Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Douglas Fonseca Rodrigues

Modelagem Matemática no Ensino de Função Afim

Campo Grande - MS

2021

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação

Mestrado Profissional em

Matemática em Rede Nacional

Douglas Fonseca Rodrigues

Modelagem Matemática no Ensino de Função Afim

Orientadora Profa. Dra. Lilian Milena Ramos Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande - MS

2021

Modelagem Matemática no Ensino de Função Afim

Douglas Fonseca Rodrigues

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela banca examinadora:

Profa. Dra. Lilian Milena Ramos Carvalho (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Prof. Dr. Alex Ferreira Rassini
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profa. Dra. Glaúcia Maria Bressan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Campo Grande - MS, 03 de dezembro de 2021

"O sucesso é a soma de pequenos esforços repetidos dia após dia."

Robert Collier

Agradecimentos

Dedico este trabalho e o sucesso de todo o meu percurso no PROFMAT, a Deus, e a Nossa Senhora da Penha da qual são tão devoto, a minha meu pais Dirce e Isidoro que me deram tanta força e aos amigas Valquiria e Valéria que estiveram ao me lado, mostrando a importância de persistir e nunca desistir.

A professora e orientadora Dra Lilian Milena Ramos Carvalho que não poupou esforços em dar as devidas orientações e apoio para que este trabalho pudesse ser realizado com êxito.

Aos professores que ministraram as disciplinas no decorrer do curso em que propiciaram e aprimoramento do conhecimento matemátiico.

Por último aos colegas de curso que deram forças e constribuições nos grupos de estudos para que todos pudessem concluir o PROFMAT com êxito.

Resumo

O presente estudo tem como objetivo mostrar como a Modelagem Matemática, vista como uma ferramenta educacional, pode contribuir de forma significativa na construção do conhecimento matemático do conceito função afim. O desenvolvimento do trabalho passa por três etapas: Na Primeira, o conceito de modelagem matemática é tratado como uma possibilidade de metodologia para o ensino de matemática. Na Segunda, são mostrados exemplos de como a modelagem matemática pode ser uma ferramenta imprescindível no ensino de conceitos matemáticos e, finalmente, sua aplicabilidade ao conceito de função afim é analisada.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Ensino-aprendizagem , função afim

Abstract

The gift study aims to show how Mathematical Modeling, seen as an educational tool, can significantly contribute to the construction of mathematical knowledge of the concept of affine function. The development of the work goes through three stages: In the First, the concept of mathematical modeling It is treated as a possibility of methodology for teaching mathematics, in the Second, examples are presented of how mathematical modeling can be an essential tool in the teaching of mathematical concepts and, finally, your applicability to the concept of affine function is analyzed.

Keywords: Mathematical Modeling, teaching-learning, Affine Function

Sumário

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

A matemática apresenta uma linguagem concisa, exata e que permite soluções criativas de problemas. Em seu nível atual de desenvolvimento, ela está sendo utilizada em quase todos os ramos da atividade humana, sendo fundamental para o desenvolvimento científico e tecnológico, permitindo que diferentes situações problemas do mundo real possam ser modelados. Neste sentido, a Modelagem Matemática corresponde àquela parte da matemática que liga os problemas reais que queremos resolver, com aqueles que exigem respostas quantitativas, sejam eles provenientes da indústria, da medicina, da economia, da biologia e, em particular do ensino de matemática.

Neste contexto estamos interessados, particularmente, em utilizar a matemática para descrever situações problemas detectadas a partir de situações reais, observando as principais etapas que envolvem este procedimento (modelagem matemática) e direcionar estas ideias no sentido de aplicá-las ao ensino de matemática. Assim, o objetivo deste trabalho é analisar os diferentes conceitos de modelagem matemática, alguns exemplos de como ela pode ser aplicada no ensino de matemática e como ela pode contribuir como ensino de funções afim.

Dessa maneira será feita uma apresentação de conceitos e informações, a iniciar pelo capítulo dois, no qual será apresentado o referencial teórico que foi utilizado na realização deste trabalho, entre eles, a definição de Modelagem Matemática e no que ela difere de modelo matemático, como a Modelagem Matemática está presente no ensino, isto é, nas aulas de matemática, em que o professor opta por essa estratégia de ensino. No capítulo três, serão apresentadas três propostas de atividade em que os alunos se mobilizaram e criaram um modelo matemático, em que será apresentada como a Modelagem Matemática promove uma aprendizagem significativa, oferendo ao professor uma possibilidade no ensino da matemática nas escolas de ensino fundamental e médio. Por último são apesentados os resultados do trabalho com a Modelagem Matemática e a sua viabilidade nas escolas do país.

Capítulo 2

Referencial Teórico

Na literatura, encontramos muitas definições de modelagem matemática. Para Burak (1992, p. 62), por exemplo, a Modelagem Matemática é "um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

Isto pode significar que algumas etapas precisam ser obedecidas, conforme estabelecido por [BASSANEZI, 2002].

1. Formular o modelo real: O problema a ser formulado pode ser explicar alguns dados observados, fazer algumas predições ou tomar uma decisão.

2. Estabelecer hipóteses para este modelo: Fazer algumas suposições simplificadoras, identificar variáveis importantes, bem como estabelecer ligações possíveis entre elas.

3. Formular o problema matemático: As suposições feitas e as possíveis ligações entre as variáveis importantes vão constituir o modelo matemático, que geralmente leva a um problema matemático de algum tipo.

4. Resolver o problema matemático: Utilizar técnicas matemáticas apropriadas.

5. Interpretar a solução: As soluções do problema matemático devem ser interpretadas à luz do problema real.

6. Validar o modelo: Averiguar se a solução teórica está em concordância com as observações feitas a partir de situações reais. Ou seja, verificar se a solução do problema matemático descreve com uma boa aproximação os resultados esperados para o problema real.

7. No caso de existir boa correlação entre os resultados teóricos e os observados, o modelo matemático pode ser utilizado para explicar, predizer ou tomar decisões.

Em geral, os professores de matemática têm um olhar apenas para o item 4. Isto tem sido um problema, pois, a sequência estabelecida de 1 a 7 possui uma importância enorme no ensino de matemática. Com base no exposto, dois importantes conceitos devem permanecer claros:

1. Partimos de um problema real e o transformamos, por meio de um modelo matemático, em um problema matemático.

2. Resolvemos o problema matemático e interpretamos sua solução em termos do problema real.

No processo de modelagem de problemas do mundo real podem existir variações nas sete etapas apresentadas. Entretanto, todas elas dizem a mesma coisa. Mas, as abordagens em sala de aula podem ser muito diferentes no objetivo e na forma de implementação. Antes de atacar o problema da modelagem matemática em sala de aula, podemos perguntar:

O que é Modelagem Matemática e Modelo Matemático? A despeito de encontrarmos na literatura muitas definições sobre modelagem matemática e modelo matemático, optamos por acatar os seguintes conceitos estabelecidos por [BASSANEZI, 2015] p.26 , que afirma que a modelagem matemática é a "arte de transformar problemas reais em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando as soluções em termos da linguagem do mundo real". Enquanto que "Modelo Matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam, de alguma forma, o objeto estudado."[BIEMBENGUT, 2003] p.89.

A modelagem Matemática pode ser utilizada por várias razões, que dependem de determinados objetivos. Neste trabalho, pretendemos utilizar a modelagem matemática com o objetivo de aplicá-la ao ensino de matemática.

2.1 A Modelagem Matemática no Ensino

As sete etapas do processo de modelagem, que vimos na seção anterior, podem possuir muitas variações dependendo do contexto em que são aplicadas. De fato, quando procuramos aplicá-las em sala de aula, as abordagens podem ser muito diferentes, tanto no objetivo, quanto na implementação. [GALBRAITH, 2012] propôs três abordagens de ensino utilizando modelagem:

1. **Aplicações generalizada:** Esta abordagem concentra-se em uma aplicação específica. Normalmente, o professor ensinou o modelo e os alunos o manipulam sob condições controladas. Ela é comum em salas de aula do ensino médio e, geralmente, envolve apenas as etapas 4 e 5 do processo de modelagem. A intenção é que os estudantes adquiram experiências interpretando e analisando problemas matemáticos e apliquem a matemática para modelar situações reais.

