

**Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**  
**Instituto de Matemática**  
**Programa de Pós-Graduação**  
**Mestrado Profissional em**  
**Matemática em Rede Nacional**

**Laeny Layara Pereira Cunha**

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

**Campo Grande - MS**

**2021**

**Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**

**Instituto de Matemática**

**Programa de Pós-Graduação**

**Mestrado Profissional em**

**Matemática em Rede Nacional**

**Laeny Layara Pereira Cunha**

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

**Orientadora Professora Dra. Elisabete Sousa Freitas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

**Campo Grande - MS**

**2021**

# **SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES: ÁLGEBRA E GEOMETRIA**

**Laeny Layara Pereira Cunha**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovada pela banca examinadora:

Professor Dr. Alex Ferreira Rossini  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Professora Dr. Elisabete Sousa Freitas (Orientadora)  
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Professor Dr. Rogério Ricardo Steffenon  
Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS

Campo Grande - MS, 28 de Outubro de 2021

*Aos meus pais Neilia Cunha e Domingos Dias Pereira.*

*“Há três caminhos para o fracasso: não ensinar o que se sabe, não praticar o que se ensina, não perguntar o que se ignora.”*

São Beda

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que permitiu que todas as conquistas em minha vida se concretizassem.

Aos meus pais, por sempre acreditarem em minha capacidade e nunca me deixarem desistir.

Ao meu marido, pelo amor, pelo companheirismo, pela cumplicidade e pelo apoio em todos os momentos delicados da minha vida.

A minha orientadora, que conduziu o trabalho com paciência e dedicação, sempre disponível a compartilhar todo o seu vasto conhecimento.

Obrigada meus irmãos e sobrinhos, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente.

Ao programa Profmat e a UFMS, pela oportunidade de crescimento e qualificação.

# Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de sistemas lineares para o ensino médio, incluindo interpretações geométricas. A Regra de Cramer aparece de forma natural, nos sistemas de duas equações e duas incógnitas e a partir daí foi feita a extensão para sistemas com 3 equações e 3 incógnitas. Os resultados foram provados de maneira elementar sem o uso de técnicas mais avançadas sobre matrizes e determinantes. Finalizamos com o método do escalonamento para resolver sistemas lineares gerais.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares, Regra de Cramer, Escalonamento.

# Abstract

The main objective of this work is the study of linear systems for high school, including geometric interpretations. Cramer's Rule appears naturally, in systems of two equations and two unknowns, and from that point onwards, the extension was made to systems with 3 equations and 3 unknowns. The results were proved in an elementary way without using more advanced techniques on matrices and determinants. We finish with the scaling method to solve general linear systems.

**Key words:** Linear Systems, Cramer's Rule, Scaling.



# Sumário

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Resumo</b>  | <b>iv</b> |
| <b>Abstract</b>  | <b>v</b>  |
| <b>Introdução</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1 História dos Sistemas Lineares</b>                            | <b>2</b>  |
| 1.1 Sistemas Lineares uma Abordagem Histórica . . . . .            | 2         |
| <b>2 Sistemas Lineares com Duas Incógnitas</b>                     | <b>7</b>  |
| 2.1 Determinantes - Regra de Cramer . . . . .                      | 16        |
| 2.2 Introdução Informal ao Método de Escalonamento . . . . .       | 17        |
| 2.2.1 Escalonamento usando matrizes . . . . .                      | 18        |
| <b>3 Sistemas Lineares com Três Incógnitas</b>                     | <b>27</b> |
| 3.1 Coordenadas no Espaço . . . . .                                | 27        |
| 3.2 Distância entre dois pontos no espaço . . . . .                | 28        |
| 3.3 Equações paramétricas de uma reta no $\mathbb{R}^3$ . . . . .  | 30        |
| 3.4 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta AB . . . . . | 34        |
| 3.5 Vetores no Espaço . . . . .                                    | 36        |
| 3.6 Produto Interno de Vetores . . . . .                           | 39        |
| 3.7 Equação do Plano . . . . .                                     | 41        |
| 3.8 Sistemas $2 \times 3$ . . . . .                                | 43        |
| 3.9 Sistemas $3 \times 3$ . . . . .                                | 49        |
| <b>4 Escalonamento</b>   | <b>61</b> |
| 4.1 Sistemas lineares de ordem $m \times n$ . . . . .              | 61        |

*SUMÁRIO*

vii

|     |                                      |    |
|-----|--------------------------------------|----|
| 4.2 | Transformações Elementares . . . . . | 62 |
| 4.3 | Forma Escalonada . . . . .           | 67 |

**Bibliografia**

**75**

# Lista de Figuras

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Reta horizontal. . . . .                                  | 8  |
| 2.2  | Reta vertical. . . . .                                    | 8  |
| 2.3  | Reta com inclinação $m = 2$ . . . . .                     | 9  |
| 2.4  | Retas concorrentes. . . . .                               | 10 |
| 2.5  | Retas paralelas. . . . .                                  | 11 |
| 2.6  | Retas coincidentes. . . . .                               | 12 |
| 2.7  | Posições Relativas entre Duas Retas . . . . .             | 13 |
| 2.8  | Retas coincidentes. . . . .                               | 22 |
| 2.9  | Retas paralelas. . . . .                                  | 23 |
| 2.10 | Retas concorrentes. . . . .                               | 24 |
| 2.11 | Retas concorrentes. . . . .                               | 25 |
| 3.1  | Coordenadas de um ponto. . . . .                          | 28 |
| 3.2  | Distância $d(O, P)$ . . . . .                             | 29 |
| 3.3  | Translação dos eixos. . . . .                             | 30 |
| 3.4  | Reta determinada por 2 pontos distintos. . . . .          | 31 |
| 3.5  | Reta horizontal e reta vertical. . . . .                  | 32 |
| 3.6  | Reta determinada por 2 pontos distintos. . . . .          | 33 |
| 3.7  | Ponto $P$ localizado no segmento $AB$ . . . . .           | 34 |
| 3.8  | Paralelogramo $OBCA$ . . . . .                            | 35 |
| 3.9  | Vetor $\overrightarrow{OP}$ . . . . .                     | 37 |
| 3.10 | Representação de um vetor $\overrightarrow{AB}$ . . . . . | 38 |
| 3.11 | Soma de dois vetores. . . . .                             | 38 |
| 3.12 | Vetores colineares. . . . .                               | 39 |
| 3.13 | Diferença de 2 vetores. . . . .                           | 40 |

|   |    |
|---|----|
| 3.14 Planos $\pi_1$ , $\pi_2$ e $\pi_3$ respectivamente . . . . . | 42 |
| 3.15 Planos $\pi_4$ , $\pi_5$ e $\pi_6$ respectivamente . . . . . | 43 |
| 3.16 Planos coincidentes . . . . .                                | 47 |
| 3.17 Planos concorrentes. . . . .                                 | 48 |
| 3.18 Planos paralelos. . . . .                                    | 49 |
| 3.19 Planos em 3 situações. . . . .                               | 50 |
| 3.20 Planos em 2 situações. . . . .                               | 51 |
| 3.21 Planos concorrentes, dois a dois. . . . .                    | 51 |
| 3.22 Reta solução do sistema. . . . .                             | 57 |
| 3.23 Ponto $P$ , única solução do sistema. . . . .                | 58 |
| 3.24 Reta solução do sistema. . . . .                             | 59 |
| 3.25 Ponto $Q$ , única solução do sistema. . . . .                | 60 |

# Introdução

Nosso trabalho tem como objetivo principal o estudo de sistemas lineares com duas e três incógnitas do ponto de vista algébrico e com interpretação geométrica. Na maioria dos livros didáticos do ensino médio que pesquisamos para esse trabalho os sistemas lineares são tratados pensando apenas na sua resolução algébrica e acreditamos que isto possa ser alterado, tornando o assunto mais atraente.

No primeiro capítulo apresentaremos de maneira sucinta, um pouco sobre a história do surgimento do estudo de sistemas lineares, determinantes e matrizes, pois informações históricas podem ser usadas como ferramentas de motivação para nossos alunos e professores.

No capítulo 2 estudaremos sistemas lineares de duas incógnitas e duas equações, onde interpretamos a solução geometricamente, através das posições relativas entre as retas correspondentes às equações do sistema. Neste capítulo apresentamos a base para os estudos posteriores incluindo a Regra de Cramer e o método de escalonamento que serão apresentados nos capítulos 3 e 4.

No terceiro capítulo apresentaremos a resolução de sistemas lineares com 3 incógnitas com duas e três equações. Seguiremos a mesma linha do capítulo 2, interpretando agora cada equação como sendo um plano no espaço. Provaremos resultados importantes sem usar técnicas mais avançadas sobre matrizes e determinantes.

No capítulo 4 falaremos sobre o método do escalonamento, muito eficiente, para resolvermos sistemas gerais com  $m$  equações e  $n$  incógnitas.

# Capítulo 1

## História dos Sistemas Lineares

Neste primeiro capítulo faremos um breve resumo histórico sobre a origem dos estudos de sistemas lineares. Usamos como referências [2], [4], [5], [10] e [11].

### 1.1 Sistemas Lineares uma Abordagem Histórica

Os estudos de sistemas lineares como conhecemos nos dias atuais, são ferramentas essenciais para os avanços científicos e sociais. Os conceitos, as notações e os teoremas hoje conhecidos se consolidaram ao longo do tempo devido a necessidade de resolver problemas, que foram solucionados com a contribuição de vários estudiosos, alguns serão apresentados no decorrer desse capítulo.

Historicamente um dos estudos mais antigos registrados sobre sistemas lineares, é o das representações dos coeficientes em barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro contidas no livro *Chiu-Chang Suan-Shu* (Nove Capítulos sobre a Arte Matemática), com sua publicação por volta de 200 a.C. durante a dinastia Han na China. Segundo [4], "é o mais importante dos textos de matemática dos chineses".

As operações eram realizadas com o auxílio de pequenos gravetos dispostos em um tabuleiro, onde realizavam operações matemáticas elementares com intuito de eliminar coeficientes e assim eles acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação. Tal metodologia foi a precursora das técnicas de resolução de sistemas lineares apresentados em épocas posteriores e se assemelha ao método de eliminação de Gauss, apresentado no século *XIX*.

Para [2] esse livro está entre as obras mais influentes da matemática chinesa, pois

conta com 246 problemas sobre assuntos diversos, tais como: medidas de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos.

Como destaque, no capítulo oitavo do *Chiu-Chang Suan-Shu*, temos as soluções de problemas envolvendo equações lineares utilizando os números positivos e negativos com três equações e três incógnitas. A seguir, temos um exemplo retirado do livro para ilustrar o método criado pelos chineses.

**Exemplo 1.1** *Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa qualidade, três de regular são vendidos por 34 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades?*

Segundo o método chinês, o problema deve ser representado, como na tabela a seguir.

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ 34 & 39 \end{bmatrix}$$

Para resolver o problema os chineses realizavam os seguintes procedimentos:

1. Multiplicavam todos os termos da coluna da esquerda (2, 3, 34) pelo primeiro termo da coluna da direita, que nesse caso é o número 3, resultando em (6, 9, 102), como mostra a tabela a seguir:

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) \\ 6 & 3 \\ 9 & 2 \\ 102 & 39 \end{bmatrix}$$

2. Subtraíam o número da coluna da direita de cada um dos números da coluna da esquerda,  $(6 - 3, 9 - 2, 102 - 39) = (3, 7, 63)$ .

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) \\ 3 & 3 \\ 7 & 2 \\ 63 & 39 \end{bmatrix}$$

3. Repetiam o processo anterior da subtração até que o primeiro número da coluna à esquerda seja eliminado,  $(3 - 3, 7 - 2, 63 - 39) = (0, 5, 24)$

$$\begin{bmatrix} (1) & (2) \\ 0 & 3 \\ 5 & 2 \\ 24 & 39 \end{bmatrix}$$

Através desse processo concluímos que para encontrarmos o preço do feixe de qualidade regular, basta dividir 24 por 5, ou seja, ele custa 4,80 dou. E para descobrirmos o valor do feixe de boa qualidade, basta substituir o valor que encontramos para o feixe de qualidade regular na coluna à direita, com isso temos um valor de 9,80 dou. Ao atribuirmos uma letra ao preço do feixe de qualidade regular ( $x$ ) e outra letra para o feixe de boa qualidade ( $y$ ), podemos representar o exemplo da seguinte maneira:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 39 \\ 2x + 3y = 34 \end{cases}$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente para  $x$  e  $y$ , temos:

$$\begin{cases} 3 \cdot (4,8) + 2 \cdot (9,8) = 39 \\ 2 \cdot (4,8) + 3 \cdot (9,8) = 34 \end{cases}$$

Nesse exemplo, vimos que o método chinês era utilizado para encontrar valores desconhecidos que satisfaziam condições dos problemas propostos. Em seguida verificamos que ao nomear tais valores desconhecidos com letras, poderíamos escrevê-los como um conjunto de equações.

Segundo uma lenda chinesa, o interesse por tabelas, foi devido a uma tartaruga que eles encontraram que tinha em seu casco um “quadrado mágico”, uma matriz quadrada de ordem 3, onde a soma dos elementos da horizontal, da vertical e da diagonal eram sempre iguais a 15.

Além das inscrições matemáticas chinesas, temos também os papiros babilônicos datados cerca de 300 a.C., o papiro de Rhind é um exemplo, atualmente está no *British Museum*, em Londres.

[2] ressalta que este papiro possui cerca de 30 cm de altura e 5 cm de comprimento e contém 85 problemas. A diferença entre os problemas propostos no livro chinês em relação aos do papiro babilônico são que os da obra chinesa eram voltados para solução de problemas cotidianos, já os do papiro babilônico são de cunho algébrico que tem entre os temas



abordados: frações unitárias, operações aritméticas e geométricas, razões trigonométricas e equações lineares.

Em 1693, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) começava seus trabalhos sobre determinantes no ocidente. Leibniz usou combinações lineares de coeficientes para resolver sistemas de equações lineares e estabeleceu a condição de compatibilidade de um sistema de três equações e duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3, formado pelos coeficientes e pelos termos independentes, também criou formalmente uma notação com índices bem próxima a usada atualmente.

O primeiro documento dessa regra foi uma correspondência de Leibniz enviada a Guillaume François Antoine (1661-1704) em 28 de abril de 1693, explicando uma maneira de solucionar o problema da eliminação das incógnitas.

O escocês Colin Maclaurin (1688 – 1746), foi um dos pioneiros em resolver sistemas de  $n$  equações e  $n$  incógnitas usando determinantes, porém sua obra *Treatise of Algebra* só foi publicada após sua morte em 1748. Na mesma época o suíço Gabriel Cramer (1704- 1752) chegou ao mesmo resultado do escocês de forma independente e suas técnicas alcançaram fama por apresentar uma notação clara, esse estudo encontra-se no livro *Introduction à L'analyse des lignes courbes algébriques* de 1750.

O matemático Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), apresentou o método da eliminação em seu livro *Disquisitio de Elementis Ellipticis Palladis* publicado em 1811, no qual ele procurava detalhes sobre a órbita de Pallas, um dos maiores asteroides do sistema solar. Porém, se deparou com um sistema de equações lineares com seis incógnitas, onde nem todas equações eram satisfeitas simultaneamente, com isso foi preciso determinar valores para as incógnitas que minimizassem o erro, ao invés de tentar solucionar o problema diretamente. Gauss introduziu um método para lidar com sistemas de equações em geral.

Esse método seria aperfeiçoado posteriormente pelo matemático Wilhelm Jordan (1842-1899), em sua obra *Handbuch der Vermessungskeunde* publicada em 1888, que recebeu o nome de método de Gauss-Jordan, dando origem a uma matriz diagonal equivalente que fornece o valor das incógnitas de forma imediata.

Como vimos no decorrer desse capítulo primeiramente surgiram os estudos sobre sistemas lineares, depois os determinantes e por fim as matrizes. Atualmente no ensino médio não estudamos tais conceitos por ordem cronológica, pois estudamos matrizes, determinantes e sistemas lineares, nessa ordem. Nesse trabalho estudaremos sistemas lineares

sem as ferramentas mais avançadas sobre matrizes.

## Capítulo 2

# Sistemas Lineares com Duas Incógnitas

Nesse capítulo estudaremos sistemas lineares de duas incógnitas dando uma interpretação geométrica. A maioria dos livros didáticos do ensino médio apresenta somente um estudo algébrico, e entendemos que com uma visão geométrica nossos alunos entenderão melhor o conteúdo. No final do capítulo resolveremos sistemas de duas incógnitas pelo método de escalonamento de matrizes visando o estudo de sistemas com várias incógnitas. Usamos como referências [7], [8] e [9].

Faremos inicialmente um breve resumo sobre retas no plano Cartesiano  $\mathbb{R}^2$ . Consideremos dois pontos distintos  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  de uma reta  $r$ , no plano cartesiano.

- (1) Se  $x_1 = x_2$ , a reta  $r$  é vertical, descrita pela equação  $x = x_1$ ;
- (2) Se  $x_1 \neq x_2$ , a reta  $r$  não vertical é descrita pela equação  $y = mx + n$ , onde  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$  e  $n = y_1 - mx_1$ .

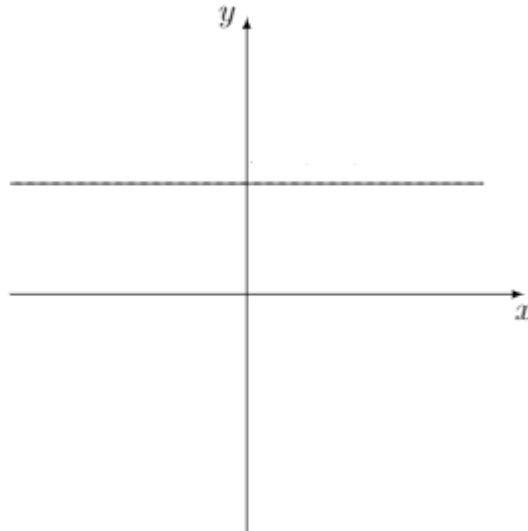
O número  $m$  da equação  $y = mx + n$  é denominado declive, coeficiente angular ou inclinação da reta. Duas equações  $y = m_1x + n_1$  e  $y = m_2x + n_2$  representam a mesma reta se, e somente se,  $m_1 = m_2$  e  $n_1 = n_2$ . Duas retas não verticais distintas  $y = m_1x + n_1$  e  $y = m_2x + n_2$  são paralelas se, e somente se  $m_1 = m_2$  e  $n_1 \neq n_2$ . De um modo geral, a equação de uma reta é dada por

$$ax + by = c$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes reais e  $a$  e  $b$  não são simultaneamente nulos. Esta equação chamada equação geral, inclui as retas verticais e horizontais. Multiplicando a equação  $ax + by = c$  por uma constante real  $k \neq 0$  obtemos uma nova equação  $(ka)x + (kb)y = kc$  representando a mesma reta.

