o maior interesse e compreensão.

Por sua vez, o Grupo da Fronteira de estudos e pesquisa em Educação Matemática (GFPEM) define a Modelagem como uma forma de ensinar os conteúdos matemáticos, por meio de problemas da realidade, de maneira que os alunos consigam relacionar esses conhecimentos matemáticos com outras ocasiões e não apenas em sala de aula, visando dar significados a esses conteúdos no dia a dia, e os torná-los menos abstrato.

Pensando que a Modelagem Matemática pode contribuir para que os estudantes tenham uma visão mais ampla dos problemas matemáticos e passem a considerar a possibilidade de diferentes formas de resolução para um problema, Kaiser e Sriraman (2006) realizaram uma revisão de literatura e sistematizaram cinco perspectivas para a Modelagem. Essas perspectivas evidenciam diferentes aspectos quanto ao objetivo central com que a atividade de Modelagem é desenvolvida em diferentes contextos:

- › Perspectiva realística: considera-se situações-problema autênticas retiradas da indústria ou da ciência, com o objetivo desenvolver habilidades de resolução de problemas aplicados;
- › Perspectiva epistemológica: considera-se situações-problema que são estruturadas para gerar o desenvolvimento de conceitos matemáticos;
- › Perspectiva educacional: integra situações-problema autênticas nas aulas de matemática com o objetivo de desenvolver os conteúdos matemáticos curriculares;
- › Perspectiva sócio-crítica: considera-se situações-problema que propiciem a análise dos modelos matemáticos e seu papel na sociedade, e;
- › Perspectiva contextual: considera-se a inclusão de situações-problemas nas aulas de matemática com a finalidade de contextualizar ou mostrar aplicações dos conteúdos matemáticos levando em conta principalmente questões motivacionais.

O objetivo central do desenvolvimento de uma atividade pode ser variado, de acordo com os aspectos que seja necessário evidenciar, ou seja, uma mesma atividade pode gerar mais de uma perspectiva. Exemplificando, quando o professor escolhe uma atividade de Modelagem e a utiliza em uma aula de Matemática, o objetivo principal na perspectiva educacional pode ser ensinar um determinado conteúdo curricular, porém, no decorrer do desenvolvimento da atividade, podem surgir dúvidas e discussões que impliquem em uma perspectiva sócio crítica acerca da sociedade, ou ainda, discussões na perspectiva contextual levando em conta um conteúdo não previsto ser ensinado inicialmente.

Durante o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem, buscamos um modelo matemático para ilustrar a situação investigada, permitindo a interação do aluno com o professor e com o modelo, possibilitando a reflexão e as discussões em torno das situações reais e conteúdos matemáticos. Com isso, buscamos uma ligação entre a Matemática escolar e a Matemática social, evidente no cotidiano das pessoas.

Para Burak (1987; 1992), os procedimentos matemáticos a serem utilizados para buscar a solução do problema devem ser através da linguagem matemática, sendo por meio de representações matemáticas (símbolos, gráficos, diagramas, expressões algébricas ou geométricas). A Modelagem permite trocar o “modelo comum” de ensino, selecionando-se primeiro os problemas e, posteriormente, através deles os conteúdos.

A linguagem do mundo real deve ser buscada construindo um “modelo”, este é caracterizado na literatura em diferentes abordagens, mas, de modo geral, o modelo matemático é o conjunto de relações matemáticas e símbolos que representam o objeto estudado. Segundo Lesh (2010), é um conceito, descrição ou explicação, referido através da linguagem matemática para descrever como se comporta um determinado objeto, permitindo previsões sobre ele; em suma, o modelo matemático representa o objeto estudado e permite obter a solução para o problema abordado.

O Modelo Matemático é aquele que pode traduzir matematicamente um problema em questão, mas pode também ocorrer o sentido contrário, permite alcançar o resultado da pesquisa na linguagem original do problema (BASSANEZI, 2006); ou seja, “uma equação, um gráfico, uma tabela, uma figura, são exemplos de modelos matemáticos” (ROSA, 2009, p. 36).

Utilizar de modelos matemáticos diz respeito à Modelagem e faz parte do planejamento de qualquer professor de Matemática utilizá-los. O que pode diferir um professor de outro é a importância dada ao modelo, visto que na construção deste o importante pode ser o produto final, ou ainda ser as discussões que podem gerar no modelo proposto. Com isso, é relevante que o professor defina a sua linha de atuação a partir daquilo que se defende e acredita.

A construção deste modelo depende do conhecimento matemático que se tem, pois, o modelador precisa ser criativo, ter boa intuição para interpretar o contexto, saber discernir qual conteúdo matemático mais se adequa ao estudo de uma determinada situação-problema e ter senso lúdico para trabalhar com as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT; HEIN, 2005; ROSA, 2009).

Os autores citados neste capítulo defendem o uso de atividades de Modelagem a fim de trazer ao aluno um maior interesse por Matemática, gerando a investigação, reflexão sobre a sociedade e os seus valores. É consenso entre os mesmos que a Modelagem permite ao aluno ser inovador, criativo, pensar e argumentar mais, ter consciência de suas ações e ser ativo em sua própria aprendizagem.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) utiliza uma abordagem por meio da Matemática de um problema não essencialmente matemático, ou seja, como uma estratégia que usa situações reais para abordar questões matemáticas. A autora defende que ao desenvolver uma atividade de Modelagem o professor divide a responsabilidade da aprendizagem com o aluno, possibilitando que o mesmo seja o ator principal no cenário da sala de aula. A sala de aula se torna um ambiente de indagações, de criatividade, de interação, é uma investigação coletiva. Com base nesta autora, serão desenvolvidas as atividades deste trabalho, seguindo a sua perspectiva de modelagem.

A principal responsabilidade do professor com a Modelagem em sala de aula é ensinar a Matemática compartilhando o seu conhecimento, incentivando as indagações e reflexões, permitindo ao aluno vivenciar a solução do problema de forma real, permitindo que o estudante erre e acerte, permitindo a estruturação do seu conhecimento. Neste encaminhamento, o professor tem a oportunidade de experimentar outras áreas do conhecimento, testando o seu saber, de forma a ensinar e também a aprender. A expectativa do uso da Modelagem em sala de aula é que o aluno compreenda as situações colocadas, aprendendo e relacionando com conceitos matemáticos, aprimorando a sua capacidade interpretativa e estimulando o senso crítico.

## **2.2 Modelagem Matemática em sala de aula**

Ao trabalhar a Modelagem em sala de aula, é esperado dos alunos uma maior participação para o desenvolvimento das atividades, pois a mesma tem o intuito de trabalhar situações reais e do cotidiano do aluno. A atividade baseia-se essencialmente no compartilhamento de ideias, na interação entre alunos e dos alunos com o professor, a fim de promover um maior conhecimento e adquirirmos um modelo matemático. Com o decorrer da atividade, o professor consegue identificar as especificidades e as necessidades dos estudantes acerca do contexto trabalhado.

Por meio de ações e reflexões, os professores precisam repensar suas práticas e planejamentos conforme as dificuldades que os alunos encontram, e conseqüentemente perceberão que ao passo que ensinam, também aprendem e, com isso, descobrem que os alunos têm muito a lhes ensinar. Logo, o professor poderá mudar o relacionamento com o aluno, impulsionando a postura do aluno em sala de aula, trazendo mais motivação, interesse e participação.

Ao utilizar a Modelagem é esperado uma maior motivação dos alunos para desenvolver o seu conhecimento, possibilitando utilizar os conceitos no dia a dia. Deve ser considerado o tripé aluno-professor-conhecimento, pois este procede toda a situação de ensino; dessa forma, é importante reconhecer as bases epistemológicas que orientam os professores a utilizar a Modelagem.

Frequentemente é afirmado pelos professores que “a matemática está em toda parte” Sadovsky (2010, p. 103), com o intuito de mostrar para os alunos a sua importância, porém, apesar de ser relevante, a Matemática não é visível claramente em toda a parte, sendo uma frase que dificilmente motiva os alunos de maneira interessante. Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) afirmam que o intuito da Modelagem é ensinar a matemática de forma que os estudantes criem mecanismos de ação e reflexão, com isso, não existe mais um currículo neutro, ou sem contexto e sem significado para ambos (professor e estudante), mas sim, um currículo dinâmico, flexível e constantemente sendo construído.

Porém, ainda sobre estes autores, no desenvolvimento da Modelagem o objeto a ser estudado deve ser manipulado, rompendo com a ideia de que o professor deve ensinar, mas sim deve-se acreditar que o conhecimento está na interação entre o objeto e o sujeito; ou seja, é alterado de “objeto que o professor ensina” para “objeto que o estudante explora”.

O professor tem papel importante na articulação do conhecimento, ele deve ser crítico, colaborador e reflexivo a fim de tornar a Modelagem uma prática orientada para a reflexão do professor, visualizando novos entendimentos no ensino e aprendizagem da matemática.

Os alunos precisam trabalhar em grupos para alcançarem maiores resultados, pois acabam dividindo as experiências e trabalham em conjunto para encontrar a solução para a atividade proposta. Na visão de Sanches (2005), o trabalho em grupo favorece a competição de forma a incentivar a cooperação do grupo, privilegiando o incentivo individual, permitindo o aumento do desempenho escolar, ele ainda destaca que a aprendizagem em pares, se for bem conduzida, é uma estratégia também muito válida, transparecendo inclusive para o ambiente fora da escola.

Cada autor desenvolve a Modelagem de uma forma em sala de aula, pois pode diferir de acordo com o planejamento pedagógico ou conteúdo a ser abordado. A seguir será exposto as etapas de desenvolvimento da Modelagem em sala de aula, de acordo com os principais autores da área. Essas etapas também podem ser chamadas de rotas ou

procedimentos de uma atividade de Modelagem, isso varia de acordo com a abordagem do autor e de como a Modelagem é compreendida (KEHLE; CUNNINGHAM, 2002).

O primeiro autor a ser abordado é o Burak (2010), em que segue a concepção de Modelagem voltada para o interesse e curiosidade dos alunos, para ele o desenvolvimento da Modelagem em sala de aula segue cinco etapas que devem ser cumpridas de acordo com o interesse do aluno, sendo elas: 1) Escolha do tema, 2) Pesquisa exploratória, 3) Levantamento de problemas, 4) Resolução de problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema, 5) Análise crítica das soluções.

A primeira etapa se refere a escolha do tema, sendo o momento em que o professor apresenta alguns temas aos alunos que podem levar ao interesse, nesta etapa é livre que os alunos sugiram um tema também. Com o tema definido, a segunda etapa consiste na procura de materiais e teorias diversas, podendo ser bibliográfica ou trabalho de campo, que contenham informações sobre o que quer pesquisar. Essa etapa deve gerar estímulo ao estudante acerca do que se pretende estudar. A terceira etapa é o levantamento dos problemas, ou seja, com a pesquisa realizada em mãos, os estudantes devem ser incentivados a especular tudo o que pode haver relação com a Matemática, elaborando problemas que sejam possíveis aplicar ou aprender conteúdos matemáticos através deles, sempre com a ajuda do professor.

Na próxima etapa, resolução de problemas e o desenvolvimento do conteúdo no contexto do tema, é buscado responder as questões levantadas na etapa anterior, tendo como auxílio a Matemática abordada de forma extremamente acessível e de linguagem simples, permitindo que posteriormente esta matéria seja sistematizada, realizando um caminho inverso do usual. Por fim, a quinta etapa se refere a análise crítica das soluções, ou seja, deve ser refletido sobre os resultados obtidos, de forma a observar a viabilidade e aplicabilidade das soluções em situação real. Esta última etapa contribui para a formação de cidadãos mais críticos e participativos. Em todas as etapas citadas o professor deve estar inserido como mediador e orientador para as atividades serem encaminhadas da maneira mais produtiva para o aprendizado.

De acordo com o Biembengut (2014), a Modelagem pode ser realizada em três fases, sendo elas: 1) Perceber e aprender; 2) Compreender e explicitar; 3) Significar e expressar. A primeira fase se refere a apresentação do tema, reconhecendo e familiarizando com a situação-problema, selecionando a questão para desenvolver o conteúdo; a segunda é para formular o modelo e resolver a situação-problema a partir deste modelo, apresentando exemplos similares, por fim, a última etapa é a interpretação

da solução, validação do modelo e expressar o processo para chegar no resultado e o resultado.

As três fases de Biembengut (2014) não devem ser desconectadas, pode ser necessário a qualquer momento retornar a uma etapa anterior. Por exemplo, quando estiver na segunda etapa, pode ser necessário retornar à primeira para analisar e formular os dados, ou quando estiver na terceira fase, pode ser necessário retornar a primeira para entender melhor os fatos, ou até na segunda, para gerar ideias. Em suma, as etapas devem ser seguidas pelo aluno e pelo professor ao desenvolver a sua aula.

Para Bassanezi (2002) a Modelagem é dividida em 4 partes: 1) Experimentação, 2) Abstração, 3) Resolução, 4) Validação e 5) Modificação.

Experimentação, sendo um primeiro entendimento do processo de Modelagem Matemática parte-se, usualmente, de um problema do mundo real, o qual será investigado através da linguagem e de conceitos matemáticos, objetivando melhor explicá-lo e entendê-lo. Já a etapa da abstração leva a formulação dos modelos matemáticos da próxima etapa, que surge quando a linguagem real se torna uma linguagem matemática, consistindo na próxima etapa, que é a resolução. Sendo ela sempre conectada com a dificuldade e formulação do aluno, resultando em uma solução numérica para o problema.

A quarta etapa se refere a validação do modelo matemático, que deve ser confrontado com o problema do mundo real colocado, a fim de validar o modelo obtido. Por fim, na quinta etapa pode ocorrer a rejeição ou aceitação do modelo obtido, geralmente ocorre quando a teria acaba sendo muito simplificada, levando a reformulação dos modelos.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) apontam que a Modelagem é uma alternativa pedagógica a qual deve ser feita uma abordagem através da Matemática de uma situação-problema não essencialmente Matemática. Dessa forma, os autores relacionam as fases dos procedimentos necessários para configurar, estruturar e resolver uma situação-problema, são elas: 1) Inteiração, 2) Matematização, 3) Resolução, 4) Interpretação dos resultados e 5) validação.

A priori, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), a inteiração é o primeiro contato do aluno com uma situação-problema que se pretende estudar, a fim de conhecer as características da situação. O foco desta etapa é a escolha do tema e a busca por informações, a fim de conduzir a formulação do problema em si e a definição das metas para resolução. A segunda etapa se refere a matematização, ou seja, é a transição da

linguagem básica para a linguagem matemática, utilizando símbolos a partir da formulação de hipóteses ou até selecionando as variáveis que serão utilizadas.

A etapa de resolução consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação proposta, chegando a respostas das perguntas formuladas acerca do problema. Por fim, a interpretação de resultados e validação é a interpretação das respostas obtidas na etapa anterior, essa análise é um processo avaliativo, resultando na validação da representação matemática adotada associada ao problema proposto, deve ser considerado os procedimentos matemáticos envolvidos no processo e também a adequação deles para a situação.

As fases, segundo este autor, nem sempre são lineares (de 1 a 5), podem acontecer interrupções e retornos constantes, pois por vezes é necessário reformular e retomar fases anteriores. As fases da Modelagem podem ser interessantes para indicar como os alunos podem se direcionar durante a atividade escolhida, ou seja, o professor pode se orientar e planejar a atividade a partir das fases, permitindo ter em mente alguns questionamentos, como:

Que situação problema estudar? Quais são os dados? Como obtê-los? Que problema pode ser estudado? Que elementos devem ser levados em conta na observação? (Fase de inteiração); Quais são as hipóteses e variáveis da situação? (Fase de matematização); Que regularidades matemáticas podem ser observadas a partir dos dados? Existe alguma representação matemática para a situação (fase de resolução); O modelo matemático obtido corresponde à situação em estudo? Qual é a solução do problema (nas fases de interpretação e validação) (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

A experiência dos alunos em relação ao conteúdo/atividade é o que torna a participação do professor mais ou menos intensa, porém o autor orienta que a atividade seja introduzida de modo gradativo. As atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, a partir da Modelagem, permitem se conectar com os problemas da realidade do estudante.

