**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**
**CAMPUS DE TRÊS LAGOAS**
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

PROFMAT

**EVARISTO NASCIMENTO**

# UMA PROPOSTA DE JOGO PARA O ENSINO DE CONGRUÊNCIAS DE NÚMEROS INTEIROS

**TRÊS LAGOAS - MS**
**2021**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**
**CAMPUS DE TRÊS LAGOAS**
**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

# UMA PROPOSTA DE JOGO PARA O ENSINO DE CONGRUÊNCIAS DE NÚMEROS INTEIROS

Dissertação de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

**Orientador:** Prof. Antônio Carlos Tamarozzi

**TRÊS LAGOAS - MS**
**2021**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

PROFMAT

# UMA PROPOSTA DE JOGO PARA O ENSINO DE CONGRUÊNCIAS DE NÚMEROS INTEIROS

por

**Evaristo Liberto Nascimento Leiva**

Dissertação de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
**Orientador:** Prof. Antonio Carlos Tamarozzi

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antonio Carlos Tamarozzi (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza
UFMS/CPTL

Prof. Dr. Gilberto Rodrigues dos Santos
UFMS/CPAN

TRÊS LAGOAS - MS
2021

## Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus familiares, em especial a minha mãe, que me apoiou desde o início nesta trajetória acadêmica e no incentivo pela educação. Foi bastante importante tê-la como suporte, pois sua trajetória passa por mais de 30 anos de trabalho dedicados a educação. A dedicação e inspiração se tornou algo mútuo e presente, já que quase concomitante, ambos decidimos embarcar em trabalhos acadêmicos (ela Psicologia, eu Matemática).

Dedico também a todos que contribuíram de forma direta ou indireta, com auxílios pelo percurso, motivação, cobranças e por toda arguição de conhecimento. Nominalmente cito aqui os professores que me entregaram uma visão mais ampla da Matemática: Allan, Osmar, Tamarozzi, Vitor, Fernando, Romanini e Renato.

Me sinto lisonjeado e com bastante sorte por ter ajuda de todas essas renomadas pessoas, logo, dedicar esse trabalho a elas ainda é parte do esforço para tentar entregar parte de tudo que recebi. Assim como em uma equação onde é necessário mantermos o equilíbrio das parcelas e com esperança do trabalho se desenvolver e ajudar estudantes como em uma progressão geométrica crescente.

Dedico este trabalho aos estudantes e professores
que buscam uma melhor compreensão da Matemática.

## Agradecimentos

Primeiramente à Deus, pelo dom da vida, pela oportunidade concedida. À UFMS – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – Campus Três Lagoas que ofereceu estrutura e colaboradores de alto nível para o bom andamento deste e de muitos outros projetos.

Ao meu orientador, Tamarozzi, deixo um imenso agradecimento pelo apoio constante na minha formação, pela profissionalidade de quem, incentiva e nos põe de pé e firmes no objetivo. Pela orientação habilmente conduzida e por acreditar na minha capacidade de concluir esse trabalho com sua orientação. Aos meus professores do programa Profmat: Osmar, Allan, Tamarozzi, Vitor, Fernando, Romanini e Renato. Aos meus colegas que comigo estudaram e me trouxeram incontáveis aprendizados, trocas de informações valiosas e também momentos de descontração.

Agradeço a oportunidade de ainda existirem projetos que acreditam na educação e na sua força modificadora da sociedade, a cada novo professor realmente capacitado o bairro, a cidade, o estado e o país se desenvolvem. Os alunos e as instituições percebem o quão um professor empenhado e com conhecimento vasto do assunto entregue é benéfico as novas gerações. Existem muitos outros países que demonstram o quanto o investimento na educação gera bons frutos e desenvolve muito além da educação.

Por fim fica aqui meu agradecimento ao IMPA que se coloca a frente de projetos matemáticos que colocaram nosso país, mesmo com muitas dificuldades em um patamar global de excelência de pesquisa e de propagação do conhecimento.

“O propósito do aprendizado é crescer, e nossas mentes, diferentes de nossos corpos, podem continuar crescendo enquanto continuamos a viver."

Mortimer Adler.

## Resumo

O presente estudo propõe a introdução de tópicos básicos de Aritmética, sobretudo congruências, para alunos do ensino básico. A proposta objetiva contribuir para a complementação da formação Matemática nas escolas, através de atividades extracurriculares com a utilização de uma sequência de jogos. Relatamos a experiência adquirida com a aplicação do jogo, onde os alunos são desafiados a elaborarem estratégias de soluções que se tornam efetivas com a formalização do conceito matemático.

**Palavras-chave:** Jogos educativos; Aritmética; Congruências Modulares.

# Abstract

This study proposes the introduction of basic topics in Arithmetic, especially congruences, for elementary school students. The proposal aims to contribute to the complementation of Mathematics training in schools, through extracurricular activities with the use of a sequence of games. We report the experience gained with the application of the game, where students are challenged to develop strategies for solutions that become effective with the formalization of the mathematical concept.


Keywords: Educational games; Arithmetic; Modular Congruences.

# Lista de Figuras

# Lista de Tabelas

## Sumário

# INTRODUÇÃO

Durante séculos, o modelo das escolas é algo que tem tido pouca alteração tanto na estrutura escolar, quanto na forma como conhecimento é transmitido. Majoritariamente ainda vemos alunos em salas com cadeiras enfileiradas, um professor seguindo apostilas pouco flexíveis e prazos determinados que não levam em consideração a variedade individual do aprendizado.

Apesar disso, o modo como recebemos informações tem se alterado de maneira drástica e a tecnologia corre o mundo de uma forma jamais vista. Hoje o estudante está cercado de celulares, tablets, relógios inteligentes ... – e as interações em sites e redes sociais tem se tornado frequentes e quase inevitáveis para uma grande parcela da população. É natural então que o papel do professor também passe por mudanças e adaptações, para conseguir se adequar a um cenário mais dinâmico, volátil e tomado cada vez mais por um aprendizado personalizado individual ou em pequenos grupos. Como nunca a oferta de informações foi tão grande, captar a atenção é algo que é cada vez mais complexo e desafiador, e o professor está com um papel de motivar e direcionar o aluno para valores importantes no seu desenvolvimento.

Na tentativa de métodos que maximizem a produtividade do aluno, para aprender de maneira mais intuitiva e assertiva, os jogos são excelentes ferramentas educacionais. O aluno se sente mais estimulado na competição, cooperação e o desafio faz o ímpeto no aprendizado serem mais fortes e menos suscetível a desistências. Inclusive, o Ministério da Educação com a parceria do UNICEF, incentiva a prática de brincadeiras para o desenvolvimento de competências socioemocionais desde o berço e disponibiliza livros e atividades neste sentido.

Neste estudo propomos um jogo para facilitar o aprendizado e a visualização de alguns conceitos da Aritmética. O comportamento de sequências, ciclos, múltiplos, divisores, congruência módulo “$n$”, a importância da divisibilidade entre outros conceitos correlacionados a Teoria dos Números são alvos a serem explorados.

No capítulo 1, abordamos os objetivos gerais e específicos, assim como as justificativas para a escolha do tema deste trabalho. No capítulo 2, tratamos sobre o atual cenário educacional, sobretudo no ensino da matemática, neste capítulo, versamos também sobre a interação dos pais com a escola e da importância de aproximar essa relação. No capítulo 3, desenvolvemos acerca dos jogos como facilitadores do ensino, seu aspecto lúdico e algumas aplicações educacionais. No capítulo 4, dissertamos sobre o embasamento matemático que permite a estruturação do jogo proposto, discorremos acerca de conceitos como múltiplos, divisibilidade e congruência modular. No capítulo 5, fica a proposta didática do jogo e o seu roteiro de implantação no decorrer de três aulas. Ao final no capítulo 6, mostramos a conclusão e as considerações finais após a implantação do jogo em sala de aula

# 1. OBJETIVOS E JUSTIFICATIVAS

Este capítulo inicial tem a propositura de especificar alguns porquês da busca deste estudo, abordaremos aqui o que motivou o trabalho e quais as justificativas da importância deste tema. Ademais também é citado o crescimento de processos lúdicos no ensino e a importância deste fato na atual conjuntura da sociedade.

## 1.1. Objetivo Geral

Objetivamos desenvolver uma metodologia que facilite a compreensão e o raciocínio para a resolução de situações problemas onde possamos utilizar de conceitos matemáticos (sobretudo da Aritmética). Sobre estes conceitos, facilitar uma visualização mais concreta, aplicável e aprofundada, onde o aluno poderá melhor relacionar a matemática com a realidade do seu dia a dia.

Sobretudo contribuir para um melhor desenvolvimento da aplicação de ferramentas matemáticas, da criatividade e do raciocínio dedutivo, mantendo ao máximo a motivação e a curiosidade durante os processos.

## 1.2. Objetivos específicos

- Aumentar a motivação do estudante ao aprender conceitos matemáticos;
- Desenvolver a percepção dedutiva, compreendendo o funcionamento de padrões;
- Capacitar e fortalecer as bases do estudo da Aritmética;
- Incorporar características lúdicas e uma visão mais criativa na interpretação de problemas;
- Promover o espírito competitivo, a curiosidade e a busca por independência ao enfrentar desafios.

## 1.3. Justificativa do tema de estudo

A aprendizagem da Matemática, de modo geral, tem gerado resultados pouco satisfatórios, criando desinteresse na matéria e baixa motivação por parte dos alunos e pais. Temos como exemplo disso o resultado da chamada Avaliação de Aprendizagem em Processo, um exame feito duas vezes ao ano pelo governo do estado de São Paulo para medir o desempenho da rede estadual de ensino. Na edição de abril de 2021, os estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental alcançaram 196 pontos na avaliação de matemática, muito abaixo dos 242 pontos da edição 2019, de acordo com o professor César Garcia Pavão (2021) em artigo da Universidade Tiradentes os "dados da edição de 2018 apontam que 68,1% dos estudantes brasileiros, com 15 anos de idade, não possuem nível básico de matemática, o mínimo para o exercício pleno da cidadania. Em ciências, o número chega a 55% e, em leitura, 50%". E dentro deste cenário os hábitos da sociedade tem mudado e a tecnologia cresce e modifica nossa interação social e os modos de aprender. Sendo assim, práticas e métodos não triviais têm aumentado e o quesito lúdico ganha força, com a presença de jogos e experiências que estimulam a atenção e concentração dos alunos.

Nas aulas de Matemática os jogos podem criar um contexto mais concreto, aplicável e intuitivo no direcionamento dos conteúdos abordados, por isso muitas escolas e plataformas digitais vem utilizando dos "games". Aliás um termo que vem ganhando bastante destaque mundo afora é "gameficação" (*gamefication* em inglês), que é usado para implantar elementos de jogo em tarefas de não jogo, tornando o ato de fazê-la mais envolvente. Basicamente é um conceito que vem de uma premissa bastante óbvia: "seres humanos sentem-se fortemente atraídos por jogos" (VIANNA et al., 2013, p. 14).

Porém, sempre que tentamos analisar uma mudança de metodologia é necessário observar sua eficiência e verificar se a aplicabilidade é viável; e dentre as diversas áreas onde a gameficação tem sido aplicada (metas empresariais, desenvolvimento de produtos, educação, ...) seus resultados positivos vêm sendo bem animadores. Uma prova disso é a escola nova iorquina "*Quest to Learn*", que faz uso da gameficação na educação, e obteve notáveis resultados já em seus primeiros anos de implantação, conforme verificamos em artigo da revista Fast Company (Waniewski B. 2012).

Com o intuito de aprimorar o atual cenário ainda pouco produtivo do ensino da Matemática, o presente estudo busca captar os processos dos jogos e da gameficação para auxiliar no desenvolvimento e na aprendizagem da Aritmética

# 2. O ATUAL CENÁRIO EDUCACIONAL

Para a compreensão da educação de maneira ampla é necessário definir contextos que vão além da escola, é preciso considerar qual é a atuação do ambiente familiar, quais os hábitos da sociedade e como tem funcionado as relações sociais. A escola e os professores devem estar atentos a todos cenários, para que a integração da vida e consequentemente do desenvolvimento dos estudantes ocorra da melhor maneira possível. Na sequência abordaremos sistemas, análises e relações do atual cenário educacional.

## 2.1. Sobre o processo de interação dos pais com a escola

Atualmente a conexão das escolas com os pais tem sofrido com a falta de proximidade e interação; as ideias desenvolvidas raramente são aplicadas em conjunto e a tecnologia muitas vezes só aumenta a distância; é um momento em que enxergamos a escola e a família transitando em esferas diferentes, distintas. Porém, paradoxalmente, percebe-se um nível de exigência muito alto das partes, as escolas buscam receber sempre os melhores pais e alunos, já nas famílias a tentativa é encontrar a melhor estrutura e os índices mais altos nas avaliações. O conceito de buscar métodos prontos, terceirizar e aguardar resultados vem crescendo e claramente é insustentável e muitas vezes frustrante, portanto, devemos nos focar em desenvolver metodologias eficientes e democratizar uma boa comunicação.

Muitos pais, devido ao trabalho, designam que os alunos fiquem aos cuidados dos avós, babás, funcionários, tutores, como também das escolas, reproduzindo assim, uma formação que possui responsabilidades divididas. Essa dinâmica por sua vez se torna problemática quando o pai, mãe ou responsável cobra somente da escola. E é evidente que a instituição de ensino deva sempre ser cobrada por melhorias e evolução, mas não podemos esquecer do que foi dito por Charles Darwin: “O vencedor não será o mais forte, será aquele que melhor se adaptar”, o que denota que o aluno em algum nível deverá se adaptar a possíveis limitações institucionais.

Nesse sentido acreditamos que o método de acompanhamento da evolução do aluno deva ser aperfeiçoado, de modo que os processos, cobranças e comunicações sejam bidimensionais. Teríamos assim, pais fiscalizando e informando professores, professores fiscalizando e informando pais, na busca sempre da evolução dos estudantes. A escola não pode esperar que a família resolva sozinha um mau desempenho do aluno, da mesma forma, a escola sozinha também não resolverá, as responsabilidades são partilhadas e sempre que possível seria importante discutir direções e caminhos, pois o conhecimento é um processo dinâmico.