**Exemplo 2.1** Considere a equação  $ax + by = c$ , com  $a = 0$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$ , com isso temos a equação:  $0 + y = 1 \Leftrightarrow y = 1$  (reta horizontal)

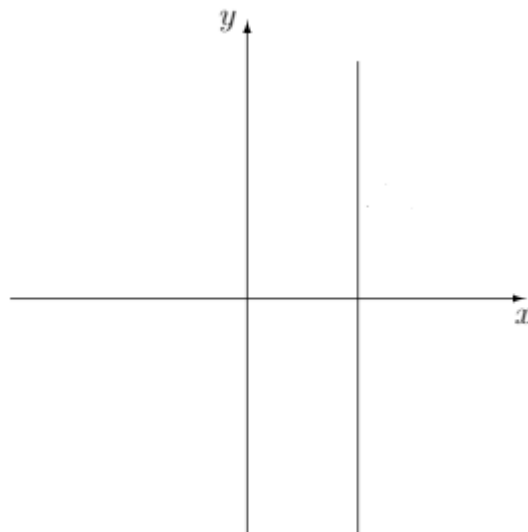
Figura 2.1: Reta horizontal.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 2.2** Considere a equação  $ax + by = c$ , com  $a = 1$ ,  $b = 0$  e  $c = 1$ , com isso temos a equação:  $x = 1$  (reta vertical)

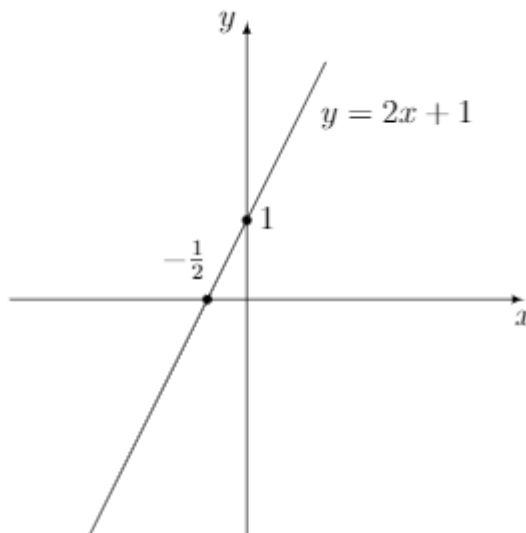
Figura 2.2: Reta vertical.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 2.3** Considere a equação  $ax + by = c$ , com  $a = -2$ ,  $b = 1$  e  $c = 1$ , com isso temos a equação:  $-2x + y = 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1$  (inclinação  $m = 2$ )

Figura 2.3: Reta com inclinação  $m = 2$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Daremos alguns exemplos sobre a posição relativa de duas retas dadas.

**Exemplo 2.4** Determine, caso exista, o ponto de interseção das retas  $-x + 2y = 3$  e  $2x + y = 4$ .

**Solução:** Precisamos achar números reais  $x$  e  $y$  que cumpram simultaneamente as duas equações abaixo.

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

Observando que

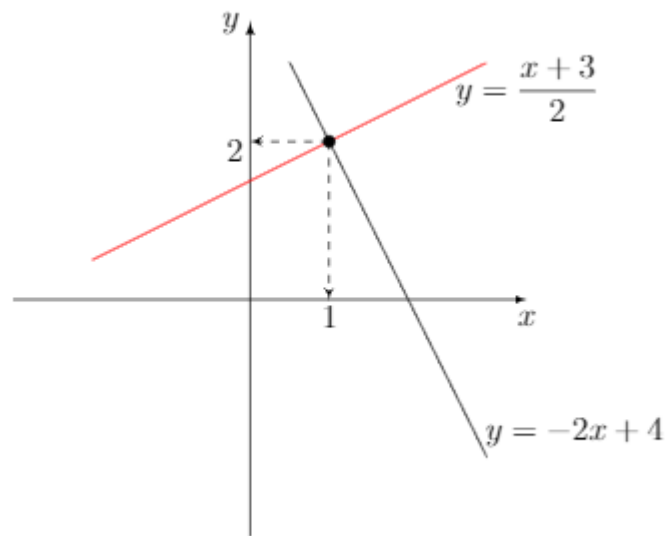
$$-x + 2y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{x + 3}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$2x + y = 4 \Leftrightarrow y = -2x + 4$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = -2x + 4$$

Resolvendo esta equação do primeiro grau obtemos  $x = 1$  e daí  $y = 2$ .

Figura 2.4: Retas concorrentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

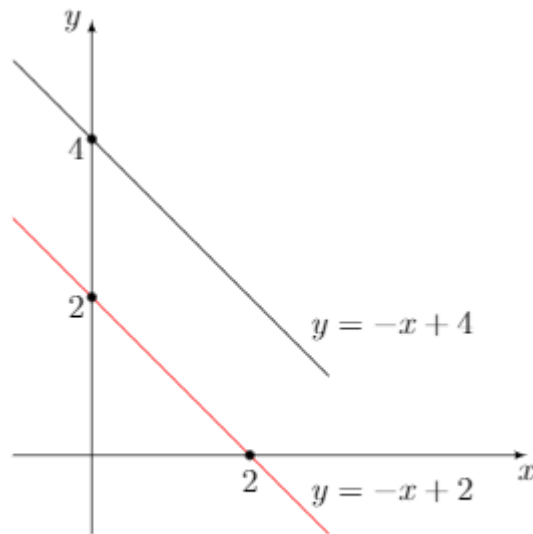
**Exemplo 2.5** Determine, caso exista, o ponto de interseção das retas  $x + y = 2$  e  $x + y = 4$ .

**Solução**

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Neste caso,  $x + y = 2 \Leftrightarrow y = -x + 2$  e  $x + y = 4 \Leftrightarrow y = -x + 4$ , portanto duas retas paralelas e não temos pontos de interseção.

Figura 2.5: Retas paralelas.



Fonte: Elaborada pela autora.

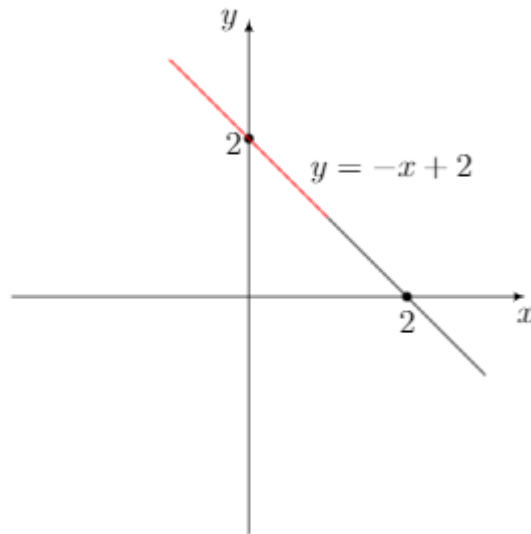
**Exemplo 2.6** *Determine, caso exista, o ponto de interseção das retas  $3x + 3y = 6$  e  $x + y = 2$ .*

**Solução**

$$\begin{cases} 3x + 3y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Neste caso,  $3x + 3y = 6 \Leftrightarrow x + y = 2$  e as duas equações representam a mesma reta, portanto temos infinitos pontos de interseção.

Figura 2.6: Retas coincidentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 2.7** *Um sistema linear  $S$  de duas equações com duas incógnitas  $x$  e  $y$*

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

*é um problema que consiste em encontrar números  $x$  e  $y$  que cumpram simultaneamente as duas condições do sistema acima [9].*

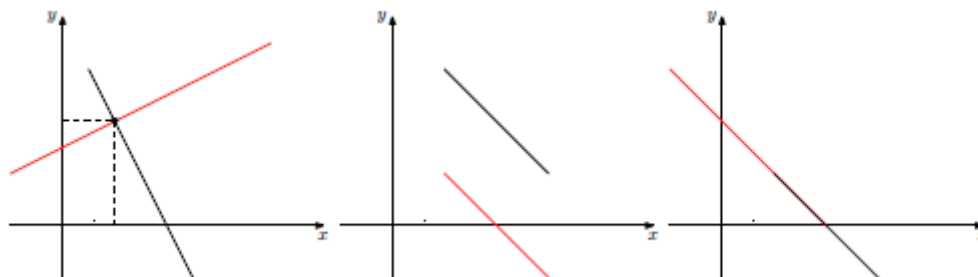
Uma solução para o sistema é um par ordenado  $(x_0, y_0)$  de números reais tais que  $ax_0 + by_0 = c$  e  $a'x_0 + b'y_0 = c'$ , em outras palavras, um ponto que pertence às duas retas dadas.

Resolver um sistema significa encontrar todas as soluções. Do ponto de vista geométrico, o sistema  $S$  tem uma única solução quando as duas retas dadas são concorrentes, nenhuma solução se elas são paralelas e uma infinidade de soluções quando essas retas coincidem.

Um sistema se diz indeterminado, impossível ou determinado quando admite mais de uma solução, nenhuma solução ou única solução respectivamente.



Figura 2.7: Posições Relativas entre Duas Retas



Fonte: Elaborada pela autora.

Faremos agora uma análise algébrica de um sistema  $S$ , começando com a seguinte proposição.

**Proposição 2.8** *As seguintes afirmações são equivalentes, isto é, uma delas é verdadeira se, e somente se, as outras duas também são verdadeiras.*

- (1) *As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são paralelas ou coincidentes.*
- (2)  $ab' - ba' = 0$ .
- (3) *Existe um número real  $k \neq 0$  tal que  $a' = ka, b' = kb$ .*

**Prova** (1)  $\Rightarrow$  (2) *Suponha que as retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são paralelas ou coincidentes.*

*Se  $b = 0$  a equação  $ax + by = c$  reduz-se a equação  $ax = c$ , logo define uma reta vertical  $x = \frac{c}{a}$ . Neste caso, como as retas são paralelas ou coincidentes concluímos que a reta  $a'x + b'y = c'$  também é vertical e assim  $b' = 0$ , portanto  $ab' - a'b = 0$ .*

*Se  $b \neq 0$ , a reta  $ax + by = c$  equivale a  $y = \frac{-a}{b}x + \frac{c}{b}$  neste caso, temos  $b' \neq 0$  e a reta  $a'x + b'y = c'$  equivale a  $y = \frac{-a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}$ , portanto  $\frac{-a}{b} = \frac{-a'}{b'}$ , donde  $ab' - a'b = 0$ .*

(2)  $\Rightarrow$  (3) *Suponhamos que  $ab' - ba' = 0$ , há três casos a considerar.*

*Primeiro caso:  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ . Então de  $ab' - ba' = 0$ , segue-se  $a'/a = b'/b$ . Chamando  $k$  este quociente, temos  $a' = ka$  e  $b' = kb$  com  $k \neq 0$ .*

*Segundo caso:  $a = 0, b \neq 0$ . Então  $ab' = 0$ , logo  $ba' = 0$  e como  $b \neq 0$  temos que  $a' = 0$ . Tomando  $k = b'/b \neq 0$ , temos  $a' = ka$  e  $b' = kb$ .*

*Terceiro caso:  $a \neq 0, b = 0$  é análogo ao segundo caso.*

(3)  $\Rightarrow$  (1) Como  $a' = ka$  e  $b' = kb$  com  $k \neq 0$  temos que  $ax + by = c \Leftrightarrow kax + kby = kc \Leftrightarrow a'x + b'y = kc$

assim,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'x + b'y = kc \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

se  $kc = c'$  temos duas retas coincidentes.

Suponhamos agora que  $kc \neq c'$ .

Se  $b = 0$ , temos  $b' = 0$  e neste caso

$$\begin{cases} a'x = kc \\ a'x = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k}{a'}c \\ x = \frac{c'}{a'} \end{cases}$$

obtendo assim duas retas verticais, portanto paralelas.

Se  $b \neq 0$ , temos  $b' \neq 0$  e

$$\begin{cases} a'x + b'y = kc \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-a'}{b'}x + \frac{k}{b'}c \\ y = \frac{-a'}{b'}x + \frac{c'}{b'} \end{cases}$$

portanto, duas retas paralelas.

**Corolário 2.9** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  coincidem se, e somente se, existe um número real  $k \neq 0$  tal que  $a' = ka$ ,  $b' = kb$  e  $c' = kc$ .

**Prova** Se as retas dadas coincidem, segue-se da proposição 2.8 que existe  $k \neq 0$  tal que  $a' = ka$  e  $b' = kb$ . Além disso, tomando um ponto  $(x_0, y_0)$  nessa reta, temos

$$c' = a'x_0 + b'y_0 = kax_0 + kby_0 = k(ax_0 + by_0) = kc$$

portanto  $c' = kc$ . Reciprocamente, se existe  $k \neq 0$  tal que  $a' = ka$ ,  $b' = kb$  e  $c' = kc$ , obtemos  $a'x + b'y = c' \Leftrightarrow kax + kby = kc \Leftrightarrow ax + by = c$ .

**Corolário 2.10** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são paralelas se, e somente se, existe um número real  $k \neq 0$  tal que  $a' = ka$ ,  $b' = kb$  e  $c' \neq kc$ .

**Prova** Se as retas dadas são paralelas, pela proposição 2.8 existe  $k \neq 0$  tal que  $a' = ka$  e  $b' = kb$ . Além disso, se tomarmos um ponto  $(x_0, y_0)$  na reta  $ax + by = c$ , ele não estará na reta  $a'x + b'y = c'$ . Portanto não estará na reta  $a'x + b'y = c'$  e

$$c' \neq a'x_0 + b'y_0 = kax_0 + kby_0 = k(ax_0 + by_0) = kc$$

ou seja,  $c' \neq kc$ . Reciprocamente, suponha  $a' = ka$ ,  $b' = kb$  e  $c' \neq kc$ . Tomando um ponto qualquer  $(x_0, y_0)$  na reta  $ax + by = c$ , temos que  $a'x_0 + b'y_0 = kax_0 + kby_0 = k(ax_0 + by_0) = kc \neq c'$ , portanto o ponto não estará na reta  $a'x + b'y = c'$  e assim as retas são paralelas.

**Corolário 2.11** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  coincidem se, e somente se,  $a'b - ab' = ac' - a'c = bc' - c'b = 0$ .

**Prova** Suponhamos que as retas são coincidentes, segue do corolário 2.9 que existe  $k \neq 0$  tal que  $a' = ka$ ,  $b' = kb$  e  $c' = kc$ . Daí  $ab' - a'b = akb - kab = 0$ ,  $ac' - ca' = akc - cka = 0$  e  $bc' - b'c = bkc - kbc = 0$ .

Reciprocamente, suponha  $ab' - a'b = ac' - ca' = bc' - c'b = 0$ , usando a proposição 2.10, concluímos que existem  $k_1, k_2$  e  $k_3$  não nulos tais que  $a' = ak_1$ ,  $b' = bk_1$ ,  $c' = ck_2$ ,  $a' = ak_2$ ,  $c' = ck_3$  e  $b' = bk_3$ , segue daí que:  $ak_1 = ak_2$ ,  $ck_2 = ck_3$  e  $bk_1 = bk_3$ . Como  $a$  e  $b$  não são simultaneamente nulos, temos que  $k_1 = k_2$  ou  $k_1 = k_3$ .

No caso  $c \neq 0$ , obtemos  $k_2 = k_3$  e daí  $k_1 = k_3$ , usando o corolário 2.9 concluímos que as retas são coincidentes.

No caso  $c = 0$ , temos  $c' = 0$  e  $ax + by = 0 \Leftrightarrow akx + bky = 0 \Leftrightarrow a'x + b'y = 0$ , portanto as retas são coincidentes.

**Corolário 2.12** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são paralelas se, e somente se,  $a'b - ab' = 0$  mas  $ac' - a'c \neq 0$  ou  $bc' - c'b \neq 0$ .

**Prova** Temos, pela proposição 2.8 que as retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são paralelas ou coincidentes se, e somente se,  $ab' - b'a = 0$ . Pelo corolário 2.11 as retas são coincidentes se, e somente se,  $ab' - b'a = 0$  e  $ac' - a'c = b'c - bc' = 0$  portanto, as retas são paralelas se, e somente se,  $ab' - b'a = 0$  mas  $ac' - a'c \neq 0$  ou  $b'c - bc' \neq 0$ .

**Corolário 2.13** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são concorrentes se, e somente se,  $a'b - ab' \neq 0$  e neste caso,

$$x = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} \text{ e } y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}$$

é a única solução do sistema  $S$ .

**Prova** Temos pela proposição 2.8, que  $ab' - a'b = 0$  se, e somente se, as retas coincidem ou são paralelas. Portanto,  $ab' - a'b \neq 0$  se, e somente se, as retas são concorrentes, neste caso temos uma única solução. Substituindo os valores dados de  $x$  e  $y$

$$ax + by = a \cdot \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b} + b \cdot \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = c \cdot \frac{\cancel{ab'} - \cancel{ab'}}{\cancel{ab'} - \cancel{ab'}} + c' \cdot \frac{ab - \cancel{ab}^0}{ab' - a'b} = c$$

portanto, esta é a solução.

## 2.1 Determinantes - Regra de Cramer

Uma matriz real do tipo  $2 \times 2$  é formada por 4 números reais dispostos em duas linhas e duas colunas.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

**Definição 2.14** Definimos determinante de uma matriz  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  como sendo o número real  $ad - bc$  e usaremos a notação

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Retomando o sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

considere as denominadas matrizes dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$$

Temos que

$$\det A = ab' - ba', \det A_1 = cb' - bc' \text{ e } \det A_2 = ac' - ca'$$

Reescrevendo os Corolário 2.11 e 2.12:

**Corolário 2.11** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são coincidentes se, e somente se,  $\det A = \det A_1 = \det A_2 = 0$ .