Na Figura 4, segue um resumo contendo as etapas de acordo com cada autor citado acima. A figura deve ser lida na horizontal e nas colunas contém primeiramente o nome do (s) autor (es) e posteriormente cada etapa de desenvolvimento da Modelagem em sala de aula. Pode-se observar que Bassanezi (2002) e Burak (2010) contemplam cinco etapas neste processo, por sua vez Almeida, Silva e Vertuan (2012) apenas quatro etapas e, por fim, Biembengut (2014) três etapas, podendo concluir que não existe padronização das etapas, cada autor define de acordo com cada ponto de vista.

Figura 4 - Resumo das fases de acordo com Burak (2010), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Biembengut (2014) e Bassanezi (2002)

AUTORES	ETAPA 1	ETAPA 2	ETAPA 3	ETAPA 4	ETAPA 5
BURAK (2010)	Escolha do tema	Pesquisa exploratória	Levantamento de problemas	Resolução de problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema	Análise crítica das soluções
ALMEIDA, SILVA E VERTUAN (2012)	Inteiração	Matematização	Resolução	Interpretação dos resultados e validação	
BIEMBENGUT (2014)	Perceber e apreender	Compreender e explicitar	Significar e expressar		
BASSANEZI (2002)	Experimentação	Abstração	Resolução	Validação	Modificação

Fonte: Adaptado de Burak (2010), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Biembengut (2014) e Bassanezi (2002)

É importante salientar que as fases não são lineares, ou seja, não precisam necessariamente ser cumpridas de forma sequencial, o decorrer das fases depende muito da discussão gerada entre professor e aluno, entre aluno e aluno e do planejamento inicial do professor.

O ponto chave para o sucesso da aprendizagem é escolha da estratégia de ensino, pois é ela quem vai traçar a abordagem do saber matemático. Além disso, é fundamental a escolha do tema, as atividades empregadas, o planejamento e a avaliação destas atividades, sendo fatores determinantes para este estudo. Porém, é necessário conhecer o grupo de alunos antes de propor qualquer projeto, com isso, primeiramente deve-se observar as características que o grupo de alunos possuem em comum e também suas particularidades.

Com isso, é importante que o professor saiba avaliar a sua forma de ensinar, seja questionador e tenha responsabilidade sobre os alunos, para que conseqüentemente busque estratégias que permitam que repense nas suas ações, práticas e planejamentos, reproduzindo e reconstruindo não só o conhecimento do aluno, mas também o seu próprio.

O importante no desenvolvimento da Modelagem é a abertura que se tem para inserir ou para mudar os encaminhamentos. As discussões podem levar para outros lugares e outras conclusões, sendo uma estratégia que pode levar o professor a refletir sobre sua prática enquanto ela acontece e, segundo Rosa (2013),

A reflexão é um conceito atualmente muito utilizado por investigadores e formadores de professores, tendo em vista as mudanças almejadas para o ensino, mudanças essas no sentido de qualidade. Nesse contexto, surge a necessidade de formar professores que venham a refletir sobre a própria prática, na expectativa de que a reflexão seja um instrumento de desenvolvimento do pensamento e da ação (ROSA, 2013, p. 40).

Ou seja, a reflexão é como um instrumento que permite o professor a se reavaliar de diferentes modos durante e ao final das atividades, possibilitando o mesmo a reformular suas tarefas e/ou abordagens.

### **2.3 Modelagem Matemática na Educação Matemática**

No desenvolvimento de atividades de Modelagem os professores apresentam características reflexivas e os alunos se tornam mais questionadores, exigindo respostas mais abrangentes acerca do tema, estimulando o professor a reestruturar e repensar a sua prática.

Logo, os autores que serão apresentados nesta seção foram escolhidos por realizaram pesquisas acerca da Modelagem na Educação Matemática, contemplando diferentes abordagens em distintos níveis de escolaridade, de forma a utilizar procedimentos diferentes e, conseqüentemente, obtendo resultados distintos. Estes autores também trabalharam com as bases epistemológicas dos alunos, sua construção social e também outras tendências da Educação Matemática associadas a Modelagem. Essas diferentes características irão auxiliar no desenvolvimento desta pesquisa, auxiliando o professor a realizar uma reflexão mais ampla durante e ao final da atividade.

Costa (2016) em seu artigo sobre o ensino da Matemática por meio da Modelagem no Ensino Médio, fez uma apresentação dos elementos da Modelagem como estratégia de ensino e introduz a noção de cosseno por meio da variação dos índices pluviométricos de uma região de São Paulo. Foi de grande valia abordar o conteúdo matemático por meio da problematização com fenômenos reais e sociais e enriqueceu as aulas, favorecendo a aprendizagem. Dessa forma, foi indicada a Modelagem como uma estratégia de ensino que favorece a aprendizagem de um conceito matemático, sendo o aluno construtor de sua aprendizagem. O autor afirma que a Modelagem é um processo de ensino moderno e flexível, para isso, é preciso que os professores estejam abertos para possíveis dificuldades, pois a validação do processo depende deles e da sua interação com os alunos.

Na dissertação de Bastos (2015), o objetivo foi compreender como ocorre aprendizado de funções polinomiais de primeiro grau através da Resolução de Problemas e Modelagem Matemática. Com o estudo, foi possível compreender que o aluno é levado a uma maior aprendizagem, pois o conteúdo é lançado para os alunos com um significado, fazendo-os compreender a importância da matemática como ciência no meio social. Dessa forma, foi concluído que o planejamento da atividade foi fundamental, pois tiveram o domínio das variantes que poderiam interferir em um mal resultado. Por fim, foi refletido acerca das deficiências dos sistemas de ensino e dificuldades em relação ao grupo de alunos, reconhecendo que o ensino poderia não acontecer se não tivessem o objetivo bem traçado e definido, mostrando a importância do planejamento.

Klüber e Burak (2013) escreveram um artigo com o tema Bases Epistemológicas e Implicações para Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática em Sala de Aula, orientado pela falta de estudos acerca do assunto, com o objetivo de entender a implicação para a Modelagem decorrer de bases epistemológicas distintas. Foi concluído que a concepção de Educação e Conhecimento sempre devem andar em conjunto e o tripé aluno/professor/conhecimento não pode ser desconsiderado, visto que precede toda a situação de ensino no contexto histórico e cultural. Por fim, foi observado que a situação de investigação que a Modelagem traz, se alinha com a Fenomenologia-Hermenêutica e que as formas de interpretação mostram que a partir do reconhecimento das diferentes bases epistemológicas que surgem as distintas práticas de Modelagem. Foi considerado pelos autores que as reflexões acerca deste tema extrapolam as discussões sobre a Modelagem e, por isso, é tão importante serem realizadas.

Rosa (2009) em sua dissertação estudou sobre o fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem no Ensino Médio, abordando o conteúdo de funções. O objetivo desta pesquisa foi investigar “o fenômeno de congruência em conversões realizadas por estudantes entre registros associados aos objetos matemáticos que emergem em atividades de Modelagem” (ROSA, 2009, p.17), durante as aulas de Matemática. Para alcançar o objetivo, foi observado os registros que os estudantes produziram durante as atividades e, posteriormente, analisada as conversões realizadas durante estes registros. Com isso, foi concluído que as atividades de Modelagem possibilitaram as conversões congruentes e não-congruentes, sendo que estas permitiram que fosse dimensionada as dificuldades dos alunos, facilitando o aprendizado.

Ainda sobre essa autora, mas agora em sua tese sobre a formação do professor reflexivo no contexto da Modelagem, possuiu o objetivo de investigar o potencial da

Modelagem no processo de reflexão do professor em sala de aula. Rosa (2013) separou a sua pesquisa em três fases de observação, sendo a primeira durante o horário regular de aula, a segunda durante um curso de formação continuada e, por fim, a terceira também em horário regular de aula, porém agora utilizando a Modelagem. Foi traçado o perfil de cada professor e concluído que em todos os níveis educacionais necessita de um ensino voltado para o raciocínio, trabalho em equipe, solução de problemas e outros temas que possibilitem uma boa adaptação do indivíduo a mudanças. Dessa forma, foi concluído que a formação do professor é de extrema relevância, visto que o conhecimento aprendido é transmitido e a democratização do saber primeiramente passa pelo professor, durante a formação inicial e continuada.

O artigo de Metelski e Francisco (2008) abordou uma proposta de Modelagem em uma turma de 6<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental, com o objetivo de tornar os conteúdos Matemáticos mais próximos dos alunos, facilitando a aprendizagem. Para isso, foi abordado o tema economia doméstica, envolvendo custo de bens e serviços e foi produzida uma tabela de orçamento doméstico que permitiu a discussão sobre proporções e porcentagens.

Os autores concluíram que a Modelagem deve ser incorporada no fazer pedagógico do professor, pois desperta a curiosidade e motivação dos alunos, visto que os assuntos surgem de situações do cotidiano. Foram considerados alguns pontos que geraram algumas dificuldades, como: a demora no processo, podendo ocasionar falta de tempo para cumprimento do conteúdo; desinteresse dos alunos pelo tema escolhido; convencimento para os alunos serem mais participativos e não passivos, como era na rotina de ensino tradicional e falta de acompanhamento na atividade com a Modelagem pelos outros professores de Matemática da escola. Porém, além disso, a Modelagem proporcionou a visualização da Matemática fora da sala de aula e mais real para os alunos, inserindo-a em seu cotidiano o que tornou as atividades mais acessíveis aos alunos, causando uma maior discussão em sala de aula.

Zequim (2014) com o tema de sua dissertação A resolução de Problemas, a Modelagem Matemática e o desenvolvimento de Habilidades Matemáticas em alunos do 7<sup>o</sup> ano do Ensino Fundamental, possuiu o objetivo de avaliar se as atividades baseadas na Resolução de Problemas e Modelagem contribuem para a melhora das habilidades dos alunos. Com isso, foi concluído nessa pesquisa que as habilidades são melhoradas, porém houveram várias dificuldades no decorrer da pesquisa, como o planejamento escrito das atividades didáticas e também as anotações/relatos que se fazia necessário realizar

durante a aula. Por fim, foi reconhecido que ensinar Matemática pode partir de situações-problema contextualizadas e práticas, sendo mais significativas e atraentes para os alunos; visto que a matemática deve ser ensinada como uma ferramenta para permitir a compreensão da sociedade em que vivemos. Mas para tal ensinamento, o professor deve estar sempre refletindo acerca da sua forma de ensinar e reavaliando a sua forma de planejar.

Por fim, o artigo de Silva, Ferreira e Moreira (2015) fez uma análise bibliográfica acerca da Modelagem, pois os autores acreditam que é uma metodologia que estreita a relação entre conteúdo e aplicação, devido a possibilidade de aplicar no dia a dia do aluno o que foi aprendido no ambiente escolar, gerando um processo mais significativo para o educador e educando. Segundo a pesquisa, a Modelagem auxilia na construção da consciência social dos alunos, tornando-os cidadãos aptos, questionadores e reflexivos para lidar com diversas situações. Segundo a experiência dos autores, a Matemática vem passando por momentos difíceis, devido à má preparação dos professores e, com isso, os alunos são mal orientados durante todo o ciclo de ensino, criando paradigmas sobre a disciplina. Neste contexto, os autores acreditam que a Modelagem estreite os laços entre professor e aluno, promovendo a investigação e maior interesse dos alunos.

Todos esses autores, mesmo com concepções diferentes, concluíram que a Modelagem é uma forma de trabalho que permite ao professor ir e vir, acrescentar e tirar conteúdos e revisar, permitindo a flexibilidade e, caso o aluno apresente dificuldade ou se for necessário para solucionar alguma dúvida que venha a aparecer, pode ser apresentado um conteúdo novo.

Esperamos que esta reflexão sobre o uso da Modelagem favoreça o professor de Matemática e possa estimular maiores discussões com seus alunos em suas atividades, deixando com a possibilidade da reformulação do posicionamento do professor desde o seu planejamento até as suas abordagens em sala de aula, fazendo com que repense na Matemática de uma forma mais real.

Deste modo, utilizando a Modelagem juntamente com a THA desencadeia ações reflexivas no professor de Matemática, sendo, no caso da Modelagem, estimulando o uso de atividades que o faz repensar a sua prática e, pela THA, reavaliando o planejamento de suas atividades, sendo que este permite uma maior exploração em relação a conteúdos e participação dos alunos. Ambas as teorias se tornam uma ferramenta para a prática pedagógica, potencializando o trabalho do professor em um ambiente proporcionado pela

Modelagem. Com isso, essa união possibilita um alcance maior de alternativas não só no desenvolvimento das atividades, mas também no preparo de situações hipotéticas.

Ao utilizar em conjunto esta tendência pedagógica e teoria, busca-se trabalhar mais conteúdos e abranger mais campos do conhecimento e, como traz a Matemática de forma mais real para o aluno, permite que os alunos sejam mais participativos e investigativos, visto que o professor ao conhecer a realidade do aluno se planeja para os conteúdos que podem surgir e conseqüentemente serem discutidos em sala de aula.

## CAPÍTULO 3

### ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos os objetivos da investigação, as características metodológicas, o contexto e os sujeitos da pesquisa, os procedimentos de coleta de dados, bem como os encaminhamentos e a análise dos dados, a fim de responder a questão norteadora desta pesquisa.

#### 3.1 Objetivo da pesquisa

Uma das principais funções do professor é prover o conhecimento, pois, em geral, ele é considerado o detentor de toda a informação e os alunos ficam com o papel de recebe-la. Este fato vem se modificando, hoje em dia acredita-se que tivemos uma mudança nesta situação, em geral, os alunos participam da aprendizagem ou, pelo menos, podem questionar mais e, em alguns casos, mostrar os seus conhecimentos, sendo que neste contexto o professor desempenha o papel de mediador das discussões geradas no ambiente educacional.

Esta questão, que envolve a participação do aluno, precisa ser pensada desde o planejamento do professor, sendo este, parte importante para que ocorra o processo de ensino-aprendizagem. Neste contexto precisamos de um planejamento que seja dinâmico e que permita ser revisto sempre que necessário.

Neste sentido, o professor ao promover experiências em que o aluno se sinta motivado a construir o seu conhecimento, pode trabalhar com o auxílio de algumas estratégias pedagógicas diferenciadas, entre elas a Modelagem Matemática, vista como uma forma de ensinar Matemática de maneira mais aberta, relacionando a “Matemática real”<sup>4</sup> com a “Matemática escolar”<sup>5</sup>.

Com isso, o objetivo geral dessa pesquisa, é estudar a teoria da Trajetória Hipotética da Aprendizagem com o uso da Modelagem Matemática para compreender as modificações e encaminhamentos que podem surgir em um planejamento, contribuindo para que o professor reflita sobre sua prática, podendo assim buscar por uma melhoria no

---

<sup>4</sup> Matemática Real – Termo usado para se referir aos conteúdos matemáticos usados no dia a dia, em situações da realidade.

<sup>5</sup> Matemática Escolar – Termo usado para se referir aos conteúdos matemáticos sistematizados e usados no ambiente escolar.

processo de aprendizagem. Por sua vez, os objetivos específicos são (1) Apresentar situações reais para desenvolver atividades em um curso de Matemática Elementar; (2) Realizar um planejamento inicial e reavaliá-lo no decorrer e final das atividades e, por fim, (3) Avaliar como a reformulação e a reflexão de um planejamento podem aprimorar uma aula.