2. **Modelagem Estruturada:** A abordagem de modelagem estruturada usa situações da vida real e processos de modelagem completa seguindo as etapas de 1 a 7. Nesta abordagem os professores exercem considerável controle sobre o modelo matemático a ser utilizado na etapa 3 do processo de modelagem.

3. **Modelagem Aberta:** A abordagem de modelagem aberta permite que os alunos estudem um problema a nível da matemática que estão acostumados a usar. Todas as etapas do processo de modelagem são utilizadas. Os alunos são convidados a trabalhar com um problema com a assistência limitada por parte do professor, porque este não controla a matemática escolhida pelos alunos. Esta abordagem não é muitas vezes usada por causa das limitações de tempo.

Observe que a modelagem estruturada de [GALBRAITH, 2012] utiliza a intervenção do professor para controlar o modelo matemático escolhido. Outras estratégias de intervenção possíveis, são:

1. **Intervenção Sutil:** Neste processo, o professor escolhe um ou mais grupos de alunos que estão abertos a sugestões e sugere sutilmente que modelo usar. Durante as discussões na sala de aula, o professor, então, garante que o modelo por ele sugerido é o escolhido.

2. **Intervenção Aberta:** Esta ocorre durante a etapa 3 do processo de modelagem. Após uma discussão geral em sala sobre que matemática utilizar, o professor apresenta á classe o modelo matemático que é comumente utilizado por matemáticos para a situação problema que está sendo considerada.

3. **Intervenção Tardia:** Esta estratégia exige que o professor permita à sala que complete o processo de modelagem, utilizando o modelo matemático que a sala sente que é apropriado. O professor, então, conduz uma discussão no sentido de garantir que as deficiências deste modelo sejam reveladas. Isto permite ao professor sugerir um modelo matemático diferente para que os estudantes possam utilizá-lo e rever em suas suposições em um novo processo de modelagem. A vantagem dos estudantes completarem o processo de modelagem sem a interferência do professor é que eles têm a oportunidade de entenderem e apreciarem a complexidade do problema.

Com a mesma intenção de [GALBRAITH, 2012], destacamos dois pesquisadores que também propuseram suas etapas para o processo de modelagem a serem utilizadas em sala de aula.

1. Para Biembengut (2003), o processo pode ser descrito em 3 etapas:
   (a) Interação: Nesta etapa tem-se a definição do tema de estudo, e os estudantes farão as devidas pesquisas sobre o assunto que será tratado, por meio de livros, artigos, revistas, sites entre outros ou mesmo uma pesquisa de campo. Com isso ocorre o reconhecimento de uma situação problema que pode surgir no decorrer da pesquisa e ainda a familiarização com o tema.
   (b) Matematização: Aqui é feita a interpretação da situação problema para a linguagem matemática, dando um direcionamento para o trabalho a ser realizado. A partir daí, levantam-se hipóteses, selecionam as variáveis, exemplos e teorias que poderão ser utilizadas para a criação do modelo, chegando ao estabelecimento de fórmulas, expressões matemáticas, equações algébricas e outras conclusões.
   (c) Modelo Matemático: Nesta etapa, o modelo matemático construído deve estar o mais próximo da situação problema inicial. Os dados obtidos do contexto ou da realidade estudada devem ser testados no modelo, de modo que seja possível atestar a validação do modelo obtido.

2. Para [BURAK, 2010], o processo pode ser descrito em 5 etapas:
   (a) Escolha do Tema: É a etapa em que o professor ou mediador apresenta aos alunos diversos temas de estudos que possam despertar o interesse ou que permita que os próprios alunos estabeleçam um tema. Nesta etapa o professor

será o mediador, e auxiliador da aprendizagem, pois fará as devidas intervenções e questionamentos quando necessário. [KLÜBER, BURAK, 2007]

(b) Pesquisa Exploratória: É a etapa em que se encaminham os alunos para busca de informações e materiais para que se tenha uma noção prévia sobre o que se deseja estudar e desenvolver. Esta etapa está geralmente relacionada a uma pesquisa bibliográfica para coleta de dados ou mesmo um trabalho de campo.

(c) Levantamento dos Problemas: É a etapa em que se deve coletar informações. Neste caso, o professor deverá orientar os alunos a deduzir e refletir sobre tudo que pode ter relação com a Matemática. Com isso será formulado os problemas para averiguação das situações que os permitam aplicar ou aprender conteúdos matemáticos. O professor tem a função de mediador do processo, fazendo as intervenções quando necessário. Assim, "essa fase da Modelagem é muito rica, pois desenvolve no aluno a capacidade de tomar decisões, de formulas hipóteses, de questionar as várias possibilidades de resolução de um mesmo problema" [KLÜBER, BURAK, 2007] p. 3.

(d) Resolução dos Problemas: É a etapa em que se estuda e desenvolve o conteúdo matemático no contexto do tema de estudo. Os alunos buscam as respostas dos problemas e questionamentos levantados tendo como base o conteúdo matemático, ou ainda que pode ser aprendido a partir dos problemas.

(e) Análise Crítica das Soluções: Nesta última etapa é vista a aplicabilidade das resoluções apresentadas, que podem estar corretas matematicamente, mas impraticáveis para o problema estudado. Com isso, professor e alunos refletirão sobre os resultados obtidos no estudo e como eles podem proporcionar a melhoria das decisões e ações. Esta etapa "contribui para a formação de cidadãos participativos, mas autônomos que auxiliem na transformação da comunidade em que participam" [KLÜBER, BURAK, 2007], p. 4.

No próximo capítulo, passaremos a desenvolver uma série de atividades de ensino, todas relacionadas com o conceito matemático de função afim, destinadas a alunos do primeiro ano do ensino médio, da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul, sediada em Campo Grande. Esta rede de ensino adota a Educação de Tempo Integral, por meio de projetos integradores, no qual o professor é incentivado e instigado a trabalhar com situações problemas que esteja próximo da realidade dos estudantes. Estas propostas carregam em si a ideia de aplicar o conceito de modelagem matemática como uma metodologia alternativa para o ensino do conceito de função afima que nos propomos a fazer. Tendo em vista as diferentes abordagens possíveis para aplicar a modelagem matemática no ensino, optamos pelas etapas descritas por Burak. Esta escolha, tema ver com o fato de que Dionísio Burak foi professor da rede pública por 30 anos, o que condiz com a natureza deste trabalho.

Capítulo 3

Atividades Propostas

Neste capítulo, serão apresentadas algumas propostas de atividades que foram sugeridas aos alunos, segundo as práticas da Modelagem Matemática, com a intenção de promover a aprendizagem por meio desta estratégia de ensino. Os problemas abordados, buscou levar em conta a atual realidade dos alunos do primeiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professora Thereza Noranha de Carvalho, que fica situada num bairro periférico da cidade de Campo Grande – MS. A unidade escolar atende à alunos do ensino fundamental e médio nos períodos matutino, vespentino e noturno. A escolha da turma do primeiro ano foi determinada por conta de ser uma das salas em que o autor do presente trabalho ministra o componente curricular matemática. Assim foi possível desenvolver as atividades em consonância com as aulas, no qual as atividades foram realizadas no período letivo de 2021, conforme as orientações da Secretaria Estadual de Educação - SED, a respeito das aulas remotas e presenciais, de modo que a primeira atividade foi totalmente on-line, enquanto que as outras atividades se deram da forma presencial, conforme pode ser visto a seguir:

1. **Qual o Melhor Plano de Internet?** A pandemia do Corona Vírus, que teve seus primeiros casos notificados ao final do ano de 2019, fez com que praticamente todos os segmentos da sociedade tivessem que diminuir o ritmo de suas atividades. Com as Escolas Públicas, não foi diferente, pois as mesmas tiveram que interromper o atendimento presencial e passaram a oferecer aulas remotas, por meio de aplicativos e/ou plataformas digitais. Dessa maneira, alunos e professores passaram a se reunir por meio de conferências, em que os professores davam suas aulas através dos recursos disponíveis, enquanto que os alunos tiveram o trabalho de acompanhar as aulas e realizarem suas atividades em casa. Essa dinâmica permeou praticamente todo o

ano de 2020, assim como o início do ano de 2021, já que nesse período ainda não foi possível conter o avanço da pandemia que assolou todo o planeta. Com isso, para que os estudantes tivessem acesso as aulas oferecidas pelos professores, muitas famílias tiveram que comprar, em especial, um aparelho celular, pois é um dos equipamentos mais utilizados na atualidade para pesquisas, estudos, conferências e principalmente para se comunicar.