**Corolário 2.12** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são paralelas se, e somente se,  $\det A = 0$  mas  $\det A_1 \neq 0$  ou  $\det A_2 \neq 0$ .

Reescrevendo o Corolário 2.13 obtemos a seguinte proposição:

**Proposição 2.15 (Regra de Cramer)** As retas  $ax + by = c$  e  $a'x + b'y = c'$  são concorrentes se, e somente se,  $a'b - ab' \neq 0$  e neste caso, a única solução do sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

é dada por

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} \quad e \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}$$

Essas duas fórmulas, que fornecem os valores das incógnitas  $x$  e  $y$  em termos de determinantes, constituem a Regra de Cramer, onde

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} c & b \\ c' & b' \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & c \\ a' & c' \end{pmatrix}$$

## 2.2 Introdução Informal ao Método de Escalonamento

O método de escalonamento consiste na transformação de um sistema dado num sistema equivalente mais simples. As transformações permitidas, denominadas transformações elementares, são as seguintes:

- 1) Trocar as equações do sistema de lugar;
- 2) Multiplicar uma equação por um número real não nulo;
- 3) Substituir uma equação por outra obtida pela soma dela com outra equação multiplicada por um número real.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \xleftrightarrow{(1)} \begin{cases} a'x + b'y = c' \\ ax + by = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \xleftrightarrow{(2)} \begin{cases} kax + kby = kc \\ a'x + b'y = c' \end{cases}, \quad \text{onde } k \neq 0$$

$$a'x + b'y = c' \Leftrightarrow ka'x + kb'y = kc'$$

$$ax + by = c \Leftrightarrow ax + by + ka'x + kb'y = c + kc'$$

Daí,

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \xLeftrightarrow{(3)} \begin{cases} (a + ka')x + (b + kb')y = c + kc' \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Dizemos que dois sistemas de equações lineares são equivalentes, se pudermos obter um sistema do outro a partir de uma seqüência finita de transformações elementares. Assim, sistemas de equações lineares equivalentes possuem mesmo conjunto solução.

**Exemplo 2.16** Resolva o seguinte sistema pelo método de escalonamento

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

Pelo método de escalonamento

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 3y = 5 \end{cases} \xLeftrightarrow{(1)} \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases} \xLeftrightarrow{(3)} \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 0 + 10y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 5 \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Assim  $y = -\frac{2}{5}$  substituindo  $y$  na primeira equação temos que  $x = 5 + 3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{19}{5}$ .

Resolvendo pela regra de Cramer:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$\det A = -6 - 4 = -10$ ,  $\det A_1 = -18 - 20 = -38$  e  $\det A_2 = 10 - 6 = 4$ , então  $x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-38}{-10} = \frac{19}{5}$  e  $y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{-10} = -\frac{2}{5}$  é a solução do sistema.

## 2.2.1 Escalonamento usando matrizes

Considere o sistema

$$S = \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Vamos considerar somente os coeficientes dispostos em duas linhas e três colunas como se segue

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

obtendo uma matriz  $2 \times 3$  que é denominada matriz completa do sistema.

Temos assim uma correspondência biunívoca entre sistemas  $2 \times 2$  com a matrizes  $2 \times 3$ .

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

Dada uma matriz  $2 \times 3$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

indicaremos por  $L_1$  a primeira linha e  $L_2$  a segunda linha. Assim,

$$L_1 = (a, b, c)$$

$$L_2 = (a', b', c')$$

As transformações elementares de sistemas podem ser descritas considerando as matrizes completas e efetuando transformações denominadas de transformações elementares nas linhas, como se segue:

- 1) Permutação das linhas  $L_1$  e  $L_2$ , indicada por  $L_1 \leftrightarrow L_2$ .

Neste caso,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

representa a transformação elementar do sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a'x + b'y = c' \\ ax + by = c \end{cases}$$

- 2) Multiplicação de uma linha  $L_1$  ou  $L_2$  por um número real  $k \neq 0$ .

Neste caso,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \xrightarrow{kL_1} \begin{pmatrix} ka & kb & kc \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \xrightarrow{kL_2} \begin{pmatrix} a & b & c \\ ka' & kb' & kc' \end{pmatrix}$$

representam, respectivamente as transformações elementares do sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} kax + kby = kc \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ ka'x + kb'y = kc' \end{cases}$$

3) Substituição de uma linha pela adição desta mesma linha com a outra linha multiplicada por um número real  $k \neq 0$ .

Neste caso,

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + kL_2} \begin{pmatrix} a + ka' & b + kb' & c + kc' \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + kL_1} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' + ka & b' + kb & c' + kc \end{pmatrix}$$

representam, respectivamente as transformações elementares do sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + ka')x + (b + kb')y = c + kc' \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ (a' + ka)x + (b' + kb)y = c' + kc \end{cases}$$



**Exemplo 2.17** Resolva, usando o método de escalonamento com matrizes, o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

Considerando a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

faremos uma sequência de transformações elementares nas linhas, de modo que o sistema original adquira uma forma equivalente especial que será usada para resolvê-lo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{L_2}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

obtendo o sistema  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ , que nos dá a solução do sistema.

Vamos dar mais alguns exemplos de soluções de sistemas  $2 \times 2$ , utilizando as técnicas apresentadas nesse capítulo.

**Exemplo 2.18** Determine a solução do sistema.

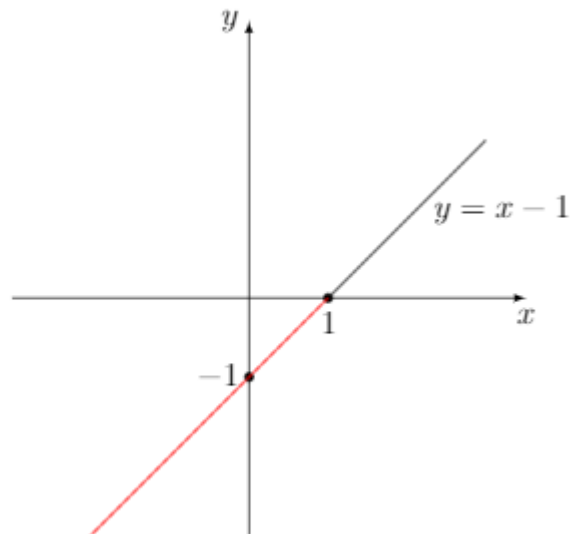
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Neste caso,  $\det A = 2 - 2 = 0$  então temos que as retas são paralelas ou coincidentes, como os  $\det A_1 = 2 - 2 = 0$  e  $\det A_2 = 2 - 2 = 0$ , então pelo corolário 2.11 temos que as retas são coincidentes. Portanto, temos uma infinidade de soluções.

Figura 2.8: Retas coincidentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 2.19** Determine a solução do sistema.

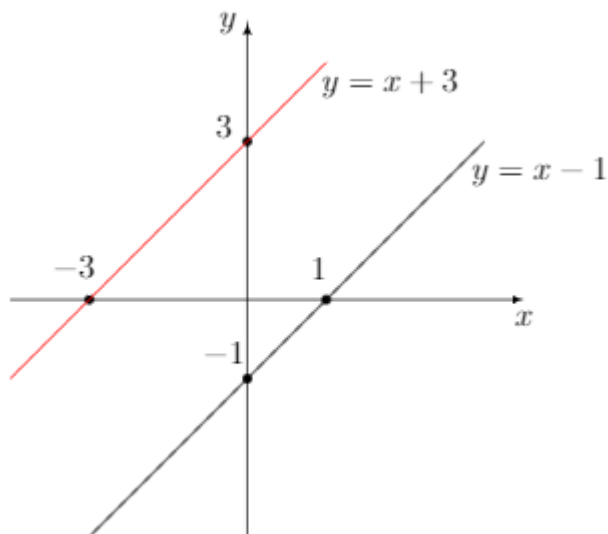
$$\begin{cases} -x + y = -1 \\ -3x + 3y = 9 \end{cases}$$

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Neste caso,  $\det A = -3 + 3 = 0$ , então as retas são paralelas ou coincidentes, como os  $\det A_1 = -3 - 9 = -12$  e  $\det A_2 = 9 - 3 = 6$  que são diferentes de zero, segue pelo corolário 2.12 que as retas são paralelas.

Figura 2.9: Retas paralelas.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 2.20** Determine a solução do sistema.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{cases}$$

Considere as matrizes

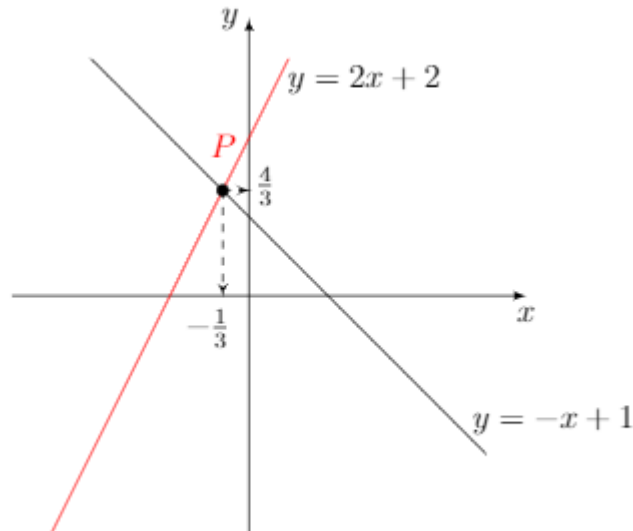
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como os  $\det A = 1 + 2 = 3$ ,  $\det A_1 = 1 - 2 = -1$  e  $\det A_2 = 2 + 2 = 4$  são diferentes de zero, pela regra de Cramer temos que:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-1}{3} \quad e \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{4}{3}$$

logo o sistema possui solução única dada pelo ponto  $P = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ , que será representado no gráfico a seguir.

Figura 2.10: Retas concorrentes.



Fonte: Elaborada pela autora.

Resolvendo pelo método de escalonamento nos sistemas, realizando transformações elementares, temos que:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ -2x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -x + \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{3}{2}y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ 3y = 4 \end{cases}$$

do último sistema temos que  $y = \frac{4}{3}$ , substituindo o valor de  $y$  na primeira equação temos que  $x = \frac{1 - 4}{3} = -\frac{1}{3}$ .

Agora vamos utilizar o método escalonamento usando matrizes. Considere a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

realizando uma sequência de transformações elementares nas linhas, encontraremos uma matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{7}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{2}{7}L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{2}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

obtendo o sistema  $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$ , que é a solução do sistema.

**Exemplo 2.21** Determine a solução do sistema.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ 7x + 9y = -1 \end{cases}$$

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 9 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Como os  $\det A = 18 + 35 = 53$ ,  $\det A_1 = 27 - 5 = 22$  e  $\det A_2 = -2 - 21 = -23$  então pela regra de Cramer temos que

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{22}{53} \quad e \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = -\frac{23}{53}$$

logo o sistema possui solução única, dada pelo ponto  $P = \left(\frac{22}{53}, -\frac{23}{53}\right)$ , que está representado no gráfico abaixo.

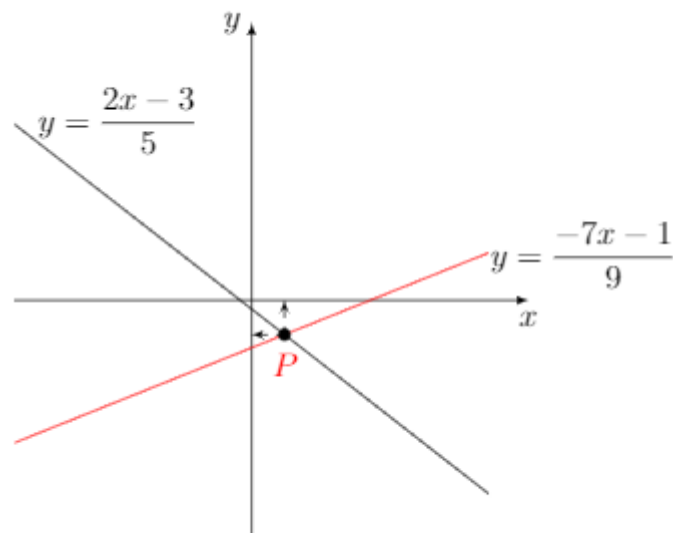


Figura 2.11: Retas concorrentes.

Resolvendo pelo método de escalonamento usando sistemas, realizando transformações elementares, temos que:

$$\begin{cases} 2x + -5y = 3 \\ 7x + 9y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 35y = 21 \\ -14x - 18y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14x - 35y = 21 \\ -53y = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 3 \\ -53y = 23 \end{cases}$$

pelo último sistema temos que  $y = -\frac{23}{53}$ , substituindo o valor de  $y$  na primeira equação temos que  $x = \frac{3 + 5 \cdot (-23)}{53} = \frac{22}{53}$ .

Agora vamos utilizar o método escalonamento usando matrizes, seja a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

fazendo uma sucessão de transformações elementares nas linhas, encontraremos a matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 7 & 9 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow \frac{1}{7}L_2]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow L_2 - L_1]{\rightarrow} \\ \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{53}{14} & -\frac{23}{14} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \rightarrow \frac{14}{53}L_2]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{53} \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 \rightarrow L_1 + \frac{5}{2}L_2]{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{22}{53} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{53} \end{pmatrix}$$

obtendo o sistema  $\begin{cases} x = \frac{22}{53} \\ y = -\frac{23}{53} \end{cases}$ , solução do sistema.

# Capítulo 3

## Sistemas Lineares com Três Incógnitas

Nesse capítulo estudaremos sistemas lineares de três incógnitas com duas e três equações, apresentando uma interpretação geométrica. Inicialmente faremos uma breve introdução nos seguintes assuntos: coordenadas do espaço, distância entre dois pontos no espaço, equações paramétricas de uma reta no  $\mathbb{R}^3$ , coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, vetores no espaço, produto interno de vetores e equação do plano. Para fundamentação teórica utilizamos as seguintes referências [1], [3], [7] e [9].

### 3.1 Coordenadas no Espaço

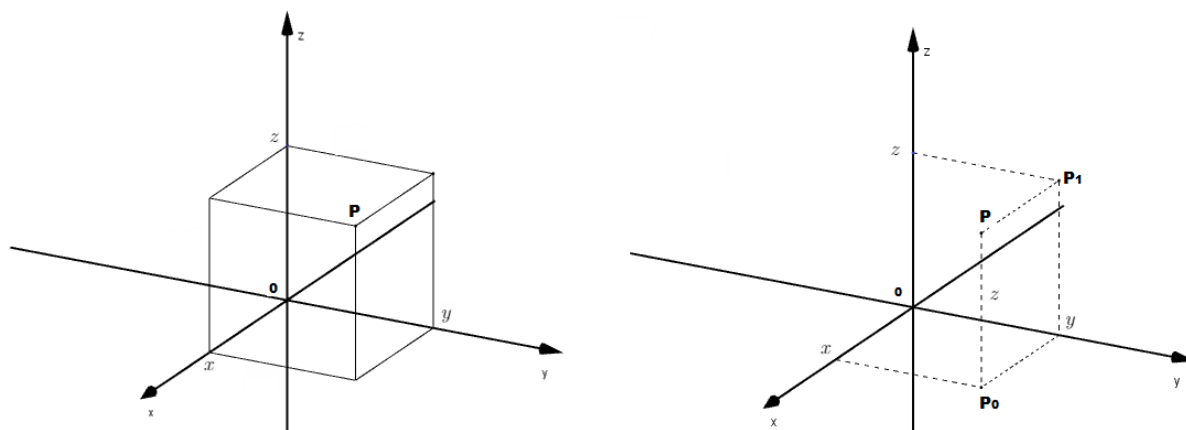
Do mesmo modo que os pontos de um plano são caracterizados por pares ordenados de números reais  $(x, y)$ , os pontos do espaço podem igualmente ser identificados com ternos de números reais  $(x, y, z)$ . Seja  $E$  o espaço euclidiano tridimensional. Um sistema de coordenadas (cartesianas) em  $E$  consiste em três eixos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ , com mesma origem  $O = (0, 0, 0)$  e de forma que qualquer um deles seja perpendicular aos outros dois.

Uma vez fixado o sistema  $OXYZ$ , chamaremos de  $OXY$ ,  $OYZ$  e  $OXZ$  os planos determinados pelos eixos  $OX$  e  $OY$ ,  $OY$  e  $OZ$ ,  $OX$  e  $OZ$ , respectivamente.

A escolha do sistema  $OXYZ$  faz com que se possa associar a cada ponto  $P$  do espaço um terno ordenado  $(x, y, z)$  de números reais, chamadas as coordenadas do ponto  $P$  relativamente a esse sistema.

Para obter a coordenada  $x$  do ponto  $P$  fazemos passar por esse ponto um plano  $\pi$ , paralelo a  $OYZ$ . A coordenada, no eixo  $OX$ , da interseção do plano  $\pi$  com  $OX$  é o número  $x$ . Analogamente,  $y$  é a coordenada, no eixo  $OY$ , da interseção deste eixo com o

Figura 3.1: Coordenadas de um ponto.



Fonte: Elaborada pela autora.

plano  $\pi'$ , paralelo a  $OXZ$ , passando por  $P$ . Finalmente,  $z$  é a coordenada, no eixo  $OZ$ , da interseção  $\pi''$  com  $OZ$ , onde  $\pi''$  é o plano paralelo a  $OXY$  passando por  $P$ .

As coordenadas  $(x, y, z)$  do ponto  $P$  no sistema  $OXYZ$  podem também ser obtidas do seguinte modo: a reta paralela ao eixo  $OZ$  passando pelo ponto  $P$  corta o plano  $OXY$  no ponto  $P_0$ . Sejam  $(x, y)$  as coordenadas de  $P_0$  no sistema  $OXY$  do plano  $OXY$ . Estas são as duas primeiras coordenadas de  $P$ . Por sua vez, a reta paralela ao eixo  $OY$  passando por  $P$  corta o plano  $OYZ$  no ponto  $P_1$ . Sejam  $(y, z)$  as coordenadas de  $P_1$  no sistema  $OYZ$ . O número  $y$  é o mesmo já obtido e  $z$  é a terceira coordenada do ponto  $P$ .