Neste contexto investigaremos: quais os impactos na prática do professor quando o mesmo planeja e utiliza atividades de Modelagem Matemática com auxílio da Trajetória Hipotética da Aprendizagem?

Considerando que a THA busca conhecer os possíveis caminhos pelo qual o aluno irá percorrer durante uma atividade, pois não se pode conhecer previamente uma trajetória real, ela sempre será modificada durante o percurso. Isso permite que o professor reflita e analise o seu planejamento, a fim de reconstruí-lo constantemente baseado na aprendizagem do aluno, conforme a atividade é executada, fazendo com que haja a flexibilização do professor em relação a seu planejamento inicial. Para tal entendimento, seguimos as concepções de Simon (1995).

Por sua vez, a Modelagem propõe ao aluno resolver problemas a partir de situações reais, gerando o seu maior interesse durante o processo de ensino-aprendizagem e incentivando seu poder investigativo. A concepção de estudo dessa tendência que iremos utilizar será de acordo com as perspectivas de Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Dessa forma, esta pesquisa irá associar a Modelagem com a THA, relacionando suas características na busca de que o professor reflita sobre o seu planejamento, a fim de atingir uma aula interessante e dinâmica, de forma que possa rever esses planejamentos constantemente.

### **3.2 Características da pesquisa**

Caracterizamos como pesquisa um conjunto de atividades que possui como finalidade responder um questionamento por meio da aplicação de métodos e técnicas para alcançar um determinado conhecimento. Por pesquisa, Gil (2010, p. 17) entende “como procedimento racional e sistemático que tem como objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos”.

A natureza desta pesquisa é qualitativa, tendo em vista que ela proporciona ao pesquisador analisar a realidade que traz na coleta de dados. Tal abordagem não se utiliza apenas de instrumentos estatísticos, podendo também qualificar ou quantificar os dados

coletados por meio de categorias, critérios ou escalas (RICHARDSON, 2007). Logo, “os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.50).

A pesquisa qualitativa possui como característica explorar os fenômenos em que percorrem os dados coletados, considerando as especificidades do conjunto e compreendendo as particularidades sem generalizar os resultados, com isso “os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 16).

Por sua vez, a pesquisa será de caráter exploratório, que de acordo com Gil (2010) proporciona maior familiaridade com o problema com vistas a torná-lo explícito ou a construir hipóteses. O cunho da pesquisa é interpretativo, uma vez que o pesquisador é o professor que terá os planejamentos analisados e também o responsável por coletar os dados, ou seja, as concepções e interpretações analisadas durante o curso, influenciam diretamente na forma em que serão examinados.

Para o desenvolvimento da pesquisa, foi escolhido trabalhar com a Modelagem e THA, levando em conta o fenômeno que se pretende estudar, para esse fim, foi buscado os fundamentos na literatura sobre o tema, para encontrar quais abordagens e técnicas são consideradas por pesquisadores da área, com o foco sempre no aperfeiçoamento do professor, na qualidade da sua aula e no seu planejamento, permitindo renovar o seu conhecimento e refletir sobre suas atividades desenvolvidas.

### **3.3 Contexto de pesquisa**

Esta pesquisa foi proposta a partir dos estudos sobre a Modelagem e THA, visando analisar os planejamentos de um professor, quando este trabalhava num curso de Matemática Elementar usando a Modelagem como estratégia de ensino. Este professor também é o autor deste trabalho.

A problemática da pesquisa foi motivada por acreditarmos que a THA pode ser usada em conjunto com a Modelagem de forma a ter um planejamento mais aberto, possibilitando uma ampla diversificação de tarefas, além de possibilitar também ao professor reflexões sobre sua prática, oportunizando o mesmo a reformular o

planejamento, de acordo com as necessidades identificadas e então executá-lo novamente quantas vezes for necessário para alcançar seus objetivos pedagógicos.

### **3.3.1 Coleta e análise de dados**

Inicialmente o desenvolvimento da pesquisa se daria presencialmente com professores atuantes em sala de aula por meio de duas fases, uma relacionada a um curso de formação continuada envolvendo o ensino de Matemática usando Modelagem e a outra observando os planejamentos e as aulas deste professor. A coleta aconteceria com professores de Matemática e acadêmicos em formação nesta área em uma cidade do interior de Mato Grosso do Sul, de forma que pudéssemos analisar as alterações que teriam os planejamentos quando os professores desenvolvessem suas aulas utilizando Modelagem. Porém, devido a pandemia do COVID-19 do ano de 2020 se fez necessário a adequação da coleta de dados, com isso, elaboramos o curso para acontecer de forma remota e decidimos analisar as alterações no planejamento do próprio pesquisador, enquanto este ministrava o curso de Matemática Elementar com ênfase em Modelagem.

Por forma remota, o Conselho Nacional de Educação, juntamente com o Ministério da Educação, entende como ensino não presencial como todas as atividades realizadas com mediação tecnológica ou não, durante o período de restrição de presença nas unidades educacionais, a fim de garantir o atendimento escolar.

Para realização do curso utilizamos alguns grupos de comunicação, como o *Google Meet* para os encontros, o *Google Classroom* para postagem das atividades e o *WhatsApp* e *e-mail* para as discussões de dúvidas fora dos encontros virtuais.

Como foi realizada uma atividade de Modelagem e esta não é resolvida individualmente, foi necessário separar os participantes em duplas, para possibilitar a troca de ideias permitindo um maior número de questionamentos e formas de resoluções.

### **3.3.2 O curso**

Foram desenvolvidas duas atividades, uma com o tema “COVID-19 – Corona vírus” (Atividade 1) e outra atividade com o tema “Casa de Câmbio - Conversão de Moedas” (Atividade 2). O curso teve como objetivo proporcionar uma revisão de conteúdos básicos de Matemática usando a Modelagem como estratégia de ensino de

forma a estimular os alunos a utilizarem os conceitos propostos para conhecer mais sobre cada tema.

Foram 4 aulas online, com duração de 2 horas/aula cada uma, nas duas primeiras aulas foi abordado sobre o tema “COVID-19 – Corona vírus”, pois era um assunto que estava em evidência no mundo todo e afetava diretamente diversas atividades, inclusive no meio educacional. Na terceira e quarta aulas do curso foi trabalhado com o tema “Casa de Câmbio - Conversão de Moedas”, a escolha do tema se deu pelo fato de ter sido um ano em que tivemos uma crise econômica mundial e, conseqüentemente, uma variação no valor do dólar frente à moeda brasileira, o que acabou influenciado vários setores.

No primeiro encontro virtual apresentamos o curso, a metodologia a ser utilizada e iniciamos as discussões sobre o tema inicial. Ao término deste encontro postamos no *Google Classroom* tarefas para serem realizadas e refletidas pelos participantes. O segundo encontro foi planejado para que os participantes do curso discutissem seus encaminhamentos e resultados. Assim, neste mesmo padrão aconteceu o terceiro e o quarto encontro, ou seja, no terceiro a discussão do tema da segunda proposta de atividade, bem como os encaminhamentos e no quarto as discussões sobre estes. Com base nos encaminhamentos dados pelos participantes, nas discussões dos grupos e nas soluções e dúvidas postadas, os planejamentos foram revistos e alterados quando necessário.

### **3.3.3 Participantes do curso**

Convidamos para fazer parte desta pesquisa 10 participantes, entre eles pessoas cursando a graduação de Matemática e professores formados na área de Matemática, na faixa etária entre 25 e 40 anos, todos tinham experiência em sala de aula. O horário dos encontros foi combinado em consenso com os participantes.

### **3.3.4 Planejamentos**

Para iniciarmos o curso elaboramos um planejamento para cada atividade. O planejamento inicial, que denominaremos Planejamento P1, contou com a atividade referente ao COVID-19, que chamamos de Atividade 1. O segundo planejamento, que denominaremos Planejamento P2, contou com a atividade referente ao Câmbio de moedas, que chamamos de Atividade 2. Ambos os planejamentos foram elaborados para

dois encontros e consideraram a trajetória hipotética, pensada com objetivo de abordar conteúdos de Matemática básica. Em ambos, usando como estratégia pedagógica a Modelagem.

Para responder à questão norteadora desta pesquisa, investigamos os planejamentos das aulas do professor, quando esta ministra o curso, buscando identificar e justificar as possíveis modificações que vão surgindo das necessidades dos participantes no decorrer das aulas. A cada mudança nos planejamentos alteramos a nomenclatura do mesmo. Por exemplo, a primeira alteração de P1, chamamos de P1.1, a segunda P1.2 e assim sucessivamente. Mesmo procedimento para P2, ou seja, a primeira P2.1, P2.2 e assim por diante.

### 3.3.5 Encaminhamentos do planejamento P1

A primeira atividade foi planejada com o tema “COVID-19 – Corona vírus”, para trabalhar conceitos matemáticos estudados no Ensino Básico. O planejamento foi elaborado para dois encontros virtuais, no primeiro encontro o objetivo geral da atividade era estimular os alunos a utilizarem os conceitos matemáticos propostos para conhecer mais sobre o Corona vírus, de modo que desenvolvam estratégias, argumentações, questionamentos e por fim, encontrarmos a validação dos resultados.

Especificamente, rever conceitos matemáticos estudados no Ensino Básico; interpretar gráficos; relacionar razões e proporções; efetuar cálculos e resolver problemas envolvendo regra de três; definir o conceito de função exponencial e trabalhar com os conteúdos utilizando contextos reais.

Para iniciarmos a discussão acerca do tema colocamos algumas questões, conforme mostra o Quadro 1. Nosso intuito é que elas fossem discutidas no âmbito da sala virtual, depois respondidas e postadas na plataforma *Google Classroom*.

Quadro 1 - Questionário 1 – COVID-19 – Corona vírus

1) O que você sabe sobre o Corona vírus?
2) Quantas pessoas já foram infectadas no Brasil?
3) Quantas pessoas já morreram no Brasil?
4) Qual a quantidade de pessoas curadas no Brasil?
5) A quarentena vem ajudando na proteção do vírus?
6) Qual a relação entre a quarentena com o pico do contágio?
7) Você acredita que a infecção pelo vírus vai acabar em algum momento? Se sim, quando?

Fonte: Próprio autor (2021)

Nosso objetivo em relação as questões do Quadro 1 foi compreender a relação dos participantes com o tema e averiguar o que os mesmos sabiam sobre o assunto. Como estávamos no meio da pandemia, tínhamos certeza que seria um assunto que todos teriam algo para contribuir na discussão, então pensamos em discutir como a pandemia se encontrava no país, expor o que pensavam, o que estavam passando e discutir o quanto a mesma estava afetando a todos, pensando tanto no todo, como também no pontual.

Em seguida (após as discussões), foi planejado fornecer dados numéricos que mostra a situação da pandemia, conforme a Figura 5. Tendo por objetivo apresentar alguns dados referente ao tema para que os alunos conseguissem responder as questões propostas no Quadro 2.

Figura 5 - Imagens utilizadas para contextualização do tema COVID-19 – Corona vírus das questões 1 a 5



Fonte: www.ms.gov.br

Quadro 2 - Questionário 2 – COVID-19 – Corona vírus

1) Identifique qualquer relação matemática entre os números de infectados e recuperados entre os dias 24 de cada mês expostos na Figura 5.
2) Qual é a porcentagem do crescimento dos números de óbitos do dia 24 de abril a 24 de junho?
3) Qual é a porcentagem de crescimento no número de infectados de 24 de abril a 24 de junho?
4) O número de curados aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados?
5) O número de óbitos aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados?

Fonte: Próprio autor (2021)

Encaminhamos a Figura 5 por que acreditamos que poderia contribuir para a discussão do questionário do Quadro 2 e possibilitar aos participantes pensar sobre as questões. Espera-se abordar com este questionário alguns conteúdos como interpretação e representações gráficas de diferentes formas, cálculos de regra de três, função exponencial e porcentagem. As questões e figuras seriam postadas no *Google Classroom*

e as respostas deveriam ser postadas também neste mesmo grupo de comunicação, com intuito de analisarmos os caminhos utilizados bem como as soluções e as respostas frente a situação.

Planejamos o primeiro encontro de forma a estimular os participantes a utilizar os conceitos matemáticos vinculados ao tema, de modo a pensarem e desenvolverem estratégias, argumentações, questionamentos e, por fim, encontrarem a validação dos resultados, com o intuito de promover a aprendizagem dos alunos levantando hipóteses sobre o processo de aprendizagem.

Para o segundo encontro virtual, planejamos discutir as respostas dos dois questionários a fim de esclarecer possíveis dúvidas. As perguntas do primeiro questionário foram abertas, pois gostaríamos que cada participante respondesse de acordo com a sua vivência sobre o tema, enquanto que no segundo questionário queríamos que resolvessem abordando os conteúdos planejados, explicitando os caminhos percorridos.

Foi planejado utilizar alguns recursos para auxiliar no desenvolvimento da atividade, sendo eles os grupos de comunicação *Google Classroom* e *Google Meet*, slides, computador e internet.

Por fim, planejamos a avaliação da atividade de forma contínua, por meio da participação escrita e oral, para que no final do processo pudesse ocorrer uma reflexão coletiva sobre a aprendizagem do conteúdo e o uso das estratégias de ensino.

### **3.3.6 Encaminhamentos do Planejamento P2**

Este planejamento teve como tema a “Casa de Câmbio - Conversão de Moedas”, cujo intuito era estudar a Matemática por meio de uma situação real envolvendo operações de câmbio. O objetivo geral da atividade foi estimular os alunos a trabalhar conceitos matemáticos para ampliar o conhecimento sobre casa de câmbio e conversões de moedas, desenvolvendo argumentações e questionamentos.

Por sua vez, os objetivos específicos foram efetuar cálculos e resolver problemas envolvendo regra de três; trabalhar com porcentagem relacionando a valorização de moedas; efetuar equações envolvendo câmbios de dinheiro e trabalhar com conteúdos utilizando contextos reais.

Foi planejado iniciamos o terceiro encontro virtual apresentando as questões mostradas no Quadro 3, com o objetivo de gerar uma discussão sobre o assunto e promover a interação entre os alunos e entre alunos e professor, instigando o poder

investigativo sobre o tema. Temos por intuito, que os alunos desenvolvam estratégias, argumentações e questionamentos para encontrar a validação dos resultados.

Quadro 3 – Questionário 3 – Conversão de moeda

1) Tem algum país que pretende visitar? Qual?
2) Já fizeram alguma conversão de moeda?
3) Já frequentou uma casa de câmbio?
4) Conhece alguns países que sua moeda tem menor valor em relação ao real?
5) Conhece alguns países que sua moeda tem maior valor em relação ao real?
6) Vocês já viajaram para o exterior? Se sim, o real tinha maior ou menor valor neste local?

Fonte: Próprio autor (2021)

Os encaminhamentos propostos no Planejamento P2 são similares ao de P1, no terceiro encontro foi realizada uma discussão e apresentação do tema e posteriormente foram postadas algumas questões, para que fossem respondidas e postadas no *Google Classroom*.

Para a última etapa dessa terceira aula, foi planejado apresentar algumas figuras, conforme mostradas na Figura 6, para fomentar o debate sobre como seria uma conversão de moeda, com a finalidade de introduzir um quarto questionário conforme Quadro 4, que os alunos deveriam responder concomitantemente com o primeiro.