Mas, não basta comprar um celular. É necessário que haja, além da linha telefônica, um plano de internet para que esses estudantes possam ter acesso a todo o material e conteúdo disponibilizado tanto pela escola, quanto pelos professores, já que apesar da mudança na forma de estudo, não houve a interrupção das aulas, apesar da atual situação que o mundo se encontra.

Temos, então uma situação problema que pode ser resolvida utilizando modelagem matemática. Antes de considerar as etapas propostas por Burak, vamos definir o que se pretende:

(a) Objetivo da Proposta: Estabelecer um critério objetivo que mostre qual melhor plano de internet que atenda aos interesses, à otimização financeira e às necessidades de cada aluno.

(b) Público Alvo: Primeiro ano do Ensino Médio.

(c) Conteúdos Matemáticos: Função Afim.

Com a atividade estabelecida, o professor agendou a aula pelo o aplicativo Google Meet no horário da aula e com o conteúdo previsto (função afim). Na primeira aula online estavam presentes o professor e oito alunos. Foi dado início do desenvolvimento da atividade com a primeira etapa prevista por Burak:

a) **Escolha do Tema**

Neste caso, o tema foi substituído pela seguinte situação problema proposta:

Maurício, tem uma filha que estuda no primeiro ano do ensino médio e para que ela possa acompanhar as aulas pelo whatsapp, ele precisa comprar um aparelho telefônico e assinar um plano de internet. Porém, ficou indeciso sobre qual dos planos pré-pagos, apresentados abaixo, adquirir:

i. Plano A:

A. taxa fixa mensal de R$ 30,00;

B. 6 Gb de internet no total;

C. whatsapp, instagram e Messenger liberados, sem descontar da franquia;

D. Ligações para todas as operadoras ilimitadas.

ii. Plano B:

A. taxa fixa diária de R$ 1,50, sendo que o cliente só paga quando usar;

B. 2000 mb de internet no total;

C. whatsapp, instagram e Messenger liberados, sem descontar da franquia;

D. 10 minutos de ligações para outras operadoras e ilimitadas para a mesma operadora de adesão.

iii. Plano C:

A. taxa fixa semanal de R$ 8,00;

B. 2 Gb de internet no total;

C. whatsapp, instagram e Messenger liberados, sem descontar da franquia;

D. Ligações ilimitadas para todas as operadoras.

Como ele pode decidir qual plano contratar? Depois de apresentada a situação problema, foi feita uma discussão sobre o que poderia ser levado em consideração para que se contratasse o melhor plano de telefonia. Nesse momento surgiram questionamentos, como: qual plano oferece a maior quantidade de dados para utilização da internet, pois os alunos têm que baixar muitos materiais enviados pelos professores. Sendo assim, o plano mais acessível ajudaria nessa questão. Solicitamos, então que os alunos se reunissem pelo google meet para discutirem e buscarem informações necessárias para que pudessem ter uma noção prévia do que iriam fazer para solucionar o problema.

b) **Pesquisa Exploratória**

Marcada a reunião, os estudantes se mobilizaram no sentido de avaliar a quantidade de dados oferecidos mensalmente por cada um dos planos, bem como os valores a serem pagos, já que as contas a serem pagas pelas famílias brasileiras geralmente tem duração mensal. Algumas hipóteses foram assumidas:

i. Todas as taxas são pagas no fim do mês.

ii. Em qualquer plano, a quantidade oferecida de dados é suficiente para que os alunos possam desenvolver suas atividades a contento. Assim, os dados não serão considerados.

iii. Os finais de semana e os feriados não serão considerados para efeitos dos trabalhos dos alunos.

iv. O mês de 30 dias será visto como tendo 4 semanas e, na ausência de feriados, definido com tendo 20 dias úteis.

c) **Levantamento dos Problemas** Com a pesquisa exploratória, os alunos foram orientados a disporem as informações com as hipóteses assumidas em Tabelas e/ou Gráficos para uma melhor visualização dos dados. Dessa maneira, os alunos elaboraram uma Tabela e um gráfico correspondente.

Tabela 3.1: Valores dos planos de acordo com período

Período	Plano A	Plano B	Plano C
Diário	-	R$1,50	-
Semanal	-	-	R$8,00
Mensal	R$30,00	R$30,00	R$32,00

Para elaborar a Tabela 3.1, os alunos acordaram que, para cada plano, era suficiente uma informação e que seria definido o valor mensal a ser pago por cada plano. Os planos A e C possuem uma semelhança, no sentido de que a taxa mensal será fixa, independente da utilização ou não dos dados. O plano B tem uma característica diferente, pois o aluno só paga ao final do mês, aquilo que utilizou. Estas características levaram à elaboração do Gráfico 3.1.

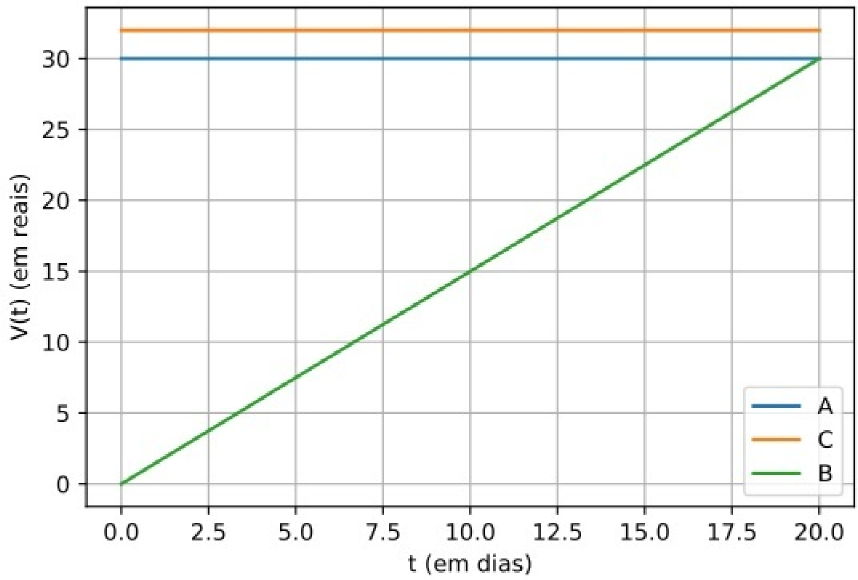

Figura 3.1: Valores dos Planos A, B e C

d) **Resolução dos Problemas**

Com a elaboração da Tabela 1 e do Gráfico 1, foi possível estabelecer uma relação de dependência dos planos por meio de equações relacionando as variáveis preço (V) e tempo (t). De fato, se p_a (t), p_b (t) e p_c (t) representam, respectivamente, os preços dos planos A, B e C e t representa o tempo, em dias, podemos estabelecer três funções afim, com seus respectivos domínios.

$$p_a \text{ (t)=30}, \qquad 0 \leq t \leq 20$$
$$p_b \text{ (t)=1,50t}, \qquad 0 \leq t \leq 20$$
$$p_c \text{ (t)=32}, \qquad 0 \leq t \leq 20$$

Observe que os domínios das funções afim são os mesmos e t varia no intervalo [0,20]. De fato, como o plano foi feito para atender aos alunos e, em média, temos 20 dias letivos no mês, então apenas estes serão considerados, como mostra o Gráfico 1. A função afim p_B (t) tem uma característica diferente das outras duas, uma vez que o aluno só paga, ao final do mês, os dias em que utilizou os dados. Assim, esta função afim não é constante e sua inclinação é 1,50.

e) **Análise Crítica das Soluções**

Conforme a hipótese estabelecida é fácil verificar que o melhor plano é o Plano B, cujo modelo matemático é:

$$p_b \text{ (t) =1,50t}$$

Neste plano, o maior valor que o pai do aluno (Mauricio) pagará mensalmente é 30,00. Este valor é competitivo com os valores dos demais planos. Além disso, pode ocorrer de haver um pagamento menor devido à ocorrência, por exemplo de feriados e/ou pontos facultativos. E ainda a interrupção das aulas devido a problemas decorrentes da pandemia, que foi um período atípico. Se outra hipótese for formulada (como a inclusão dos finais de semana) é possível que esta situação possa ser alterada. Entretanto, neste caso, a tomada de decisão cabe ao Maurício.