Usa-se a notação  $\mathbb{R}^3$  para representar o conjunto cujos elementos são os ternos ordenados  $(x, y, z)$  de números reais. O número  $x$  é a primeira coordenada,  $y$  é a segunda coordenada e  $z$  é a terceira, do terno  $(x, y, z)$ .

O sistema  $OXYZ$  determina uma correspondência biunívoca  $E \rightarrow \mathbb{R}^3$  que a cada ponto  $P$  do espaço associa o terno  $(x, y, z)$  de coordenadas desse ponto no sistema dado. Quando estiver claro o sistema  $OXYZ$  a que nos referimos, escreveremos  $P = (x, y, z)$  para significar que  $x, y$  e  $z$  são as coordenadas do ponto  $P$ .

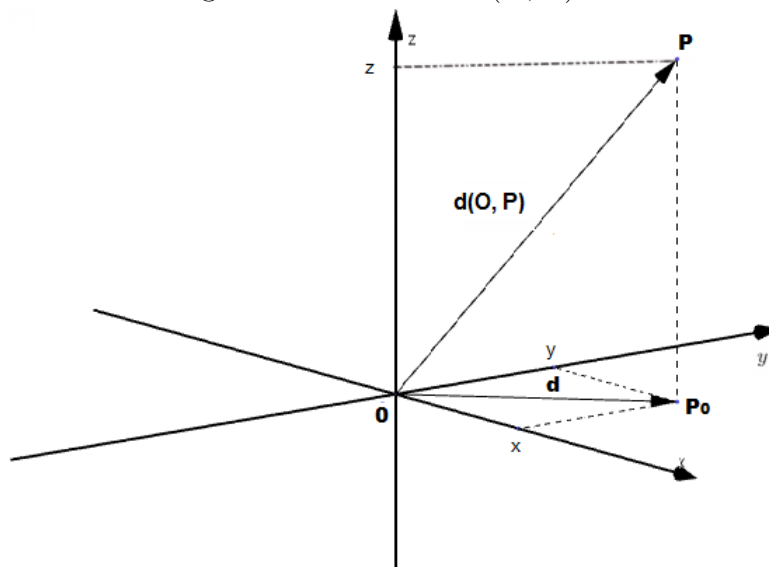
## 3.2 Distância entre dois pontos no espaço

Dados dois pontos quaisquer  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ , vamos determinar a fórmula da distância entre eles, indicada por  $d(P_1, P_2)$ .



Inicialmente, considere a origem  $O = (0, 0, 0)$  e  $P = (x, y, z)$  um ponto qualquer do espaço. Tomando  $P_0 = (x, y, 0) \in OXY$ ,  $PP_0$  é perpendicular ao plano  $OXY$ , logo  $OP_0 \perp PP_0$ .

Figura 3.2: Distância  $d(O, P)$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Analisando a figura acima, pelo teorema de Pitágoras aplicados no triângulos retângulos  $\triangle OP_0X$  e  $\triangle OP_0P$ , respectivamente, onde  $X = (x, 0, 0)$  e  $Y = (0, y, 0)$  temos que

$$d(O, P_0)^2 = OX^2 + OY^2 = x^2 + y^2 = d^2 \text{ e}$$

$$d(O, P)^2 = OP_0^2 + PP_0^2 = d^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

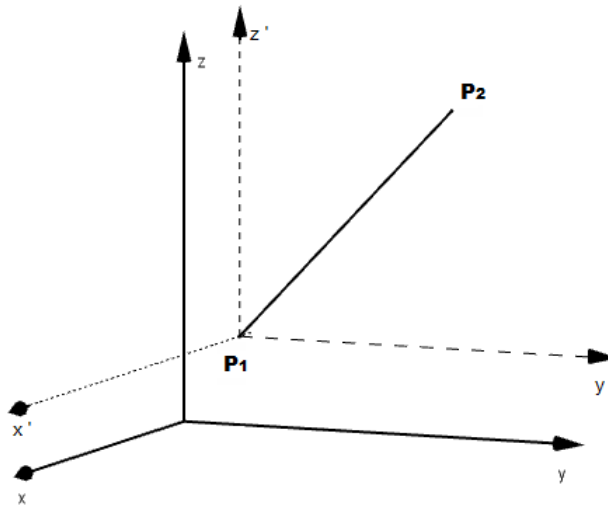
portanto a distância entre os pontos  $O$  e  $P$  é dada por

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Consideremos agora os pontos  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  dois pontos quaisquer.

Transladando o sistema  $OXYZ$  de modo que a origem passa a ser o ponto  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e os novos eixos são paralelos aos eixos  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ .

Figura 3.3: Translação dos eixos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Nesse novo sistema os pontos  $P_1$  e  $P_2$  possuem novas coordenadas, onde  $P_1 = (0, 0, 0)$  e  $P_2 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ , portanto a distância entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  será

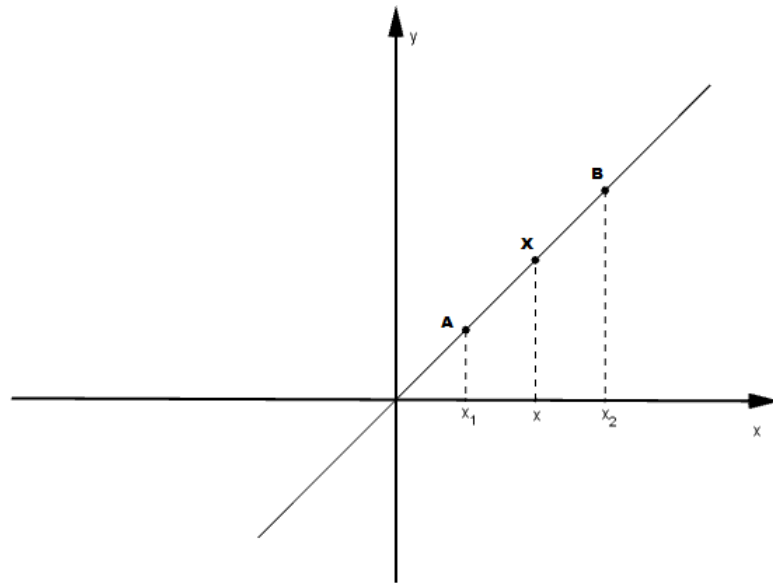
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

### 3.3 Equações paramétricas de uma reta no $\mathbb{R}^3$

Para determinarmos as equações paramétricas de uma reta no  $\mathbb{R}^3$ , primeiramente, vamos trabalhar no plano.

Consideramos dois pontos distintos  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ , onde  $x_1 \neq x_2$ , no plano  $OXY$ .

Figura 3.4: Retra determinada por 2 pontos distintos.



Fonte: Elaborada pela autora.

A equação da reta determinada pelos pontos  $A$  e  $O$  é dada por

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Daí, se  $y_1 \neq y_2$  (reta não horizontal)

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = t$$

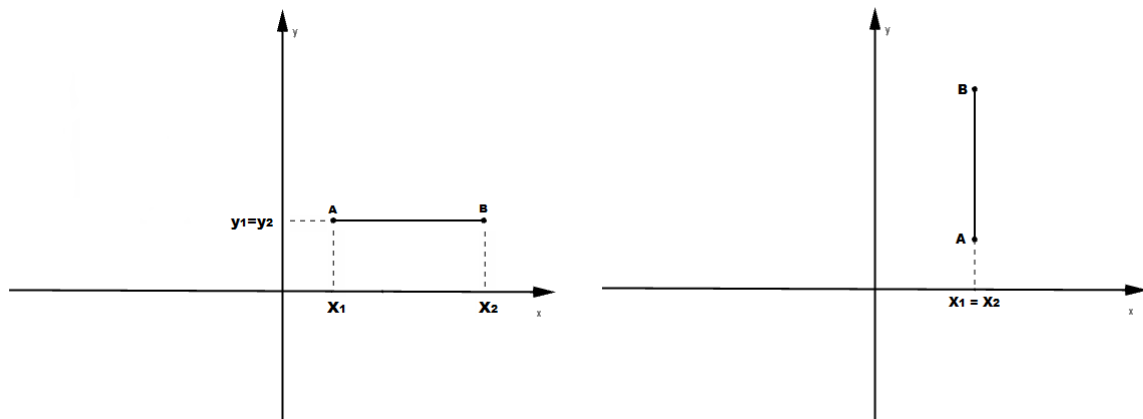
e assim

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

que são as equações paramétricas da reta determinadas pelos pontos  $A$  e  $B$ .

Observamos que quando  $y_1 = y_2$ , a equação da reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  é horizontal e tem equação  $y = y_1$ . Quando  $x_1 = x_2$ , a reta é vertical e tem equação  $x = x_1$ .

Figura 3.5: Reta horizontal e reta vertical.



Fonte: Elaborada pela autora.

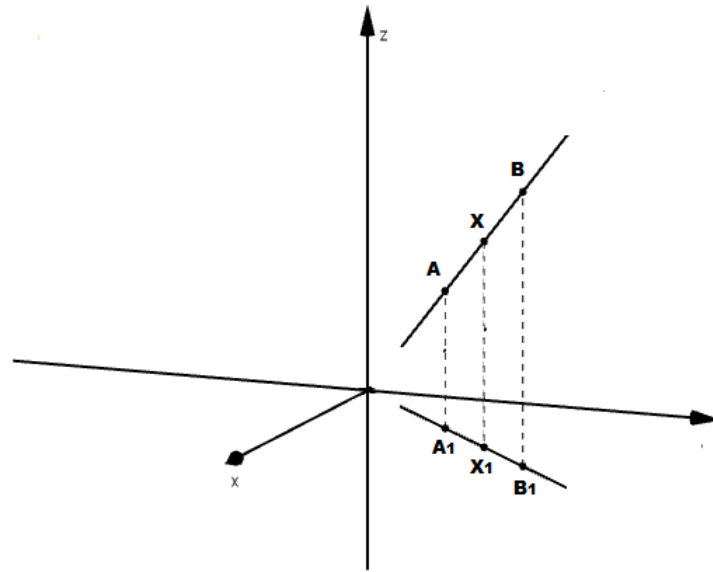
e nestes casos as equações paramétricas da reta

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

continuam válidas.

Agora que temos as equações paramétricas de uma reta no  $\mathbb{R}^2$ , vamos encontrar as equações paramétricas de uma reta no  $\mathbb{R}^3$ , determinada pelos pontos  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$ .

Figura 3.6: Reta determinada por 2 pontos distintos.



Fonte: Elaborada pela autora.

Consideremos os pontos  $A_1 = (x_1, y_1)$  e  $B_1 = (x_2, y_2)$  no plano  $OXY$ , temos que as equações paramétricas da reta determinadas pelos pontos  $A_1$  e  $B_1$  são dadas por

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

de modo análogo, no plano  $OYZ$  as equações paramétricas da reta determinada pelos pontos  $(y_1, z_1)$  e  $(y_2, z_2)$ , são dadas por

$$\begin{cases} y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Obtendo assim as equações paramétricas da reta determinada pelos pontos  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$  no  $\mathbb{R}^3$ .

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

No caso particular, a reta determinada pelos pontos  $O = (0, 0, 0)$  e  $A = (a, b, c)$  tem equações paramétricas

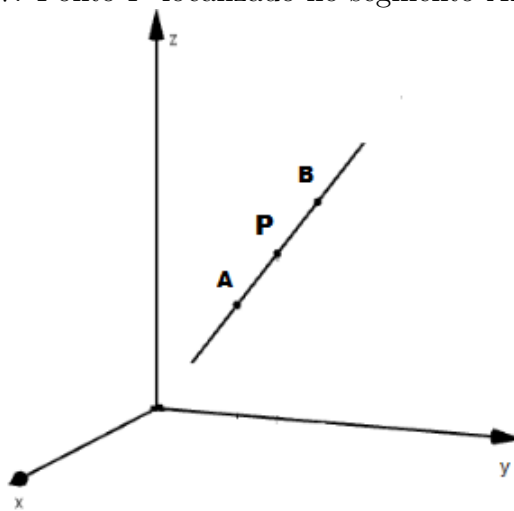
$$\begin{cases} x = ta \\ y = tb \\ z = tc, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

portanto, um ponto  $(x, y, z)$  pertence à reta determinada pelos pontos  $A$  e  $B$  se, e somente se, existe  $t \in \mathbb{R}$ , tal que  $x = ta$ ,  $y = tb$  e  $z = tc$ .

### 3.4 Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta AB

A fórmula da distância entre dois pontos nos permite obtermos as coordenadas do ponto que divide um segmento  $AB$  numa razão dada.

Figura 3.7: Ponto  $P$  localizado no segmento  $AB$ .



Fonte: Elaborada pela autora.

Considerando  $A = (a_1, b_1, c_1)$  e  $B = (a_2, b_2, c_2)$ , os pontos do segmento de reta  $AB$ , são dados por

$$\begin{cases} x = a_1 + t(a_2 - a_1) \\ y = b_1 + t(b_2 - b_1) \\ z = c_1 + t(c_2 - c_1), \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Tomando um ponto  $P = (x, y, z)$  no segmento  $AB$  temos que

$$\frac{d(A, P)}{d(A, B)} = \frac{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (z - c_1)^2}}{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2}} = t$$

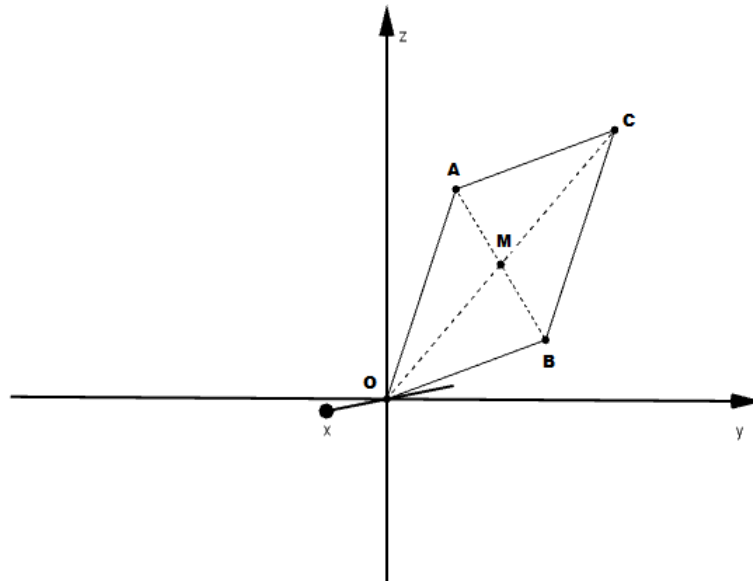
em particular, quando  $t = \frac{1}{2}$ , temos que

$$\begin{cases} x = a_1 + \frac{1}{2}(a_2 - a_1) = \frac{a_1 + a_2}{2} \\ y = b_1 + \frac{1}{2}(b_2 - b_1) = \frac{b_1 + b_2}{2} \\ z = c_1 + \frac{1}{2}(c_2 - c_1) = \frac{c_1 + c_2}{2} \end{cases}$$

Obtendo assim as coordenadas do ponto médio  $M = \left( \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2}{2}, \frac{c_1 + c_2}{2} \right)$ .

Agora vamos fazer uma aplicação de coordenadas do ponto médio de um segmento de reta, a qual usaremos na próxima seção. Tomando os pontos  $A = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $B = (x_2, y_2, z_2)$  e  $C = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$ , temos que o quadrilátero  $OACB$  é um paralelogramo.

Figura 3.8: Paralelogramo  $OBCA$



Fonte: Elaborada pela autora.

De fato, os pontos médios das diagonais são coincidentes, pois o ponto médio de  $OC = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$  é igual o ponto médio de  $AB = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$ .

### 3.5 Vetores no Espaço

Consideremos o conjunto de ternos ordenados de números reais

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \text{ são números reais}\}$$

Dados um número real  $\lambda$  e dois pontos quaisquer  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  de  $\mathbb{R}^3$ , definimos duas operações, uma interna e outra externa.

**Adição:**  $P_1 + P_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

**Multiplicação por um número real:**  $\lambda \cdot P_1 = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$

As conhecidas propriedades algébricas dos números reais permitem demonstrar facilmente as seguintes propriedades:

Quaisquer que seja os pontos  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ,  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  e  $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$ , tem-se que

$$P_1 + P_2 = P_2 + P_1$$

$$(P_1 + P_2) + P_3 = P_1 + (P_2 + P_3)$$

$$P_1 + (0, 0, 0) = P_1$$

$$P_1 + (-P_1) = (0, 0, 0), \text{ onde } -P_1 = (-x_1, -y_1, -z_1)$$

Quaisquer que sejam  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$  e os números reais  $r$  e  $s$ , tem-se

$$(rs)P_1 = r(sP_1)$$

$$(r + s)P_1 = rP_1 + sP_2$$

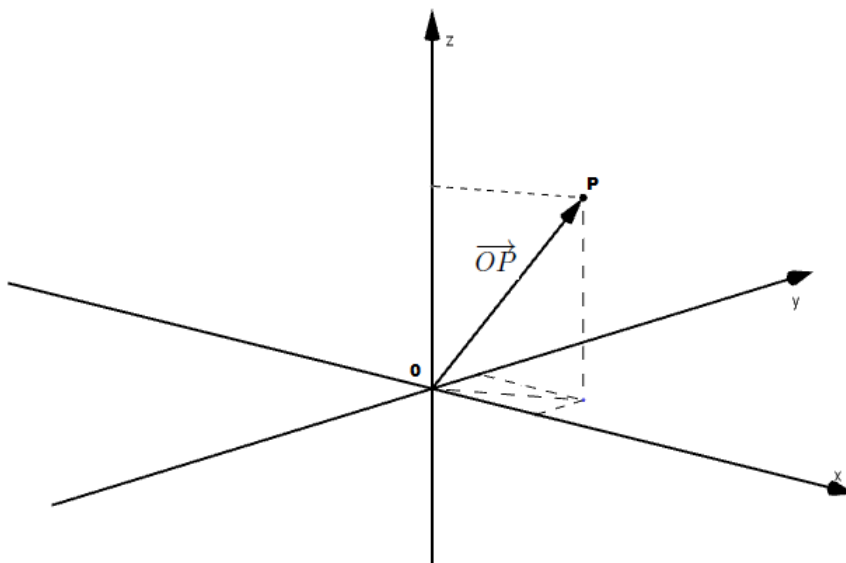
$$r(P_1 + P_2) = rP_1 + rP_2$$

$$1 \cdot P_1 = P_1$$

Assim, o conjunto  $\mathbb{R}^3$  com estas operações, uma interna e a outra externa, é um espaço vetorial, seus elementos passam a ser chamados de vetores e os números reais são chamados de escalares.