Figura 6 – Figuras utilizadas para contextualização do tema Casa de Câmbio - Conversão de Moedas

*Para comprar 500 euros / Enviar 500 euros para a Europa*

PRODUTO	IMPOSTO (IOF)	TAXA DE CÂMBIO	VOCÊ PAGA EM REAIS:
Dinheiro	1,10%	4,16	R\$ 2.102,88
Cartão Pré-Pago	6,38%	4,16	R\$ 2.212,70
Transferência de Dinheiro	0,38%	4,23 + R\$96,00 de tarifa para o envio	R\$ 2.219,54

Fonte: [www.melhorcambio.com](http://www.melhorcambio.com)

#### Quadro 4 - Questionário 4 – Casa de Câmbio - Conversão de moeda

1) Quando chegar ao final desta pandemia muitas pessoas estão querendo viajar, mas já pensaram como serão essas viagens após a pandemia? Alguns estudiosos nos explicam melhor sobre isso nesta matéria <a href="https://www.agazeta.com.br/colunas/renata-rasseli/como-sera-o-turismo-pos-pandemia-especialistas-do-es-respodem-0420">https://www.agazeta.com.br/colunas/renata-rasseli/como-sera-o-turismo-pos-pandemia-especialistas-do-es-respodem-0420</a> . Pensando dessa forma estude alguns roteiros de viagens como Europa, Estados Unidos e Argentina. Vocês saberiam como está valorização destas moedas? Quanto equivale o real em relação às moedas: Peso Argentino, Euro e Dólar?
2) Com esta pandemia as viagens alteraram muito o seu valor?
3) Escolha qualquer local para fazer uma viagem, qual seria? O que pretende conhecer por lá?
4) Utilizando o local acima, pesquise um pacote de viagem referente a este local que gostaria de viajar e também faça alguns orçamentos de hotel e passagens por conta própria para descobrir qual compensa mais, comprar um pacote ou construir um?

Fonte: Próprio autor (2021)

Os questionários tiveram o intuito de trabalhar com os conteúdos de porcentagem, função afim e regra de três simples, permitindo que os alunos chegassem a uma mesma resposta por caminhos diferentes, envolvendo e incentivando os alunos à pesquisa e investigação. Para o quarto encontro, similar a primeira atividade, consideramos debater o assunto, as soluções encontradas e os caminhos utilizados.

Os recursos que foram planejados para auxiliar no desenvolvimento da atividade foram os grupos de comunicação *Google Classroom* e *Google Meet*, slides, computador, fones, internet e um ambiente adequado.

A avaliação foi de forma contínua, durante todas as etapas do curso. Os participantes foram avaliados por meio da participação nas discussões e postagem das atividades.

### 3.4 Análise de dados

As análises foram realizadas considerando as mudanças ocorridas nos planejamentos do professor/ministrante do curso, levando em consideração a motivação e o contexto das mudanças. Foi realizada uma análise local em cada planejamento, avaliando a necessidade das alterações e principalmente o motivo de ser necessária a mudança, em seguida uma análise global com o intuito de interpretar de forma geral as

mudanças ocorridas considerando o processo do desenvolvimento da atividade de Modelagem no contexto da THA.

## CAPÍTULO 4

### DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo, apresentamos as descrições e análises de dados de dois planejamentos, que são nossas THA utilizando a Modelagem como alternativa pedagógica. Nosso objetivo foi identificar e justificar as alterações e mudanças ocorridas nos planejamentos no decorrer da realização do curso de Matemática Elementar.

#### 4.1 Desenvolvimento do primeiro Planejamento (P1)

Começamos nosso curso explicando como seria nossos encaminhamentos, falamos sobre as postagens no *Google Classroom* e criamos um grupo no *WhatsApp*.

Após os esclarecimentos iniciais, começamos a falar sobre o tema da nossa aula, que foi “COVID-19 – Corona vírus”. Percebemos que a maioria dos participantes tinham algum comentário para fazer sobre o assunto, sendo as hipóteses sobre os conhecimentos dos estudantes um elemento importante na THA, pois a construção de trajetórias hipotéticas é um desafio e é muito empolgante poder construir uma trajetória a partir da compreensão Matemática dos participantes do curso.

Embora os participantes já tivessem algum tipo de conhecimento sobre Modelagem, como uma tendência de ensino da Educação Matemática, acharam estranho um curso de Matemática Elementar iniciando com o debate de um tema não matemático. “*Professor, este curso vai abordar Matemática mesmo? (...) função? Preciso aprender isto, estou com dificuldades em Cálculo I*”. Neste sentido, percebemos o quanto ainda é “forte” a crença que a Matemática precisa ser explicada separada de um contexto. Para os participantes do curso, começar a aula com um contexto real e a partir dele desenvolver a Matemática foi uma novidade e, neste momento, percebemos que esclarecer sobre a forma que iríamos abordar os conteúdos era importante. Neste momento foi explicado sobre a Modelagem, caracterizando como a primeira alteração no planejamento P1.

Ao elaborarmos o planejamento, imaginamos que o tema escolhido para primeira atividade fosse do interesse de todos. Para nossa surpresa, não foi, pois alguns colocaram que já estavam enjoados de ouvir e/ou discutir sobre isto. Tivemos comentários como “*novamente esse assunto?*” e “*meu Deus, só se fala disso hoje em dia*”. Neste sentido, fizemos o possível para motivar os participantes falando sobre a importância da

conscientização e medidas de proteção, a fim de conhecer a realidade da pandemia. Percebemos a necessidade de discutir sobre o tema, envolvendo a realidade pandêmica das proximidades de onde moravam, pois não queriam, no geral, discutir a realidade brasileira.

Explicamos aos participantes que postaríamos no *Google Classroom* um questionário sobre o tema da aula e que era para responder em duplas e então postar as repostas na plataforma. Como notamos a necessidade de trazer os participantes para perto da realidade da pandemia na cidade que residem e falar sobre perspectivas positivas, a fim de gerar maior interesse e potencial investigativo nos mesmos, mudamos no Planejamento P1 as perguntas de 2 a 4, direcionando-as para a cidade de cada um e adicionamos a pergunta 5. Este questionário modificado se encontra no Quadro 5 e é uma adaptação do questionário inicial que se encontra no Quadro 1, presente no capítulo de metodologia. Essa foi a segunda alteração ocorrida no planejamento, visto que a THA está presente na ação de o professor pensar em diferentes caminhos pelos quais os participantes podem percorrer; alguns problemas que podem surgir e estratégias que podem ser formuladas.

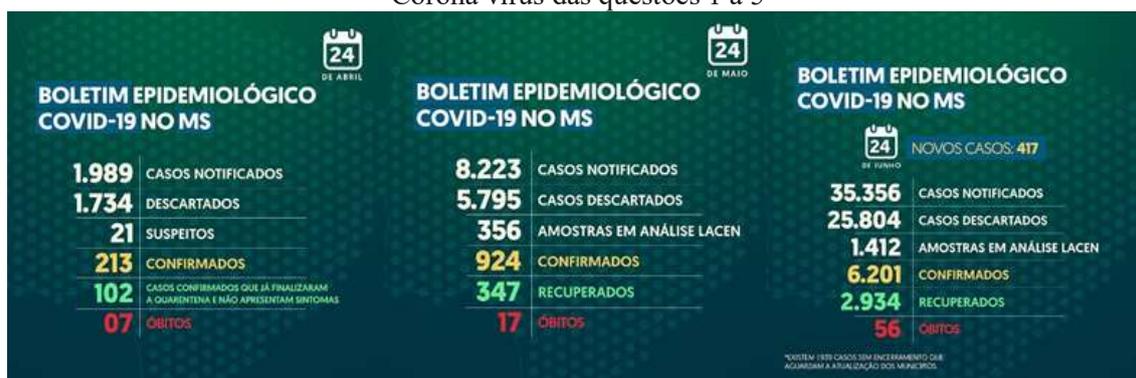
Quadro 5 - Questionário 1 alterado do Planejamento P1 – COVID-19 – Corona vírus

1) O que você sabe sobre o Corona vírus?
2) Quantas pessoas já foram infectadas no Brasil? E na sua cidade?
3) Quantas pessoas já morreram no Brasil? E na sua cidade?
4) Qual a quantidade de pessoas curadas no Brasil? E na sua cidade?
5) Existe um aumento expressivo no número de infectados na sua cidade nos últimos 10 dias?
6) A quarentena vem ajudando na proteção do vírus?
7) Qual a relação entre a quarentena com o pico do contágio?
8) Você acredita que a infecção pelo vírus vai acabar em algum momento? Se sim, quando?

Fonte: Próprio autor (2021)

Em seguida, apresentamos um boletim epidemiológico do COVID-19 em Mato Grosso do Sul com os dados de 24 de abril a 24 de junho de 2020, conforme apresentado na Figura 7.

Figura 7 - Figuras do Planejamento P1 utilizadas para contextualização do tema COVID-19 – Corona vírus das questões 1 a 5



Fonte: [www.ms.gov.br](http://www.ms.gov.br)

O nosso objetivo apresentando a figura foi começar a discutir a “matemática da pandemia”, então imaginamos que iriam calcular a porcentagem e tentar estabelecer uma relação entre as variáveis apresentadas, sendo elas os casos notificados, descartados, confirmados, recuperados e óbitos. A discussão gerada não foi tão abrangente como imaginávamos, então decidimos apresentar novas figuras para instigar os participantes, com isso, acessamos o site do Governo do Mato Grosso do Sul em que se encontrava a situação da pandemia de acordo com as macrorregiões do estado. Dessa forma, apresentamos a eles para complementar a Figura 7, a figura de dois gráficos de Campo Grande e de Dourados, conforme mostramos na Figura 8, esta foi a terceira alteração no Planejamento P1.

Neste momento alguns participantes fizeram alguns comentários como: “Já vi vários tipos de gráficos de COVID na televisão”; “Até consigo interpretar alguns gráficos, mas alguns são complicados” e “A mídia podia padronizar os gráficos para que fique mais fácil de todos entenderem”.

Figura 8 - Figuras adicionadas no Planejamento P1 para contextualização do tema COVID-19 – Corona vírus



Fonte: [www.ms.gov.br](http://www.ms.gov.br)

Após apresentarmos os gráficos das Figuras 7 e 8, começamos a discutir questões relacionadas a eles, apresentadas no Quadro 6. Adicionamos as perguntas 6, 7 e 8 ao questionário, pois, percebemos que os participantes do grupo estavam com dificuldades para interpretação dos gráficos, pois foram feitos alguns questionamentos como “*sempre fico na dúvida sobre os índices*” e “*tem alguns gráficos que são muito complicados para interpretar*”. Com isso, o Quadro 6 é uma adaptação do Quadro 2 da Metodologia, se caracterizando como a quarta alteração no Planejamento P1.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012) de uma situação inicial para a final requer do aluno a criação de um problema, a definição de estratégias e hipóteses, a formulação de previsões e a apresentação de explicações e soluções para a resolução do problema, podendo reformular os encaminhamentos pré-definidos, envolvendo ações orientadas e direcionadas para os alunos.

Quadro 6 - Questionário 2 alterado do Planejamento P1 – COVID-19 – Corona vírus

1) Identifique qualquer relação matemática entre os números de infectados e recuperados entre os dias 24 de cada mês expostos nas figuras acima.
2) Qual é a porcentagem do crescimento dos números de óbitos do dia 24 de abril a 24 de junho de 2020?
3) Qual é a porcentagem de crescimento no número de infectados de 24 de abril a 24 de junho?
4) O número de curados aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados?
5) O número de óbitos aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados?
6) Faça uma pesquisa e descubra qual cidade das figuras acima tem um maior índice de pessoas infectadas no dia 25 da pandemia?
7) Qual foi o aumento de infectados nos gráficos das cidades acima, do dia 20 ao 25? E qual cidade teve o maior índice?

8) Observe os gráficos e descreva como você consegue analisar o crescimento do número de infectados nas figuras 8?

Fonte: Próprio autor (2021)

Após as discussões e encaminhamentos da primeira aula, postamos na plataforma os questionários alterados e as figuras e nos colocamos a refletir sobre nosso planejamento. Percebemos que ao trabalhar com Modelagem precisamos deixar os participantes mais livres e que o planejamento precisa ser mais dinâmico, o que é um desafio para nós, visto que é mais fácil planejar em forma de passo a passo.

Para Simon (1995), a previsão de uma trajetória possibilita uma melhora na aprendizagem, isso nos leva a refletir sobre o nosso planejamento, pois uma trajetória hipotética é caracterizada como uma expectativa do que o professor espera dos alunos, pensando que a aprendizagem dos mesmos ocorre de forma individual, embora muitos trajetos são semelhantes.

Ao permitirmos um planejamento mais dinâmico, oportunizamos aos participantes e a nós mesmos uma aprendizagem participativa e colaborativa, mesmo que em alguns momentos sentimos dificuldade de acompanhar algumas ideias e encaminhamentos colocados por eles.

Quando postamos as tarefas na plataforma pela primeira vez, já estavam com as quatro alterações, ou seja, nossa trajetória inicial já havia sido modificada e este novo planejamento, denominamos de Planejamento P1.1.

Consideramos o planejamento importante para elaborar e explorar o contexto que está sendo trabalhado e a organização do mesmo é essencial para a aprendizagem dos alunos. Reformular o planejamento pode parecer complicado, porém é um processo bastante natural na THA, isso faz com que o professor e o aluno evoluam com a atividade.

A partir do momento que os participantes começaram a enviar as repostas dos questionários de acordo com o Planejamento P1.1, percebemos uma certa “economia de palavras”. Alguns foram bem sucintos, respondendo apenas “sim” ou “não”, principalmente em relação às questões 4 e 5 do questionário 2 mostrado no Quadro 6 envolvendo Matemática Básica, a Figura 9 mostra a forma que alguns participantes responderam tais questões.

Figura 9 - Respostas das questões 4 e 5 do Questionário 1 do Planejamento P1.1

4) O número de curados aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados?  
sim, o número de curados aumenta conforme o número de infectados.

5) O número de óbitos aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados?  
sim, o número de óbitos aumenta conforme o número de infectados.

4) O número de curados aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados ?  
sim

5) O número de óbitos aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados ? Nao

Fonte: Próprio autor (2021)

Também apareceu em um dos grupos de comunicação questionamentos entre os participantes sobre os conteúdos matemáticos que poderiam ser utilizados: “*Posso responder com o conteúdo matemático que tenho maior domínio?*”, “*Se conseguir chegar na resposta de maneiras diferentes, tudo bem?*” e “*Posso envolver a Matemática de uma forma bem clara para mim?*”.

Para tais dúvidas, respondemos através da plataforma que os participantes poderiam responder com o conteúdo de maior domínio desde que as regras matemáticas fossem respeitadas e não teria problema se uma mesma questão tivesse várias formas de resolução, como por exemplo ocorreu na questão 2 do questionário 2 do Planejamento P1.1 mostrado na Figura 10. Nessa questão, o primeiro participante mostrado, desenvolveu primeiramente a divisão entre os números de óbitos e depois transformou em porcentagem, já o segundo participante realizou uma regra de três para encontrar o mesmo resultado, sendo ambas formas corretas de resolução.

Figura 10 – Questão 2 do questionário 2 do Planejamento P1.1 com resoluções diferentes

2. Qual é a porcentagem do crescimento no número de óbitos do dia 24 de abril a 24 de junho?

$$\frac{56}{7} = 8$$

$$8 \cdot 100 = 800\%$$

2) Para verificar o aumento dos óbitos vou utilizar a mesma técnica da questão anterior.

	óbitos	%
24/04	7	100
24/06	56	x

7x=5600  
X=5600/7  
X=800, ou seja, os óbitos de infectados com o Corona vírus aumentaram 800% no período.

Fonte: Próprio autor (2021)

Em seguida a esta questão, outros participantes colocaram opiniões e dúvidas, como: “entendi que cada um podia fazer como achasse melhor”, “algumas questões diz o conteúdo”, “sei lá, os conteúdos são complicados e, para mim, aberto assim fica pior”.