Sobre essa comunicação infelizmente ao se tratar do ensino básico há pouquíssima troca de informação direta e geralmente os pais conversam com outros pais ou indiretamente com a coordenação, já os professores muito mais com outros professores e com os alunos. E é claro que não falta boa vontade de ambas as partes, porém o tempo na nossa sociedade parece cada vez mais escasso, então cabe aplicarmos neste “distanciamento” da escola com a família, uma forma de feedback e fiscalização mais práticos na comunicação. É preciso que evitemos as velhas práticas de reuniões escolares, geralmente pouco produtivas, convidativas e que se aborda muito pouco do desempenho específico dos alunos. Fica então a cargo de comunicados dados por cartinhas e/ou bilhetinhos no caderno o papel de informar mais especificamente os familiares, fato que claramente está defasado e não é difícil verificar que passa longe de ser a melhor opção.

No momento, escolas públicas e privadas têm enfrentado esse problema da falta da comunicação direta, buscando agendas escolares com acesso instantâneo pela internet e por aplicativos cada vez mais específicos. Usar a tecnologia é uma boa opção e os professores tem a possibilidade de entregar além das avaliações também comentários diversos, pois apenas notas torna o processo frio e conservador. Com efeito, o processo educativo precisa considerar também avaliar comportamento, respeito, interesse, frequência e muitas outras variáveis que o professor em sala de aula vê e vivencia diariamente.

Porém, entre os pais e professores, existem obstáculos que comprometem o desenvolvimento do aluno e o seu rendimento não só escolar, mas também pessoal. Um ruído que a longo prazo pode originar grandes contratempos.

O senso comum diz aos pais que ser chamado à escola significa algo negativo, já a escola vê a presença dos pais muito atrelada a reclamações e a problemas, consequentemente com esses ambientes agindo de formas independentes perde-se grande eficácia na educação. A sugestão é que pais criem laços, aproximem-se dos seus filhos e desmistifiquem a ideia de que a presença na escola é um sinal de aborrecimento. Já os alunos devem partir da mesma premissa e encarar a interação e participação ativa dos pais nas escolas como algo positivo e agregador.

## 2.2. O ensino da matemática e sua relevância social.

A matemática e a percepção dela sempre estiveram presente em nossas vidas, inicialmente de formas mais intuitivas e posteriormente ganha-se mais consciência. É conhecida também sua importância e relevância na sociedade e no processo de interpretação do conhecimento, já que possui fortes relações com diversas áreas do saber e favorece na estruturação do pensamento.

Apesar disso, a aprendizagem da matéria e o desempenho dos estudantes não é devidamente satisfatório, e é justamente nesse ponto que pais, escolas, alunos e professores buscam captar mais consciência a respeito deste problema e das possíveis soluções que melhorem esse cenário. A respeito desta problemática "para que haja uma aprendizagem efetiva e duradoura é preciso que existam propósitos definidos e autoatividade reflexiva dos alunos" (HAIDT, R.C.C. 1999, p. 75). Logo, vemos que a motivação dos estudantes e a forma de abordagem da matéria são bases essenciais para construção do conhecimento.

O ensino da matemática no país reflete inevitavelmente nossa desigualdade social, temos, portanto, polos e instituições com excelentes resultados e até alta relevância internacional, mas também, infelizmente ainda é alto o número de escolas que não alcançam a motivação e a curiosidade do desenvolvimento da matéria, isso sem contar o grande número de alunos que não conta sequer com uma infraestrutura básica nas escolas que frequentam. Sabemos também que as problemáticas do cenário educacional são variadas e um dos aspectos que defrontamos é a ideia compartilhada pelo senso comum que matemática é algo difícil de se aprender. É comum também que familiares, professores de outras matérias e até mesmo a coordenação e direção propaguem essa ideia com dizeres: eu também nunca fui bom em matemática, como conseguem gostar “disso”, nunca vamos usar esse conteúdo, quem gosta de matemática só pode ser louco entre outros chavões que acabam por inibir e desestimular o interesse pelo aprendizado.

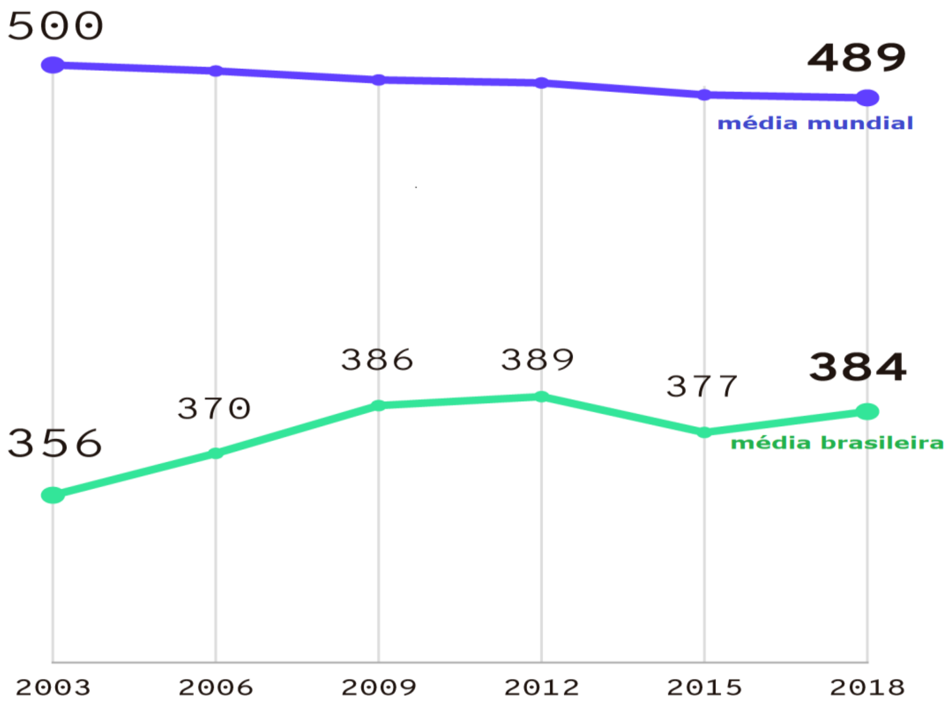
Essa visão e compartilhamento social apesar de muitas vezes parecer inofensivo pode dar ao aluno um aval para não se esforçar, ou pior ainda, se contentar com pouco. Sobre este problema é preciso que cumpramos nosso papel como docentes e nos vigiemos para não sermos nós mesmos incentivadores de uma visão equivocada sobre o que é o estudo, o aprendizado e, em especial, a Matemática. Diante de tais evidências é preciso que a escola que aí está cumpra sua função transformadora e que a Matemática renasça com um novo olhar pedagógico no meio escolar, configurando um novo sentido e facilitando o desenvolvimento de seu ensino-aprendizagem.

Preparar cada vez mais os educadores com excelência técnica e aperfeiçoamento constantes na didática, na política de igualdade na busca por conhecimento, no combate aos preconceitos e discriminações culturais e assim buscar fundar pilares para que possa haver um real desenvolvimento no ensino e na educação do país. Também é imprescindível que haja uma adequada mensuração de como o desenvolvimento educacional vem ocorrendo, e isso não só baseado em estatísticas externas e governamentais, mas sim como uma forma de melhoria contínua das instituições para que se consiga de fato maximizar metodologias assertivas.

Atentando agora especificamente a esfera do ensino da matemática, o Brasil não vem obtendo resultados “satisfatórios” e nos últimos anos não estamos apresentando avanços significativos. Ao utilizarmos como base os resultados do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - PISA (sigla em inglês), observamos que temos ocupado frequentemente as últimas colocações no ranking.

A Figura 2.1, nos mostra uma comparação entre a média mundial e o desempenho brasileiro.

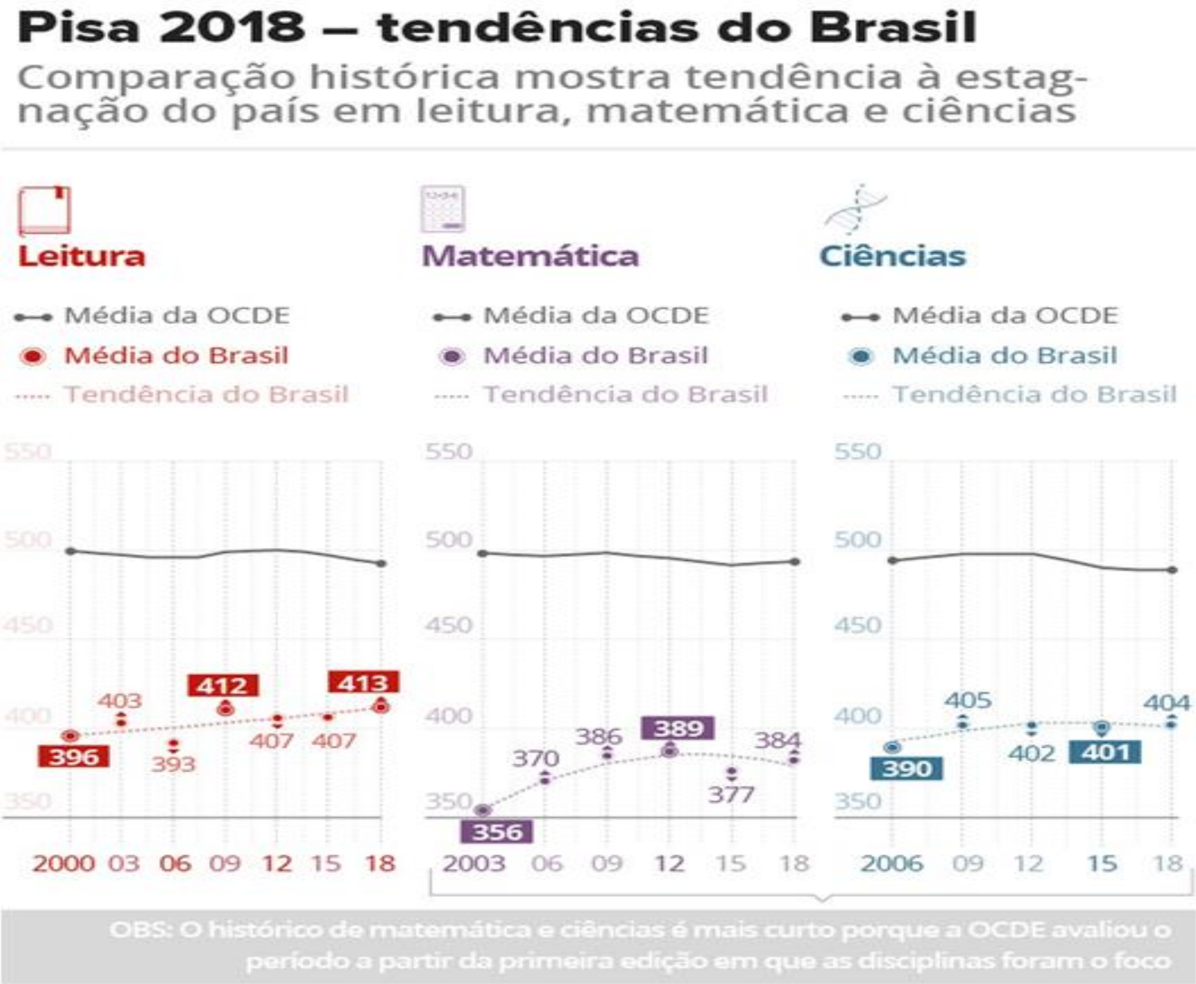
Figura 2.1. - Desempenho brasileiro no PISA.




Fonte: Gazeta do Povo (2018)

Já nas Figuras 2.2 e 2.3, percebemos que além da educação brasileira estar como um todo com um resultado insatisfatório, temos ainda, a área matemática como o setor mais crítico, demonstrando assim a fragilidade do nosso ensino de exatas. Ratificando desta forma a importância de aperfeiçoarmos o ensino matemático em nossas escolas.

Figura 2.2 - Infográfico PISA




Fonte: (G1-Educação) 2018

Figura 2.3 – Desempenho brasileiro.

**Pisa 2018 - resultados do Brasil**

País conseguiu avançar alguns pontos entre as edições 2015 e 2018 da prova, mas ainda não subiu de patamar e segue longe do desempenho dos países desenvolvidos

| BRASIL | Leitura | Matemática | Ciências |
|---|---|---|---|
| **Nota média 2018** | **413** | **384** | **404** |
| Margem de erro | 2 | 2 | 2 |
| **Variação 2015-2018** | **6** | **6** | **3** |
| Posição no ranking | 58-60 | 72-74 | 66-68 |

Fonte: OCDE/Pisa 2018

Fonte: (OCDE/Pisa) 2018

Verificamos, observando as figuras acima que a área da matemática é a que sempre permaneceu mais abaixo da média mundial e que também ainda não conseguiu criar uma tendência de crescimento com o passar dos anos. Ao menos, não um crescimento duradouro, já que de 2012 à 2018 houve um decrescimento de nossas notas

# 3. OS JOGOS COMO FACILITADORES DO ENSINO

As práticas pedagógicas sempre foram direcionadas para decorarmos regras sobre um determinado conteúdo, utilizando exaustivamente de cópias e repetições em textos e exercícios. Claro, que durante muito tempo funcionou, além de que muitas vezes a necessidade justificava os métodos aplicados, porém com o desenvolvimento da tecnologia alguns processos vem se tornando menos eficazes, e a necessidade de mudanças se faz necessária. Neste capítulo buscaremos demonstrar que a intersecção dos jogos com a educação pode ser algo verdadeiramente benéfico e sua aplicação é muitas vezes com baixa complexidade de implantação.

## 3.1. A magia e o impacto dos jogos

Muito além do contexto da educação, o ser humano mostra interesse e afeição pelos jogos e pela dinâmica da jogatina. Não é incomum encontrarmos na história, tanto na antiguidade e seguindo até a atualidade, citações e fatos que comprovem a admiração do ser humano por jogos. Uma dessas citações que exemplifica isto é feita pelo poeta francês, nascido no século XIX, Alfred de Musset, que diz: “o jogo é a única paixão que pode competir com o amor”.