Gráficamente, um vetor  $P = (x, y, z)$  é representado pelo segmento  $OP$  orientado de  $O$  para  $P$ , indicado por  $\overrightarrow{OP}$  e desenhado como uma flexa dirigida de  $O$  para  $P$ . Também indicaremos um vetor por uma única letra encimada por uma seta, como  $\vec{v}$ .



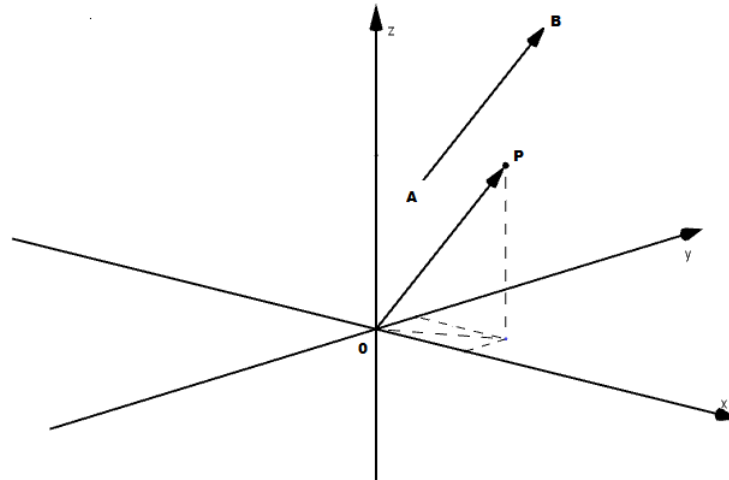
Figura 3.9: Vetor  $\overrightarrow{OP}$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

Considerando dois vetores  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$ , definimos

$$B - A = B + (-A) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

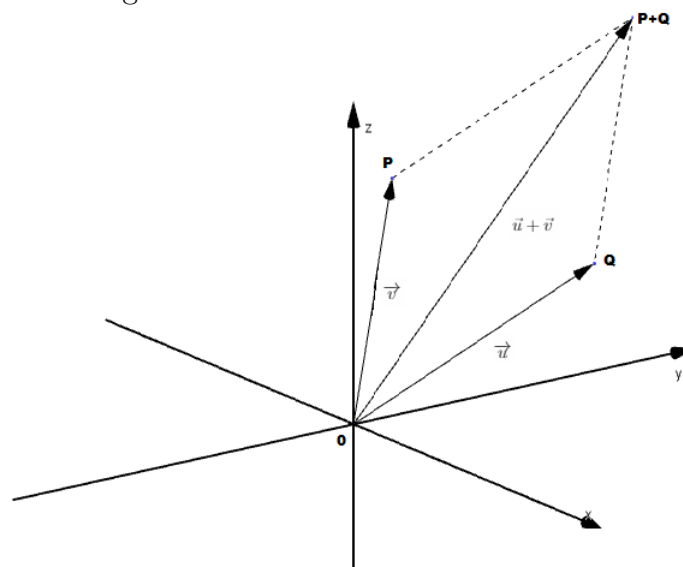
Sejam  $A = (x_1, y_1, z_1)$  e  $B = (x_2, y_2, z_2)$  com  $A \neq B$ . Tomando  $P = B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$  temos que  $d(A, B) = d(O, P)$  e o segmento  $\overrightarrow{AB}$  é paralelo ao segmento  $\overrightarrow{OP}$ . Assim, o vetor  $\overrightarrow{OP}$  pode ser representado por qualquer segmento  $\overrightarrow{AB}$ , paralelo à  $\overrightarrow{OP}$ , de mesmo comprimento e mesma orientação.

Figura 3.10: Representação de um vetor  $\vec{AB}$ .

Fonte: Elaborada pela autora.

Agora vamos apresentar graficamente a soma de dois vetores, para isso tomemos pontos  $P = (x_1, y_1, z_1)$  e  $Q = (x_2, y_2, z_2)$ , com  $P \neq Q$ , e sua soma  $P+Q = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$ , considerando  $\vec{u} = \vec{OQ}$  e  $\vec{v} = \vec{OP}$ , então sua soma  $\vec{u} + \vec{v}$  é a diagonal do paralelogramo.

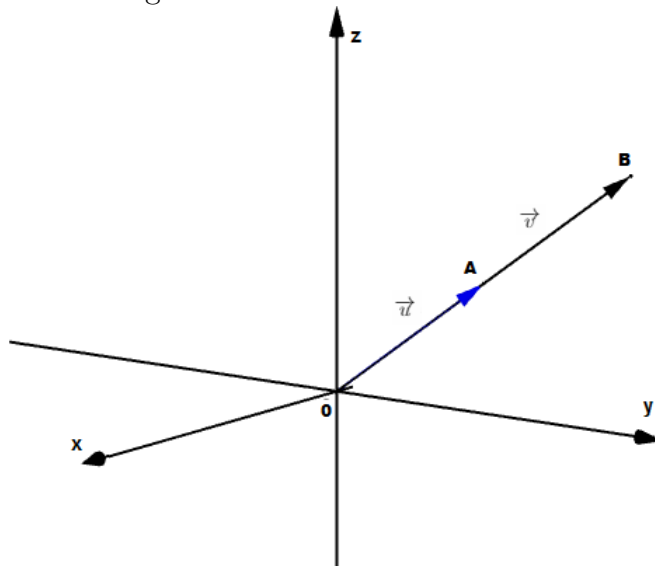
Figura 3.11: Soma de dois vetores.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Definição 3.1** Dois vetores não nulos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são colineares, se existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que,  $\vec{v} = t\vec{u}$ .

Figura 3.12: Vetores colineares.



Fonte: Elaborada pela autora.

## 3.6 Produto Interno de Vetores

Dado um vetor  $\vec{v} = (x, y, z)$ , definimos o seu módulo, denotado por  $|\vec{v}|$ , como sendo

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

assim, se o vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$ , o seu módulo é a distância da extremidade  $Q$  à origem.

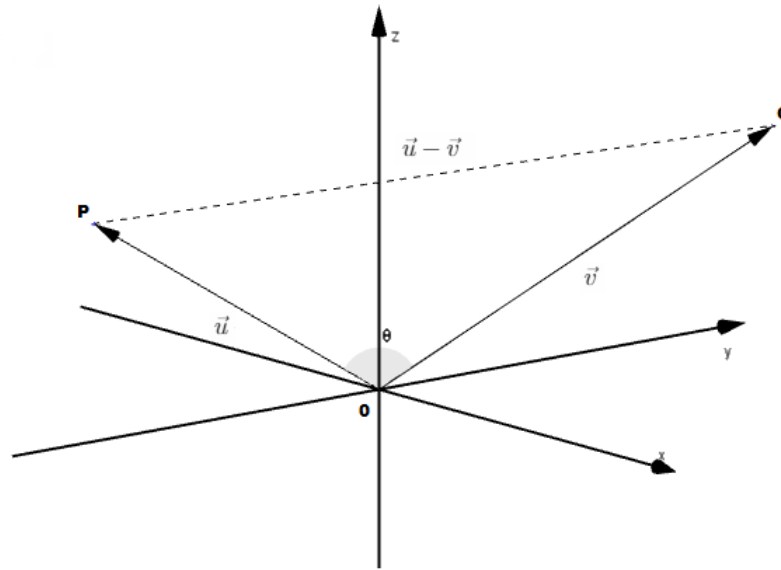
**Definição 3.2** O produto interno ou produto escalar de dois vetores  $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$  e  $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ , denotado por  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ , é definido como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Observamos que  $\vec{u} \cdot \vec{u} = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = |\vec{u}|^2$ .

O ângulo  $\theta$  entre dois vetores no  $\mathbb{R}^3$ , é o ângulo  $\theta$  entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

Figura 3.13: Diferença de 2 vetores.



Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos utilizar a lei dos cossenos no triângulo  $\Delta QOP$ , obtendo

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta \quad (1)$$

temos também

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (2)$$

por (1) e (2) obtemos

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

**Definição 3.3** Dois vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em  $\mathbb{R}^3$ , são ditos ortogonais e denotamos por  $\vec{u} \perp \vec{v}$ , quando  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Se  $\vec{0} = (0, 0, 0)$ , então  $\vec{0} \perp \vec{u}$ , tal que  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ .

Se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são vetores não nulos, então  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

### 3.7 Equação do Plano

Seja  $\pi$  um plano no espaço  $E$ , onde se escolheu um sistema de coordenadas  $OXYZ$ . Tomemos um ponto  $A = (a, b, c) \neq 0$  tal que o vetor  $\overrightarrow{OA}$  é perpendicular ao plano  $\pi$ .

Afirmamos que existe um número real  $d$  tal que a equação do plano  $\pi$  é dada por  $ax + by + cz = d$ , isto é, o ponto  $P = (x, y, z)$  pertence ao plano  $\pi$  se, e somente se, suas coordenadas satisfazem a equação acima.

Com efeito, se tomarmos dois pontos arbitrários  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$  no plano  $\pi$ , o vetor  $P_0P_1 = P_1 - P_0$  é ortogonal ao vetor  $\overrightarrow{OA} = (a, b, c)$ , o que significa

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) = 0,$$

logo

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = ax_0 + by_0 + cz_0.$$

Portanto, a expressão  $ax + by + cz$  assume um valor constante para todo ponto  $P = (x, y, z)$  em  $\pi$ , o qual denotamos por  $d$ . Assim,

$$P = (x, y, z) \in \pi \Rightarrow ax + by + cz = d.$$

Reciprocamente, considere  $P = (x, y, z)$ , tal que  $ax + by + cz = d$ . Tomando  $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \pi$ , tem-se que  $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$  e, por subtração obtemos

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

ou seja, o vetor  $P_0P$  é ortogonal ao vetor  $\overrightarrow{OA}$ , portanto  $P \in \pi$ .

Então  $P = (x, y, z)$  pertence ao plano  $\pi$  se, e somente se,  $ax + by + cz = d$ .

Se o plano  $\pi$  contém a origem  $O$ , sua equação é satisfeita quando  $x = y = z = 0$ , logo  $d = 0$  e a equação de  $\pi$  tem a forma  $ax + by + cz = 0$ .

Sempre que nos referirmos a equação  $ax + by + cz = d$  como equação de um plano, fica admitido que  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ , isto é,  $\overrightarrow{OA} = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ .

**Exemplo 3.4** Considere a equação  $ax + by + cz = d$ , vamos analisar três casos.

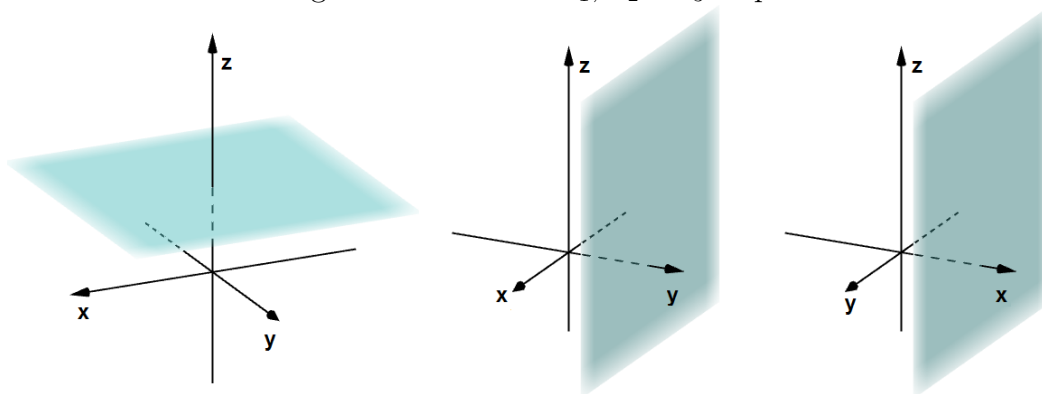
Primeiro caso: com  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  e  $d = 1$ , temos a equação  $0 + 0 + z = 1 \Leftrightarrow z = 1$ .

Neste caso o plano é paralelo ao plano coordenado  $OXY$ .

*Segundo caso: com  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$  e  $d = 1$ , temos a equação  $0 + y + 0 = 1 \Leftrightarrow y = 1$ . Neste caso o plano é paralelo ao plano coordenado  $OXZ$ .*

*Terceiro caso: com  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  e  $d = 1$ , temos a equação  $x + 0 + 0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ . Neste caso o plano é paralelo ao plano coordenado  $OYZ$ .*

Figura 3.14: Planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$  respectivamente



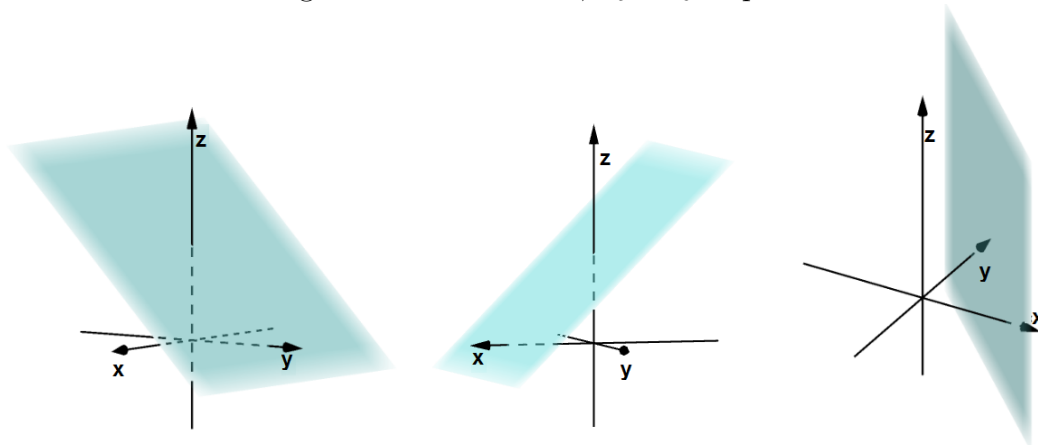
Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 3.5** *Considere novamente a equação  $ax + by + cz = d$ , vamos analisar mais três casos.*

*Quarto caso: com  $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = 1$  e  $d = 1$ , temos a equação  $0 + y + z = 1 \Leftrightarrow y + z = 1$ . Neste caso o plano é paralelo ao eixo  $x$ .*

*Quinto caso: com  $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  e  $d = 1$ , temos a equação  $x + 0 + z = 1 \Leftrightarrow x + z = 1$ . Neste caso o plano é paralelo ao eixo  $y$ .*

*Sexto caso: com  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$  e  $d = 1$ , temos a equação  $x + y + 0 = 1 \Leftrightarrow x + y = 1$ . Neste caso o plano é paralelo ao eixo  $z$ .*

Figura 3.15: Planos  $\pi_4$ ,  $\pi_5$  e  $\pi_6$  respectivamente

Fonte: Elaborada pela autora.

### 3.8 Sistemas $2 \times 3$

Um sistema linear  $S$  de duas equações com três incógnitas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

é um problema que consiste em encontrar números  $x, y$  e  $z$  que cumpram simultaneamente as duas equações. Uma solução para o sistema é uma terna  $(x_0, y_0, z_0)$  de números reais tais que  $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$  e  $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$ . Resolver o sistema significa encontrar todas as soluções.

Quando tomamos uma equação do tipo  $ax + by + cz = d$  sempre vamos considerar que pelo menos uma das constante  $a, b$  ou  $c$  é não nula.

Fixado um sistema de coordenadas  $OXYZ$  no espaço, as equações do sistema  $S$  representam planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  perpendiculares aos vetores  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ , respectivamente.

Dois planos podem ser paralelos, coincidentes ou intersectar-se segundo uma reta. Consequentemente o sistema  $S$  pode ser impossível (sem solução) ou indeterminado (com uma infinidade de soluções).

Como no caso dos sistemas  $2 \times 2$ , estabeleceremos condições algébricas para cada posição relativa entre dois planos.

**Proposição 3.6** Dados dois planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  definidos, respectivamente, pelas equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ , as seguintes condições são equivalentes:

- (1) Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são coincidentes ou paralelos.
- (2) Existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$  e  $c_2 = kc_1$ .
- (3)  $a_2b_1 - a_1b_2 = a_2c_1 - a_1c_2 = b_2c_1 - b_1c_2 = 0$

**Prova.** Temos que  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são coincidentes ou paralelos se, e somente se, os vetores  $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  são colineares, isto é, existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$  e  $c_2 = kc_1$ . Portanto as duas primeiras afirmações são equivalentes.

Vamos provar agora que (2)  $\Leftrightarrow$  (3). A implicação (2)  $\Rightarrow$  (3) é imediata, por exemplo,

$$a_2b_1 - a_1b_2 = ka_1b_1 - ka_1b_1 = 0$$

Suponhamos agora que  $a_2b_1 - a_1b_2 = a_2c_1 - a_1c_2 = b_2c_1 - b_1c_2 = 0$ , pela proposição 2.8 temos que,

$$a_2b_1 - a_1b_2 = 0 \Leftrightarrow \text{existe } k_1 \neq 0 \text{ tal que } a_2 = k_1a_1 \text{ e } b_2 = k_1b_1$$

$$a_2c_1 - a_1c_2 = 0 \Leftrightarrow \text{existe } k_2 \neq 0 \text{ tal que } a_2 = k_2a_1 \text{ e } c_2 = k_2c_1$$

$$b_2c_1 - b_1c_2 = 0 \Leftrightarrow \text{existe } k_3 \neq 0 \text{ tal que } b_2 = k_3b_1 \text{ e } c_2 = k_3c_1$$

Assim,  $k_1a_1 = k_2a_1, k_1b_1 = k_3b_1$  e  $k_2c_1 = k_3c_1$  e como  $a_1, b_1$  e  $c_1$  não são todos nulos concluímos que, pelo menos uma das igualdades ocorre:  $k_1 = k_2, k_1 = k_3$ , ou  $k_2 = k_3$ .