A partir dessas considerações, resolvemos modificar as questões que poderiam ser respondidas apenas com “sim” ou “não” e voltamos a enfatizar que cada um poderia fazer da forma que achasse mais fácil e que não existia “um único caminho” para resolução. Dessa forma, como as perguntas 4 e 5 eram fechadas, já afirmando que houve um aumento de curados e óbitos proporcionalmente ao de infectados, resolvemos alterar essas questões para os participantes analisarem se existe uma relação nessa proporção. Esta foi a quinta alteração que foi realizada no Planejamento P1.1, pensando sempre que a THA permite modificações ao longo de todo o processo.

Neste mesmo pensamento, decidimos também alterar a questão 7, não afirmando que houve um aumento de infectados nos gráficos e sim perguntando qual a relação de números de infectados entre as cidades nos dias especificados. Percebemos que seria importante que eles fizessem a interpretação e uma comparação entre os gráficos expostos, sendo esta a sexta alteração que ocorreu no Planejamento P1.1. Segue o Quadro 7 contendo as alterações do Questionário 2.

Geralmente uma THA está envolvida com uma tarefa de aprendizagem, tal tarefa pode sofrer várias alterações dependendo de como os estudantes se envolvem em realizá-la, com isso, muitas hipóteses podem surgir no decorrer do processo e se tal processo envolve uma atividade de Modelagem, o mesmo fica mais amplo com uma maior participação dos alunos.

Quadro 7 - Questionário 2 alterado do Planejamento P1.1 – COVID-19 – Corona vírus

1) Identifique qualquer relação matemática entre os números de infectados e recuperados entre os dias 24 de cada mês expostos nas figuras acima.
2) Qual é a porcentagem do crescimento dos números de óbitos do dia 24 de abril a 24 de junho?
3) Qual é a porcentagem de crescimento no número de infectados de 24 de abril a 24 de junho?
4) Qual é a relação entre o número de curados com o número de infectados?
5) Qual a relação entre o número de óbitos com o número de infectados?
6) Faça uma pesquisa e descubra qual cidade das figuras acima tem um maior índice de pessoas infectadas no dia 25 da pandemia?
7) Qual foi a relação do número de infectados nos gráficos das cidades acima, do dia 20 ao 25? E qual cidade teve o maior índice?

8) Observe os gráficos e descreva como você consegue analisar o crescimento do número de infectados nas figuras acima?

Fonte: Próprio autor (2021)

Após a reformulação, explicamos nos grupos de comunicação que seria postado o questionário novamente com algumas alterações e que seria necessário refazê-lo. O planejamento com essas alterações chamamos de P1.2. Com isso, seguimos como o previsto, que era interpretar as respostas dos participantes em busca de coletar diferentes respostas disponíveis em uma mesma questão, tentando compreender as dificuldades dos participantes com os conteúdos.

Ao interpretar as respostas das questões 2, 3 e 4 do Questionário 1 do Planejamento P1.1 observamos que conseguimos trabalhar com diferentes cidades, no Quadro 8 contém as respostas destas questões, mostrando todas as cidades que foram trabalhadas em sala de aula e seus respectivos dados. Com isso, foi possível englobar um maior número de dados para ser discutido em sala, gerando uma comparação dos números da pandemia entre os diferentes locais.

Quadro 8 - Compilado das questões 2, 3 e 4 do Planejamento P1.1 de acordo com as cidades dos participantes

Questões Cidades	2) Quantas pessoas já foram infectadas no Brasil? E na sua cidade?	3) Quantas pessoas já morreram no Brasil? E na sua cidade?	4) Qual a quantidade de pessoas curadas no Brasil? E na sua cidade?
Brasil	Mais de 3 milhões de infectados	Mais de 102 mil mortes	Mais de 600 mil recuperados
Outro Branco/MG	233 infectados	3 mortes	185 recuperados
Três Lagoas/MS	próximo de 300 pessoas	9 mortes	323 recuperados
Campo Grande/MS	12900 pessoas	178 mortes	10189 recuperados
Sorriso/MT	foram 3832 casos positivos	59 mortes	2414 recuperados
Ponta Porã/MS	foram 331 casos positivos.	10 mortes	195 recuperados

Fonte: Próprio autor (2021)

As demais questões que não eram para ser respondidas conforme a sua cidade, trabalhamos as respostas buscando deixar os participantes mais entusiasmados e participativos, deixando-os mais conscientes com a situação da pandemia.

Por sua vez, interpretando as respostas do Questionário 2 do Planejamento P1.1, por optarmos em deixar as respostas de forma aberta, observamos que os participantes abordaram alguns conteúdos nas suas respostas que não estavam previstos no

planejamento e, durante a aula, percebemos que alguns participantes tinham dificuldade em interpretação de gráficos. Com isso adicionamos no Planejamento P1.1 os conteúdos que eles abordaram nos questionários e que não tínhamos considerado anteriormente, sendo esta uma sétima alteração e os conteúdos adicionados foram: Interpretação dos gráficos; Função simples; Operações Básicas; Expressões Numéricas; Frações; Decimais e Dízimas; Probabilidade e estatística e Razão e proporção. Como por exemplo nas repostas da Figura 11. Logo, o Planejamento P1.1 com a quinta, sexta e sétima alteração, o denominamos de Planejamento P1.2.

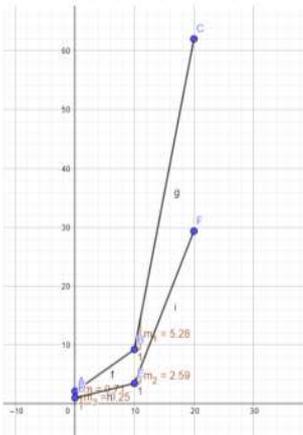
Figura 11 – Questões do questionário 2 do Planejamento P1.1 abordando conteúdos não planejados inicialmente

**1. Identifique qualquer relação matemática entre os números de infectados e recuperados entre os dias 24 de cada mês expostos na figura 01.**

Ambos estão crescendo, mas em diferentes “velocidades”:

- A taxa de confirmados/infectados cresceu:  $\frac{924}{213} = 4,33x$  no primeiro mês (abril para maio); enquanto no segundo mês (maio para junho) foi de  $\frac{6201}{924} = 6,71x$
- A taxa de recuperados cresceu:  $\frac{347}{102} = 3,4x$  no primeiro mês; enquanto no segundo foi de  $\frac{2934}{347} = 8,45x$

Podemos interpretar que isso significa que mesmo o número de infectado seja maior que o número de recuperados, a taxa de crescimento desses últimos é maior do que os primeiros. Nos parece absurdo propormos isso, neste contexto, fomos investigar porque parecia que estávamos tratando de coeficiente angular. Neste sentido, se pensarmos graficamente as taxas de crescimentos dos infectados e dos recuperados, vemos uma inclinação maior dos recuperados do que dos infectados, conforme gráfico construído no GeoGebra (figura 1):



Entretanto, percebemos que essa nossa interpretação está errada devido os valores dos coeficientes serem diferentes dos encontrados pelos nossos cálculos.

**3. Qual é a porcentagem de crescimento no número de infectados de 24 de abril a 24 de junho?**

$$\frac{6.201}{213} \sim 29,1126 \dots$$

$$29,1126 \dots * 100 \sim 2.911\%$$

**4. O número de curados aumenta proporcionalmente conforme o número de infectados?**

Não, pois

MÊS	TAXA DE CRESCIMENTO ENTRE CURADOS E INFECTADOS
Abril	$\frac{102}{213} \sim 0,47$ ou 47%
Mai	$\frac{347}{924} \sim 0,37$ ou 37%
Junho	$\frac{2.934}{6.201} \sim 0,47$ ou 47%

Fonte: Próprio autor (2021)

Referente ao objetivo geral da atividade sentimos a necessidade de altera-lo no Planejamento P1.2 de forma a proporcionar uma maior comunicação com os participantes e debates em cima das questões, trabalhando melhor suas resoluções e dúvidas. Dessa forma, realizamos uma oitava alteração no planejamento e o novo objetivo geral da

atividade foi “estimular os participantes a utilizarem os conceitos matemáticos propostos para conhecer mais sobre o Corona vírus, de modo que desenvolvam estratégias de resoluções, argumentações e debater questionamentos sobre o tema e por fim, encontrarmos a validação dos resultados”.

Por sua vez, nos objetivos específicos foi necessário adicionar alguns pontos, pois abordamos conteúdos diferentes nos questionários que eram possíveis ser trabalhados, então decidimos incluir eles no Planejamento P1.2, contribuindo para o aprendizado dos participantes. Os objetivos específicos modificados se encontram no Quadro 9, sendo esta a nona alteração no planejamento.

Quadro 9 – Objetivos específicos do Planejamento P1.3 - COVID-19 – Corona vírus

Rever conceitos matemáticos estudados no Ensino Básico como; frações, decimais e dízimas;
Interpretações gráficas e representações de diferentes formas;
Relacionar razões e proporções;
Efetuar cálculos e resolver problemas envolvendo regra de três;
Desenvolver operações básicas e expressões numéricas;
Definir o conceito de função simples e exponencial;
Trabalhar com os conteúdos utilizando contextos reais.

Fonte: Próprio autor (2021)

Em relação aos recursos da atividade, foi analisado que deveríamos incluir o uso de fones de ouvido como recurso necessário, visto que melhoravam o áudio, pois não fazia eco do som no ambiente e nem ruídos, isso traz como consequência a perda de foco e dificuldade de entendimento dos participantes no que era falado. Nesta mesma relação, um recurso essencial é o professor possuir um ambiente adequado para ministrar as aulas, sem barulhos externos, para focarem a atenção exclusivamente na aula. Essas alterações relacionadas aos recursos da atividade, se caracterizam como a décima alteração no planejamento, as mesmas foram alteradas do Planejamento P1.2.

Logo, finalizamos o planejamento da atividade, com todas as modificações que se fizeram necessárias, este planejamento final chamamos de Planejamento P1.3. Consideramos que as reformulações do planejamento nos permitiram deixar a aula mais completa e mais participativa, melhorando o aprendizado dos participantes, pois fomos modificando-o conforme refletíamos sobre suas respostas, seus encaminhamentos, as estratégias que usavam e os questionamentos que iam aparecendo. Acreditamos que o uso da Modelagem permite aos envolvidos no desenvolvimento da atividade maior

interação e conseqüentemente permite ao professor identificar problemas tanto no encaminhamento da aula quanto em relação às dificuldades com os conteúdos.

O segundo encontro virtual, iniciamos com o Planejamento P1.3 objetivando ouvir sobre os encaminhamentos que os participantes haviam dado para as atividades. Começamos perguntando para todos como estava a situação atual da pandemia, levando em conta o contexto familiar, de forma que no decorrer dessa conversa pudéssemos discutir sobre as questões postadas acerca do tema.

Neste sentido, as duplas foram colocando como desenvolveram as respostas, como elaboraram as estratégias e o que haviam considerado para chegar as respostas apresentadas e postadas na plataforma. Voltaram a falar sobre a variedade de conteúdos, houveram alguns comentários como: *“Nossa, verdade, não tinha pensado dessa forma”* e *“Nossa, fiz totalmente diferente”*, *“Lembro de ter aprendido sobre gráficos só no Ensino Básico”* e *“Sempre tenho dúvidas sobre gráficos”*.

Alguns participantes relataram que viram vários tipos de gráficos apresentados em mídias sociais e outros meios de comunicação, com isso, percebemos a importância da Matemática no dia a dia de todos, pois a mesma está envolvida com a nossa realidade e isto é uma característica da Modelagem.

Em relação aos gráficos sobre o tema COVID-19, os participantes demonstraram como os dados mostrados na aula anterior já sofreram alteração até o momento atual e falaram que tinham alguns familiares isolados pois estavam com COVID-19. A todo momento foi incentivado e proposto pelo professor a maior participação e colaboração dos participantes para que as aulas fossem mais dinâmicas, permitindo uma maior comunicação e exposição das ideias.

No segundo questionário surgiram algumas ideias diferentes de abordagem dos conteúdos que poderiam ser utilizados, como por exemplo, pelas alterações sofridas no planejamento nas perguntas 4, 5 e 7, em que permitiram que os participantes chegassem a uma mesma resposta por caminhos diferentes, pois os participantes poderiam relacionar as respostas através dos conteúdos que possuíam maior domínio. Neste momento, houveram alguns comentários como: *“Ah, que legal, eu preferi fazer essa questão como se fosse uma tabela”* e *“Pra mim, fica mais claro sempre na regra de três”*. Na Figura 12 foi mostrado um exemplo da questão 7 com essa situação.

Neste sentido percebemos que THA permitiu colocar em prática várias situações de aprendizagem e questionamentos dos participantes e a Modelagem proporcionou um

novo ambiente de ensino-aprendizagem, mais flexível e dinâmico onde foi valorizado as ideias dos participantes e a compreensão do professor.

Figura 12 – Questão 7 do questionário 2 do Planejamento P1.3 com forma diferente de resolução

**7. Qual foi o aumento de infectados nos gráficos das cidades acima, do dia 20 ao 24? E qual cidade teve o maior índice?**

Se considerarmos apenas a diferença entre a quantidade de infectados diariamente, temos que Dourados possui o maior índice de infectados, pois independentemente da quantidade de infectados temos um crescimento de:

CIDADE	DIFERENÇA DE INFECTADOS NOS DIAS DE QUARENTENA					TOTAL
	20	21	22	23	24	
<b>Campo Grande</b>	46	93	-30	-20	211	300
<b>Dourados</b>	30	84	227	144	192	677

7) Observando os gráficos não é possível observar os dados do dia, então vou responder considerando as semanas epidemiológicas.

Campo Grande: semana 20=96, semana 25=604. Assim,  $604-96=508$ .

Dourados: semana 20=37, semana 25=933. Assim,  $933-37=896$ .

Dourados teve um maior aumento dos casos confirmados, calculando o índice desse aumento temos na **semana 20**.

CG:  $896.000/8,96$  e  $96/8,96 - 10,7$  casos a cada 100 mil habitantes.

Dourados:  $223.000/2,23$  e  $37/2,23 - 16,6$  casos a cada 100 mil habitantes.

**Semana 25:**

CG:  $604/8,96 - 67,5$  casos a cada 100 mil habitantes.

Dourados:  $933/2,23 - 418,4$  casos a cada 100 mil habitantes.

O índice de Dourados teve um aumento, expressivamente, maior que o de Campo Grande.

7).Qual foi o aumento de infectados nos gráficos das cidades acima, do dia 20 ao 25? E qual cidade teve o maior índice?

A cidade de Campo grande teve um aumento de 18% nesse período e a cidade de Dourados teve um aumento de 24%. Sendo assim a cidade com maior aumento foi Dourados.

Fonte: Próprio autor (2021)

A avaliação da atividade ocorreu durante todas as etapas, por meio da participação escrita e oral e ao final da atividade ocorreu uma auto avaliação do participante com a finalidade de verificar como este via sua prática, uma reflexão envolvendo sua participação e suas dúvidas e também os questionamos sobre as mudanças que havíamos

realizado. Todos demonstraram em suas respostas que acharam interessante este movimento do planejamento.

O planejamento é o primeiro passo quando se quer elaborar algo, dessa forma, o professor inicia seu trabalho traçando uma THA e prepara as tarefas em uma determinada ordem, supondo o que poderá acontecer, porém sempre com objetivo didático. Este planejamento, apesar de ser o “norte da sua aula” precisa ser dinâmico e o trabalho utilizando Modelagem pode contribuir para isto. Neste encaminhamento, o Quadro 10 contém todas as alterações que ocorreram durante os planejamentos.