Nossa intenção aqui é tentar desvendar como os jogos desempenham tamanha influência em nossas vidas, buscando denominadores comuns nos mais diversos tipos e formatos. Feito isso, podemos nos guiar para importantes fatos que irão auxiliar no processo de aprendizado e no processo educativo.

Um ponto crucial que parece ter bastante relevância no bom desempenho e na aceitação dos jogos é a apresentação e cenário (modo em que o jogador irá se relacionar com o jogo) pois é aqui que acontecerá o impacto inicial. Pois bem, quem gosta de futebol, irá se recordar com bastante carinho da primeira vez que foi a um estádio, quem gosta de lutas guardará em sua memória afetiva o primeiro evento que participou e assim seguimos nos mais diversos casos. O senso comum nos diria que é o famoso “amor à primeira vista”, aquele encantamento que nos é dado por algum diferencial específico e que nos motiva a descobrir mais. Portanto, o design é um aspecto fundamental no processo de despertar a curiosidade no jogador em potencial.

Outro ponto que merece destaque é o desafio que o jogo proporciona. O ser humano em sua essência é competitivo e curioso. Sendo assim, os jogos possuem os elementos essenciais para estimular e cativar a atenção. Para que haja êxito em sua aceitação, é necessário que os jogos apresentem um elemento desafiador em um nível que atraia possíveis jogadores, mas ao mesmo tempo que não os desestimulem com um elevado grau de dificuldade. É importante que os jogos projetados, sejam eles para entretenimento ou para auxiliarem no processo de aprendizagem, tenham seu direcionamento a um público condizente com sua faixa etária e nível de conhecimento, para que possa ser obtido através deles um resultado positivo para os participantes.

## 3.2. O aspecto lúdico e a aplicação educacional.

O aprendizado e o progresso demandam esforço e muitas doses de paciência, é inevitável que no processo existam pontos críticos e momentos de cansaço, porém com o objetivo de amenizar processos maçantes e cansativos trataremos aqui de alternativas que podem ser utilizadas.

Educadores vem focando bastante no aspecto lúdico e na elaboração de atividades que se adequem melhor em uma realidade onde a informação está disponível em todo lugar e que podemos acessá-la da palma de nossas mãos. É muito comum atualmente que fora das escolas, os celulares, tablets e notebooks acompanhem quase integralmente a vida dos alunos, e qualquer processo de aprendizagem que abandone essa realidade tem muito a perder.

No intuito de motivar e acompanhar a realidade dos estudantes, o ensino por meio de jogos vem sendo aplicado como método de aprendizagem, pois seu teor lúdico, competitivo e interativo mostra boa aceitação por parte dos alunos. Vejamos:

> É muito mais eficiente aprender por meio de jogos e, isso é válido para todas as idades, desde o maternal até a fase adulta. O jogo em si, possui componentes do cotidiano e o envolvimento desperta o interesse do aprendiz, que se torna sujeito ativo do processo [...] (LOPES, 2001, p. 23).

Sendo assim, mostra-se muito interessante e eficaz a introdução de jogos no cotidiano escolar como forma de aprimorar o aprendizado e a assimilação dos conteúdos pelos alunos, estimulando suas habilidades de forma prazerosa e ao mesmo tempo desafiadora.

### 3.3. Gameficação aplicada a educação.

Conforme brevemente abordado em capítulos anteriores, o termo gameficação se propõe a tentar tirar proveito dos benefícios do jogo nas mais diversas áreas, e conforme o livro Gamificação na educação (FADEL, L. M. 2014, p.15) “tem como base a ação de se pensar como em um jogo, utilizando as sistemáticas e mecânicas do ato de jogar em um contexto fora de jogo.” Temos, por exemplo, uma das plataformas de ensino com maior notoriedade e visibilidade por todo o mundo, a Khan Academy, desenvolvida e criada por Salman Khan, cuja formação passa por Harvard e MIT, e cujos financiadores do projeto vão desde o Google até a fundação de Bill e Melinda Gates. Mas o ponto mais importante a citarmos é o método de ensino, que é bastante personalizado e interativo, onde o estudante conquista pontos e medalhas no caminho do aprendizado. Funciona como a dinâmica de um jogo de RPG (sigla em inglês que pode ser traduzida como “Jogo de Interpretação de Personagens”) que além de motivar os alunos facilita a visualização do desenvolvimento pessoal, pois seu avatar (personagem) vai evoluindo, crescendo e ganhando condecorações. Agora sobre os alguns dos resultados e impactos citaremos uma pesquisa retirada do site da plataforma:

> Em parceria com o Distrito escolar Long Beach Unified no Sul da Califórnia, 5.348 alunos de matemática do Ensino fundamental usaram a Khan Academy integrada ao ensino durante o período de uma aula por semana. Os alunos que usaram a Khan se sobressaíram com 22 pontos a mais (0,20 ES) na pontuação da escala da avaliação de matemática Smarter Balanced. O distrito indica que esse valor é praticamente o dobro da meta em comparação àqueles que não usaram a plataforma (KHANACADEMY, 2021, Online).

Outro exemplo disso é a escola nova iorquina “Quest to Learn” que também adota a linha da gameficação; a Q2L (sigla para Quest to Learn) foi fundada através de uma parceria entre a prefeitura de Nova Iorque, o Institute of Play e outras organizações menores. O Institute of Play, é uma ONG fundada em 2007 e sediada em Nova Iorque que utiliza princípios dos jogos para o desenvolvimento de mudanças sociais, mais especificamente na educação. Essa parceria entre a prefeitura, o instituto e outras organizações foi motivada após a constatação de que os Estados Unidos vêm sofrendo ao longo dos anos não só com a evasão dos alunos das escolas (sobretudo no ensino médio) como também por uma dificuldade destes mesmos alunos em ler, escrever e resolver problemas básicos de matemática.

Inúmeras pesquisas e avaliações demonstram os bons resultados que esse modelo adotado pela escola obteve, retiramos aqui um recorte da pesquisa da New York Academy que diz que “alunos do ensino fundamental e médio da escola pública de NYC Quest to Learn alcançam um crescimento significativo em pensamento crítico, raciocínio, resolução de problemas e habilidades de comunicação” (JURMAN, N. 2020, Online).

## 4. O Embasamento matemático do jogo.

Neste capítulo abordaremos conceitos matemáticos que permitem a estruturação do jogo proposto, seguiremos com importantes propriedades e demonstrações aritméticas que facilitam na resolução dos níveis do jogo.

### 4.1- Múltiplos.

Para explicar o conceito de multiplicidade iremos recorrer ao livro do professor Abramo Introdução a Aritmética (HEFEZ, A. 2010, p. 13) que nos diz:
Dado $a \in \mathbb{N}$, podemos considerar os múltiplos de $a$:

0 vezes a (nenhuma vez a), uma vez a, duas vezes a, três vezes a etc., obtendo assim a sequência:

$$0 \times a = 0, 1 \times a = a, 2 \times a = a + a, 3 \times a = a + a + a, \ldots$$

Por exemplo, 0 dúzias, uma dúzia, duas dúzias, três dúzias etc., são os múltiplos de 12.

Com isso podemos perceber que caso somemos um múltiplo de "$a$" com outro múltiplo de "$a$" teremos como resultado também um múltiplo de "$a$". Essa observação vai bastante de encontro com a ideia de ciclos e padrões e poderá ser bastante utilizada no contexto do jogo dos ponteiros.

### 4.2- Divisibilidade.

Na divisão precisamos seguir o algoritmo geral da divisão, que nos diz que quando temos $a, b$ dois números inteiros com $b > 0$. Então existem únicos números inteiros $q, r$ tais que: $a = qb + r \; e \; 0 \leq r < b$. Onde nomeamos $q$ como quociente e $r$ de resto. Podemos verificar essa demonstração no trabalho do professor Rudolf R. Maier, TEORIA DOS NÚMEROS com última versão em 2005 na página 21.

Ademais além do algoritmo da divisão, que norteia muitas das ideias do jogo proposto, o professor Abramo Hefez nos mostra que divisores são basicamente um outro olhar a respeito dos múltiplos. Vejamos agora um trecho do livro Iniciação a Aritmética na versão de 2005:

Diremos que um número inteiro $d$ é um divisor de outro inteiro $a$, se $a$ é múltiplo de $d$; ou seja, se $a = d \times c$, para algum inteiro $c$.

Quando $a$ é múltiplo de $d$ dizemos também que $a$ é divisível por $d$ ou que $d$ divide $a$.

Representaremos o fato de um número $d$ ser divisor de um número; $a$, ou $d$ dividir $a$, pelo símbolo $d \mid a$.

Caso $d$ não divida $a$, escrevemos $d \nmid a$.

Esses conceitos de múltiplos e divisibilidade, assim como é proposto no jogo, podem dar ao estudante algumas bases para perceber e formular critérios que são aplicáveis em determinados números, estes funcionariam como facilitadores na resolução de problemas. Alguns desses critérios são de amplo conhecimento e funcionam de maneira bem simples, outros necessitam de uma demonstração mais elaborada e de um olhar mais atento, porém a ideia de demonstrar com os alunos sobre uma ótica diferente é uma das ideias do jogo.

## 4.3- Congruência modular.

Os números inteiros podem ser classificados em "pares" ou "ímpares". Vimos que um número inteiro $a$, sendo par, tem a forma $2k$ e que um número inteiro $b$, sendo ímpar, tem a forma $2k + 1$. Podemos observar que estas representações, par e ímpar, decorrem do algoritmo da divisão, vejamos:

$$a = 2k + 0 \quad b = 2k + 1$$

Percebemos que na verdade números pares são aqueles que deixam resto zero, quando divididos por 2, e números ímpares, os que deixam resto 1.

Assim podemos dizer que todos os números pares são congruentes entre si, o mesmo vale para os números ímpares. Veremos também que se quisermos podemos classificar os números inteiros em várias categorias, não apenas em par ou ímpar. A definição seguinte nos dá a ferramenta necessária para isto.

**Definição 1.1** Dados $a, b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, dizemos que $a$ e $b$ são congruentes módulo $n$ se $a$ e $b$, quando divididos por *n*, possuem o mesmo resto.

**Notação:** Se *a* e *b* são congruentes módulo *n* indicamos por $a \equiv b \pmod{n}$, do contrário $a \not\equiv b \pmod{n}$.

**Exemplo 1.1**

i. Temos que $27 \equiv 6 \pmod{3}$ porque ao serem divididos por 3, os números 27 e 6 possuem resto 0.

ii. Temos $27 \equiv 6 \pmod{7}$ porque o resto da divisão de 27 por 7 é 6, e é claro que o resto da divisão de 6 por 7 é o próprio 6.

iii. Temos $27 \not\equiv 6 \pmod{4}$ porque o resto da divisão de 27 por 4 é 3, enquanto o resto da divisão de 6 por 4 é 2.

iv. $-5 \equiv 9 \pmod{7}$. De fato, $-5 = -1(7) + 2$ e $9 = 1(7) + 2$ ou seja $-5$ e 9 tem o mesmo resto 2 quando divididos por 7.

v. É fácil conferir também que $-11 \equiv -3 \pmod{4}$ já que 1 é o mesmo resto em ambas as divisões por 4 de $-11$ e $-3$.

vi. Quaisquer dois inteiros *a* e *b* são congruentes módulo 1, ou seja $a \equiv b \pmod{1}$ $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}$. Isto ocorre porque todo inteiro dividido por 1 tem resto sempre 0.

Seria desejável ter um critério prático para estabelecer quando dois inteiros *a* e *b* são congruentes módulo *n*.

Felizmente tal critério existe e será apresentado na seguinte proposição:

**Proposição 1.1** Dados $a, b, n \in \mathbb{Z}$ com $n \in \mathbb{N}^*$, então:

$a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (b - a)$.

**Demonstração:** Provemos inicialmente que $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow n \mid (b - a)$. Partindo de $a \equiv b \pmod{n}$ ,sabemos que *a* e *b* tem o mesmo resto *r* quando divididos por *n*.

Isto significa que existem $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = q_1 n + r$ e $b = q_2 n + r$.

Assim, $r = a - q_1 n$ e como $b = q_2 n + r$ obtemos $b = q_2 n + (a - q_1 n) \Rightarrow b - a = n(q_2 - q_1) \Rightarrow n \mid (b - a)$.

Provemos agora que $n \mid (b - a) \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$.

Como $n \mid (b - a)$ temos $b - a = qn$ onde $q \in \mathbb{Z}$. Seja *r* o resto da divisão de *a* por *n*, então $\exists\, q_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a = q_1 n + r$ onde $0 \leq r < n$.

Substituindo na igualdade $b = a + qn$ obtemos

$$b = q_1 n + r + qn \Rightarrow b = (q_1 + q)n + r$$

Uma vez que $0 \leq r < n$ vemos que $q_1 + q$ e *r* cumprem a condição de quociente e resto na divisão de *b* por *n*. E como o quociente e resto são únicos neste processo, resulta que *r* também é o resto na divisão de *b* por *n*.

Portanto *a* e *b* tem o mesmo resto *r* na divisão por *n* como desejamos provar.

**Observação 1.1**

É claro que se $n \mid (b - a)$ então $n \mid (a - b)$, logo a proposição acima pode ser escrita na seguinte forma alternativa:

**Proposição 1.2** $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid (a - b)$

**Exemplo 1.2**

Vamos verificar a proposição anterior voltando aos exemplos anteriores.

i. Temos $27 \equiv 6 \pmod 3$ porque $3 \mid (27 - 6)$, isto é, $3 \mid 21$.

ii. Temos $27 \equiv 6 \pmod 7$ porque $7 \mid (27 - 6)$, isto é, $7 \mid 21$.

iii. Temos $-5 \equiv 9 \pmod 7$ porque $7 \mid (-5 - 9)$, isto é, $7 \mid -14$.

iv. Temos $-11 \equiv -3 \pmod 4$ porque $4 \mid (-11 - (-3))$, isto é, $4 \mid -8$.

Nas proposições seguintes, estudaremos algumas propriedades da congruência.