2. **Cobrança de Estacionamento**

No decorrer do ano de 2020, muitos segmentos do comércio local tiveram que diminuir o fluxo de movimentação ou ainda, interromper suas atividades, até que fosse possível retornar com o seu funcionamento. Já no ano de 2021, a situação foi aos poucos voltando ao normal, entretanto, ainda foi necessário tomar todos os cuidados, a fim de evitar o contágio pelo Corona Vírus.

Com a volta as aulas preenciais, os alunos retornaram com o quantitativo reduzido, e ainda com o regime de escalonamento por semana, ou seja, um grupo comparece uma semana, enquanto que o segundo grupo permanece em casa, realizando o estudo de forma remota. Já na semana seguinte, é feita a inversão dos grupos, e então o professor da continuidade nas abordagens e mediações.

No retorno as aulas, foi feita uma roda de conversa com os estudantes, em que puderam relatar suas ações no período em que estiveram em casa, quais as reflexões acerca desse período e como retomar as atividades com o retorno as aulas e em outras atividades. Dessa maneira, cada estudante deu seu depoimento, mostrando o quão ruim foi esse período e ao mesmo tempo se mostraram aliviados pelo retorno, já que puderam interagir e buscar conhecimento juntamente com os colegas e professores.

Dando continuidade na roda de conversa, os alunos foram questionados acerca de possíveis locais que poderiam visitar com a abertura do comércio e um dos estabelecimentos citados, foi o shopping, sendo um local que há muito tempo eles não frequentam, resultando em uma grande vontade em visitar o local.

Para isso, é necessário que ao adentrar aos shoppings, o cliente pague pelo tempo em que deixará o veículo estacionado, mesmo que seja apenas para uma simples visita. Dessa maneira, foi proposto que os alunos criassem o modelo baseado na cobrança do estacionamento em detrimento da quantidade de horas estacionadas e verificasse qual das opções apresentadas é a mais viável para uma visita. Assim, tem-se uma nova situação problema que pode ser resolvida utilizando modelagem matemática. Antes de considerar as etapas propostas por Burak, vamos definir o que se pretende:

(a) Objetivo da Proposta: Representar por meio de um modelo matemático a cobrança dos estacionamentos dos shoppings da cidade de Campo Grande – MS.

(b) Público Alvo: Primeiro ano do Ensino Médio.

(c) Conteúdos Matemáticos: Função Afim.

Ao estabelecer a proposta de criação do modelo, o professor deu início as etapas de Burak para a criação do modelo, juntamente com os alunos que deram início aos trabalhos.

a) **Escolha do Tema:** Neste caso, o tema foi substituído pela seguinte situação problema:

   Alguns estacionamentos rotativos costumam cobrar um valor mínimo que dá ao motorista o direito de manter o carro estacionado no local durante certa medida de intervalo de tempo. Quando essa medida de intervalo de tempo acaba, há um acréscimo no valor do estacionamento, que aumenta com relação à quantidade de horas inteiras excedidas. Assim, serão apresentados três valores, sendo coletados em três shoppings da cidade de Campo Grande, tais que os preços praticados, são os atuais para o ano de 2021, como segue:

   i. Shopping A:

      A. Valor cobrado para as duas primeiras horas R$ 9,00;

B. Valor cobrado por hora que exceder as duas horas iniciais R$ 1,00

ii. Shopping B:

A. Valor cobrado para primeira horas R$ 8,00;

B. Valor cobrado por hora que exceder a primeira R$ 1,50

iii. Shopping C:

A. Valor cobrado para os primeiros 30 minutos R$ 4,00;

B. Valor cobrado a partir do minuto 31 até a primeira hora R$ 5,50;

C. Valor cobrado por hora que exceder a primeira hora R$ 3,50

Com as três opções apresentadas, qual dos três shoppings apresenta a opção mais viável?

Com a volta as aulas, os alunos foram reunidos em grupos, respeitando todos os procedimentos de segurança e passaram a discutir sobre o que poderia ser levado em consideração para que se contratasse a melhor opção. Nesse momento surgiram questionamentos, como: qual oferece a melhor relação custo-benefício? Assim, foi dado início aos trabalhos de criação do modelo de modo que passaram a responder o questionamento, como forma de solucionar o problema.

b) **Pesquisa Exploratória:** Com os grupos formados, foram feitas algumas discussões no sentido de responder o questionamento da escolha do tema, dessa forma, algumas hipóteses foram assumidas:

i. Não será levado em conta os valores gastos em lojas ou com alimentação no shopping.

ii. Todos irão ao shopping de veículo próprio (automóvel)

iii. Para efeito da criação do modelo, o tempo analisado será em minutos.

iv. Segundo dados da Associação Brasileira de Shopping Centers, os clientes permanecem em média de 150 a 210 minutos nos estabelecimentos. Sendo assim, para fins de criação do modelo, será considerado o intervalo de 0 a 180, que corresponde ao tempo máximo de três horas de permanência.

c) **Levantamento dos Problemas:** Com a pesquisa exploratória, os alunos foram orientados a estabelecer as informações por meio de uma tabela, em que nele constará o valor a ser pago em função do tempo de permanência no shopping, como pode ser visto na tabela 2 a seguir:

Tabela 3.2: Valores a ser pago no estacionamento dos Shoppings em Campo Grande - MS

Tempo de permanência	Shopping A	Shopping B	Shopping C
0 a 15 mim	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 4,00
16 a 30 mim	R$ 9,00	R$ 8,00	R$ 4,00
31 a 60 mim	R$ 9,00	R$ 8,00	R$ 5,50
61 a 120 mim	R$ 10,00	R$ 9,50	R$ 9,00
121 a 180 mim	R$ 11,00	R$ 11,00	R$ 12,50
181 a 240 mim	R$ 12,00	R$ 12,50	R$ 16,00

De posse da tabela 2, os alunos foram mobilizados a estabelecer o gráfico expressando a situação apresentada para a criação do modelo, de modo que os alunos apresentaram os valores relacionados em função dos minutos estacionados como pode ser visto no gráfico 2:

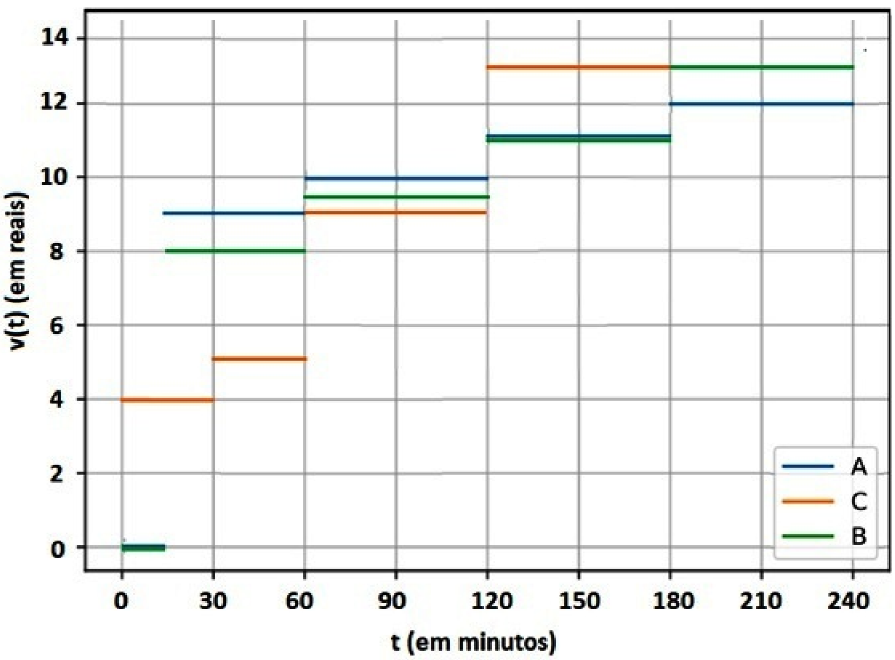

Figura 3.2: Valores dos estacionamentos dos shoppings A, B e C

d) **Resolução dos Problemas:** Com a elaboração da Tabela 2 e do Gráfico 2, foi possível estabelecer uma relação de dependência dos estabelecimentos por meio de equações relacionando as variáveis preço (V) e tempo (t). De fato, se p_a (t), p_b (t) e $p_c(t)$ representam, respectivamente, os preços para estacionar nos shoppings A, B e C respectivamente e t representa o tempo, em minutos, é possível estabelecer três funções afim, com seus respectivos domínios.

Observe que os domínios das funções afim são os mesmos e t varia no intervalo [0,180]. De fato, como foi considerado o intervalo de três a quatro horas, levando em conta o tempo médio de permanência em um shopping, então apenas estes serão considerados, como mostra o Gráfico 2. A função afim p_a (t), p_b (t) tem um tempo de tolerância de 15 minutos para que se inicie a cobrança, enquanto que a p_c (t), inicia a cobrança a partir do momento em que o carro adentra o local, e ainda que na primeira hora, tem duas faixas de preço para a cobrança do estacionamento.

e) **Análise Crítica das Soluções:** Conforme a hipótese estabelecida, é possível verificar que para determinada quantidade de tempo estacionada, um estabelecimento se torna mais viável que o outro. Assim, temos:

   i. No intervalo de 0 a 15 minutos, ou seja, se o aluno tiver que dar uma passada rápida para resolver algum assunto e já se retirar do shopping, as opções A e B são as mais viáveis, visto que não há cobrança nesta faixa de permanência.

   $$p_a\ (\mathrm{t}){=}0, \qquad 0 \leq t \leq 15$$
   $$p_b\ (\mathrm{t}){=}0, \qquad 0 \leq t \leq 15$$

   ii. Caso o aluno permaneça no intervalo de 16 minutos até uma hora, a opção mais viável é a C, já que nesta faixa de tempo, o valor a ser pago será de R$ 4,00 até trinta minutos e de R$ 5,50 até uma hora de permanência.

   $$p_c\ (\mathrm{t}){=}4{,}00, \qquad 16 \leq t \leq 30$$
   $$p_c\ (\mathrm{t}){=}5{,}50, \qquad 31 \leq t \leq 60$$

   iii. Já na faixa de uma até duas horas, o shopping C continua rentável, pois é a opção que apresenta o menor valor a ser pago, nesse intervalo de tempo, já que o valor cobrado para que se permaneça até duas horas será de R$ 9,00. Entretanto, a partir de duas horas de permanência, o shopping C deixa de ser viável.

   $$p_c\ (\mathrm{t}){=}9, \qquad 61 \leq t \leq 120$$

   iv. Na faixa de duas a três horas de permanência, tanto o shopping A, quanto o Shopping B, se tornam viáveis, visto que o valor cobrado nesse período de permanência será o mesmo, R$ 11,00, enquanto que o Shopping B apresenta um valor superior.

$$p_a \text{ (t)=11,} \qquad 121 \leq t \leq 120$$
$$p_b \text{ (t)=12,} \qquad 121 \leq t \leq 180$$

v. A partir de três horas de permanência, o Shopping A, se torna a opção mais viável, sendo que o valor a ser cobrado será menor, comparado com as outras opções.

$$p_a \text{ (t)=12,} \qquad t \geq 180$$

Dessa maneira, como para cada intervalo, tem uma opção diferente a ser mais rentável. É importante ter em mente, qual o tempo aproximado de permanência no shopping, pois assim será possível ter uma noção de qual escolher e o possível valor a desembolsar.

3. **Conta de Água**

A água é um dos, se não o recurso natural mais precioso que existe em nosso planeta, necessário para todas as formas de vida em nossa biosfera. Esse recurso é responsável pelo metabolismo e hidratação de todos os seres vivos.

Assim, questões importantes, como o gerenciamento e consumo apropriado deste bem tão precioso que é a água devem e podem ser ensinadas para que os alunos possam se conscientizar. Dessa maneira, estamos diante de um desafio em relação à água em nosso planeta, sendo ele: o desperdício e o uso inadequado deste bem, porém percebe-se que em muitos lares brasileiros ocorre o desperdício pela não internalização do real valor da água de qualidade que recebemos em nossas casas. Dessa maneira será estudado o valor gasto pelo consumo de água nas casas ds alunos, na forma da modelagem matemática proposto por Burak, assim temos:

(a) Objetivo da Proposta: Criar um modelo matemático que possa representar o consumo de água no período de um mês, nos lares da cidade de Campo Grande – MS.

(b) Público Alvo: Primeiro ano do Ensino Médio.

(c) Conteúdos Matemáticos: Função Afim.

Com isso, mais uma roda de conversa se formou entre os alunos com a mediação do professor que passou a fazer questionamentos sobre suas rotinas de consumo durante o periodo em que estiveram em casa durante a fase mais aguda da pandemia, de modo que se deu início a terceira atividade de modelágem matemática.

a) **Escolha do Tema**

Esta estapa foi iniciada com uma a roda de conversa, em que os estudantes, fizeram seus apontamentos sobre o consumo de água em suas casas, em que disseram não ter uma preocupação sobre o consumo, ja que nunca pararam para pensar nos gastos e deserdícios de água, porém acharam interessante realizar os cálculos para verificar tais informações, pois ao refletirem sobre o consumo e despeedpicio de água, viram que se todos tomarem nota da situação, é possivel ter uma grande economia desse bem, ou um enorme desperdicio, caso não deem a devida atenção ao tema.

Com isso, foi solicitado que observassem suas contas de água, para então verificar como é feito o cálculo para determinar o valor a ser pago em função do consumo. Na aula seguinte, os alunos já de posse da contá de água, passaram a se reunir em grupos para então estabelecer a situação e assim criar o modelo. Assim foi apresentado aos alunos por meio das informações que constam na conta de água e com a mediação do professor a seguinte situação:

Nas cidades brasileiras em geral, a tarifa a pagar pela água residencial é definida de acordo com o gasto de água: quanto maior for o gasto, maior é a tarifa a pagar. Isso geralmente ocorre de acordo com faixas de consumo. Observe a tabela de faixa de consumo e tarifa de água residencial em Campo Grande – MS.

Tabela 3.3: Valores a pagar em função do consumo de água em Campo Grande – MS.

Classe de Consumo	Faixa de Consumo	Taxa de Abastecimento de Água R\$/m^3	Taxa de Esgotamento Sanitário R\$/m^3
Tarifa Social	Tarifa Fixa		6,30
	Até 20 m^3	2,55	1,79
Residencial	Tarifa fixa		13,88
	1 a 10m^3	5,61	3,93
	11 a 15 m^3	7,18	5,03
	16 a 20 m^3	7,31	5,12
	21 a 25 m^3	8,07	5,65
	26 a 30 m^3	9,93	6,95
	31 a 50 m^3	11,90	8,33
	Acima de 50 m^3	13,10	9,17

Com a observação das contas de água, foi possível escolher o tema a ser trabalhado nesta atividade e assim, realizar a pesquisa exploratória.

b) **Pesquisa Exploratória**

De posse da tabela de valores a pagar, em função do consumo de água, foi utilizado uma das contas de exemplo, como forma de compreeneder como poderia ser calculado o consumo e o valor a pagar pelo cliente, de modo que foi realizado os cálculos para se ter em mente como aparece na conta água, no qual, constava o consumo de 32 m^3 de água.