Quadro 10 – Quadro de alterações no Planejamento P1, P1.1 e P1.2

ORDEM DE ALTERAÇÕES	HISTÓRICO DE ALTERAÇÕES	PLANEJAMENTO
-----	Planejamento inicial	P1
Primeira alteração	Explicação sobre a Modelagem	P1.1
Segunda alteração	Adaptação do Questionário 1 do Planejamento P1	
Terceira alteração	Apresentação da Figura 8 com dois gráficos das cidades de Campo Grande e Dourados	
Quarta alteração	Adicionado as questões 6, 7 e 8 ao Questionário 2 do Planejamento P1	P1.2
Quinta alteração	Alteração das questões 4 e 5 do Questionário 2 do Planejamento P1.1	
Sexta alteração	Alteração da questão 7 do Questionário 2 do Planejamento P1.1	
Sétima alteração	Adicionado no Planejamento P1.1 conteúdos matemáticos que foram abordados na atividade	P1.3
Oitava alteração	Alteração no objetivo geral da atividade	
Nona alteração	Alteração no objetivo específico da atividade	
Décima alteração	Adicionado recursos que foram utilizados na atividade	

Fonte: Próprio autor (2021)

Foram dez alterações realizadas no Planejamento P1 e percebemos ao analisarmos tal planejamento que elaboramos uma trajetória com base no que queríamos discutir, sem considerar, por exemplo, que os participantes poderiam não querer falar da pandemia, visto que para nós era um tema interessante.

Ao propormos as discussões, percebemos que o tema estava saturado, que os participantes não estavam animados, então para tentar contornar a situação, sugerimos que cada um falasse sobre sua região e então fizemos uma alteração no Questionário 1, ou seja, mudamos a nossa trajetória.

A cada mudança, uma nova trajetória se formava, novas expectativas íamos criando e assim postamos na plataforma um planejamento bem diferente do inicial, o Planejamento P1.1.

Apesar das mudanças, novas demandas iam surgindo pois, as tarefas eram dinâmicas e assim com mais três alterações, nossa trajetória mudou novamente e nosso planejamento se transformou em Planejamento P1.2.

No desenvolvimento das trajetórias hipotéticas pensadas por Simon (1995), o dinamismo das tarefas depende dos participantes e do professor, pois este deve interpretar e relacionar o que é desenvolvido com a situação proposta. Acrescentar ou tirar tarefas tem o intuito de alterar os caminhos do desenvolvimento, pois várias ideias Matemáticas surgem no desenvolvimento de uma THA.

Ao realizarmos tais mudanças, refletíamos sobre o que os participantes interpretavam e o que estava escrito. Isto nos mostrou a importância de elaborar de forma clara os questionamentos, principalmente no que diz respeito em como imagino que se dará a justificativa e o encaminhamento dados pelos participantes.

Após tais reflexões alteramos a nossa THA, que denominamos de Planejamento P1.2. Essas alterações também se fizeram necessárias para que os participantes pudessem encaminhar a atividade de uma forma mais investigativa, sendo necessário interpretar e justificar as questões. Isso gera o levantamento de hipóteses que, segundo Simon (1995), traz segurança e autonomia para o professor desenvolver novas situações no processo de ensino e aprendizagem, podendo traçar novas estratégias metodológicas, envolvendo experiências vividas tanto sua quanto dos seus alunos para conseguir cumprir com seus objetivos para a aula.

Neste contexto, sentimos a necessidade de fazer mais alterações em nossa trajetória, uma vez que nossos objetivos foram se expandindo a cada alteração e então chegamos ao Planejamento P1.3, que foi a trajetória percorrida.

Ao comparar a THA inicial do Planejamento P1 com a trajetória final do Planejamento P1.3, percebemos que o dinamismo das tarefas propostas beneficiou tanto os participantes quanto o professor ministrante, pois as reflexões do uso da Modelagem com a THA é uma alternativa com muito recurso na preparação do planejamento do professor, para que o mesmo consiga desenvolver suas tarefas com competência.

Simon e Tzur (2004) propõe três tipos de tarefas: iniciais, reflexão e antecipação, as quais nesta atividade as tarefas iniciais foram reconhecidas no primeiro momento, durante a apresentação da atividade, em que os participantes puderam relatar suas

experiências, discutir o seu conhecimento prévio deixando os mesmos mais participativos para o desenvolvimento da atividade. As tarefas de reflexão foram identificadas durante o debate dos questionários, tivemos como objetivo proporcionar a interação dos participantes com a atividade, fazendo que o mesmo reflita e desenvolva os seus pensamentos em suas respostas. Por fim, as tarefas de antecipação foram desenvolvidas no momento que identificamos e analisamos se os participantes conseguiram compreender os conceitos aplicados nas atividades e se existiu uma regularidade no seu aprendizado.

Ao final da atividade, conseguimos perceber que a THA e a Modelagem podem caminhar juntas, pois uma atividade de Modelagem pode trazer várias maneiras de buscar por novas formas de aprendizagem. Mudar as rotas de um planejamento para aprimorá-lo é oportunizar “enxergar com outro olhar” o mesmo objeto estudado, é buscar características deste de outras maneiras e considerar que um planejamento pode ser modificável de acordo com a turma de alunos que está trabalhando pode ser uma possibilidade de alcançar o sucesso no ensino e conseqüentemente na aprendizagem.

#### **4.2 Desenvolvimento do segundo Planejamento (P2)**

Realizamos os encaminhamentos desta atividade, com base na primeira apresentada, utilizamos os mesmos grupos de comunicação. Iniciamos nosso encontro virtual (terceiro encontro) para desenvolver nosso Planejamento P2 com o tema das aulas sobre “Casa de câmbio – Conversão de moeda”. Iniciamos apresentando o tema, levantando hipóteses sobre o conhecimento dos estudantes, o que eles entendiam sobre casa de câmbio, operações de câmbio e se já realizaram alguma conversão de moeda. Este levantamento acerca do conhecimento dos participantes é uma característica da THA, para a construção das trajetórias hipotéticas no desenvolvimento da atividade.

Com as discussões sobre este tema, em primeiro momento percebemos que os participantes ficaram muito empolgados para conversar sobre operações de moedas, pois era um momento interessante em que muitas moedas estavam variando diariamente em relação ao real devido a pandemia. Com isso, houveram muitos comentários principalmente referente a alta do dólar e a desvalorização do real, como: *“você perceberam como o nosso dinheiro está ficando desvalorizado?”*, *“se o dólar continuar subindo assim nunca mais vamos para os Estados Unidos nunca”*, *“o problema do dólar subir tanto assim é que afeta demais a economia”* e *“está tudo ficando caro por aqui”*.

As questões iam surgindo de forma natural, alguns participantes do curso moravam em região de fronteira, logo, as discussões tomaram uma dimensão maior que tínhamos planejado. Foram utilizadas muitas justificativas para instabilidade do mercado financeiro com base na pandemia e nos dados do planejamento anterior: *“Até o final dessa pandemia um dólar vai estar dez reais”*; *“conforme aumenta a pandemia o poder de compra fica menor”*, *“Se você observar o aumento de casos, nos gráficos, você vê que é onde o dólar tem maior instabilidade”*.

Posteriormente às discussões, apresentamos o questionário 3, presente no capítulo de metodologia, referente ao tema da aula para responderem em duplas. Ao iniciar as discussões sobre este questionário notamos a necessidade de realizar a primeira alteração no Planejamento P2, pois logo na questão 1, quando os participantes comentaram o país que pretendiam visitar, alguns não sabiam sobre a moeda local e então alteramos para que os mesmos pesquisassem primeiro sobre a economia do país que queriam visitar de forma a aumentar o conhecimento e conseqüentemente conseguir desenvolver a atividade.

Seguindo com as discussões do questionário 3, encontramos nas questões 4 e 5 uma limitação de países quando perguntado aos participantes sobre uma maior e menor valorização de moeda em relação ao real. Neste sentido foi necessário fazer a segunda alteração no Planejamento P2 adicionando a pergunta “quais?”, no intuito dos participantes trazerem um maior número de países para as próximas discussões. Essas questões alteradas do Planejamento P2 estão no Quadro 11.

Quadro 11 – Questionário 3 alterado do planejamento P2 – Casa de câmbio - Conversão de moeda

1) Tem algum país que pretende visitar? Qual? Conhece a valorização de sua moeda?
2) Já fizeram alguma conversão de moeda?
3) Já frequentou uma casa de câmbio?
4) Conhece alguns países que sua moeda tem menor valor em relação ao real? Quais?
5) Conhece alguns países que sua moeda tem maior valor em relação ao real? Quais?
6) Vocês já viajaram para o exterior? Se sim, o real tinha maior ou menor valor neste local?

Fonte: Próprio autor (2021)

Ao final dessas discussões apresentamos a Figura 13 com o objetivo de contextualizar o tema e assim dar início ao debate do segundo questionário do Planejamento P2.

Figura 13 – Figuras do Planejamento P2 utilizadas para contextualização do tema Casa de Câmbio - Conversão de Moedas

*Para comprar 500 euros / Enviar 500 euros para a Europa*

PRODUTO	IMPOSTO (IOF)	TAXA DE CÂMBIO	VOCÊ PAGA EM REAIS:
Dinheiro	1,10%	4,16	R\$ 2.102,88
Cartão Pré-Pago	6,38%	4,16	R\$ 2.212,70
Transferência de Dinheiro	0,38%	4,23 + R\$96,00 de tarifa para o envio	R\$ 2.219,54


Fonte: [www.melhorcambio.com](http://www.melhorcambio.com)

A discussão da Figura 13 ficou em torno do tema viagens para o exterior, foi relacionado pelos participantes sobre o câmbio de moedas e suas valorizações e assim, em seguida, apresentamos o questionário 4, presente no capítulo de metodologia, e iniciamos as discussões acerca do mesmo. Já na primeira questão do questionário, citamos alguns locais de roteiro de viagens, como Europa, Estados Unidos e Argentina, neste momento um participante perguntou quanto equivale as moedas destes países em relação ao real, então para uma maior contextualização, percebemos que precisávamos complementar a questão. Com isso, fizemos a alteração da questão caracterizando como terceira alteração no Planejamento P2.

Quando debatemos a terceira questão do questionário 4 do Planejamento P2, como já havíamos feito várias discussões sobre viagens, os participantes citaram pontos turísticos que queriam conhecer, dessa forma, decidimos complementar a questão com outra pergunta, referente ao que pretende conhecer no país escolhido, sendo esta a quarta alteração no Planejamento P2. O questionário 4 alterado do Planejamento P2 se encontra no Quadro 12.

As alterações realizadas no questionário 4 fazem parte de novas hipóteses e estratégias que podem ser modificadas em uma atividade, isso ocorre devido a Modelagem proporcionar uma atividade aberta, em que o professor deixa os alunos mais participativos, contribuindo com suas ideias para construção o seu aprendizado.

Quadro 12 - Questionário 4 alterado do Planejamento P2 - Casa de Câmbio - Conversão de moeda

1) Quando chegar ao final desta pandemia muitas pessoas estão querendo viajar, mas já pensaram como serão essas viagens após a pandemia? Alguns estudiosos nos explicam melhor sobre isso nesta matéria <a href="https://www.agazeta.com.br/colunas/renata-rasseli/como-sera-o-turismo-pos-pandemia-e-specialistas-do-es-respondem-0420">https://www.agazeta.com.br/colunas/renata-rasseli/como-sera-o-turismo-pos-pandemia-e-specialistas-do-es-respondem-0420</a> . Pensando dessa forma estude alguns roteiros de viagens como Europa, Estados Unidos e Argentina. Vocês saberiam como está valorização destas moedas? Quanto equivale o real em relação às moedas: Peso Argentino, Euro e Dólar?
2) Com esta pandemia as viagens alteraram muito o seu valor?
3) Escolha qualquer local para fazer uma viagem, qual seria? O que pretende conhecer por lá?
4) Utilizando o local acima, pesquise um pacote de viagem referente a este local que gostaria de viajar e também faça alguns orçamentos de hotel e passagens por conta própria para descobrir qual compensa mais, comprar um pacote ou construir um?

Fonte: Próprio autor (2021)

Após as discussões do questionário 4, finalizamos a terceira aula e postamos as tarefas alteradas na plataforma. A partir deste momento refletimos sobre a atividade e nosso planejamento, pois se tratando de uma atividade de Modelagem, os participantes se sentem mais livres e nossas hipóteses de planejamento tendem a ser modificadas em busca de uma melhora no aprendizado e, para Simon (1995), a THA é como um recurso que o professor possui para o processo de ensino e aprendizagem, para atingir os objetivos de uma atividade, traçando novas hipóteses e interagindo com seus alunos.

Após postadas as tarefas, as mesmas já haviam sofrido quatro alterações, ou seja, o nosso planejamento inicial já havia sido modificado. A partir deste ponto, denominamos este novo planejamento de Planejamento P2.1. O planejamento nos ajuda a conhecer o que está sendo trabalhado e o que é essencial na aprendizagem dos alunos, sua reformulação é um processo simples na THA, mas implica que o professor necessite refletir no que pode ser melhorado e alterado no desenvolvimento da aula.

Quando os participantes começaram a enviar suas respostas, observamos que as primeiras modificações realizadas nas questões 1, 4 e 5 do questionário 3 agregaram positivamente, pois iríamos conseguir fomentar as discussões abordando uma variedade de países e a valorização de suas moedas. Para melhor visualização, os países abordados pelos participantes na atividade e suas respectivas valorizações de moedas se encontram no Quadro 13.

Quadro 13 – Países utilizados pelos participantes para responder as questões 1, 4 e 5 do questionário 3 do Planejamento P2.1

Maior valorização	Inglaterra Estados Unidos União Europeia (Portugal, França, Itália, Alemanha e Holanda)
Menor valorização	Paraguai Argentina Colômbia Japão

Fonte: Próprio autor (2021)

Ao interpretar as respostas enviadas pelos participantes para trabalhar as mesmas no quarto encontro, sentimos a necessidade de reformular a questão 6 do questionário 3, pois as respostas foram simplificadas se resumindo a: “nunca viajei”, “sim, menor valor” e “sim, o dinheiro lá era mais valorizado”. Com isso, para haver maior interação nas respostas decidimos realizar a quinta alteração no questionário 3 do Planejamento P2.1, que se encontra no Quadro 14.

Quadro 14 – Questionário 3 alterado do planejamento P2.1 – Casa de câmbio - Conversão de moeda

1) Tem algum país que pretende visitar? Qual? Conhece a valorização de sua moeda?
2) Já fizeram alguma conversão de moeda?
3) Já frequentou uma casa de câmbio?
4) Conhece alguns países que sua moeda tem menor valor em relação ao real? Quais?
5) Conhece alguns países que sua moeda tem maior valor em relação ao real? Quais?
6) Tem algum país que vocês pretendem visitar? Qual seria? Qual seria a valorização de sua moeda em relação ao real?

Fonte: Próprio autor (2021)

Em seguida, iniciamos as interpretações das respostas do questionário 4, em que percebemos que reformular as questões agregou os nossos debates e construção matemática para a atividade, como por exemplo, na questão 1, em que pelas respostas dos participantes conseguimos trabalhar sobre quanto o real equivale ao dólar, ao peso argentino e ao euro e quanto os mesmos equivalem ao real. Segue a Figura 14, com algumas respostas da questão 1 reformulada do Planejamento P2.

Figura 14 – Respostas da questão 1 do Planejamento P2.1 do tema Casa de Câmbio - Conversão de Moedas

1) Quando chegar ao final desta pandemia muitas pessoas estão querendo viajar, mais já pensaram como serão essas viagens após a pandemia? Alguns estudiosos nos explicam melhor sobre isso nesta matéria <https://www.agazeta.com.br/colunas/renata-rasseli/como-sera-o-turismo-pos-pandemia-especialistas-do-es-respondem-0420>. Pensando dessa forma estude alguns roteiros de viagens como Europa, Estados Unidos e Argentina, vocês saberiam como esta valorização destas moedas? Quanto equivale o real em relação às moedas: Peso Argentino, Euro e Dólar?