**Proposição 1.3** Para todos os inteiros *a*, *b*, *c* e *n* onde $n > 0$ valem:

i. $a \equiv a \pmod n$ (Propriedade reflexiva)

ii. $a \equiv b \pmod n$ então $b \equiv a \pmod n$ (Propriedade simétrica)

iii. $a \equiv b \pmod n$ e $b \equiv c \pmod n$ então $a \equiv c \pmod n$ (Propriedade transitiva)

**Demonstração:**

i. Pela proposição anterior, vamos ter $a \equiv a (\mathrm{mod}\, n)$ se, e somente $n \mid (a - a)$. Mas $a - a = 0$ e $n \mid 0$ para todo *n*.

Logo sempre vale $a \equiv a \pmod n$.

ii. Suponhamos que $a \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$, pela proposição anterior isto significa que $n \mid (b - a)$. Daí $n \mid -(b - a)$, ou seja, $n \mid (-b + a)$ que é o mesmo que $n \mid (a - b)$ e novamente pela proposição anterior podemos afirmar que $b \equiv a$ (mod *n*). logo $a \equiv b (\mathrm{mod}\, n) \Rightarrow b \equiv a \pmod n$ como desejado.

iii. Suponhamos que $a \equiv b \pmod n$ e $b \equiv c \pmod n$. Isto é o mesmo que afirmar $n \mid (a - b)$ e $n \mid (b - c)$. Pelo item (i) do corolário 4.1 podemos escrever $n \mid (a - b + b - c)$ e então que $n \mid (a - c)$ e isto significa exatamente que $a \equiv c \pmod n$.

**Proposição 1.4** Sejam *a*, *b*, *c* e *m* inteiros com $m > 0$, tais que $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$. Então:

i. $a + c \equiv (b + d) (\mathrm{mod}\, m)$

ii. $ac \equiv bd \pmod m$

**Demonstração:** Como $a \equiv b \pmod m$ e $c \equiv d \pmod m$ temos respectivamente $m \mid (a-b)$ e $m \mid (c-d)$. Assim, resulta do corolário que $m \mid (a-b)+(c-d)$, ou ainda $m \mid (a+c)-(b+d)$.

Da proposição acima, isto significa exatamente que $a+c \equiv b+d \pmod m$.

Para provarmos (ii) notemos que da condição $m \mid (a-b)$ podemos escrever $m \mid (a-b)c$ (veja item (ii) corolário 4.1), isto é $m \mid (ac-bc)$. Da mesma forma da condição $m \mid (c-d)$ podemos concluir que $m \mid (c-d)b$, isto é, que $m \mid (bc-bd)$. Juntando as duas conclusões temos $m \mid (ac-bc)$ e $m \mid (bc-bd)$, o que dá $m \mid (ac-bc+bc-bd)$ ou seja, $m \mid (ac-bd)$ e isto significa precisamente que $ac \equiv bd \pmod m$.

**Corolário 1.1** Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_{1,} b_2, \dots, b_n$ duas seqüências quaisquer de números inteiros satisfazendo $a_i \equiv b_i \pmod m$ $\forall\, i = 1, \dots, n$ onde $m \geq 1$ é inteiro.

Então,

i. $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \equiv (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \pmod m$.

ii. $(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \equiv (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) \pmod m$.

**Demonstração:** Demonstramos (i) por indução finita sobre o número natural *n*. Para $n = 1$ a afirmação (i) vale pois, neste caso, ele representa simplesmente que $a_1 \equiv b_1$ (mod *m*), que é válido por hipótese.

Suponhamos agora que a proposição vale para $n = k$, isto representa $(a_1 + \cdots + a_k) \equiv (b_1 + \cdots + b_k) \pmod m$. Devemos provar que (i) vale para $n = k+1$, ou seja, que

$$(a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1}) \equiv (b_1 + \cdots + b_k + b_{k+1}) \pmod m \qquad (4.1)$$

Temos $(a_1 + \cdots + a_k) \equiv (b_1 + \cdots + b_k) \pmod m$ e $a_{k+1} \equiv b_{k+1} \pmod m$ e pela proposição anterior podemos somar estas duas congruências.

Segue assim que $(a_1 + \cdots + a_k) + a_{k+1} \equiv (b_1 + \cdots + b_k) + b_{k+1} \pmod m$ o que prova 4.1, isto é, que a proposição (i) vale para $n = k+1$.

A fórmula (ii) (para o produto) demonstra-se analogamente.

**Corolário 1.2** Se $a \equiv b \pmod{m}$ então para todo $n \geq 1$,

$a^n \equiv b^n \pmod{m}$ e $na \equiv nb \pmod{m}$

**Demonstração:** Vamos escrever a congruência $a \equiv b \pmod{m}$, *n* vezes e em seguida aplicaremos o corolário 4.1:

$$n \text{ vezes} \begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ a \equiv b \pmod{m} \\ \vdots \\ a \equiv b \pmod{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ vezes}} \equiv \underbrace{(b \cdot b \ldots b)}_{n \text{ vezes}} \bmod m$$

$$\Rightarrow \underbrace{a + a \ldots + a}_{n \text{ vezes}} \equiv \underbrace{(b + b \ldots + b)}_{n \text{ vezes}} \bmod m$$

Daí,

$$\Rightarrow a^n \equiv b^n \bmod m$$

$$\Rightarrow na \equiv nb \bmod m$$

Consideremos, então, a seguir uma forma de iniciar as bases desses importantes conceitos matemáticos no capítulo seguinte com o jogo proposto.

# 5. A PROPOSTA DIDÁTICA DO JOGO E SUA CONTEXTUALIZAÇÃO METODOLÓGICA.

Como proposta de ensino, neste capítulo, apresentaremos a construção e a execução do jogo dos ponteiros, suas respectivas regras e como podemos aplicá-lo em aula. Abordaremos também um passo a passo detalhado e traremos algumas sugestões de interação durante a implantação da atividade.

## 5.1. O jogo dos ponteiros e suas regras.

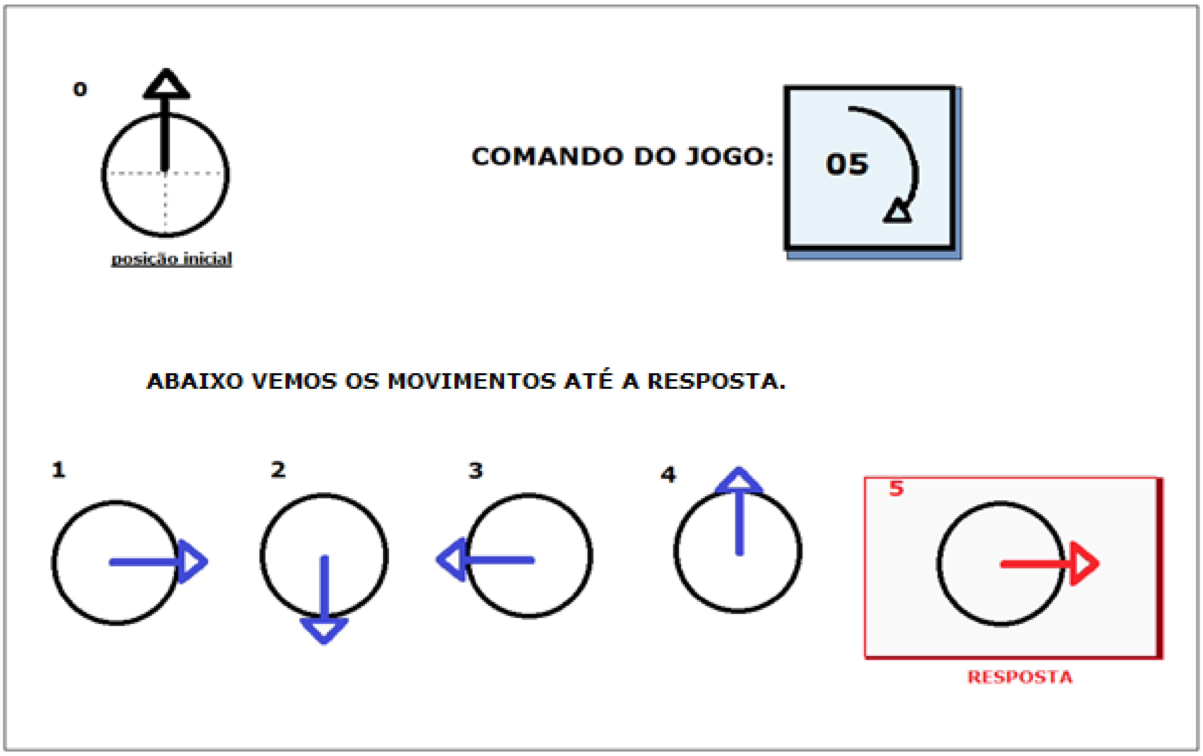
A execução do jogo é baseada na apresentação ao aluno de uma circunferência com marcações de divisões em partes iguais (quatro como no exemplo abaixo na Figura 5.1.), juntamente com um ponteiro indicando a posição inicial. Conjuntamente o aluno recebe um comando indicando quantas vezes deve movimentar o ponteiro nas marcações, como também o sentido, horário ou anti-horário, que deve ser empregado.

Figura 5.1. Comando do jogo.


Fonte: O autor.

A Figura 5.2 abaixo mostra os movimentos realizados e a posição final do ponteiro de acordo com o comando dado.

Figura 5.2. Partida exemplificativa.




Fonte: O autor.

O jogo tem regras simples e será reproduzido em folhas impressas e entregue aos alunos. Assim, a resolução será feita diretamente no local designado para cada partida. Seu funcionamento consiste em girar as posições pré-estabelecidas e indicar conforme os comandos de cada nível qual a posição final correta. Estes comandos de quantidade de giros e sentido serão apresentados na folha para respostas e o aluno poderá resolver os níveis após a explicação do professor. O conceito é baseado em ciclos que irão se repetir e os jogadores por sua vez deverão captar a lógica de cada aula e aplicar teorias e conceitos que serão contextualizados pelo professor. Inicialmente para conseguirmos chegar ao resultado basta uma soma unitária, onde o jogador irá mudando de posição em posição o "ponteiro" do jogo até que se chegue à resposta.

Contaremos com um total de nove "fases" e ao prosseguir para fases mais avançadas será necessário algumas estratégias por parte do aluno e assim alguns conceitos matemáticos (múltiplos, divisibilidade, subtrações, congruência modular, raciocínio lógico...) serão utilizados. Mais à frente no jogo mudaremos os comandos, mostrando que é possível fazer uma conversão de linguagem e abrir caminhos para uma visão mais ampla da matemática. É importante salientar que devido ao fato de o jogo ser desenvolvido para turmas do fundamental II e do ensino médio (conforme a singularidade e decisão de cada escola), utilizaremos a terminologia de “rounds” ao invés de usar o termo questões, pois assim o linguajar se assemelha mais com a faixa etária participante e também o aluno se afasta da ideia de aula e se aproxima da ideia de jogo. Na folha de respostas que o aluno irá trabalhar haverá uma ilustração da posição inicial para nortear o início de cada resolução, conforme veremos em uma partida explicativa na Figura 5.2.

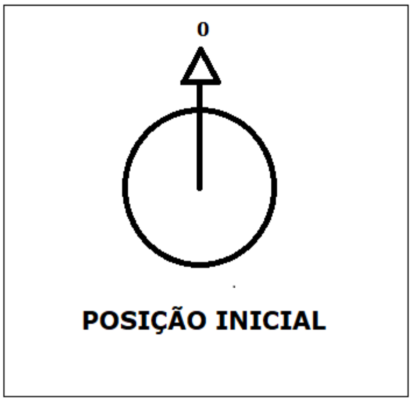
Esta proposta conta com a sugestão de três aulas, onde em cada aula traremos um foco específico diferente, dando assim maior sustentação ao aprendizado. Ficamos com o cronograma da seguinte forma:

- Aula 01: O funcionamento de ciclos e a divisibilidade por quatro;
- Aula 02: Introdução a congruência modular e o funcionamento dos restos;
- Aula 03: A congruência e incongruência modular.

### 5.1.1. A primeira aula e o início do jogo.

Iniciamos a aula apresentando as regras do jogo, onde sempre começamos da mesma posição inicial (“seta” apontada para cima), conforme demonstra a Figura 5.3 abaixo. O professor também poderá nomear a posição inicial como posição zero, pois facilitará contextualizações futuras.

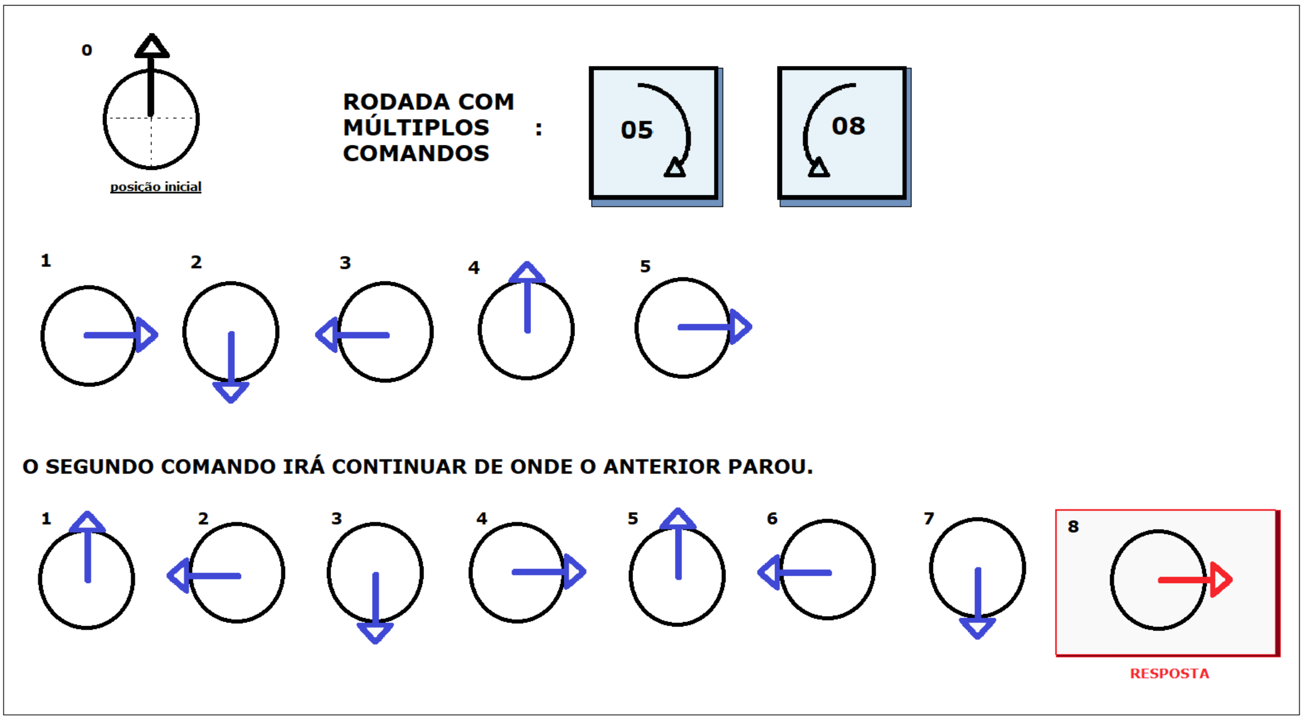
Figura 5.3. – Posição Inicial.