Primeiro, identifica-se que 32 m^3 = 10 m^3 + 5 m^3 + 5 m^3 + 5 m^3 + 5 m^3 = 32 m^3. Para cada um desses termos, paga-se uma tarifa diferente.

Pelos primeiros 10 m^3, pagam-se R\$ 5,61 por cada m^3, o que resulta em R\$ 56,10 e da tarifa de esgoto, R\$ 3,93 por cada m^3, o que resulta em R\$ 39,30.

Pelos próximos 5 m^3, pagam-se R\$ 7,18 por cada m^3, o que resulta em R\$ 35,90 e da tarifa de esgoto, R\$ 5,03 por cada m^3, o que resulta em R\$ 25,15.

Pelos próximos 5 m^3, pagam-se R\$ 7,31 por cada m^3, o que resulta em R\$

36,55 e da tarifa de esgoto, R$ 5,12 por cada m^3, o que resulta em R$ 25,60.

Pelos próximos 5 m^3, pagam-se R$ 8,07 por cada m^3, o que resulta em R$ 40,35 e da tarifa de esgoto, R$ 5,65 por cada m^3, o que resulta em R$ 28,25.

Pelos próximos 5 m^3, pagam-se R$ 9,93 por cada m^3, o que resulta em R$ 49,65 e da tarifa de esgoto, R$ 6,95 por cada m^3, o que resulta em R$ 34,75.

Pelos últimos 2 m^3, pagam-se R$ 11,90 por cada m^3 o que resulta em R$ 23,80 e da tarifa de esgoto, R$ 8,33 por cada m^3, o que resulta em R$ 16,66.

E ainda tem a cobrança da tarifa fixa de R$ 13,88

O total então é de R$ 56,10 + R$ 39,90 + R$ 35,90 + R$ 25,15 + R$ 36,55 + R$ 25,60 + R$ 40,35 + R$ 28,25 + R$ 49,65 + R$ 34,75 + R$ 23,80 + R$ 16,66 + R$ 13,88 = R$ 426,54

Com isso, a pesquisa exploratória popiciou o entendimento é calculado o valor da conta de água para um mês de consumo. Assim, foram estabelecidas algumas hipoteses para a criação do modelo, sendo elas:

(i) Para efeito do cálculo será levando em conta o consumo residencial de cada um dos alunos participantes da atividade.

(ii) Será eenumeratetabelecido apenas um grupo, em que todos reunir-se-ão num grande grupo e juntos participarão da criação do modelo.

(iii) O professor fará a mediação em todo o tempo.

c) **Levantamento dos Problemas**

Com a pesquisa exploratória, os alunos passaram a observar suas respectivas contas e assim, fizeram cada um o cálculo dos valores a pagar, tendo como base o consumo em $\mathbf{m^3}$ de suas casas. Com o cálculo realizado, o professor propos que fizessem duas atividades com o intuito de verificar entendimento e ainda, de posse das informações do cálculo, possam criar o modelo. Dessa maneira tem-se as seguintes atividades:

(i) Qual a tarifa que uma família paga se o gasto mensal for de 18 m^3 ?

(ii) Qual a tarifa que uma família para se o gasto mensal for de 27 m^3?

Assim os estudantes se reuniram em grupos e fizeram dos devidos cálculos e as interpretações basedados na tabela proposta pela empresa de água e esgoto de Campo Grande e assim, foi possivel estabelecer que para o primeiro questionamento o valor a ser pago será de (R$ 2,55 x 18) + (R$ 1,79 x 18) + R$ 6,30 = R$ 84,42, enquanto que a família com gasto mensal de 27 m^3 pagará R$ 334,84.

d) **Resolução dos Problemas**

Tendo em mente o cálculo para a conta de água, foi solicitado a criação do modelo para o cálculo do valor de água em função do consumo da cidade de Campo Grande – MS e para isso, os alunos mais uma vez se reuniram em grupos para então estabelecer o modelo e assim realizar as discussões pertinentes. Assim foram estabelecidos seguintes modelos:

(i) Modelo que fornece a tarifa em reais para um consumo mensal entre 0 a 20 m^3.

(ii) Modelo que fornece a tarifa em reais para um consumo mensal entre 21 a 25 m^3.

(iii) Modelo que fornece a tarifa em reais para um consumo mensal acima de 50 m^3.

Com a atividade proposta, por meio da roda de conversa e das dicussões, os alunos partiram para a construção do modelo matemático, levando em conta as informações acerca da faixa de valores para composição da conta de água. Durante as aulas o professor fez pequenas intervenções de modo a direcionar para a construção do modelo, dando a possiblidade de calcular o valor da água para qualquer faixa de consumo.

e) **Análise Crítica das Soluções**

Com a construção do modelo os alunos chegaram a conclusão de que considerando os três intervalos para a faixa de consumo de água, tem-se o seguinte modelo:

$$f(x) = \begin{cases} 6,30 + 4,34x, & para \quad 0 \leq x \leq 20 \\ 202,48 + 13,72(x-20) & para \quad 21 \leq x \leq 25 \\ 790,08 + 22,27(x-50) & para \quad x \geq 51 \end{cases}$$

Diante disso, tem-se a criação de um modelo levando em conta o consumo de água da cidade de Campo Grande, sendo uma situação dentro a realidade dos alunos, uma vez que para eles representou algo significativo em que foi possivel construir o proprio conhecimento acerca das funções afm, aliado a estratégia da modelagem matemática que representou uma importante ferramenta no auxilio do ensino do componente curricular maremática.

Capítulo 4

Considerações Finais

No presente trabalho, foi apresentado uma possibilidade de ensino por meio da modelagem matemática, uma estratégia que vem se mostrando promissora, fato este que se deve nas inúmeras publicações de trabalhos e pesquisas sobre o assunto. Com relação aos estudos realizados, foi possível ver que foram promissores, pois os alunos foram instigados a buscar, pesquisar e resolver situações matemáticas para a criação do modelo que refletisse a realidade da situação analisada. Com relação às etapas da Modelagem Matemática, percebeu-se que os alunos foram capazes de:

1) Compreender a situação real apresentada, para então propor as estratégias de criação do modelo;

2) Simplificar e estruturar o problema real, ao coletarem os dados no experimento, por meio da pesquisa exploratória, além disso, identificaram as variáveis e definiram hipóteses, levando-os a criação do modelo real do problema;

3) Traduziram a situação real para a linguagem matemática por meio da construção dos gráficos e tabelas, e ainda, por meio da formulação do modelo matemático que relaciona o plano de celular no primeiro caso, o valor a ser pago no estacionamento no segundo caso e o valor da conta de água no último caso;

4) Interpretar os resultados matemáticos junto aos resultados reais. Dessa forma, de modo geral, os alunos mobilizaram todas as etapas proposta por [BURAK, 2010].

Foi observado, durante a criação do modelo que os alunos fizeram experimentações com os dados e informações disponíveis, e então verificaram que o modelo mostrou a realidade da situação e assim alcançaram resultados próximos da situação real. Desse modo, entendemos que os objetivos definidos foram totalmente atingidos, e os resultados foram satisfatórios no sentido de que a modelagem matemática contribuiu de forma decisiva para isto, e basta que o professor faça as mediações adequadas e assim possa prosseguir com os estudos.

Como trabalhos futuros, pretendemos desenvolver a Modelagem Matemática no estudo das progressões, sendo uma continuação do estudo da função afim em que podem ser estabelecidas novas situações de problemas, em que os alunos poderão recorrer a Modelagem Matemática com a estratégia para aprender a matemática.

Referências Bibliográficas

[BASSANEZI, 2002] Bassanezi, Rodney Carlos (2002). *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática* , São Paulo.

[BASSANEZI, 2015] Bassanezi, Rodney Carlos (2015). *Modelagem matemática: teoria e prática*, São Paulo.