Se  $k_1 = k_2 = k$  então  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$  e  $c_2 = kc_1$ . De modo análogo, se  $k_1 = k_3$  ou  $k_2 = k_3$  obtemos  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$  e  $c_2 = kc_1$ .

**Corolário 3.7** Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  definidos, respectivamente, pelas equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  são coincidentes se, e somente se, existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  e  $d_2 = kd_1$ .

**Prova.** Suponha que os planos são coincidentes. Segue que existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  e além disso tomando um ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1$  ele estará também em  $\pi_2$ , assim  $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$  e  $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$ .

Substituindo  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  na segunda equação acima, teremos  $ka_1x_0 + kb_1y_0 + kc_1z_0 = d_2$ , logo  $k(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0) = d_2$ , portanto  $kd_1 = d_2$ .



Reciprocamente, se  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  e  $d_2 = kd_1$ , com  $k \neq 0$ , então

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \iff ka_1x + kb_1y + kc_1z = kd_1 \iff a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

portanto, os planos coincidem.

**Corolário 3.8** Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  definidos, respectivamente, pelas equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  são paralelos se, e somente se, existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  mas  $d_2 \neq kd_1$ .

**Prova.** Se  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são paralelos temos que existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$ . Usando o corolário anterior, concluímos que  $d_2 \neq kd_1$ .

Reciprocamente, se existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  mas  $d_2 \neq kd_1$  então tomando um ponto qualquer  $(x_0, y_0, z_0) \in \pi_1$ , isto é,  $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$  segue que  $ka_1x_0 + kb_1y_0 + kc_1z_0 = kd_1$ .

Daí,  $a_2x + b_2y + c_2z = kd_1 \neq d_2$ , logo o ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  não pertence à  $\pi_2$ , portanto os planos são paralelos.

**Corolário 3.9** Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  definidos, respectivamente, pelas equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  são concorrentes ( $\pi_1 \neq \pi_2$  e  $\pi_1 \cap \pi_2 \neq \emptyset$ ) se, e somente se, para nenhum  $k$ , se tenha  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$ .

**Corolário 3.10** Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  definidos, respectivamente, pelas equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  são coincidentes se, e somente se,  $a_2b_1 - a_1b_2 = a_2c_1 - a_1c_2 = b_2c_1 - b_1c_2 = d_2a_1 - a_1d_2 = d_2b_1 - d_1b_2 = d_2c_1 - d_1c_2 = 0$

**Prova.** Usando a proposição 3.6, os planos são paralelos ou coincidentes se, e somente se, existe  $k \neq 0$  tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$  e  $c_2 = kc_1$ . Portanto, pelo corolário 3.7, os planos são coincidentes se, e somente se,  $a_2b_1 - a_1b_2 = a_2c_1 - a_1c_2 = b_2c_1 - b_1c_2 = 0$  e  $d_2a_1 - a_1d_2 = d_2b_1 - d_1b_2 = d_2c_1 - d_1c_2 = 0$ .

**Corolário 3.11** Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  definidos, respectivamente, pelas equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  são paralelos se, e somente se,  $a_2b_1 - a_1b_2 = a_2c_1 - a_1c_2 = b_2c_1 - b_1c_2 = 0$  e ao menos um dos números  $d_2a_1 - a_1d_2, d_2b_1 - d_1b_2$  ou  $d_2c_1 - d_1c_2$  é diferente de zero.

**Corolário 3.12** Os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  definidos, respectivamente, pelas equações  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$  e  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  são concorrentes se, e somente se, ao menos um dos números  $a_2b_1 - a_1b_2$ ,  $a_2c_1 - a_1c_2$  ou  $b_2c_1 - b_1c_2$  é diferente de zero.

**Planos concorrentes:** No caso de planos concorrentes tomando, como exemplo,  $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$ , resolvemos o sistema do seguinte modo:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z + d_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2z + d_2 \end{cases}$$

Fixando um número real  $z = t$ , pela regra de Cramer temos que

$$\begin{cases} x &= \frac{(-c_1z + d_1)b_2 - b_1(-c_2z + d_2)}{a_1b_2 - b_1a_2} = \frac{d_1b_2 - b_1d_2}{a_1b_2 - b_1a_2} + \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}t \\ y &= \frac{a_1(-c_2z + d_2) - (-c_1z + d_1)a_2}{a_1b_2 - b_1a_2} = \frac{a_1d_2 - a_2d_1}{a_1b_2 - b_1a_2} + \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}t \\ z &= t \end{cases}$$

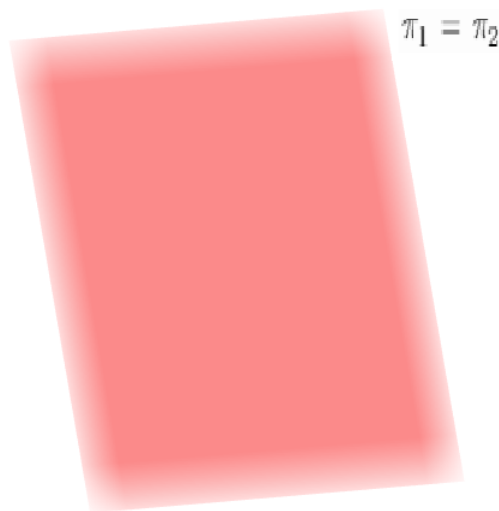
portanto, uma reta com parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 3.13** Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6x - 4y + 2z = 8 \\ 9x - 6y + 3z = 12 \end{cases}$$

As equações do sistema correspondem aos planos  $\pi_1 : 6x - 4y + 2z = 8$  e  $\pi_2 : 9x - 6y + 3z = 12$ . Como  $\frac{9}{6} = \frac{-6}{-4} = \frac{2}{3} = \frac{8}{12} = k$ , então existe um  $k$  não nulo tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  e  $d_2 = kd_1$ , portanto pelo corolário 3.7 os planos são coincidentes. Neste caso o sistema é indeterminado.

Figura 3.16: Planos coincidentes



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 3.14** Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = -2 \end{cases}$$

Nesse sistema, as equações correspondem aos planos  $\pi_1 : 2x + 2y + 4z = 0$  e  $\pi_2 : 2x + 2y + 2z = -2$ , como  $\frac{2}{2} = \frac{2}{2} = 1, \frac{4}{2} \neq 1$ , então não existe nenhum  $k \in \mathbb{R}$ , tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$  e  $c_2 = kc_1$ , portanto pelo corolário 3.9 os planos são concorrentes.

Nesse caso, como  $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ , resolvemos o sistema da seguinte maneira:

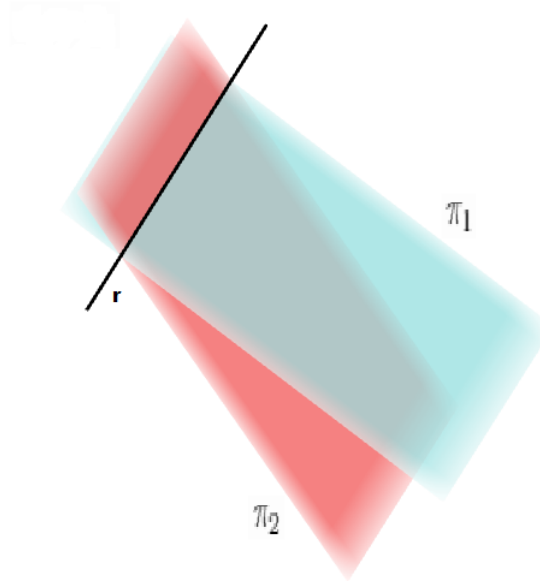
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 4z = -2y + 0 \\ 2x + 2z = -2y - 2 \end{cases}$$

Fixando um número real  $y = t$ , pela regra de Cramer temos que

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} + \frac{b_1 c_2 - c_1 b_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} t = \frac{(0)4 - 4(-2)}{-4} + \frac{(-2)2 - 4(-2)}{-4} t = -2 - t \\ y = t \\ z = \frac{a_1 d_2 - d_1 a_2}{b_2 c_1 - b_1 c_2} + \frac{b_1 a_2 - b_2 a_1}{b_2 c_1 - b_1 c_2} t = \frac{2(-2) - 2(0)}{-4} + \frac{2(2) - 2(2)}{-4} t = 1 \end{cases}$$

portanto, uma reta com parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ . Ou seja, o sistema é indeterminado.

Figura 3.17: Planos concorrentes.



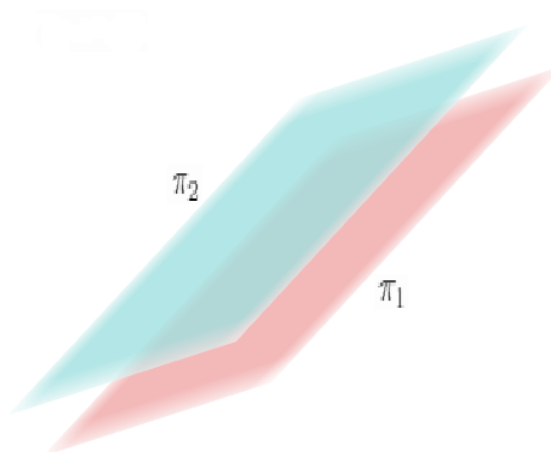
Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 3.15** Resolva o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = 5 \\ 3x + 9y + 9z = 0 \end{cases}$$

Nesse sistema, as equações correspondem aos planos  $\pi_1 : x + 3y + 3z = 1$  e  $\pi_2 : 3x + 9y + 9z = 0$ , como  $\frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{3}{9} = k$  e  $5 \neq 0 \cdot k$ , então existe um  $k$  não nulo tal que  $a_2 = ka_1, b_2 = kb_1, c_2 = kc_1$  e  $d_2 \neq kd_1$ , portanto pelo corolário 3.8 os planos são paralelos. Portanto, o sistema é impossível.

Figura 3.18: Planos paralelos.



Fonte: Elaborada pela autora.

### 3.9 Sistemas $3 \times 3$

Nesta seção estudaremos os sistemas lineares  $3 \times 3$ , isto é, sistemas com três equações e três incógnitas do tipo

$$S = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Uma solução para o sistema é uma terna  $(x_0, y_0, z_0)$  de números reais tais que  $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 = d_1$ ,  $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 = d_2$  e  $a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 = d_3$ , resolver o sistema significa encontrar todas as soluções.

Primeiramente, como no caso dos sistemas  $2 \times 2$ , faremos considerações geométricas e depois, usando apenas a definição de determinante, faremos um estudo algébrico.

As três equações do sistema definem três planos  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ . Um ponto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  é solução do sistema quando  $(x, y, z)$  pertence à interseção  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ .

Para expressarmos as possíveis soluções desse sistema, vamos definir determinante de matrizes de ordem 3 (3 linhas e 3 colunas).

**Definição 3.16** Definimos o determinante de uma matriz  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$  como

sendo o número real  $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1b_3a_2 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$ . Usamos a notação

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1b_3a_2 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$$

A existência ou não de soluções para o sistema  $S$  dependerá das possíveis posições relativas entre os planos, como veremos a seguir.

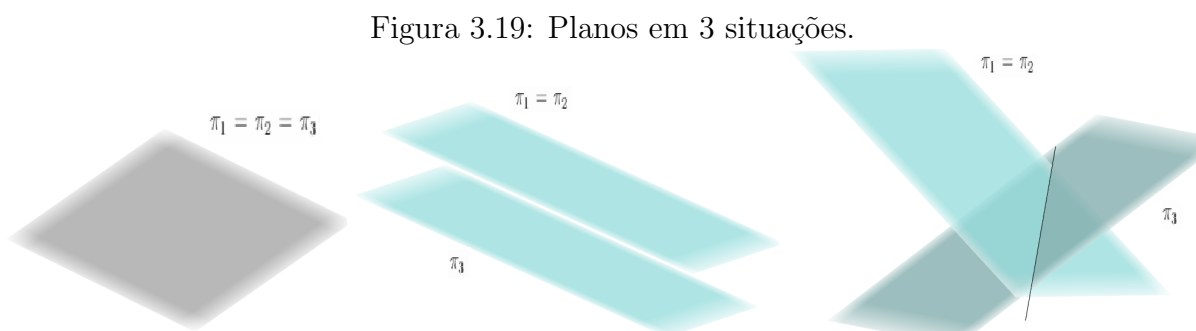
Tem-se três alternativas, cada uma excluindo as outras duas.

**Alternativa 1:** Dois dos três planos são coincidentes, sem perda de generalidade suponhamos  $\pi_1 = \pi_2$ . Nesse caso,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

e recaímos em um sistema  $2 \times 3$ , estudado na seção anterior desse capítulo.

Podemos ter  $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$  (sistema indeterminado),  $\pi_1 \parallel \pi_3$  (sistema sem solução) e  $\pi_1 \cap \pi_3$  é uma reta (sistema indeterminado).



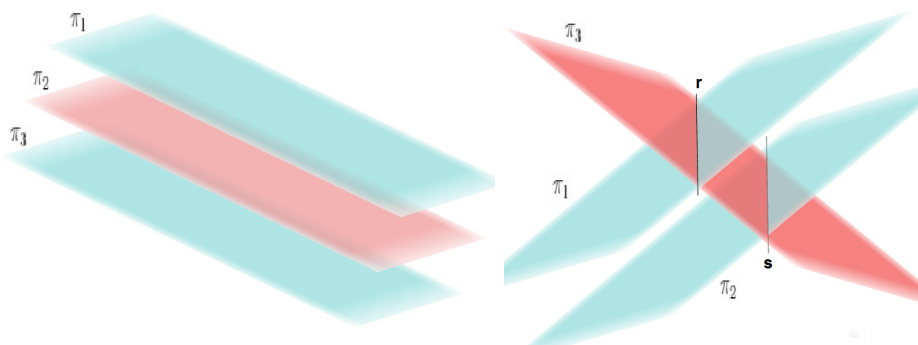
Fonte: Elaborada pela autora.

Observamos que como  $\pi_1 = \pi_2$ , tem-se  $a_1b_2 - a_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = b_1c_2 - b_2c_1 = 0$  e portanto  $\det A = a_3(b_1c_2 - b_2c_1) - b_3(a_1c_2 - a_2c_1) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ .

**Alternativa 2:** Três planos distintos com dois paralelos, sem perda de generalidade suponhamos  $\pi_1 \parallel \pi_2$ . Nesse caso independentemente da posição do terceiro plano o sistema não terá solução.

Aqui podemos ter o terceiro plano paralelo aos outros dois ou ele intersecta os outros dois planos segundo duas retas paralelas  $r$  e  $s$ .

Figura 3.20: Planos em 2 situações.



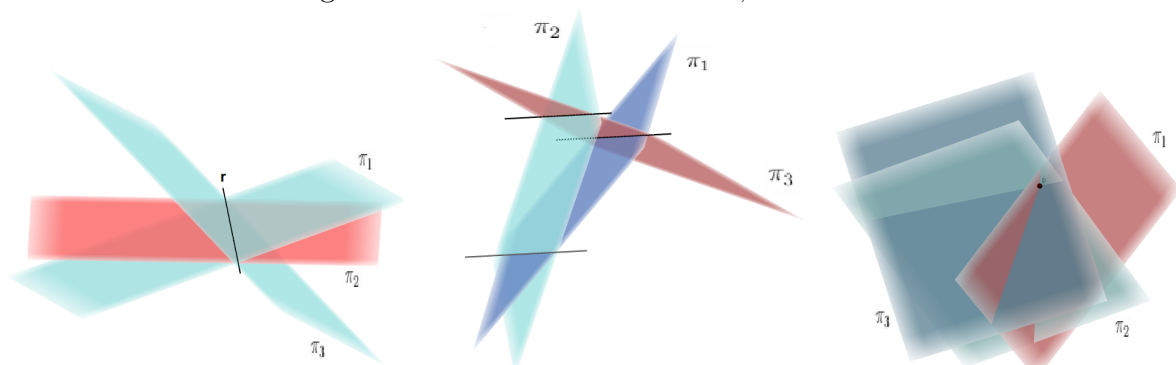
Fonte: Elaborada pela autora.

Analogamente à alternativa 1, temos que  $\det A = 0$ .

**Alternativa 3:** Três planos concorrentes, neste caso a interseção  $\pi_1 \cap \pi_2$  é uma reta  $r$ . Considerando a posição do terceiro plano teremos três casos possíveis:

- 1º: a reta  $r$  pertence ao plano  $\pi_3$  e assim  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$  (sistema indeterminado);
- 2º:  $\pi_1 \cap \pi_3 = s$ ,  $\pi_2 \cap \pi_3 = t$  sendo  $r \parallel s \parallel t$  (sistema sem solução);
- 3º:  $\pi_1 \cap \pi_3 = s$ ,  $\pi_2 \cap \pi_3 = t$  com  $r \cap s \cap t = P$ , onde  $P$  é um ponto (sistema determinado, isto é, com uma única solução).

Figura 3.21: Planos concorrentes, dois a dois.



Fonte: Elaborada pela autora.

Agora estabeleceremos alguns resultados algébricos para solucionar sistemas  $3 \times 3$  e provaremos a Regra de Cramer.