Fonte: O autor.

Ao final de cada nível o jogador irá escrever a posição final encontrada e posteriormente o professor apresentará a resposta. Agora para melhor compreensão, demonstraremos abaixo, novamente, uma partida até a conclusão da jogada. Os comandos são representados pelo quadrado azul, que mostram em que sentido a posição inicial irá se rotacionar e também por quantas posições, a figura 5.4 abaixo nos mostra uma rodada importante, pois nela existe mais de um comando e quando isso acontece iremos sempre iniciar um comando novo do local onde foi finalizado o antigo.

Figura 5.4 - Comandos múltiplos



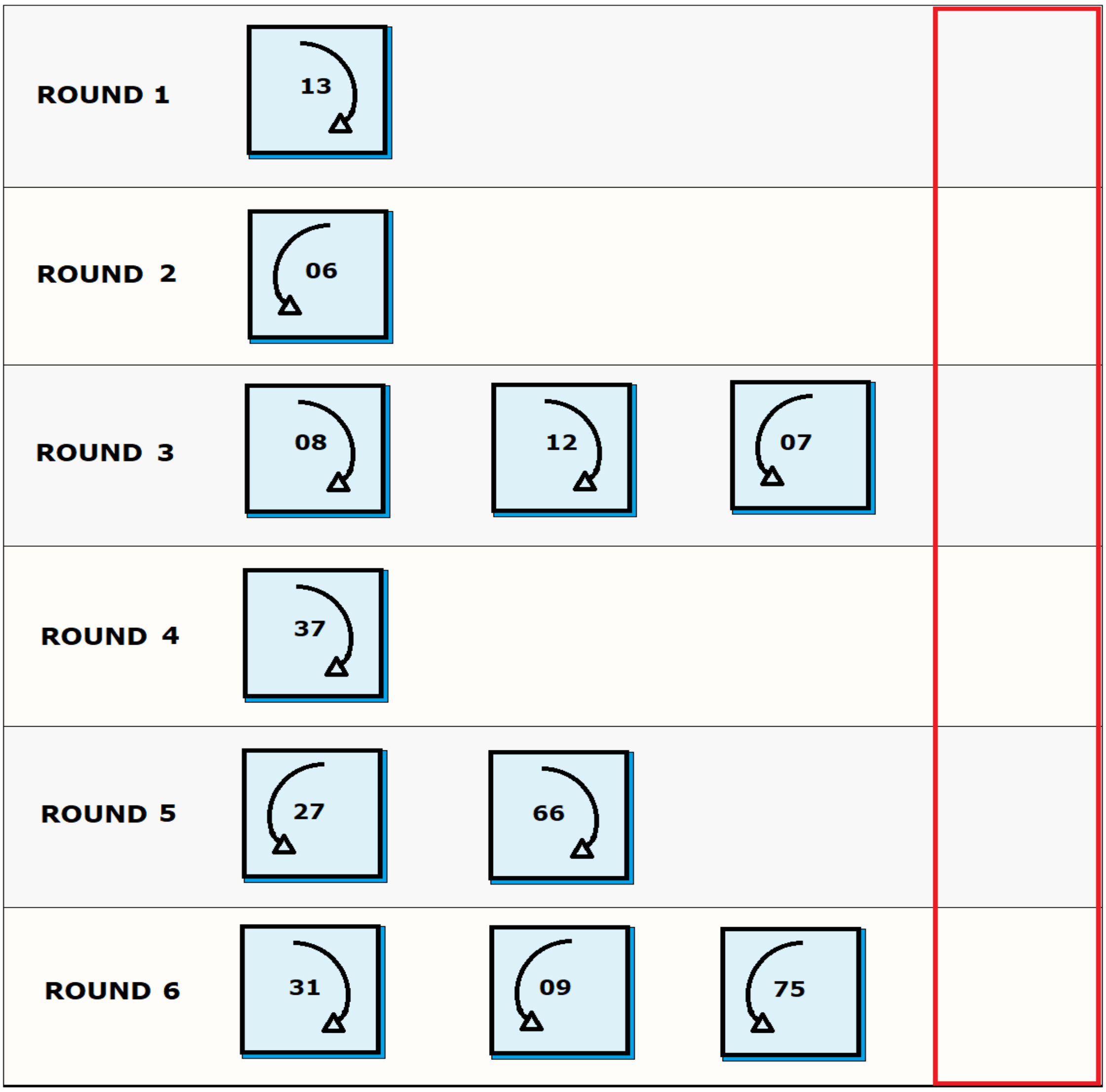

Fonte: O autor.

O professor ao apresentar as regras do jogo irá fazer a rodada exemplificativa com uma caneta ou lápis, girando para mostrar cada posição (contagem unitária) até que se chegue à resposta. Essa sugestão será um indutor para um modo de resolução mais arcaico (girar manualmente posição por posição), porém bastante visual e de fácil entendimento. O exemplo inicial trará também um ótimo comparativo, pois a velocidade de resolução deste método inicial não será mais aplicável em comandos com números maiores, sendo assim necessário a busca por novas resoluções. Demonstrando assim ao final da terceira aula como o conhecimento, a técnica e os estudos trazem facilidades e simplificações a problemas que outrora pareciam inviáveis.

Continuando com a aula sugerimos que o jogo seja feito em grupos, para que haja assim maior competição, empenho e transmissão de informação entre os participantes. Essa sugestão, porém, é opcional e pode ser acatada ou não por quem deseja implantar essa metodologia. O material em si dará ao aplicador essa flexibilidade de escolha.

Agora que as regras já foram apresentadas, e os participantes já se formaram iniciaremos a primeira fase do jogo. Nela teremos seis níveis (rounds) que apresentam pouca complexidade na resolução, estima-se devido a isso que podemos dar aos alunos um tempo de doze minutos para conclusão deste nível (sugestão). Abaixo temos o design de como o jogo será apresentado, demarcado em vermelho onde o espaço final deverá ser preenchido com a resposta, conforme exemplificado anteriormente.

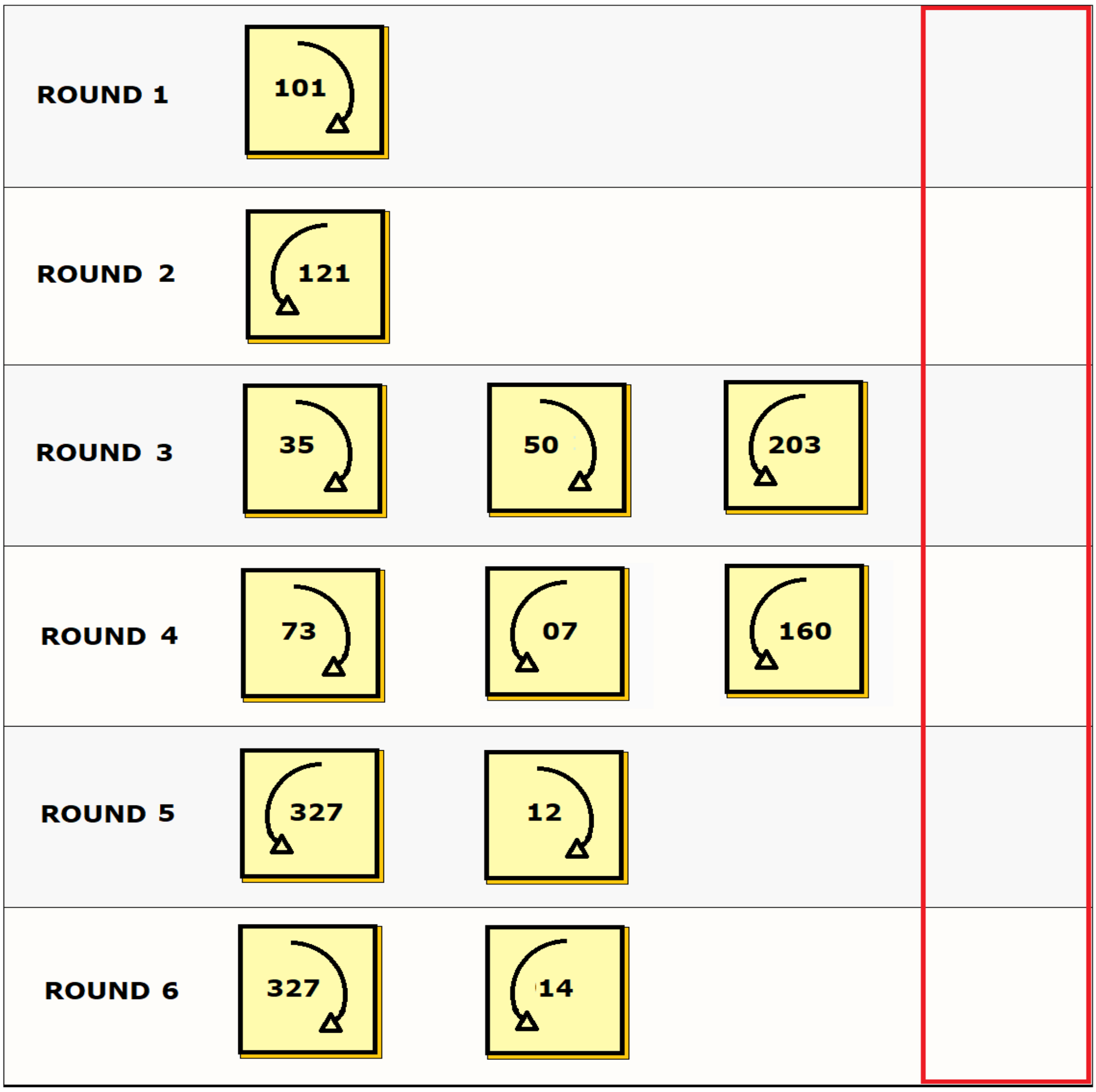
Figura 5.5.- Nível um.




Fonte: O autor.

Após os jogadores finalizarem o nível 1, o professor irá corrigir os resultados do jogo e apresentar as respostas, abrindo assim espaço para a entrega do próximo nível. Este apresentará um grau de dificuldade mediano, exigindo do aluno a busca para uma estratégia mais rápida de resolução. Neste momento o participante terá um tempo um pouco maior para buscar as próprias observações e o professor apresentará algumas dicas de abordagem. Segue abaixo na Figura 5.6  o nível dois e seus respectivos “rounds”.

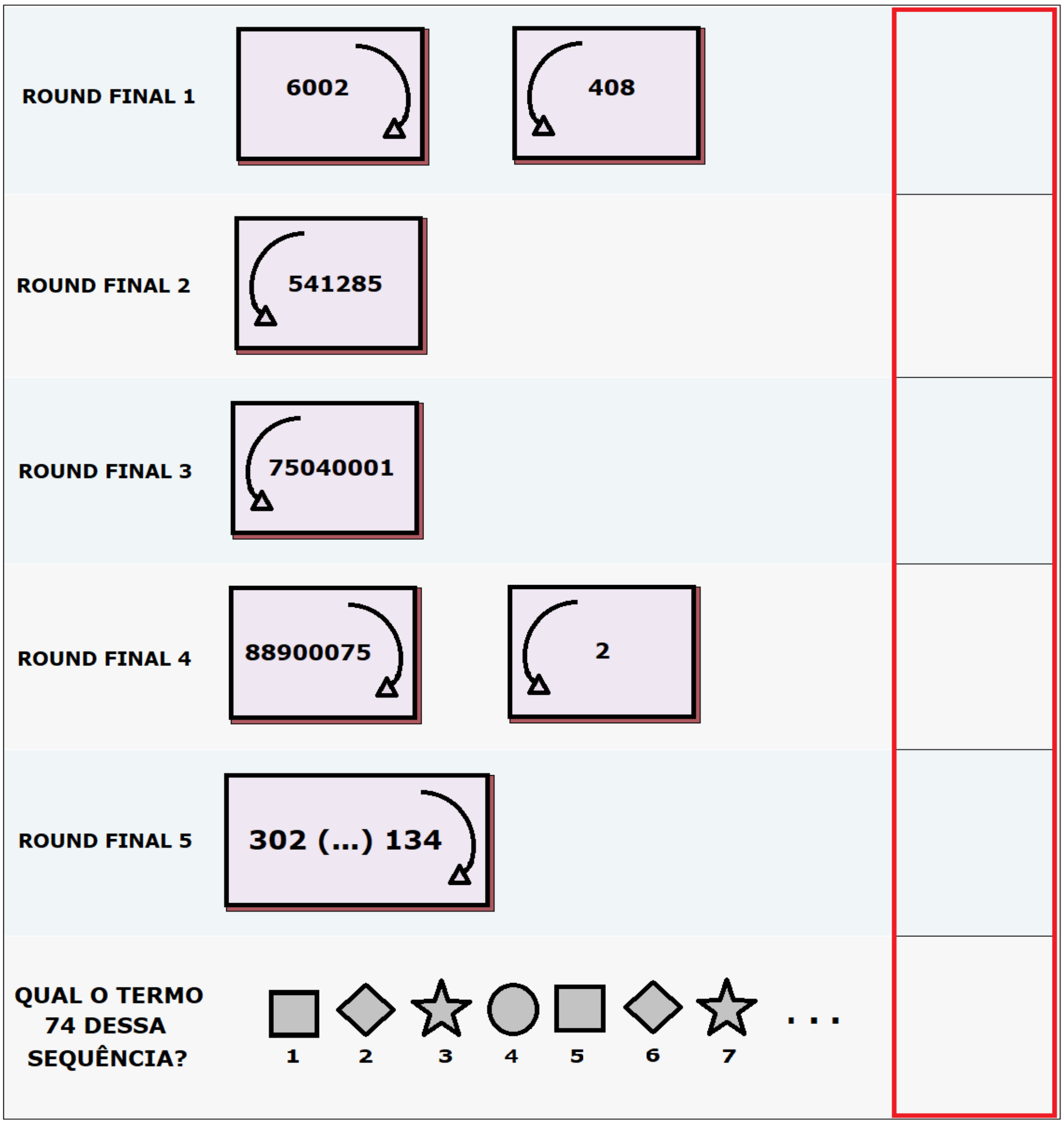
Figura 5.6. – Nível dois.