[BIEMBENGUT, 2003] Biembengut, Maria Salett and Nelson, Hein and Biembengut, Maria Salett (2003). *Modelagem matemática no ensino*,Editora Contexto.

[BURAK, 1992] Burak, Dionísio and others (1992). *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem*,[sn].

[BURAK, 2010] Burak, Dionísio (2010). *Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula*, Modelagem na Educação Matemática, v.1, n.1, p. 10–27.

[GALBRAITH, 2012] Galbraith, Peter (2012). *Models of modelling: Genres, purposes or perspectives*, Journal of Mathematical Modelling and application, v.1, n.5, p.3–16,Citeseer.

[KLÜBER, BURAK, 2007] Klüber, Tiago Emanuel and Burak, Dionísio, (2007). *Modelagem Matemática: pontos que justificam a sua utilização no ensino*, IX ENEM-Encontro Nacional de Educação Matemática, p. 1–19.

Apêndice A

Definições Básicas de Função Afim

Neste tópico serão desenvolvidos conceitos básicos de função Afirm, por ser este destaque em outros componentes curriculares como Física, Química, Biologia, Administração, Finanças, entre outros. Essa importância se dá em sua maioria, quando se relaciona duas grandezas variáveis, sendo uma dependente da outra, tem-se intuitivamente a ideia do que vem a ser uma função, já que consiste numa relação de dependência, que formalmente pode ser visto nas definições a seguir:

DEFINIÇÃO: Sejam X e Y dois conjuntos quaisquer. Uma função é uma relação $f : X \longmapsto Y$ que, a cada elemento $x \in X$ associa um e somente um elemento $y \in Y$. Além disso,

(i) Os conjuntos X e Y são chamados domínio e contradomínio de f respectivamente;

(ii) O conjunto $f(x) = y \in Y; \exists x \in X, f(x) = y \subset Y$é chamado de imagem de f;

(iii) Dado $x \in X$ único elemento $y = f(x) \in Y$ correspondente é chamado de imagem de x.

Conforme estabelecido nas definições acima, uma função é um terno constituído pelos elementos: domínio, contradomínio e lei de formação, no qual os elementos do domínio estão associados aos do contradomínio. Para que uma função esteja bem definida, é necessário que estes três elementos sejam dados. Além disso, existe uma equivalência no qual a definição de função pode ser escrita como veremos a seguir:

DEFINIÇÃO: Para que uma relação $f : X \longmapsto Y$, seja uma função, ela deve satisfazer duas condições fundamentais:

(i) estar definida em todo o conjunto, ou seja, condição de existência

(ii) não fazer correspondência com mais de um elemento do contradomínio, a cada elemento do domínio, ou seja, condição de unicidade.

Como o trabalho é voltado para o ensino médio, temos que será abordado apenas as funções de variáveis reais, com isso, ao observar as definições acima, é possível ver que uma função está intimamente ligada a uma "lei ou regra" que determina o que deve ser feito em uma determinada situação. Sendo assim, a representação dessa lei pode ser feita por meio de um gráfico no plano cartesiano, de modo que será feita a definição do que vem a ser gráfico, conforme pode ser visto a seguir:

DEFINIÇÃO: Uma função na forma $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chamada uma função real (pois seus valores são números reais, isto é, seu contradomínio é $\mathbb{R}$) de variável real (pois sua variável independente assume valores reais, ou seja, seu domínio é um subconjunto de $\mathbb{R}$). O gráfico de uma função desta forma é o seguinte subconjunto do plano cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$G(x) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in D, y = f(x)\}$$

Assim, um ponto (x, y) pertence ao gráfico de f se, e somente se, $x \in D$ e os números reais x e y satisfazem a lei de formação dada pela função. Em outras palavras, o gráfico de uma função f é o lugar geométrico dos pontos que satisfazem sua lei de formação.

Dessa maneira, ao estudar funções no ensino médio, os professores acabam solicitando que sejam feitas diversas construções de gráficos, já que com ele será possível observar a região, isto é o lugar geométrico relacionado a função em estudo.

Após a compreensão do que vem a ser uma função, agora será estabelecido os conceitos e definições relacionados a função afim, sendo o conteúdo de estudo deste trabalho, dessa maneira vamos explorar a teoria relacionada para ter um pouco de entendimento a respeito do assunto e assim poder explorar as pesquisas e estudos, como será visto a seguir:

FUNÇÃO AFIM E CONCEITOS RELACIONADOS

DEFINIÇÃO: Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais é denominada função afim.

A partir do estabelecimento do que vem a ser a função afim, serão apresentados alguns casos particulares que são destacados de acordo com os números reais a e b em $f(x) = ax+b$

1°Caso : Quando $a = 1$ e $b = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada função identidade.

2°Caso : Quando $a = 1$ e $b \neq 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = x + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada translação(da função identidade).

3°Caso : Quando $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada função constante.

4°Caso : Quando $a \neq$ e $b = 0$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$, é chamada função linear.

DEFINIÇÃO: O valor de uma função afim $f(x) = ax + b$, em $x = x_0 0$ será dado por $f(x_0 + b)$. Assim veremos um exemplo para um breve entendimento:

Para $f(x) = 3x + 2$

$f(2) = 3.2 + 2 = 6 + 2 = 8$

$f(-2) = 3.(-2) + 2 = -6 + 2 = -4$

$f[\frac{1}{2}] = 3.\frac{1}{2} + 2 = 3 + 2 = 5$

PROPOSIÇÃO: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; tal que $f(x) = ax + b$,uma função afim. Para obter os coeficientes a e b, basta ter os valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ tal que $x_1 \neq x_2$.

Demonstração: Considere $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$,ao subtrair as equações, temos que:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b)$$
$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 + b - b$$
$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1$$
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Portanto, temos a equação para encontrar o valor do coeficiente a da função afim que é chamado de taxa de variação ou taxa de crescimento da função afim.

Segue que $f(x_1) = ax_1 + b$.Ao substituir o valor obtido em a, temos:

$$f(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} x_1 - b$$

Assim,

$$b = f(x_1) - x_1 \left(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right)$$

$$b = \frac{f(x_1)(x_2-x_1)-x_1f(x_2)+x_1f(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$b = \frac{f(x_1)x_2-f(x_1)x_1-f(x_2)x_1-f(x_1)x_1}{x_2-x_1}$$
$$b = \frac{f(x_1)x_2-f(x_2)x_1}{x_2-x_1}$$

Portanto, ao conhecer os valores que uma determinada função afim assume em dois valores distintos x_1 e x_2, possível encontrar a função usando $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ e $b = \frac{f(x_1)x_2-f(x_2)x_1}{x_2-x_1}$ para encontrar $f(x) = ax + b$.

Temos ainda na função $f(x) = ax + b$, em que o coeficiente b é o valor que a função assume quando o valor de x é igual a zero, de fato:

$$f(0) = a.0 + b = 0 + b = b$$

Assim, existem algumas funções ou aplicações que o coeficiente b é denominado como o valor inicial. Em geral, b é denominado como coeficiente linear da função afim.

GRÁFICO DE FUNÇÃO AFIM

PROPOSIÇÃO: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$ uma função afim. O conjunto imagem da função afim em que o coeficiente a é diferente de zero e o conjunto dos números reais.

Demostração: Considere um $y \in \mathbb{R}$ qualquer. Com isso, existe $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$, tal que $f(x) = f(\frac{y-b}{a}) = a.(\frac{y-b}{a}) + b = y$

DEFINIÇÃO: Define-se par ordenado de números reais quando a ordem dos números está determinada, para isso, escreve-se os números reais entre parênteses separado por vírgula. Dessa maneira, x é o primeiro número do par ordenado e y o segundo. Assim, é obtido (x, y) como um par ordenado de números reais.

Ao considerar os pares ordenados (p, q) e (r, s), temos que as letras correspondentes nas posições de cada um deles são distintas. Esses pares ordenados somente serão iguais, se e somente se, $p = r$ e $q = r$. Dessa forma o par ordenado (24, 30) e diferente do par (16, 10).