Para isso, vamos denotar

$$S = \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

e suas denominadas matrizes dos coeficientes por:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

**Proposição 3.17** Se  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  é uma solução do sistema, então

$$x \cdot \det A = \det A_1, \quad y \cdot \det A = \det A_2 \quad e \quad z \cdot \det A = \det A_3$$

**Prova.** Suponhamos que  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  é uma solução do sistema.

Temos que:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

como

$$\begin{aligned} \det A &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1b_3a_2 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2 \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \end{aligned}$$

$$x \cdot \det A = a_1x(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2x(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3x(b_1c_2 - b_2c_1) \quad (1)$$

isolando os valores de  $a_1x$ ,  $a_2x$  e  $a_3x$  nas equações do sistema

$$a_1x = d_1 - b_1y - c_1z, \quad a_2x = d_2 - b_2y - c_2z \quad e \quad a_3x = d_3 - b_3y - c_3z \quad (2)$$

substituindo (2) em (1) tem-se que:

$$x \cdot \det A = (d_1 - b_1y - c_1z)(b_2c_3 - b_3c_2) - (d_2 - b_2y - c_2z)(b_1c_3 - c_1b_3) + (d_3 - b_3y - c_3z)(b_1c_2 - b_2c_1)$$



$$x \cdot \det A = d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - d_2(b_1c_3 - c_1b_3) + d_3(b_1c_2 - c_1b_2) - \cancel{b_1b_2c_3y} + \cancel{b_1b_3c_2y} + \cancel{b_2b_1c_3y} - \cancel{b_1c_1b_3y} - \cancel{b_3b_1c_2y} + \cancel{c_1b_2b_3y} - \cancel{c_1b_2c_3z} + \cancel{b_3c_2c_1z} + \cancel{b_1c_3c_2z} - \cancel{c_2c_1b_3z} - \cancel{b_1c_2c_3z} + \cancel{c_1b_2c_3z}$$

$$x \cdot \det A = d_1(b_2c_3 - b_3c_2) - d_2(b_1c_3 - c_1b_3) + d_3(b_1c_2 - c_1b_2)$$

Assim,

$$x \cdot \det A = \det A_1$$

Repetindo o processo para as variáveis  $y$  e  $z$ , temos que  $y \cdot \det A = \det A_2$  e  $z \cdot \det A = \det A_3$ .

A seguir algumas consequências dessa proposição.

**Corolário 3.18** Se o sistema  $S$  tem solução e  $\det A = 0$ , então  $\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$ .

**Corolário 3.19** Se  $\det A = 0$  e um dos valores  $\det A_1$ ,  $\det A_2$  ou  $\det A_3$  for diferente de zero, então o sistema  $S$  não tem solução.

**Corolário 3.20** Se o sistema tem mais de uma solução, então  $\det A = 0$ . Em outras palavras, nos sistemas indeterminados tem-se que  $\det A = 0$ .

**Prova.** Suponha  $(x, y, z)$  e  $(x_0, y_0, z_0)$  duas soluções distintas do sistema  $S$ . Usando a proposição 3.17 tem-se que

$$x \cdot \det A = \det A_1, \quad y \cdot \det A = \det A_2 \quad e \quad z \cdot \det A = \det A_3$$

$$x_0 \cdot \det A = \det A_1, \quad y_0 \cdot \det A = \det A_2 \quad e \quad z_0 \cdot \det A = \det A_3$$

Daí, obtemos

$$(x - x_0)\det A = 0, \quad (y - y_0)\det A = 0, \quad (z - z_0)\det A = 0$$

Como as soluções são distintas, teremos um dos valores  $x - x_0$ ,  $y - y_0$  ou  $z - z_0$  diferente de zero, portanto

$$\det A = 0$$

**Corolário 3.21** Se o sistema  $S$  tem solução e  $\det A \neq 0$ , então a solução é única e dada por

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

Podemos agora enunciar a regra de Cramer, um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas de equações lineares.

**Proposição 3.22 Regra de Cramer** Seja  $S$  um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas. Se  $\det A \neq 0$ , então o sistema tem uma única solução dada por

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

**Prova.** Suponha  $\det A \neq 0$ . Substituindo os valores

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

no sistema vemos que, de fato, é uma solução:

$$\det A = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1b_3a_2 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1b_3c_2$$

$$\det A_1 = d_1b_2c_3 + b_1c_2d_3 + c_1b_3d_2 - c_1b_2d_3 - b_1d_2c_3 - d_1b_3c_2$$

$$\det A_2 = a_1d_2c_3 + d_1c_2a_3 + c_1d_3a_2 - c_1d_2a_3 - d_1a_2c_3 - a_1d_3c_2$$

$$\det A_3 = a_1b_2d_3 + b_1d_2a_3 + d_1b_3a_2 - d_1b_2a_3 - b_1a_2d_3 - a_1b_3d_2$$

tomando  $x = \frac{\det A_1}{\det A}$ ,  $y = \frac{\det A_2}{\det A}$  e  $z = \frac{\det A_3}{\det A}$  tem-se que

$$a_1x + b_1y + c_1z = \frac{a_1\det A_1 + b_1\det A_2 + c_1\det A_3}{\det A} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \det A(a_1x + b_1y + c_1z) &= a_1\det A_1 + b_1\det A_2 + c_1\det A_3 = a_1d_1b_2c_3 + \overline{a_1c_1d_2b_3} + \\ &\overline{a_1c_1b_2d_3} - \overline{a_1c_1b_2d_3} - a_1c_2b_3d_1 - \overline{a_1c_3d_2b_1} + \overline{b_1a_1d_2a_3} - b_1d_1c_2a_3 + \overline{b_1c_1a_2d_3} - \overline{b_1c_2d_3a_1} - \\ &b_1c_3a_2d_1 + \overline{c_1a_1b_2d_3} + \overline{c_1b_1b_2d_3} + c_1d_1a_2b_3 - c_1d_1b_2a_3 - \overline{c_1d_2b_3a_1} - \overline{c_1d_3a_2b_1} = \\ &d_1[a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1c_2b_3 - b_1c_3a_2 - c_1b_2a_3] \end{aligned}$$

portanto,  $\det A(a_1x + b_1y + c_1z) = (\det A)d_1$  e assim

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

De modo análogo,  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$  e  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ . Agora, pelo corolário 3.21, essa solução é única.

Resumindo o que foi estabelecido :

(1) Se  $\det A \neq 0$  então o sistema é determinado( solução única).

(2) Se o sistema é indeterminado então  $\det A = 0$  e neste caso  $\det A_1 = \det A_2 = \det A_3 = 0$ .

**Observação importante:** Quando os 4 determinantes:  $\det A$ ,  $\det A_1$ ,  $\det A_2$ ,  $\det A_3$ , forem todos iguais a zero, não podemos concluir que o sistema é indeterminado. Esse é um erro comum nos livros didáticos, presumir que quando os quatro determinantes são iguais a zero o sistema é indeterminado.

Podemos ter um sistema sem solução como no exemplo seguinte:

**Exemplo 3.23** Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

consideremos as matrizes dos coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

aqui temos os  $\det A = 0$ ,  $\det A_1 = 0$ ,  $\det A_2 = 0$  e  $\det A_3 = 0$ , o sistema não tem solução (3 planos paralelos).

**Proposição 3.24** Se  $\det A = 0$ , então o sistema é impossível ou indeterminado.

**Prova.** Suponha  $\det A = 0$  e que o sistema tenha solução. Se os três planos forem coincidentes, então o sistema é indeterminado. Vamos considerar então o caso em que dois dos planos são distintos e portanto concorrentes.

Sem perda de generalidade, vamos supor que os planos  $\pi_2$  e  $\pi_3$  são concorrentes, portanto ao menos um dos números  $b_2c_3 - b_3c_2$ ,  $c_2a_3 - c_3a_2$ ,  $a_2b_3 - a_3b_2$  é diferente de zero.

Seja  $(x_0, y_0, z_0)$  uma solução do sistema.

Considere agora, com  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} x = x_0 + t(b_2c_3 - b_3c_2) \\ y = y_0 + t(c_2a_3 - c_3a_2) \\ z = z_0 + t(a_2b_3 - a_3b_2) \end{cases}$$

Substituindo  $x, y, z$  nas expressões  $a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z$  obtemos

(1)

$$a_1x + b_1y + c_1z =$$

$$a_1(x_0 + t(b_2c_3 - b_3c_2)) + b_1(y_0 + t(c_2a_3 - c_3a_2)) + c_1(z_0 + t(a_2b_3 - a_3b_2)) =$$

$$a_1x_0 + b_1y_0 + c_1z_0 + t(a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + b_1c_2a_3 - b_1c_3a_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2) = d_1 + t \det A = d_1$$

(2)

$$a_2x + b_2y + c_2z =$$

$$a_2(x_0 + t(b_2c_3 - b_3c_2)) + b_2(y_0 + t(c_2a_3 - c_3a_2)) + c_2(z_0 + t(a_2b_3 - a_3b_2)) =$$

$$a_2x_0 + b_2y_0 + c_2z_0 + t(a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2 + b_2c_2a_3 - b_2c_3a_2 + c_2a_2b_3 - c_2a_3b_2) = d_2 + 0 = d_2$$

(3)

$$a_3x + b_3y + c_3z =$$

$$a_3(x_0 + t(b_2c_3 - b_3c_2)) + b_3(y_0 + t(c_2a_3 - c_3a_2)) + c_3(z_0 + t(a_2b_3 - a_3b_2)) =$$

$$a_3x_0 + b_3y_0 + c_3z_0 + t(a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 + b_3c_2a_3 - b_3c_3a_2 + c_3a_2b_3 - c_3a_3b_2) = d_3 + 0 = d_3$$

Portanto, qualquer ponto da reta

$$\begin{cases} x = x_0 + t(b_2c_3 - b_3c_2) \\ y = y_0 + t(c_2a_3 - c_3a_2) \\ z = z_0 + t(a_2b_3 - a_3b_2) \end{cases}$$

é solução do sistema e portanto o sistema é indeterminado.

**Corolário 3.25** O sistema  $S$  tem solução única se, e somente se,  $\det A \neq 0$ .

Agora daremos alguns exemplos de soluções de sistemas  $3 \times 3$ , usando os resultados apresentados neste capítulo.

**Exemplo 3.26** Ache o conjunto solução do sistema, se existir:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 6 \\ x + \frac{1}{2}y - z = 3 \\ 3x - 7y - z = 8 \end{cases}$$

Considere as matrizes do sistema

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -1 \\ 8 & -7 & -1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -1 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 3 & -7 & 8 \end{pmatrix}$$

como os  $\det A = 0$ ,  $\det A_1 = 0$ ,  $\det A_2 = 0$  e  $\det A_3 = 0$ , temos que é impossível ou indeterminado

Os planos  $\pi_1 = 2x + y - 2z = 6$  e  $\pi_2 = x + \frac{1}{2}y - z = 3$  são coincidentes pois  $\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} = 2$ , portanto

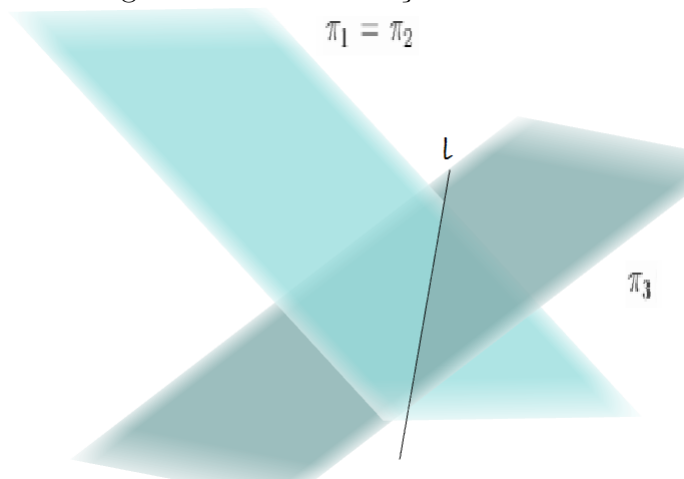
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 6 \\ x + \frac{1}{2}y - z = 3 \\ 3x - 7y - z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y - 2z = 6 \\ 3x - 7y - z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 2z + 6 \\ 3x - 7y = z + 8 \end{cases}$$

Como  $2 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \neq 0$ , fixando um número real  $z = t$ , pela regra de Cramer,

$$\begin{cases} x = \frac{d_1 b_3 - b_1 d_3}{a_1 b_3 - b_1 a_3} + \frac{b_1 c_3 - b_3 c_1}{a_1 b_3 - b_1 a_3} t = \frac{50}{17} + \frac{15}{17} t \\ y = \frac{a_1 d_3 - a_3 d_1}{a_1 b_3 - b_1 a_3} + \frac{a_3 c_1 - a_1 c_3}{a_1 b_3 - b_1 a_3} t = \frac{2}{17} + \frac{4}{17} t \\ z = t, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a solução é uma reta.

Figura 3.22: Reta solução do sistema.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 3.27** Ache o conjunto solução do sistema, se existir:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 22 \\ -x + 3y + 2z = -14 \\ x - 4y - 7z = 30 \end{cases}$$

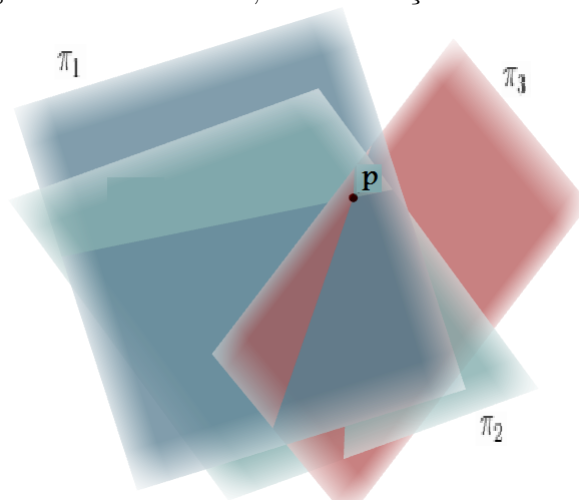
Considere as matrizes dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 22 & 2 & -3 \\ -14 & 3 & 2 \\ 30 & -4 & -7 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 22 & -3 \\ -1 & -14 & 2 \\ 1 & 30 & -7 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 22 \\ -1 & 3 & -14 \\ 1 & -4 & 30 \end{pmatrix}$$

O  $\det A = -63 + 4 - 12 + 9 - 14 + 24 = -52$ ,  $\det A_1 = -462 + 120 - 168 + 270 - 196 + 176 = -260$ ,  $\det A_2 = 294 + 44 + 90 - 42 - 154 - 180 = 52$  e  $\det A_3 = 270 - 28 + 88 - 66 + 60 - 168 = 156$ . Como o  $\det A$  é diferente de zero, pela regra de Cramer

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-260}{-52} = 5, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{52}{-52} = -1 \quad \text{e} \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{156}{-52} = -3$$

Figura 3.23: Ponto  $P$ , única solução do sistema.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 3.28** Ache o conjunto solução do sistema, se existir:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Sejam as matrizes do sistema

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Os  $\det A = 0$ ,  $\det A_1 = 0$ ,  $\det A_2 = 0$  e  $\det A_3 = 0$  temos que o sistema é impossível ou indeterminado.

Como os planos  $\pi_1$  e  $\pi_2$  são concorrentes, pois  $1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \neq 0$  resolvemos o sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = -z + 1 \\ 2x - y = -z + 3 \end{cases}$$

Fixando um número real  $z = t$ , pela regra de Cramer temos que  $\pi_1 \cap \pi_2 = r$

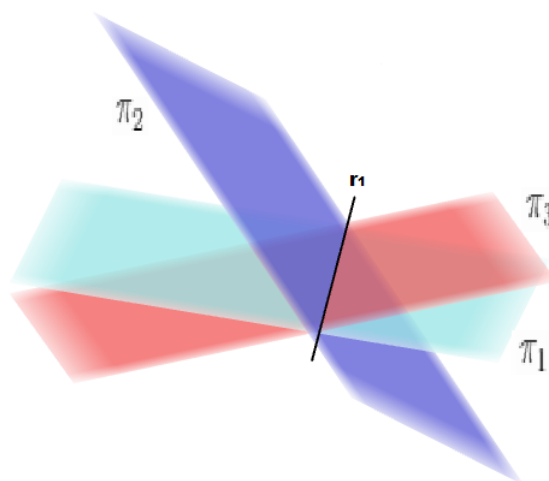
$$r = \begin{cases} x = \frac{d_1 b_2 - b_1 d_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} + \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} t = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} t \\ y = \frac{a_1 d_2 - a_2 d_1}{a_1 b_2 - b_1 a_2} + \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2} t = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} t \\ z = t \end{cases}$$

Tomando por exemplo,  $t = 0$  obtemos  $P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) \in \pi_1 \cap \pi_2$ .

Substituindo  $P = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right)$  na equação do plano  $\pi_3$ , obtemos

$$5x + 2y + 4z = 5 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot -\frac{1}{3} + 4 \cdot 0 = \frac{18}{3} = 6, \text{ portanto } \pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r.$$

Figura 3.24: Reta solução do sistema.



Fonte: Elaborada pela autora.

**Exemplo 3.29** Ache o conjunto solução do sistema, se existir:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -2 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

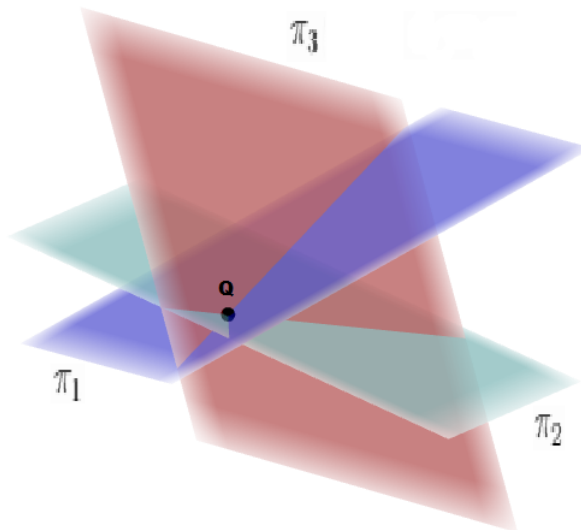
Sejam as matrizes dos coeficientes do sistema

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Os  $\det A = 8$ ,  $\det A_1 = 8$ ,  $\det A_2 = 16$  e  $\det A_3 = 24$ , então o sistema tem solução única dada por

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{8}{8} = 1, \quad y = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{16}{8} = 2 \quad \text{e} \quad z = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{24}{8} = 3$$

Figura 3.25: Ponto  $Q$ , única solução do sistema.