Fonte: O autor.

Novamente faremos a correção e apresentação das respostas, porém agora traremos métodos mais eficazes de resolução para que o aluno entre no próximo nível com maior bagagem do conteúdo. Apresentaremos o conceito de multiplicidade, mostrando que como o jogo possui quatro posições e em todos os múltiplos de quatro a posição do ponteiro será apontada para cima (no caso do movimento se iniciar da posição inicial). Agora após esta contextualização matemática iremos entregar o nível 03 do jogo com mais conhecimento e ferramentas para a resolução. Porém com uma estimativa de aula de 45 minutos (tempo de aula das escolas estaduais no estado de São Paulo) será sugerido para que os jogadores finalizem este nível em casa, podendo pesquisar mais sobre os Múltiplos, a Divisibilidade do número quatro.

Figura 5.7. - Nível três.




Fonte: O autor.

O objetivo ao final da primeira aula é que o estudante perceba que com o auxílio de ferramentas matemáticas é possível otimizar o tempo e a qualidade de uma solução. É importante também que ele contextualize o conceito de múltiplos, e que tente aplicar e ou pesquisar para fazer a atividade de casa com maior eficiência e assertividade. O professor pode mostrar ao aluno também que o jogo foi criado de uma forma gradativa, onde conforme os níveis vão passando o jogador se torna mais experiente e familiarizado com o mecanismo de funcionamento. Isso acontece em outros jogos, nos esportes e também na construção do conhecimento científico e o aluno ao jogar utiliza da observação dos acontecimentos, cria teorias, verifica o funcionamento, pesquisa, tira dúvidas e assim consegue aplicar seu desenvolvimento. Abaixo contamos com um resumo do que foi abordado na primeira aula e o tempo estimado das atividades, e apesar da liberdade do professor e da idiossincrasia de cada aula a Tabela 01 abaixo auxiliará como um modelo para organização.

**Tabela 1 – Cronograma para organização da Aula 01**

| Jogo dos ponteiros - Aula 01 | |
|---|---|
| Explicação das regras | 04 min |
| Demonstração com lápis ou caneta | 02 min |
| Formação de grupos (opcional) | 04 min |
| Entrega no nível 01 | 12 min |
| Correção do nível 01 | 01 min |
| Entrega no nível 02<br>Dicas durante o nível 02 | 15 min |
| Correção do nível 02 | 03 min |
| Entrega do nível 03 | 01 min |
| Sugestão de pesquisas e resoluções | 03 min |
| Tempo total estimado | 45 min |

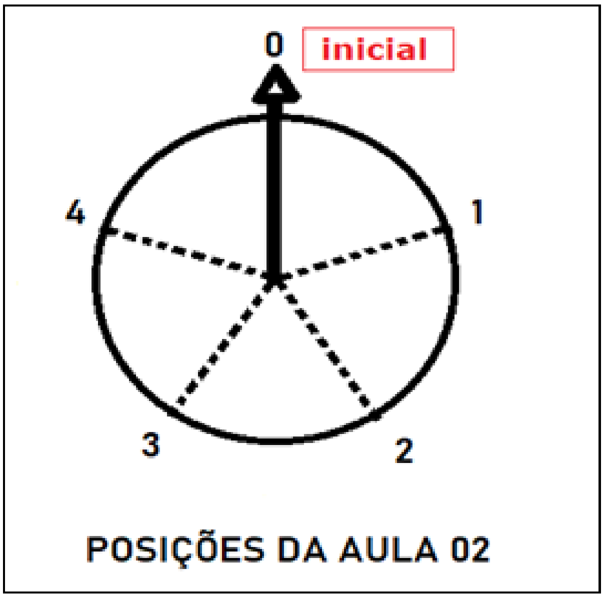
Fonte: O autor.

### 5.1.2. A segunda aula, novas linguagens e o uso dos restos.

Iniciando a aula dois, será feita a verificação de como os alunos fizeram e pesquisaram a respeito da atividade do nível 03, o professor também já poderá explicar os melhores métodos para as resoluções da atividade. Onde poderá demonstrar a importância da divisibilidade e da organização de padrões para contextos que vão muito além do jogo dos ponteiros. Neste momento seria importante mostrar que a ciência da matemática, baseia-se no manejo da ferramenta correta e que a beleza e a arte ficam em identificar quais os momentos mais adequados para a utilização do conhecimento.

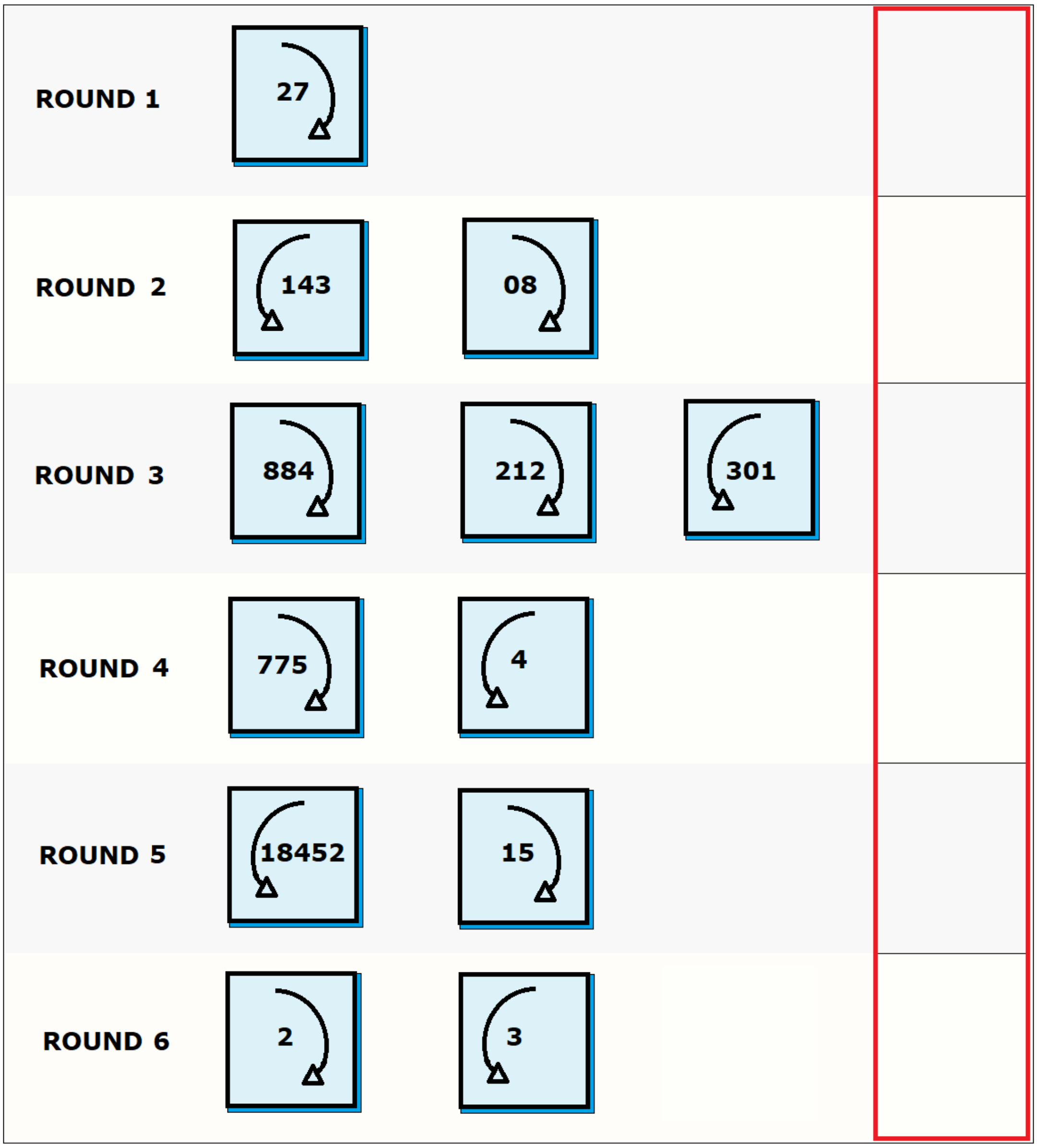
Após a introdução desta aula, os jogadores (ou grupo de jogadores) devem dar início ao nível 04 da atividade. Neste nível continuamos com as mesmas regras e a única mudança é que agora teremos cinco posições de rotação, conforme vemos na Figura 5.8. Aos alunos que captaram o aprendizado da primeira aula e a explicação introdutória teremos um nível com baixíssima dificuldade e o professor poderá utilizar o momento para motivar os alunos.

Figura 5.8. - Modelo dos ponteiros.




Fonte: O autor.

Figura 5.9. - Nível quatro.

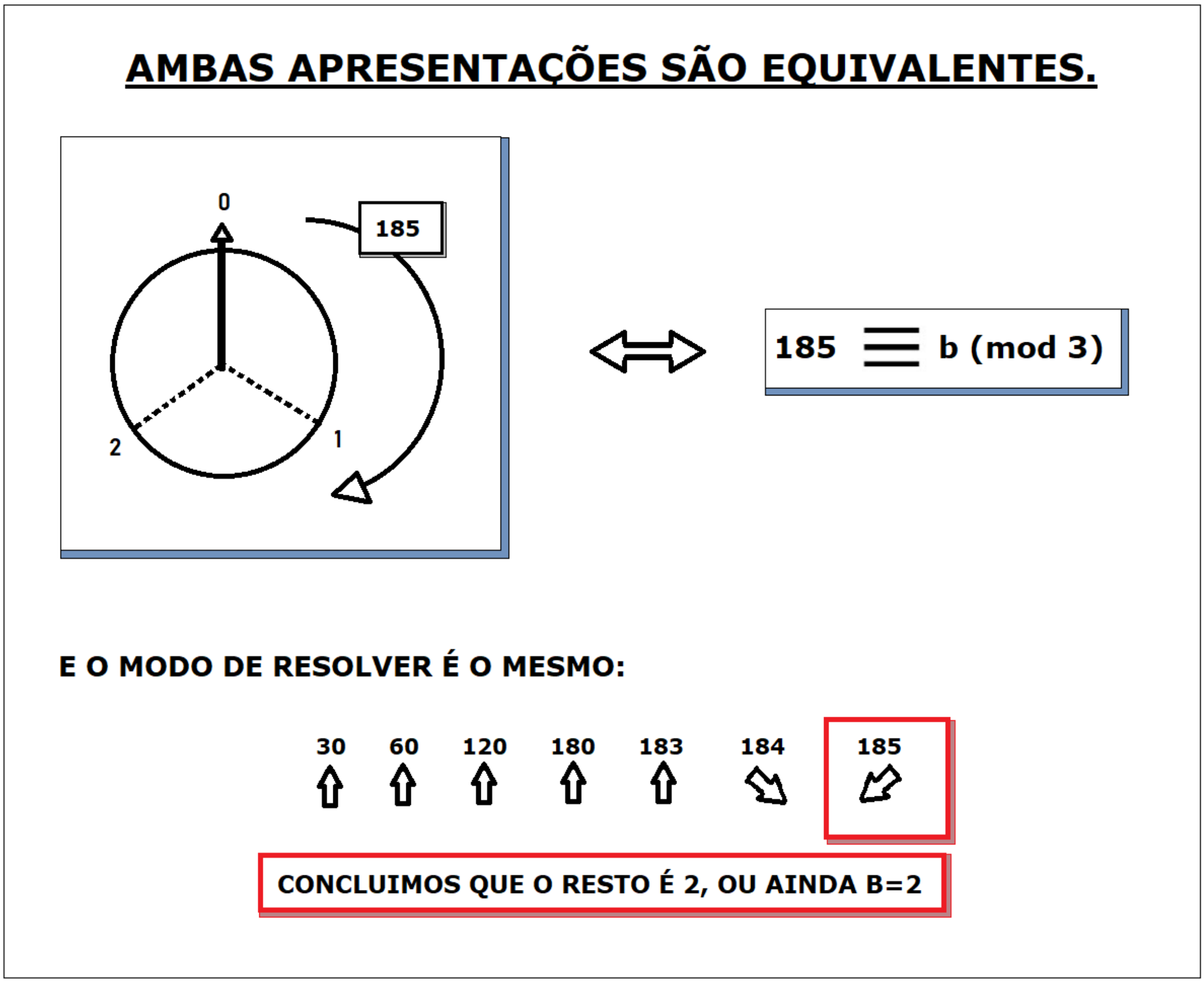



Fonte: O autor.

A correção deste nível será bastante rápida, pois a divisibilidade do cinco é bastante intuitiva, é importante também motivar e parabenizar os alunos que obtiveram bons resultados.

Agora para o próximo nível aplicaremos um pouco do “formalismo matemático” e faremos uma relação para que os alunos conheçam um pouco do significado da congruência modular. É importante salientar que a ferramenta resolutiva que possuímos é a mesma utilizada nos níveis anteriores e que apenas o formato (modo de apresentação do exercício) será outro. Abaixo, na Figura 5.10, contamos como uma explicação onde o professor poderá fazer comentários e se aprofundar a respeito das linguagens.