Sei sim como está a valorização, só não saberia dizer exato o valor da nossa moeda em cada lugar.

1 real equivale a:  
0,18 dólar americano  
13,95 peso argentino  
0,16 Euro

1)

1 Euro equivale hoje 6,62 Real brasileiro  
1 Dólar americano igual a 5,64 Real brasileiro  
1 Peso argentino igual a 0,074 Real brasileiro

Antes da pandemia o valor do dólar estava muito mais barato em torno de 4,01 reais em outubro de 2019 , e o euro a 4,54 reais.

Fonte: Próprio autor (2021)

Referente as respostas do questionário 4, notamos que os participantes não tiveram tantas dúvidas sobre como resolver as questões, devido a experiência com a primeira atividade, fizeram só “afirmações” de como iriam resolver o questionário, algumas delas foram: “*professor, entendi, vou fazer daquele mesmo jeito, com o conteúdo que acho mais fácil*” e “*professor, questionário recebido, acho que peguei o jeito para as respostas*”.

Ao lermos as respostas das questões 2 e 3 do questionário 4, percebemos elas que não permitiram que os participantes pesquisassem para responder, então decidimos alterá-las para que o participante interagisse mais com a resposta. Esta alteração foi realizada no Planejamento P2.1, sendo a sexta alteração que se encontra no Quadro 15. Segundo Simon (1995), o professor possui o papel de mediador em sala de aula, com isso o mesmo deve refletir em todos os processos da atividade, levando o mesmo a possíveis alterações em sua trajetória planejada.

Quadro 15 - Questionário 4 alterado do Planejamento P2.1 - Casa de Câmbio - Conversão de moeda

1) Quando chegar ao final desta pandemia muitas pessoas estão querendo viajar, mas já pensaram como serão essas viagens após a pandemia? Alguns estudiosos nos explicam melhor sobre isso nesta matéria <https://www.agazeta.com.br/colunas/renata-rasseli/como-sera-o-turismo-pos-pandemia-especialistas-do-es-respondem-0420>. Pensando dessa forma estude

alguns roteiros de viagens como Europa, Estados Unidos e Argentina. Vocês saberiam como está valorização destas moedas? Quanto equivale o real em relação às moedas: Peso Argentino, Euro e Dólar?
2) Com esta pandemia as viagens alteraram muito o seu valor? Pesquise pelo menos dois lugares fora do país e compare em qual momento (antes da pandemia ou no atual) teria feito uma maior economia nestas viagens.
3) Escolha qualquer local para fazer uma viagem, qual seria? O que pretende conhecer por lá? Quanto acha que irá gastar?
4) Utilizando o local acima, pesquise um pacote de viagem referente a este local que gostaria de viajar e também faça alguns orçamentos de hotel e passagens por conta própria para descobrir qual compensa mais, comprar um pacote ou construir um?

Fonte: Próprio autor (2021)

Após as alterações dos questionários a partir das respostas dos participantes, informamos os mesmos pelos grupos de comunicação que seria enviado novamente os questionários alterados. Tais alterações foram inseridas em um novo planejamento reformulado, o Planejamento P2.2. Essa reformulação foi realizada em busca de uma melhor compreensão dos participantes, entendendo suas dificuldades e com o intuito de estudar novos conteúdos que foram trazidos pelos mesmos para esta atividade.

Seguimos para a quarta aula, tentando sempre deixar um ambiente aberto para que todos pudessem participar e se envolver nas resoluções dos questionários. Primeiramente desenvolvemos as respostas do questionário 3, onde houve bastante interação dos participantes, como alguns moravam na cidade de Ponta Porã/MS, fronteira com o Paraguai, os mesmos relataram em sala suas experiências com conversões de moedas na sua região. Relataram que *“diminuiu bastante a quantidade de turistas que vem para fazer compras, pois o dólar está alto demais”*, *“quem mora aqui na região tem que saber fazer conversão usando guarani e o dólar”* e *“aqui é bom fazer a conversão do guarani e dólar para o real para conferir a compra, pois em muitos lugares os valores estão nessas moedas, fico com medo de alguém me passar a perna”*.

No decorrer da discussão do questionário analisamos também que a alteração realizada na questão 6 (quinta alteração) nos trouxe uma maior contextualização para a questão, com isso, conseguimos deixar o nosso debate mais rico, como por exemplo nas resoluções da Figura 15, em que mostra como alguns participantes responderam com detalhes, abrangendo variedades de discussões em sala de aula.

Durante o desenvolvimento da THA o planejamento inicial do professor permite que se sinta com maior segurança de trabalhar suas hipóteses em sala de aula, pensando

que as ideias para elaborar as tarefas dependem primeiramente das hipóteses criadas pelo professor no desenvolvimento da aprendizagem dos alunos.

Figura 15 – Questão 6 do questionário 3 do Planejamento P2.2 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas

**6) Tem algum país que pretende visitar? Qual seria? Qual seria a valorização da sua moeda em relação ao real?**

Sim, Angola que possui como moeda kwanza que tem valor equivalente como: 1 kwanza = 0,0091 real. África do Sul que possui como moeda rand que tem valor equivalente como: 1 rand = 0,32 real. Egito que possui como moeda libra egípcia que tem valor equivalente como: 1 libra egípcia = 0,35 real. Chile que possui como moeda peso chileno que tem valor equivalente como: 1 peso chileno = 0,0071 real.

6)

Tenho vontade de viajar para Machu Picchu, no Peru. A moeda utilizada no Peru, conforme pesquisei no endereço < <https://www.google.com/intl/pt-PT/googlefinance/disclaimer/> >, é chamada “Sol Peruano” e é mais valorizada do que o real, especificamente 1 sol peruano equivale a 1,51 reais, na data de 29/08/2020

Fonte: Próprio autor (2021)

Seguindo com a aula, entramos nos debates referente ao questionário 4, em que percebemos que a reformulação da questão 3 do questionário 4 (sexta alteração) foi de grande valia, pois os participantes conseguiram fazer parte da questão e responde-la de um modo particular, nos dando ideias de discussões. Neste momento, até os participantes que responderam de uma forma simplificada pediram a palavra para contar qual seria o seu roteiro de viagem e seus objetivos com a mesma. Isso gerou vários comentários como “*nossa, fiquei morrendo de vontade de ir para Lisboa*” e “*cara, sempre tive vontade de conhecer o Egito também, baseando nesse seu orçamento aí acho que vou começar a juntar dinheiro*”.

Segue algumas resoluções diversificadas da questão 3, presente no Planejamento P2.2 mostradas na Figura 16, abordando diferentes roteiros de viagem.

Figura 16 – Questão 3 do questionário 4 do Planejamento P2.2 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas

3) Escolha qualquer local para fazer uma viagem, qual seria? O que pretende conhecer por lá? Quanto acha que irá gastar?

Lisboa no período de baixa temporada  
 Passagem 2,705  
 Hotel mediano 60 euro cerca de 397,79 reais  
 Hostel 15 euros 99,45 reais  
 Passeios em museus 40 euro cerca de 265,20 reais  
 Transporte € 2 nos ônibus e metrô, e € 3 no bonde (elétrico).  
 Alimentação em torno de € 10 cerca de 66,30 por dia

Gastaria um total 4.906,30 reais  
 Para ir em Lisboa do dia 2 de abril a 10 de abril de 2021 com a cotação que está hoje.



3)

Nós visitaríamos o Egito para conhecermos os monumentos egípcios e, segundo o site Pé na Estrada, teríamos o gasto médio de:

- USD 75 com hospedagem;
- EGP 90 com café, almoço e janta;
- EGP 2 por viagem de metrô ou de ônibus;
- EGP 80 para ver a pirâmide + EGP 200 para entrar em uma;
- EGP 75 para ver o Museu do Cairo + EGP 100 para ver as múmias;

Assim, se queremos visitar todos esses locais teríamos o gasto de EGP 455 apenas nesses pontos turísticos, mais EGP 90 por dia para alimentação e USD 75 por dia de hospedagem.

Sabendo que EGP = libra egípcia e custa cerca de 0,34 reais e que USD = dólar americano e custa 5,31 reais.

Possivelmente teria a necessidade de vermos esses dois pontos turísticos em dias diferentes e seria bacana conhecer a cultura local aumento em mais dois dias nossa viagem, sendo assim, para segurança, vamos arredondar para 5 dias.

Logo, são 5 dias de hospedagem o que dá  $5 * USD 75 = USD 375$ , convertido dá 1992 reais aproximadamente.

Mais, 5 dias de alimentação o que dá  $5 * EGP 90 = EGP 450$ , convertido dá 151 reais aproximadamente.

Mais, os passeios que dão cerca de EGP 455 que deve dar aproximadamente 155 reais.

Mais o transporte, que não investigamos (+T). O que dá aproximadamente 2300 reais+T.

Fonte: Próprio autor (2021)

Posteriormente, seguindo com as discussões do questionário 4, a questão 4 faz uma comparação entre comprar um pacote ou construir um e alguns participantes fizeram alguns comentários sobre o tema, como: “*prefiro muito mais construir um, me sinto mais*

livre”, “comprando um pacote tenho menos dor de cabeça na viagem” e “só tem que cuidar para comprar um pacote de uma empresa séria”. A Figura 17 mostra algumas respostas onde os participantes divergiram sobre como seriam os gastos de viajar com um pacote pré-definido ou construir um.

Figura 17 – Questão 4 do questionário 4 do Planejamento P2.2 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas

4) Utilizando o local acima, pesquise um pacote de viagens referente a este que gostaria de viajar e também faça alguns orçamentos e de hotel e passagens por conta própria para descobrir qual compensa mais, compra um pacote ou construir um?

10 dias|

Passagens - 6500,00 ida e volta  
Hotel- 300,00 a diária

$6500 + 3000 = 9500,00$

Montar o pacote na minha concepção está mais em conta. Mas é claro que tudo depende de várias variáveis.

4)

Segundo o site Decolar.com, para ficarmos 5 dias hospedados em Cairo no Egito mais passagem de ida e volta, gastaríamos cerca de 6.300 reais e mais nossas despesas avulsas sairia  $6600 + T$ . Entretanto, segundo esse site, apenas a passagem sairia 5.500 reais, o que somado com as nossas despesas avulsas daria 7800 reais + T.

Portanto, procurando um pacote apenas no site Decolar.com sairia 1200 reais mais barato.

Fonte: Próprio autor (2021)

Ao terminar as discussões dos questionários, encerramos a quarta aula com o Planejamento P2.2. A reformulação dos questionários deixou os participantes mais entusiasmados, trazendo novos conteúdos para serem trabalhados em sala de aula. Ao interpretar as resoluções e discussões ocorridas durante a aula, observamos que os participantes abordaram alguns conteúdos que não estavam previstos em nosso Planejamento P2, com isso, adicionamos os conteúdos que também foram estudados nesta atividade ao Planejamento P2.2, tais conteúdos foram: Razão e proporção; Expressões numéricas; Probabilidade e Decimais e dízimas. Esta foi a sétima alteração, fazendo parte do novo Planejamento P2.3.

Com isso, sentimos a necessidade também em adicionar alguns pontos e reformular os objetivos específicos em busca de deixar os mesmos mais completos, visto que a reformulação do mesmo pode deixar o professor mais preparado e contribuir para

o aprendizado dos participantes, os novos objetivos específicos que se encontram no Planejamento P2.3, estão no Quadro 16.

Quadro 16 – Objetivos específicos do Planejamento P2.3 - Casa de Câmbio - Conversão de Moedas

Efetuar cálculos e resolver problemas envolvendo probabilidade e regra de três;
Utilizar porcentagem relacionando a valorização de diferentes moedas;
Efetuar cálculos e expressões numéricas envolvendo conversão de moedas;
Definir conceitos para conversão de moedas;
Trabalhar decimais e dízimas com transformações de moedas;
Trabalhar com os conteúdos utilizando contextos reais.

Fonte: Próprio autor (2021)

Devido a experiência com a atividade anterior, não sentimos a necessidade de alterar os recursos utilizados nesta atividade e o objetivo geral da mesma, pois deixamos ambos mais completos para esta atividade utilizando como base os itens reformulados do último planejamento da atividade 1. Logo, finalizamos o planejamento da atividade, com todas as modificações que se fizeram necessárias, este planejamento final chamamos de Planejamento P2.3

Assim como na primeira atividade, a avaliação ocorreu durante todas as etapas, por meio da participação escrita, envolvendo as resoluções dos questionários, e oral, a partir da reflexão dos participantes trazendo suas dúvidas e afirmações para as discussões em sala de aula. Ao final também ocorreu uma auto avaliação do participante com a finalidade de verificar o seu aprendizado com as alterações do planejamento.

Com o encerramento da atividade, percebemos que os participantes conseguiram deixar expostas suas resoluções, interagindo uns com os outros e com o professor. Foi possível observar que as reformulações do planejamento fomentaram os debates de forma coletiva em sala de aula, nos permitindo pensar diferente, utilizando novas estratégias afim de trazer uma nova compreensão sobre a atividade. Pensando que a Modelagem nos possibilita encontrar e trabalhar as dificuldades dos alunos com os conteúdos e suas interpretações, traçando novas estratégias para uma maior interação do professor com o aluno, conseqüentemente desenvolver a atividade com um melhor aproveitamento.

Sabendo que o planejamento é o início do trabalho do professor, a partir deste momento começa a ser traçada uma THA, em que o mesmo prepara as suas tarefas, tenta prever o que pode ocorrer durante a atividade e faz o seu objetivo didático. Este planejamento é seu ponto de referência e para uma atividade de Modelagem o mesmo

pode ser bastante dinâmico. No Quadro 17 contém todas as alterações que ocorreram durante os planejamentos da segunda atividade.

Quadro 17 – Quadro de alterações no Planejamento P2, P2.1 e P2.2

ORDEM DE ALTERAÇÕES	HISTÓRICO DE ALTERAÇÕES	PLANEJAMENTO
-----	Planejamento inicial	P2
Primeira alteração	Adaptação da questão 1 do Questionário 3 do Planejamento P2	P2.1
Segunda alteração	Adaptação da questão 4 e 5 do Questionário 3 do Planejamento P2	
Terceira alteração	Adaptação da questão 1 do Questionário 4 do Planejamento P2	
Quarta alteração	Adaptação da questão 2 do Questionário 4 do Planejamento P2	
Quinta alteração	Alteração das questões 6 do Questionário 3 do Planejamento P2.1	P2.2
Sexta alteração	Alteração da questão 2 e 3 do Questionário 4 do Planejamento P2.1	
Sétima alteração	Adicionado no Planejamento P2.1 conteúdos matemáticos que foram abordados na atividade	P2.3
Oitava alteração	Alteração no objetivo específico da atividade	

Fonte: Próprio autor (2021)

Da primeira à quarta alteração ocorreram no Planejamento P2, nos questionários 3 e 4, elaboramos uma trajetória para debater e discutir as questões com os participantes, porém foi necessário realizar essas alterações, pois percebemos que os participantes em alguns momentos não estavam muito motivados para trabalhar os questionários propostos inicialmente, assim buscamos trazer os participantes para a atividade, deixando os mesmos mais interessados e mais participativos.

Com esta mudança, alteramos a nossa trajetória previamente planejada, com novas hipóteses que surgiram no desenvolvimento da aula, reformulando o nosso Planejamento P2 para o Planejamento P2.1.