DEFINIÇÃO: Define-se plano cartesiano [1] como o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e cada par ordenado (x, y) é chamado de ponto do plano cartesiano.

De acordo com a definição acima, será considerado uma reta horizontal denominado de eixo das abscissas ou eixo x. Em seguida constrói-se uma reta perpendicular pelo ponto de abscissa zero, essa reta na posição vertical é chamada de *eixo da ordenadas ou eixo y.*

Com as duas retas construídas, tem-se que o ponto de interseção do eixo das abscissas com o eixo das ordenadas é chamado de origem do plano cartesiano, representado pelo par ordenado (0, 0). A partir de então tem-se que a direção positiva do eixo x estará à direita da origem, enquanto que a negativa, estará à esquerda. Já no eixo y, os valores positivos estarão acima da origem e os valores negativos, abaixo do par ordenado (0, 0). Com a análise plano cartesiano, tem-se a existência de uma correspondência biunívoca entre pontos e pares ordenados, ou seja, a cada par ordenado (x, y) tem a associação de um único ponto no plano cartesiano, e ainda que a cada ponto, faz correspondência com um único par ordenado (x, y). Por se tratar de um plano cartesiano de números reais, a indicação será dada por $\mathbb{R}x\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$

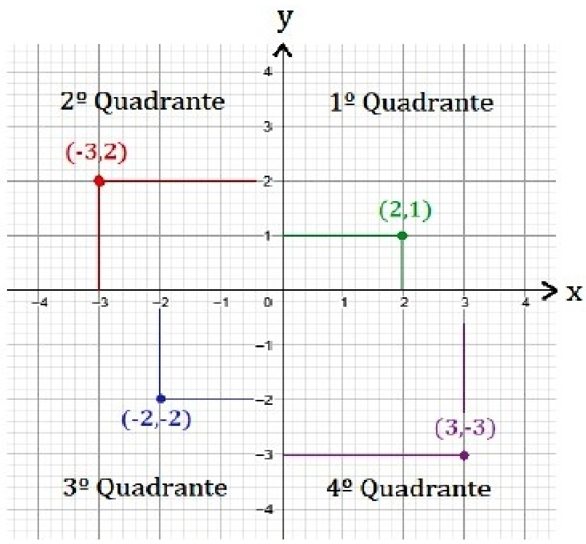

Figura A.1: Representação do plano cartesiano

Com o plano cartesiano juntamente com os eixos é possível visualizar quatro quadrantes, sendo o primeiro representado pelos valores positivos de x e y, o segundo com os valores negativos de x e positivos de y. Já o terceiro corresponde aos valores negativos de x e y

[1] O Plano Cartesiano foi proposto por Rene Descartes no ano de 1637, em que ele associou a geometria e à álgebra e a partir de então ele criou esse mecanismo para representar graficamente expressões algébricas, para isso, ele representou graficamente a localização de pontos em um plano ortogonal.

e o quarto quadrante, está relacionado aos valores positivos de x e negativos de y. Na figura acima é possível observar algumas representações, tendo em cada um dos quatro quadrantes um ponto identificado. Assim é possível verificar a próxima definição que está relacionado ao gráfico de função afim, como pode ser visto a seguir:

DEFINIÇÃO: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax + b$ um função afim. O gráfico de uma função é o conjunto de todos os pontos (x, y) em $\mathbb{R}^2$, tal que as coordenadas são números eu satisfazem a equação $y = f(x)$.

A partir daí tem-se o conjunto dos pontos da definição acima será representado da seguinte maneira:

$$Gr(f) = (x, y) \in \mathbb{R}; y = f(x), \text{ donde } Gr(f) \subset \mathbb{R}^2$$

PROPOSIÇÃO: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$ uma função afim com $a \neq 0$. O gráfico de uma função afim é uma reta.

Demonstração: Considere os pontos $A = (x_1, y_1)$,$B = (x_2, y_2)$, $A = (x_3, y_3)$ quaisquer, pertencentes ao gráfico da função afim $f(x) = ax + b$. Para demonstrar que três pontos quaisquer do gráfico são colineares, isto é, estão numa mesma reta, será utilizado a fórmula da distância entre dois pontos, como será visto a seguir:

Segue que:

$$y_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = ax_2 + b$$
$$y_3 = ax_3 + b$$

Seja $d(P_i, P_j)$ a distância entre os pontos P_i, P_j.Ao considerar os pontos $P_i = (x_i, y_i)$ e $P_j = (x_j, y_j)$ a distância entre dois pontos será dada por:

$$d(P_i, P_j) = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

Para que ocorra a colinearidade é necessário e suficiente que um dos três números $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma dos outros dois. Suponha sem perda de generalidade que $x_1 < x_2 < x_3$ devemos mostrar que:

$$d(P_1, P_3 = d(P_1, P_2 + d(P_2, P_3)$$

Segue que, ao utilizar a fórmula da distância entre dois pontos, tem-se:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [ax_2 + b - (ax_1 + b)]^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a(x_2 - x_1)^2}$$
$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|\sqrt{1 + a^2}$$

Seguindo o mesmo procedimento, tem-se que:
$d(P_2, P_3) = |x_3 - x_2|\sqrt{1 + a^2}$ e $d(P_1, P_3) = |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2}$
Segue que:

$$d(P_1, P2) + d(P_2, P3) = |x_2 - x_1 + x_3 - x_2|\sqrt{1 + a^2}$$
$$d(P_1, P2) + d(P_2, P3) = |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2}$$

Como $x_1 < x_2 < x_3$, tem-se que:

$$d(P_1, P3) = |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2} \text{ e como}$$

$d(P_1, P_2) + d(P_2, P3) = |x_3 - x_1|\sqrt{1 + a^2}$ então $d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) = d(P_1, P_3)$
Portanto, dado três pontos quaisquer do gráfico de uma função afim são colineares, o que é possível concluir que o gráfico é uma reta.

CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO DA FUNÇÃO AFIM

DEFINIÇÃO: Considere x_1 e x_2 números reais distintos.

(i) Uma função $f : A \longrightarrow B$ será crescente para qualquer x_1 e x_2 pertencentes ao domínio A da função, de modo que se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

(ii) Uma função $f : A \longrightarrow B$ será decrescente para qualquer x_1 e x_2 pertencentes ao domínio A da função, de modo que se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$.

PROPOSIÇÃO: Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$ uma função afim.

(i) A função será crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for positivo.

(ii) A função será crescente se, e somente se, o coeficiente angular a for negativo.

Demostração:

(i) Considere uma função crescente, dai se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) < f(x_2)$. Segue que $x_1 - x_2 < 0$ e $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Como já foi demonstração em proposições anteriores, tem-se que $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, de modo que o numerador e o denominador são números negativos, o que resulta em um número positivo. Então, o coeficiente angular a é positivo.

Considere que o coeficiente angular a seja positivo, isto é, $a > 0$. Por meio de preposição anteriores, tem-se que $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Tome x_1 e x_2 dois números reais, tais que $x_1 < x_2$ então $x_1 - x_2 < 0$. Como o coeficiente angular a é positivo, implica que $f(x_1) - f(x_2) < 0$. Logo $f(x_1) < f(x_2)$.Portanto, se o coeficiente angular a é positivo, a função afim é crescente.

(ii) Considere uma função crescente, dai se $x_1 < x_2$ então $f(x_1) > f(x_2)$. Segue que $x_1 - x_2 < 0$ e $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Como já foi demonstração em proposições anteriores, tem-se que $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, de modo que o numerador é negatigo e o denominador é positivo, o que resulta com número negativo. Então, o coeficiente angular a é negativo.

Considere que o coeficiente angular a seja negativo, isto é, $a < 0$. Por meio de preposição anteriores, tem-se que $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Tome x_1 e x_2 dois números reais, tais que $x_1 < x_2$ então $x_1 - x_2 < 0$. Como o coeficiente angular a é negativo, implica que $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Logo $f(x_1) > f(x_2)$.Portanto, se o coeficiente angular a é negativo, a função afim é decrescente.