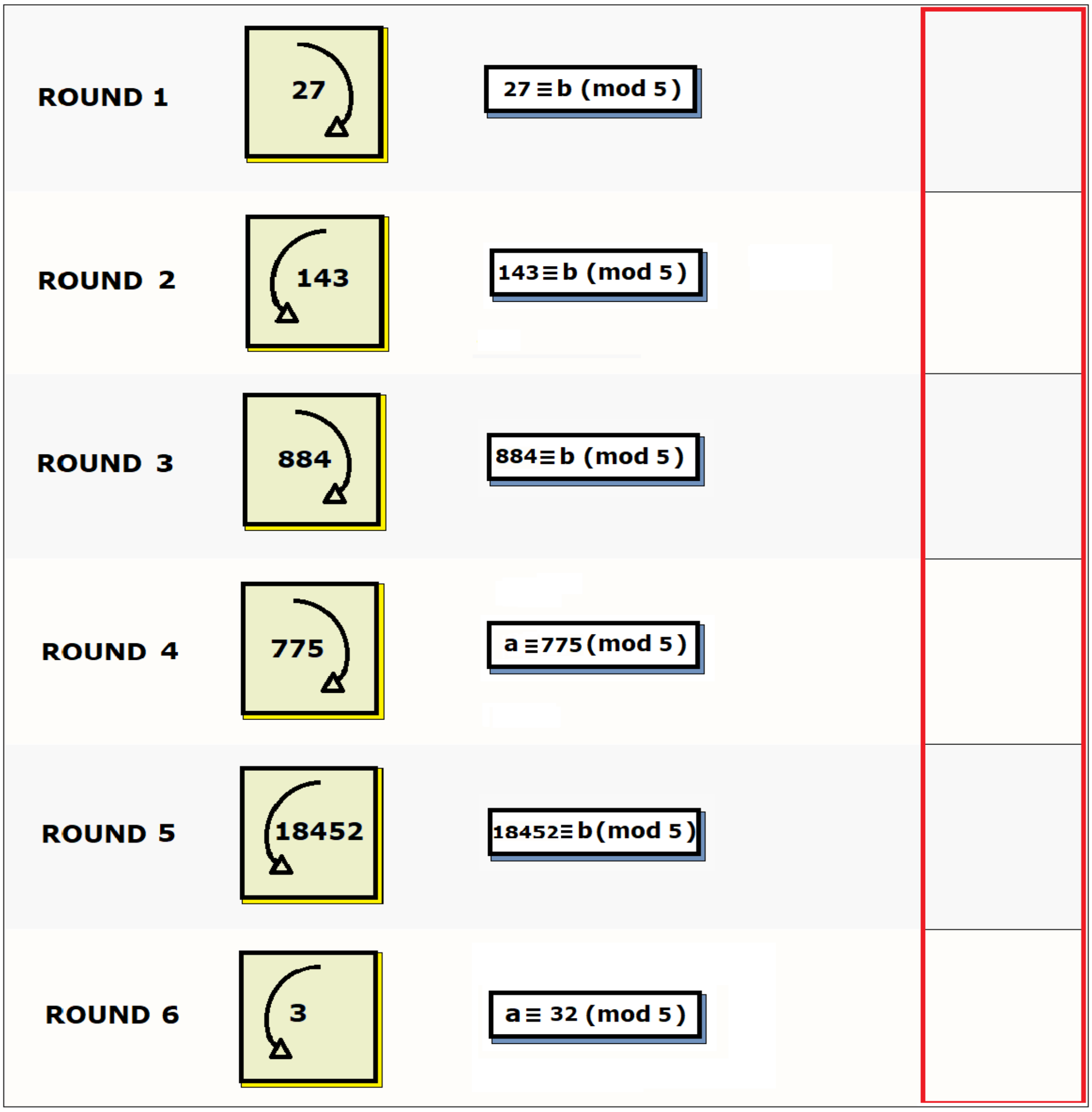
Figura 5.10. – Modelo para explicação.




Fonte: O autor.

Caso seja necessário pode-se abordar outros exemplos e demonstrar em explicações diversas como essas linguagens se conectam. E apesar da mudança nos comandos do jogo o nível 05 trará atividades de baixa complexidade, para que assim o jogador se familiarize com esta nova linguagem e consiga resolver tranquilamente essa fase da atividade. Pois bem, sigamos nas etapas dentro do jogo tendo abaixo a Figura 5.11, onde podemos aplicar a congruência conforme foi exemplificado.

Figura 5.11. – Nível cinco.

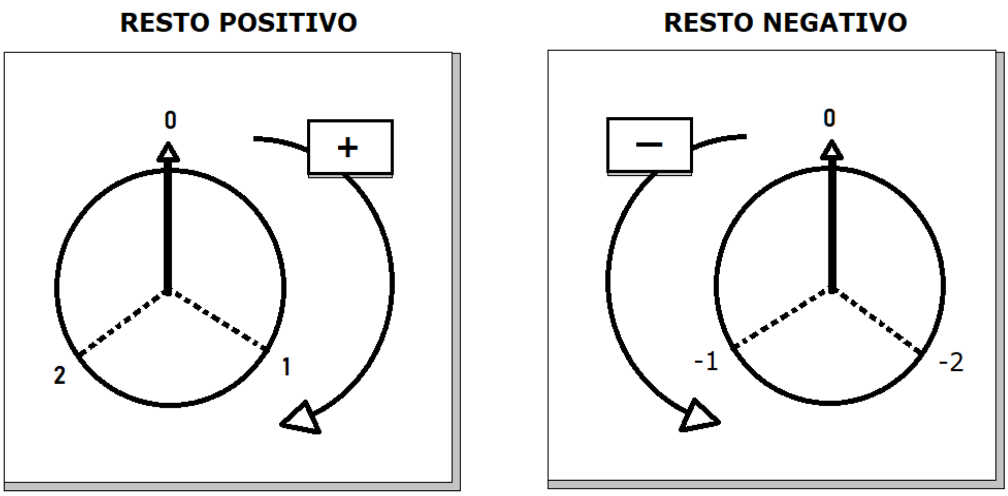



Fonte: O autor.

Durante a resolução desta atividade o professor poderá auxiliar caso algum jogador ainda não tenha compreendido essa nova linguagem. E ao finalizar, durante a correção, o professor poderá reexplicar caso perceba que alguns alunos tiveram dificuldade em converter a equivalência das linguagens. Neste nível, por questões de manter uma complexidade gradativa, ainda não foi explicado que o sentido do giro influencia no resto da divisão, fazendo com que na hora de passar as respostas alguns alunos acertem a posição, mas possivelmente, não o valor numérico. Pode-se dizer que é um erro proposital do jogo, para que posteriormente voltemos neste nível e façamos uma correção.  É uma forma muito comum dos jogos para que o aluno revisite um cenário munido de novas informações. Sendo assim aprenderá com mais contexto algo que inicialmente pode ter ficado nebuloso, basicamente uma revisão e aprofundamento concomitantes. Novamente traçamos um paralelo com o conhecimento científico, que está em constante evolução e muitas vezes acontece de ser revisto e aperfeiçoado.

Este nível possui uma contextualização Matemática com a Congruência Modular e mais a frente seguiremos com um mais etapas de como funcionam os restos de uma divisão no conjunto dos Inteiros. Abaixo, na Figura 5.12 mostramos o funcionamento dos restos positivos e negativos utilizando a configuração do jogo, assunto este que também é abordado também no ciclo trigonométrico, na reta numérica, em forças vetoriais e em muitas outras situações onde a direção pode influenciar valores.

Figura 5.12. - Restos positivos e negativos.




Fonte: O autor.

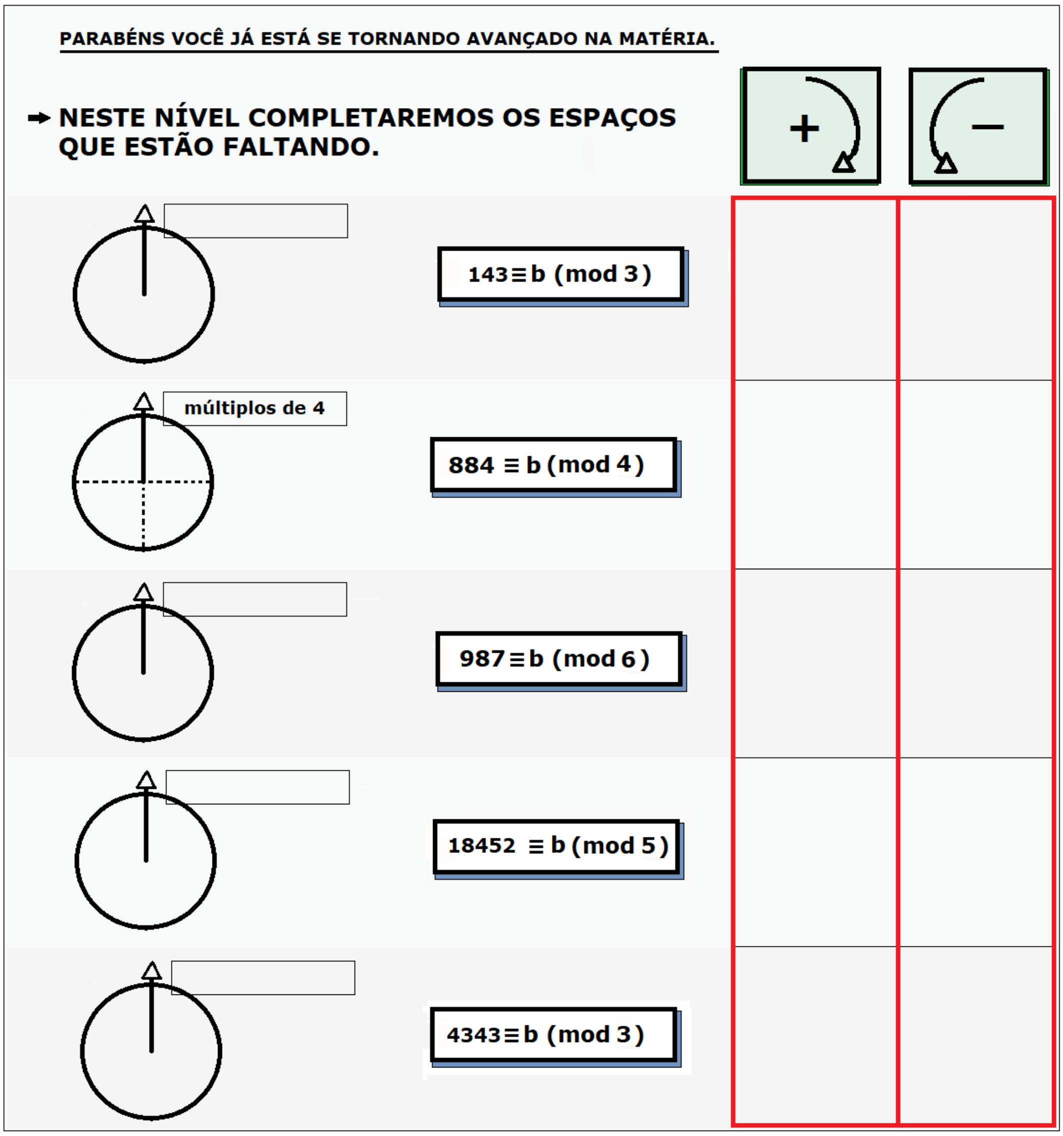
A rotação pode ser considerada com valores positivos quando o giro se dá no sentido horário e com valores negativos para o sentido anti-horário. E a partir da explicação do funcionamento dos restos de uma divisão na configuração do jogo, agora os comandos do jogo podem requisitar duas respostas, uma positiva e outra negativa (ambas congruentes) variando apenas pela quantidade de ciclos (quociente).

Um outro exemplo interessante que pode contextualizar essa parte da matéria aparece na seguinte história:

Imaginemos uma festa onde os participantes terão para se alimentar cada um a mesma quantidade de brigadeiros. Supondo que existam $6$ pessoas presentes e apenas $22$ brigadeiros, ficaremos com as seguintes conclusões: ou cada pessoa dispõe de $3$ brigadeiros e ficam sobrando $4$; ou compramos mais $2$ brigadeiros e todas as pessoas comem $4$ doces.

Podemos perceber que histórias como esta são comuns no dia a dia e que o sobrar e faltar significam respectivamente os restos positivos e negativos, pois bem, agora iremos entregar o próximo nível, que novamente sugerimos que seja feito de tarefa. Aqui cada “round” terá duas respostas, conforme verifica-se nos espaços vermelhos da figura abaixo; também será necessário completar as circunferências e apontar onde estarão os múltiplos, na Figura 5.13. apenas uma está preenchida e servirá de modelo.

Figura 5.13. - Nível seis.




Fonte: O autor.

Como a atividade é extra escolar o aluno poderá pesquisar o assunto e terá até a próxima aula para buscar a resolução correta. Novamente o professor poderá sugerir conteúdos de aprofundamento que envolvam o que foi abordado e que facilitem na tarefa. A outra atividade para casa será “corrigir” o nível 05, que já foi feito, porém agora podemos dar a resposta positiva, caso o giro seja feito no sentido horário e negativa para o sentido anti-horário. O objetivo da segunda será reforçar os conceitos da primeira aula e adentrar em novas perspectivas de entendimento da aritmética. Abaixo, na Tabela 2, ficamos com um resumo do que foi abordado na segunda aula e uma sugestão do controle temporal da aula.