Fonte: Elaborada pela autora.



# Capítulo 4

## Escalonamento

Nos capítulos anteriores estudamos sistemas lineares  $2 \times 2$ ,  $2 \times 3$  e  $3 \times 3$  e estabelecemos resultados algébricos que correspondem as respectivas situações geométricas. A Regra de Cramer que pode ser generalizada, para sistemas de  $n$  equações com  $n$  incógnitas e é um dos métodos mais tradicionais para resolver sistemas lineares  $n \times n$ .

A regra de Cramer tem a vantagem de fornecer explicitamente a solução, no entanto só pode ser aplicada quando o determinante do sistema é diferente de zero. Além disso, o custo operacional é muito alto, por exemplo, no caso  $3 \times 3$  temos que calcular 4 determinantes.

Nesse capítulo vamos resolver sistemas lineares  $m \times n$  pelo método de escalonamento, já introduzido no capítulo 2 para sistemas com duas incógnitas. Para fundamentação teórica utilizamos as seguintes referências [1], [3] e [6].

### 4.1 Sistemas lineares de ordem $m \times n$

**Definição 4.1** Um sistema linear de  $m$  equações e  $n$  incógnitas é um sistema do seguinte tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$  e  $b_k$  são números reais e  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as incógnitas.

Uma solução para o sistema é uma  $n$ -upla de números reais  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  tal que substituindo cada incógnita  $x_i$  por  $c_i$ , todas as equações tornam-se verdadeiras.

Resolver um sistema significa encontrar todas as soluções.

## 4.2 Transformações Elementares

O método do escalonamento para resolver sistemas lineares de  $m$  equações e  $n$  incógnitas consiste em aplicar respectivamente transformações elementares sobre o sistema, de modo a ir obtendo sistemas equivalentes, até reduzir o sistema original a um sistema de fácil resolução.

**Definição 4.2** Seja  $S$  um sistema de  $m$  equações e  $n$  incógnitas. Por transformações elementares do sistema entendemos como uma das seguintes transformações.

- 1) Trocar a posição relativa de duas equações do sistema.
- 2) Trocar uma equação dada por outra obtida multiplicando ambos os membros da equação dada por um número real não nulo, denominado um múltiplo da equação.
- 3) Trocar uma equação pela soma membro a membro da própria equação como um múltiplo da outra.

**Definição 4.3** Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se pudermos obter um sistema do outro aplicando uma sequência finita de transformações elementares.

Assim, sistemas equivalentes possuem mesmo conjunto solução.

As matrizes já apareceram nos sistemas estudados anteriormente e agora daremos a definição formal de matriz.

**Definição 4.4** Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , definimos uma matriz real de ordem  $m$  por  $n$  (escreve-se  $m \times n$ ), como uma tabela formada por números reais distribuídos em  $m$  linhas e  $n$  colunas. Estes números reais são chamados entradas da matriz.

É usual indicarmos as entradas de uma matriz arbitrária pelos símbolos  $a_{ij}$ , onde o índice  $i$  indica a linha e o índice  $j$  indica a coluna onde o  $a_{ij}$  se encontra. Assim, uma matriz  $m \times n$  é representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou por  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

Dado um sistema de equações lineares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos a matriz formada pelos seus coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

A matriz  $A$  é denominada matriz completa do sistema.

Assim, estabelecemos a correspondência:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$

Indicaremos cada linha da matriz  $A$  por  $L_i = (a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in} \ b_i)$  para cada  $1 \leq i \leq n$ .

**Definição 4.5** Seja  $A$  uma matriz  $m \times n$  para cada  $1 \leq i \leq n$ , denotemos por  $L_i$  a  $i$ -ésima linha de  $A$ . Definimos as transformações elementares nas linhas da matriz  $A$  como uma das seguintes transformações.

- 1) Permutação de 2 linhas  $L_i$  e  $L_j$ , indicado por  $L_i \leftrightarrow L_j$ ;
- 2) Multiplicação de uma linha  $L_i$  por um número real  $c$  não nulo, indicado por  $L_i \rightarrow c \cdot L_j$ ;

- 3) Substituição de uma linha  $L_1$ , pela adição desta mesma linha com  $c$  vezes uma outra linha  $L_j$ , indicado por  $L_i \rightarrow L_i + c \cdot L_j$ .

**Definição 4.6** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $m \times n$ . A matriz  $A$  é dita equivalente por linhas à matriz  $B$  se  $B$  pode ser obtida de  $A$  pela aplicação sucessiva de um número finito de transformações elementares sobre linhas.

Assim a noção de equivalência de matrizes por linhas corresponde a noção de equivalência de sistemas lineares quando se efetuam as respectivas transformações sobre as equações. Observe que se  $A$  é equivalente por linha a uma matriz  $B$  então  $B$  é equivalente por linhas à matriz  $A$ , já que toda transformação elementar sobre linhas é reversível:

$$L_i \leftrightarrow L_j \leftrightarrow L_i$$

$$L_i \rightarrow c \cdot L_i \rightarrow \frac{1}{c} c_i = L_i$$

$$L_i \rightarrow L_i + c \cdot L_j \rightarrow (L_i + c \cdot L_j) + (-c) \cdot j = L_i$$

Como efetuar transformações elementares sobre linhas da matriz ampliada do sistema equivale a efetuar transformações elementares no sistema de equações, obtendo um sistema equivalente ao sistema original, concluímos que:

Dois sistemas de equações lineares com matrizes ampliadas equivalentes têm o mesmo conjunto solução.

**Exemplo 4.7** Tomando um sistema  $3 \times 3$ :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \xleftrightarrow{(1)} \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \xleftrightarrow{(1)} \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \xleftrightarrow{(2)} \begin{cases} ka_1x + kb_1y + kc_1z = kd_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \Leftrightarrow ka_2x + kb_2y + kc_2z = kd_2$$

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \Leftrightarrow a_1x + b_1y + c_1z + ka_2x + kb_2y + kc_2z = d_1 + kd_2$$

Daí,

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \xLeftrightarrow^{(3)} \begin{cases} (a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + (c_2 + kc_2)z = d_1 + kd_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Considerando a matriz completa do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Temos as correspondentes transformações elementares por linha.

1) Permutação das linhas  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  indicada por  $L_1 \leftrightarrow L_2$  e  $L_1 \leftrightarrow L_3$

Neste caso,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

representam as transformações elementares do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \end{cases}$$

2) Multiplicação de uma linha  $L_1$ ,  $L_2$  ou  $L_3$  por um número real  $k \neq 0$ .

Neste caso,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{kL_1} \begin{pmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 & kd_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{kL_3} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ ka_3 & kb_3 & kc_3 & kd_3 \end{pmatrix}$$

representam, respectivamente as transformações elementares do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ka_1x + kb_1y + kc_1z = kd_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ ka_3x + kb_3y + kc_3z = kd_3 \end{cases}$$

3) Substituição de uma linha pela adição desta mesma linha com a outra linha multiplicada por um número real  $k \neq 0$ .

Neste caso,

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + kL_2} \begin{pmatrix} a_1 + ka_2 & b_1 + kb_2 & c_1 + kc_2 & d_1 + kd_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + kL_2} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 + ka_2 & b_3 + kb_2 & c_3 + kc_2 & d_3 + kd_2 \end{pmatrix}$$

representam, respectivamente as transformações elementares do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + ka_2)x + (b_1 + kb_2)y + (c_1 + kc_2)z = d_1 + kd_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ (a_3 + ka_2)x + (b_3 + kb_2)y + (c_3 + kc_2)z = d_3 + kd_2 \end{cases}$$

### 4.3 Forma Escalonada

Nesta seção mostraremos que toda matriz pode ser transformada por meio de uma sequência de transformações elementares sobre linhas numa matriz em uma forma muito especial, a forma escalonada, que será utilizada para resolver sistemas lineares.

**Definição 4.8** Uma matriz  $m \times n$  será dita estar na forma escalonada se for nula, ou se:

1. O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1;
2. Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;
3. Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;
4. Se  $L_1, \dots, L_p$  são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha  $L_i$  ocorre na coluna  $k_i$ , então  $k_1 < k_2 < \dots < k_p$ . [6]

**Exemplo 4.9** Sejam as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A matriz  $A$  está na forma escalonada, pois todas as condições da definição anterior são satisfeitas, mas as matrizes  $B$  e  $C$  não estão na forma escalonada, pois a matriz  $B$  não satisfaz a condição 2, enquanto a matriz  $C$  não satisfaz as condições 1 e 4.

Apresentaremos um algoritmo que transforma uma matriz qualquer não nula numa matriz equivalente na forma escalonada. Assim ao reduzir a matriz ampliada relacionada

a um sistema à forma escalonada, encontramos um sistema equivalente ao sistema dado em uma forma mais simples.

Considere uma matriz não nula de ordem  $m \times n$ ,  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ .

**1° passo:** Seja  $k_1$  a primeira coluna da matriz dada com algum elemento não nulo. Troque as linhas entre si de modo que esse elemento não nulo apareça na primeira linha, isto é, de modo que na nova matriz  $a_{1k_1} \neq 0$ .

**2° passo:** Para cada  $i > 1$ , realize a transformação

$$L_i \rightarrow L_i - \frac{a_{ik_1}}{a_{1k_1}}L_1$$

Repita os passos 1 e 2 na matriz assim obtida, ignorando a primeira linha. Novamente, repita os passos 1 e 2 nessa nova matriz, ignorando as duas primeiras linhas e assim por diante, até alcançar a última linha não nula.

**3° passo:** Se  $L_1, \dots, L_p$  são as linhas não nulas da matriz obtida após terminar o processo acima e se  $k_i$  é a coluna na qual aparece o primeiro elemento não nulo  $a_{ik_i}$  da linha  $L_i$ , aplique as transformações

$$L_i \rightarrow \frac{1}{a_{ik_i}}L_i, \text{ para todo } 1 \leq i \leq p.$$

**4° passo:** Realize na matriz obtida até então as transformações

$$L_l \rightarrow L_l - a_{lk_i}L_i, \quad l = 1, \dots, i - 1.$$

para  $i = 2$ , em seguida para  $i = 3$ , e assim por diante, até  $i = p$ . Dessa forma, obteremos uma matriz na forma escalonada que é equivalente por linhas à matriz dada.

Chegamos assim ao seguinte resultado:

**Teorema 4.10** Toda matriz é equivalente a uma matriz na forma escalonada.

*Observação:* Existe uma única matriz na forma escalonada equivalente por linhas a uma matriz dada. A demonstração deste resultado pode ser vista na referência [6].

**Exemplo 4.11** A matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{pmatrix}$  é transformada numa matriz na forma escalonada com a seguinte sequência de transformações sobre suas linhas:



$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{2}L_3} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{2}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -2L_3} \xrightarrow{L_1 \rightarrow +7L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -44 \\ 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Agora vamos trabalhar com os exemplos do capítulo 3 usando o método de escalonamento.

**Exemplo 4.12** Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 6 \\ x + \frac{1}{2}y - z = 3 \\ 3x - 7y - z = 8 \end{cases}$$

**Solução:** Considere a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ 3 & -7 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

sejam  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  a primeira, a segunda e a terceira linha da matriz respectivamente, usando o método de escalonamento, temos que

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 6 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ 3 & -7 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 6 \\ 3 & -7 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -7 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1} \\
& \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{17}{2} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{2}{17}L_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{17} & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -\frac{1}{2}L_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{15}{17} & \frac{50}{17} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{17} & \frac{2}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo que esta última matriz é a matriz ampliada do sistema,

$$\begin{cases} x - \frac{15}{17}z = \frac{50}{17} \\ y - \frac{4}{17}z = \frac{2}{17} \end{cases}$$

como o sistema escalonado tem mesmo conjunto solução do sistema original, a interseção desses planos é uma reta, que foi exibida no exemplo 3.26, portanto o sistema é indeterminado.

**Exemplo 4.13** Resolva o sistema a seguir

$$\begin{cases} 3x + 2y - 3z = 22 \\ -x + 3y + 2z = -14 \\ x - 4y - 7z = 30 \end{cases}$$

**Solução:** Considere a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 22 \\ -1 & 3 & 2 & -14 \\ 1 & -4 & -7 & 30 \end{pmatrix}$$

sejam  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  a primeira, a segunda e a terceira linha da matriz respectivamente, usando o método de escalonamento, temos que

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 & 22 \\ -1 & 3 & 2 & -14 \\ 1 & -4 & -7 & 30 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 30 \\ -1 & 3 & 2 & -14 \\ 3 & 2 & -3 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 30 \\ 0 & -1 & -5 & 16 \\ 3 & 2 & -3 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 30 \\ 0 & -1 & -5 & 16 \\ 0 & 14 & 18 & -68 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 30 \\ 0 & 1 & 5 & -16 \\ 0 & 14 & 18 & -68 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 14L_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -7 & 30 \\ 0 & 1 & 5 & -16 \\ 0 & 0 & -12 & 88 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -34 \\ 0 & 1 & 5 & -16 \\ 0 & 0 & -52 & 156 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{52}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & -34 \\ 0 & 1 & 5 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -13L_3 \quad L_2 \rightarrow -5L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

sendo que esta última matriz é a matriz ampliada do sistema linear

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \\ z = -3 \end{cases}$$

Esse sistema escalonado possui solução única, dada por  $z = -3$ ,  $y = -1$  e  $x = 5$ , como vimos no exemplo 3.27.

**Exemplo 4.14** Resolvamos o sistema a seguir

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 5x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

**Solução:** Considere a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

sejam  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  a primeira, a segunda e a terceira linha da matriz respectivamente, usando o método de escalonamento, temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 5L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3L_2 \quad L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sendo que esta última matriz é a matriz ampliada do sistema linear

$$\begin{cases} x + \frac{2}{3}z = \frac{4}{3} \\ y + \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

como o sistema escalonado tem mesmo conjunto solução do sistema original, a interseção dos planos  $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$  é uma reta, que foi exibida no exemplo 3.28, portanto o sistema é indeterminado.

**Exemplo 4.15** Resolvamos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = -2 \\ x - y + z = 2 \\ -x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

**Solução:** Considere a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

sejam  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$  a primeira, a segunda e a terceira linha da matriz respectivamente, usando o método de escalonamento, temos que

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \quad L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 & -6 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \quad L_3 \rightarrow L_3 + 5L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{8}{3} & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{3}{8}L_3} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + \frac{4}{3}L_3 \quad L_1 \rightarrow L_1 + \frac{1}{3}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

sendo que esta última matriz é a matriz ampliada do sistema linear

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Portanto a solução desse sistema é única dada por  $x = 1$ ,  $y = 2$  e  $z = 3$ , encontrada no exemplo 3.29.

Finalizando vamos usar o método de escalonamento para resolver um sistema de quatro equações com quatro incógnitas, pois esse método é válido para sistemas de ordem  $m \times n$ .

**Exemplo 4.16** Resolva o seguinte sistema

$$\begin{cases} 2x - y - z - 2t = 3 \\ x + y + z + t = 2 \\ 3x + 2y + 4z + t = 11 \\ -x - y - z + 2t = -8 \end{cases}$$

**Solução:** Considere a matriz completa do sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

sejam  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$  a primeira, segunda, terceira e quarta linha da matriz respectivamente, usando o método de escalonamento, temos

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 11 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \quad L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow -\frac{1}{6}L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}
L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}
\begin{array}{c}
L_4 \rightarrow \frac{1}{3}L_4 \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}
\begin{array}{c}
L_1 \rightarrow L_1 + \frac{1}{3}L_4 \\
\longrightarrow
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
L_2 \rightarrow L_2 - \frac{5}{3}L_4 \quad L_3 \rightarrow L_3 + \frac{1}{3}L_4 \\
\longrightarrow
\end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

sendo que esta última matriz é a matriz ampliada do sistema linear

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \\ t = -2 \end{cases}$$

Portanto esse sistema possui única solução, dada por  $t = -2$ ,  $z = 2$ ,  $y = 1$  e  $x = 1$ .

# Conclusão

*Neste trabalho, ao escolhermos um conteúdo do ensino médio, podemos confirmar a importância do estudo continuado, mesmo o assunto sendo básico e ter sido apresentado por vários autores sempre podemos escolher uma nova organização que, na nossa visão, ajudará no entendimento.*

*A educação continuada possibilita o surgimento de novas ideias que contribuirão para o melhoramento do ensino. Um professor com uma boa formação conseguirá analisar o material disponível e fará escolhas adequadas para a melhoria das suas aulas.*

*Neste sentido, esperamos que essa dissertação possa ser utilizada pelo professor do ensino médio.*

## Referências Bibliográficas

- [1] ÁVILA, Geraldo(2006)*Cálculo 3: das funções de múltiplas variáveis - 7.ed, Rio de Janeiro, LTC, 1996.*
- [2] BOYER, Carl B.(1996) *História da Matemática, São Paulo, Edgard Blucher, 1996.*
- [3] DELGADO J.; FRENSEL K. ; CRISSAFF J(2013) (Coleção PROFMAT). *Geometria Analítica, SBM.*
- [4] EVES, Howard Whitley (1995). *Introdução à historia da Matemática, Unicamp.*
- [5] GAUSS, Carl Friedrich. (1803). *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum,.*
- [6] HEFEZ, Abramo(2016). *Introdução à Álgebra Linear, Rio de Janeiro: SBM.*
- [7] LIMA, Elon Lages and CARVALHO, Paulo Cezar Pinto and WAGNER, Eduardo and MORGADO, Augusto César. (1998). *A matemática do ensino médio vol.3, SBM.*
- [8] LIMA, Elon Lages (2014). *Álgebra linear, IMPA.*
- [9] LIMA, Elon Lages (2007). *Coordenadas no Espaço, SBM.*
- [10] MACHADO, Antônio dos Santos (1995). *Matemática: Temas e Metas, Mc.Graw-Hill.*
- [11] PEACOCK, George (1845). *A treatise on algebra, Deigton.*
- [12] TORREZAN, João Vitor Campos. *Determinantes: Teoria e aplicações. Disponível em: <[https://https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/](https://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/)>*  
Acesso em: 12 jan. 2021