Essas não foram as únicas alterações realizadas nos questionários, pois conforme os alunos iam respondendo, fomos percebendo que poderíamos deixar as tarefas mais dinâmicas, assim a quinta e sexta alteração ocorreram no Planejamento P2.1, em que observamos as respostas postadas pelos participantes e encontramos a necessidade de adaptar as questões em busca de respostas mais abrangentes, tentando não influenciar nas repostas dos participantes, apenas direcionando-os, com isso, alteramos três questões dos questionários 3 e 4.

Para contribuir e expandir a THA proposta, o professor media e define as suas trajetórias iniciais e, a partir deste momento, começa a trabalhar possíveis dúvidas, estudar diferentes rumos e conteúdos no desenvolver da atividade. Assim, com a interação do professor e aluno o mesmo pode alterar suas trajetórias iniciais para desenvolver um trabalho mais amplo e refinado em sala de aula (SIMON, 1995).

Ao final da quarta aula foi percebido que trabalhamos com novos conteúdos que não estavam no nosso planejamento inicial e sentimos a necessidade de complementar os conteúdos e alterar nossos objetivos específicos, no intuito de melhorar a aprendizagem dos alunos. Essas modificações fazem parte do Planejamento P2.3, que foi a trajetória percorrida.

A construção do Planejamento P2 até o P2.3 foi realizada a partir do dinamismo das aulas e das reflexões nas alterações dos planejamentos iniciais, essa reflexão ocorreu durante as aulas e interpretação das repostas dos questionários. O procedimento de reflexão da THA foi muito importante nas reformulações dos planejamentos e a Modelagem nos oportunizou um ambiente propício para a aprendizagem.

Referente aos três tipos de tarefas propostas por Simon e Tzur (2004), a primeira, que são as tarefas iniciais, identificamos durante a apresentação da atividade, em que apresentamos o tema da aula e os questionários que seriam desenvolvidos e pudemos observar o que os alunos compreendiam sobre o assunto, deixando os mesmos relatarem suas experiências. A segunda tarefa, é a de reflexão, nesta atividade ela foi identificada durante as discussões e debates acerca dos questionários, permitindo a reflexão dos participantes nas respostas trabalhadas em sala, interagindo com as questões desenvolvidas. Por fim, a terceira tarefa é a de antecipação, onde foi realizada no momento que analisamos se os conceitos desenvolvidos na atividade foram compreendidos pelos alunos e se existiu a validação da mesma no aprendizado dos participantes.

Ao concluir esta atividade, reforçamos o que compreendemos ao final da atividade 1, onde a THA e a Modelagem conseguem caminhar em conjunto, trabalhando por caminhos distintos e proporcionando um outro olhar para o objetivo estudado, de forma que a THA pode modificar o nosso planejamento de acordo com a turma, necessidade e realidade dos alunos e a Modelagem como uma estratégia pedagógica, envolvendo conceitos reais, trazendo novas formas de aprendizagem.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As trajetórias hipotéticas propostas por Simon (1995) podem ser utilizadas como instrumentos na reformulação de planejamentos, tornando-os mais flexíveis e potencializando a aprendizagem de uma atividade envolvendo Modelagem, possibilitando que o professor tenha em mãos alternativas que os alunos podem percorrer no desenvolvimento de uma atividade. Lembrando da importância de planejar a aula, tentando contemplar todas as possibilidades e situações que surgirão em sala de aula utilizando as ideias dos alunos, deixando o professor mais confiante e preparado para os questionamentos que os alunos podem trazer.

Esta pesquisa teve como intuito responder a questão norteadora sobre ‘quais os impactos na prática do professor, quando o mesmo planeja e utiliza atividades de Modelagem Matemática com auxílio da Trajetória Hipotética da Aprendizagem?’. Assim, foi desenvolvido um curso de Matemática básica com duas atividades, com a finalidade de analisar os planejamentos elaborados durante a aula e, se caso houvesse necessidade de alteração, modifica-los, nos permitindo contemplar novas ideias e formas de pensar. O impacto na prática do professor ao trabalhar os seus planejamentos das aulas, foi que a THA garante a possibilidade de ir e vir na trajetória e a Modelagem oportunizar ao aluno a maior participação, permitindo ao professor enxergar onde estão as dificuldades do mesmo. Com isso, o professor pode avaliar e reformular os planejamentos trabalhados com o intuito de aprimorar o desenvolvimento da sua aula.

Logo, as atividades envolvendo a teoria e a estratégia pedagógica nos dão um suporte de uma nova postura diante dos estudantes e das situações propostas em uma atividade, deixando o professor mais reflexivo em relação ao objeto matemático e em relação a situação problema.

As trajetórias hipotéticas estudadas neste trabalho possuem o anseio de fomentar atividades a respeito dos temas propostos, devendo ser exploradas e modificadas pelo professor, enriquecendo as atividades, principalmente ao trabalhar em conjunto com a Modelagem proporcionando aos estudantes contextos reais para aprendizagem, deixando os mesmos mais participativos no desenvolver da atividade.

Verificamos que as trajetórias hipotéticas construídas por este professor estão relacionadas ao seu conhecimento matemático e do aluno em relação à situação problema proposta e também ao conhecimento do professor sobre os alunos e suas realidades. Ou seja, percebemos o quanto é importante esta construção de trajetórias hipotéticas feita

pelo professor, assim suas experiências e dificuldades influenciam na produção das trajetórias e, em especial, do ambiente sala de aula.

Desse modo, constatamos que trabalhar com Modelagem motivou os alunos a abordar diferentes informações para a atividade, isso provocou mudanças nas nossas trajetórias iniciais, se tornando uma excelente ferramenta para a prática pedagógica, favorecendo um ótimo ambiente de aprendizagem.

Vislumbramos também que no decorrer de uma atividade os alunos tiveram algumas facilidades e dificuldades, pois apesar de utilizarem nas resoluções os conteúdos de maior domínio, tinham que compreender as resoluções dos outros participantes, sendo estas fora do seu conhecimento. Quanto mais foi levado em consideração seus questionamentos, mais detalhada e enriquecida se tornava sua trajetória, assim, a mesma se transforma em um instrumento pedagógico de exploração relacionando tudo que o professor possa saber sobre os conteúdos e sobre os alunos.

Com isso, um aprendizado para o professor é que para estratégias pedagógicas darem certo em uma atividade é essencial sua reflexão, visto que o professor tem que estar preparado para refletir ao encontrar novos caminhos e questionamentos no decorrer da aula. A reflexão do professor é essencial para qualquer que seja as alterações em seu planejamento, pois o professor reflexivo consegue ter uma maior consciência da sua realidade e dinâmica da sua metodologia, sempre buscando aumentar sua capacidade docente para o aprimoramento das suas atividades propostas.

Fazendo uma reflexão sobre o desenvolvimento das atividades, em alguns momentos foi percebido que em determinados questionamentos o professor não refletiu de forma ampla e, conseqüentemente, acabou não abordando todas as possibilidades com os alunos, prejudicando o processo dessa atividade, logo, foi percebido que essa falha limitou o debate de novas formas de pensar e possíveis fontes de aprendizagem. Os conceitos estudados neste trabalho nos trazem que quando mais ampla for a reflexão, maior é o aproveitamento pelos alunos em relação a aprendizagem. O professor deve estar aberto a todo momento, conduzindo a atividade para não deixar passar algum questionamento importante, como percebemos que aconteceu, porém em seguida refletimos e repensamos no que foi proposto. Assim, notamos que a utilização da THA e Modelagem nessas atividades facilitou o desenvolvimento da aula e, conseqüentemente, houve a melhora no aprendizado dos estudantes.

Geralmente, muitas hipóteses podem ser previstas em uma THA, devido a vários caminhos pelos quais os alunos podem percorrer ao se envolverem em uma atividade de

Modelagem, dessa forma, é muito importante o estudo do planejamento do professor para com a atividade. Pensamos também que no momento que o professor precisa reformular sua estratégia para motivar e entusiasmar os alunos, ele se questiona sobre qual seria a melhor forma de fazer este processo e que tipo de perguntas o professor deve se utilizar para se aproximar melhor do aluno e dos conteúdos.

Uma opção de estudo paralelo a esta pesquisa, é um pesquisador trabalhar em conjunto com um professor, com este desenvolvendo uma atividade de Modelagem juntamente com a THA em uma sala presencial, ou seja, com uma visão externa do desenvolvimento da atividade. A partir disso, o pesquisador analisa as reflexões realizadas pelo professor em seu planejamento, avaliando-o em suas atitudes na condução da atividade e sua forma de pensar.

Portanto, consideramos que as atividades relacionando Modelagem com a THA podem ser construídas potencializando o trabalho do professor em um ambiente de aprendizagem e podem apresentar-se como uma estratégia de formação docente. Entendemos que a utilização da THA e da Modelagem coloca em prática a valorização de um trabalho docente flexível e dinâmico, evidenciando os planejamentos e a investigação tanto do aluno quanto do professor.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, Lourdes Marai Werle; BRITO, Dirceu dos Santos. **Atividades de Modelagem Matemática**: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência e Educação*, v.11, n. 3, p. 483- 498, 2005.
- ALMEIDA, Lourdes Marai Werle; DIAS, Michele Regiane. **Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem**. *Bolema*, ano 17, n. 22, p.19-35, 2004.
- ALMEIDA, Lourdes Werle de. **Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise**. *Zetetiké*. Campinas, SP, v. 18, p.387-414, 2010.
- ALMEIDA, Lourdes Werle de; FERRUZZI, Elaine Cristina. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. Alexandria. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 117-134, 2009.
- ALMEIDA, Lourdes Werle de; SILVA, Karina Pessôa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Modelagem Matemática na educação básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2012.
- BALL, Deborah Loewenberg., THAMES, Mark Hoover, PHELPS, Geoffrey Charles. Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? **Journal of teacher education**, 59(5), p 389-407. 2008.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: Reunião Anual da ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais....** Rio de Janeiro: ANPED, 2001.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**, 2ª ed. São Paulo: Contexto, 2004.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**, 3ª ed. São Paulo: Contexto, 2006.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2011.
- BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.
- BIEMBENGUT, Maria Salete; HEIN, Nelson. **Modelagem Matemática no Ensino**. 4 ed. – São Paulo: Contexto, 2005.
- BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem Matemática & Resolução de Problemas, Projetos e Etnomatemática: Pontos Confluentes. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 197-219, 2014.
- BIEMBENGUT, Maria Sallet. HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo, SP. Editora Contexto, 2011.

- BOGDAN, Robert C. e BIKLEN, Sari K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.
- BRASIL. MEC. SEF. **Parâmetros Curriculares Nacionais** – Ensino Médio, 1998.
- BROUSSEAU, Guy. **Didactique des mathématiques et questions d’enseignement**: Propositions pour la géométrie. *Les sciences de l’éducation*, 1–2, 69–85, 1987
- BRUNER, Jerome S. **O processo da educação**. São Paulo, Editora Nacional, 1978.
- BURAK, Dionísio. **As diretrizes curriculares para o ensino de matemática e a modelagem matemática**. In: PERSPECTIVA, Publicação da Univ. Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões. Erechim/RS: Edifapes, v. 29, nº 107, setembro 2005, p. 153 – 161.
- BURAK, Dionísio. Modelagem matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**. Vol. 1, n. 1, p. 10-27 2010.
- BURAK, Dionísio. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. 1992. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas. Campinas.
- BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de Matemática na 5ª série**. 1987. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.
- D’AMBROSIO, Ubiratàn. **Como Ensinar Matemática Hoje?** SBEM, Brasília, ano 2, n.2, p.15-19, 1989.
- D’AMBROSIO, Ubiratàn. **Da realidade à ação**: reflexos sobre educação e matemática. São Paulo:Summus, 1986.
- D’AMBROSIO, Ubiratàn. **Etnomatemática** – elo entre as tradições e a modernidade. Belo Horizonte: Autêntica, 2005, 2ª ed. 1ª reimp.
- DA SILVA, Eduardo Robini; SAVARIS, Thiago; MARCHALK., André Luiz;CASTILHOS, Nádia Cristina; TONDOLO, Vilmar Antônio Gonçalves. Caracterização das pesquisas de teses em administração com abordagem qualitativa. **Revista de Administração de Roraima UFRR**, Boa Vista, RR, v. 6, n. 1, p. 194-223, 2016.
- FERNANDES, Renata Karoline; PIRES, Magna Natalia Marin. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem**: Construindo o Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais. XI ENEM, Curitiba, 2013.
- FIORENTINI, Dario; CASTRO, Franciana Carneiro. **Tornando-se professor de Matemática: O Caso de Allan em prática de ensino e estágio supervisionado**. In: FIORENTINI, D. (org) Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares. Campinas: Mercado de Letras, 2003
- GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2010.

- GÓMEZ, Pedro. GONZÁLEZ, Maria Jose. LUPIÁÑEZ, Jose Luis. **Adapting the Hypothetical Learning Trajectory Notion to Secondary Preservice Teacher Training**. Chipre: Universidade de Chipre, 2007.
- GRAVEMEIJER, Koeno. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. **Mathematical Thinking and Learning**, vol. 6, n. 2, p. 105-128.
- KAISER, Gabriele; SRIRAMAN, Bharath. **A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education**. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. v.38, n.3. p.302-310, 2006.
- KEHLE, Paul; CUNNINGHAM, Donald J. Semiotics and mathematical modeling. **International Journal of Applied Semiotics**, n.3, p.113-129, 2002.
- LAKATOS, Eva Maria; MARCONI, Marina de Andrade. **Metodologia científica**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2011.
- LESH, Richard. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, 2(1), 2010, 16-48.
- MEYER, João Frederico da Costa; CALDEIRA, Ademir Donizete; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.
- OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização: estudo de um processo**. 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.
- PIAGET, Jean. **A epistemologia genética**. Petrópolis: Vozes, 1971.
- PIRES, Célia Maria Carolino. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon**. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 2009.
- RICHARDSON, Roberto Jarry. **Pesquisa social: métodos e técnicas**. 3. ed. São Paulo, SP: Atlas, 2007.
- ROSA, Cláudia Carreira. **Um estudo do fenômeno de congruência em conversões que emergem em atividades de Modelagem Matemática no Ensino Médio**. 2009. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.
- ROSA, Claudia Carreira. **A formação do professor reflexivo no contexto da Modelagem Matemática**. 2013. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013.
- SADOVSKY, Patricia. **O ensino da Matemática hoje: enfoques, sentidos e desafios**. São Paulo: Ática, 2010.
- SANCHES, Isabel. Compreender, agir, mudar, incluir: da investigação-ação à educação inclusiva. **Revista Lusófona de Educação**, v. 5, n. 5, p. 127-147, 2005.

- SHULMAN, Lee S. **Those who understand**: knowledge growth in teaching. Educational Research, n. 15 (2), pp. 4-14, 1986.
- SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.
- SIMON, Martin A. **Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective**. *Journal for research in Mathematics Education*, Vol. 26, n° 2. p. 114-145, 1995.
- SIMON, Martin A; TZUR, Ron. **Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning**: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. Livro: *Mathematical Thinking and Learning* – p. 91-104 – 2004 – Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Pensilvania – EUA.
- STEFFE, Leslie P. (1994). **Children’s construction of meaning for arithmetic words: A curriculum problem**. In: *Implicit and explicit knowledg: An educational approach*. Norwood, Ablex Pub. Corp.
- STEFFE, Leslie P. **On the Construction of Learning Trajectories of Children**: The Case of Commensurate Fractions. Livro: *Mathematical Thinking and Learning*, p.129-162, 2004, Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Pensilvania – EUA.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **A learning-teaching trajectory as a hold for teaching primary-school mathematics in the Netherlands**. In: *Didactics of Mathematics and Informatics in Education. 5th Panhellenic Conference with International Participation*. 2001a. p. 21-39.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Los niños aprenden matemáticas**. México: Correo del maestro: La vasija, 2010a.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. **Mathematics education in the Netherlands**: A guided tour. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University, 2000a.