**Tabela 2 – Cronograma para organização da aula 02.**

| Jogo dos ponteiros – Aula 02 | |
|---|---|
| Revisão e organização da sala | 08 min |
| Entrega do nível 04 | 07 min |
| Correção do nível 04 | 04 min |
| Explicação sobre congruência | 05 min |
| Entrega do nível 05<br>Dicas durante o nível 05 | 14 min |
| Correção do nível 05 | 02 min |
| Explicação dos restos | 04 min |
| Entrega do nível 06 | 01 min |
| Apresentação das tarefas | 03 min |
| Tempo total estimado | 45 min |

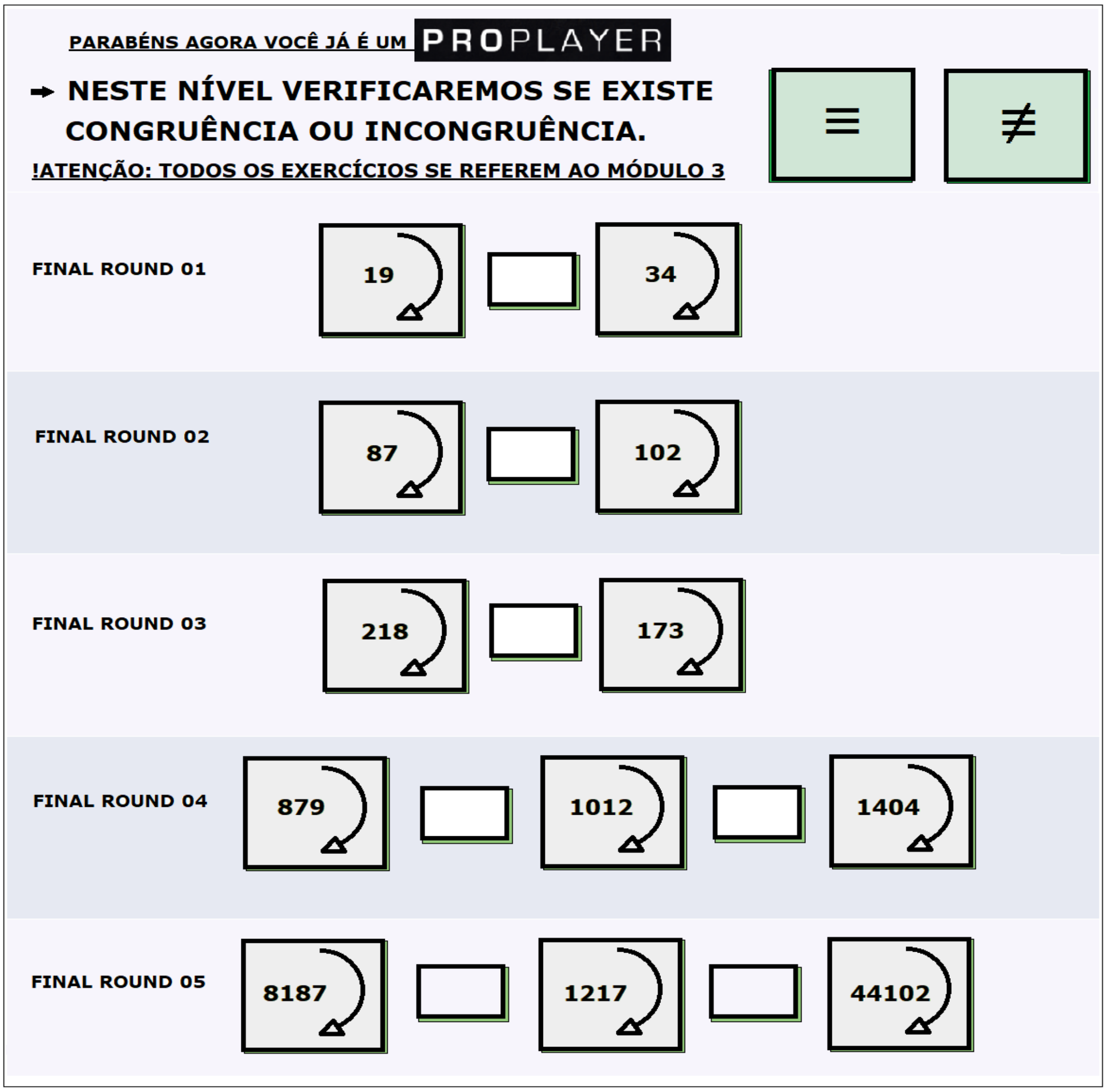
Fonte: autoria própria

### 5.1.3. A terceira aula, a congruência e a incongruência.

Nesta aula abordamos diferentes linguagens para verificar a existência da congruência ou incongruência no jogo. Iniciamos novamente com a correção da atividade enviada para resolução em casa, onde o professor poderá fazer comentários caso a assertividade tenha sido baixa. Pode-se também abrir uma rodada de perguntas retirando algumas possíveis dúvidas dos estudantes e fazer uma pequena revisão.

O nível sete do jogo irá requisitar do aluno que em cada “round” ele encontre os restos dos números dados, sendo assim, caso os restos forem iguais isso significa que são números congruentes (mesma posição final no giro), caso contrário serão números incongruentes (posições diferentes). Abaixo vemos que neste nível basta o jogador completar os espaços entre os números para finalizar esta etapa.

Figura 5.14. - Nível sete.

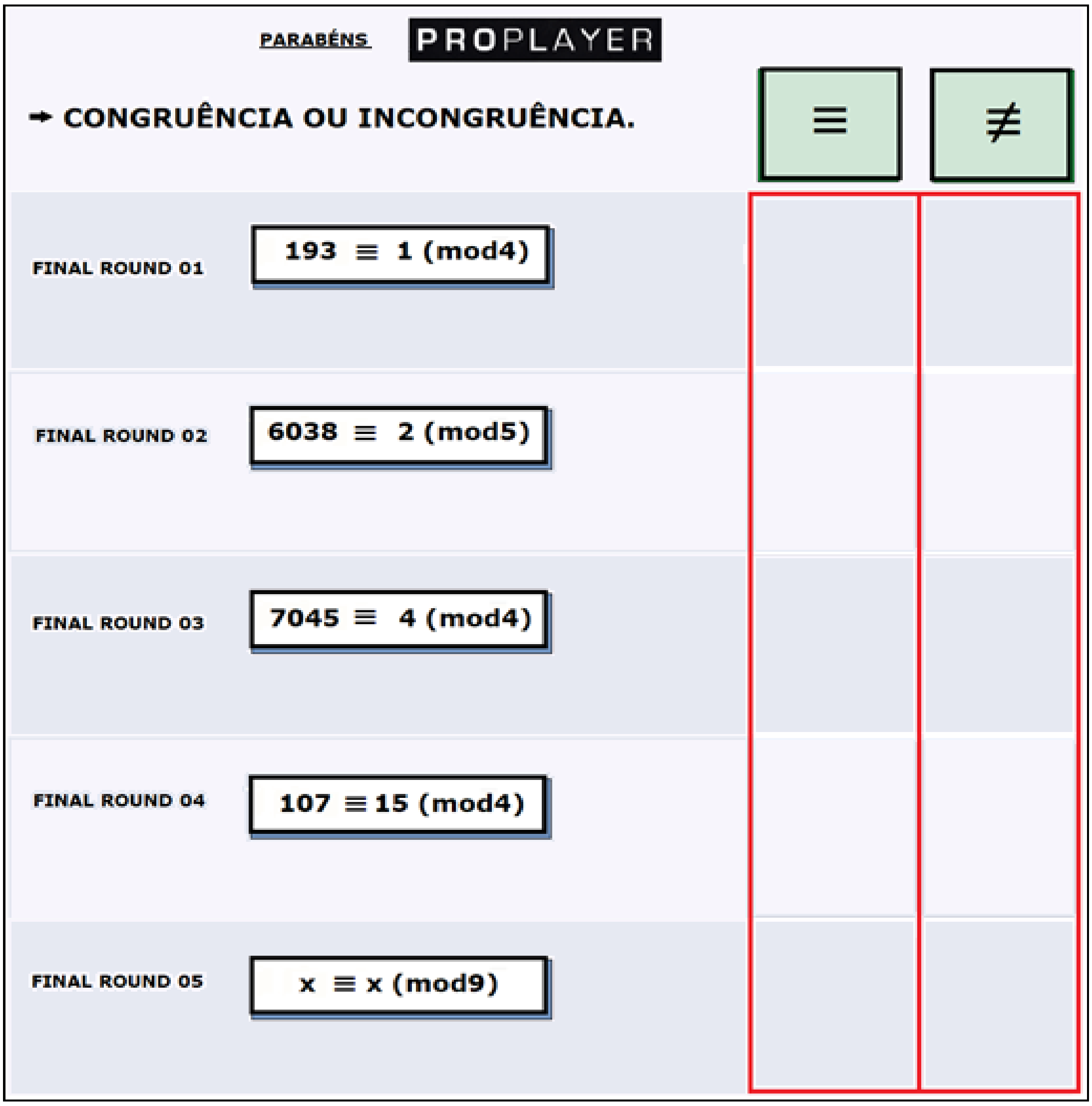



Fonte: O autor.

Retomamos na correção deste nível o conceito da divisibilidade por três e faremos a correção desta atividade contextualizada com esta revisão (soma dos algarismos ser múltiplo de três). Podemos corrigir também utilizando os múltiplos mais próximos do três (retirando/subtraindo os múltiplos conhecidos) e verificar quais os restos encontrados quando o número estiver suficientemente pequeno. Essa segunda opção de resolução é bastante ampla e poderá ser utilizada em diversos exercícios, não ficando restrita apenas ao módulo três.

Pois bem, agora com essas técnicas daremos ao aluno a oportunidade de uma nova rodada para reforçar e aplicar o que foi corrigido. Segue abaixo na Figura 5.14. o nível 08, onde apenas marcaremos se existe congruência ou incongruência com um verdadeiro e falso na coluna vermelha. Observamos que o design foi alterado, mas a técnica segue a mesma, buscando destacar assim a eficiência das técnicas e fazer com que os alunos se familiarizem com comandos diversos.

Figura 5.15 - Nível oito.

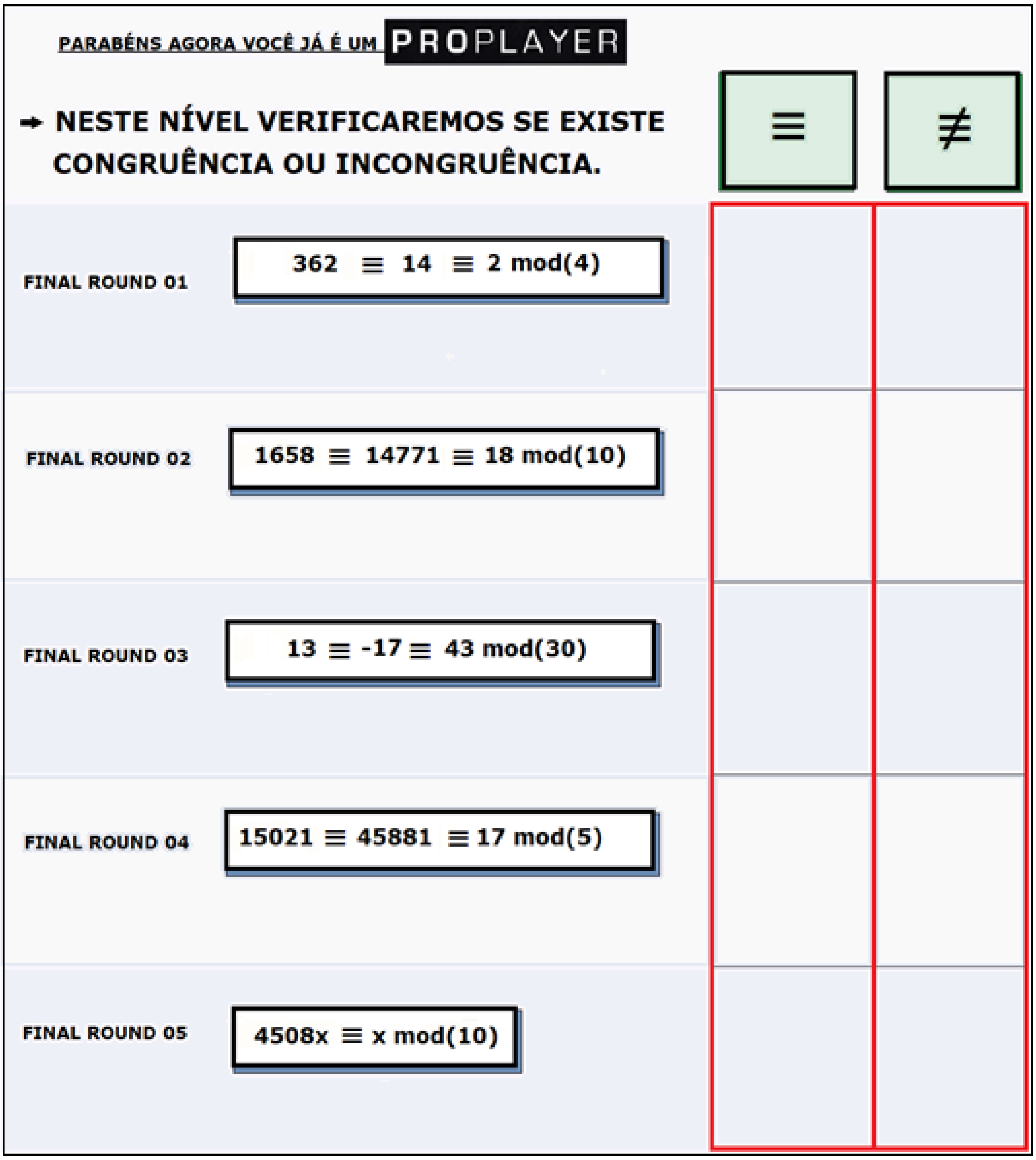



Fonte: O autor.

Esta resolução é bastante similar à do nível 07, apenas foi alterada a linguagem de como abordamos os comandos. Neste nível vemos também que podemos aplicar o conceito de múltiplos para diversos formatos de “relógios” (congruência módulo m). Após a correção e explicação do professor, é esperado que os alunos tenham adquirido um conhecimento básico de vários conceitos aritméticos e novamente enviamos a eles uma atividade para resolução em casa. O aluno recebeu no último nível uma excelente oportunidade para testar e reforçar as habilidades trabalhadas no decorrer destas aulas. Pois bem, no último nível temos um questionário que possibilita comentários a respeito da metodologia e também do que se aprendeu neste jogo, esse feedback do aluno poderá ser usado para reforçar possíveis dúvidas e para o aperfeiçoamento da metodologia. Sobre esse texto, devemos ressaltar a importância da melhoria contínua e também que o aluno é parte importantíssima do jogo da educação, portanto sua opinião sincera é de grande valia.

O nível 09 (Figura 5.16) será enviado juntamente com o questionário (Figura 5.17) e conforme o desempenho do aluno o professor assinará um certificado que demonstra que o aluno foi aprovado. Este certificado tem a finalidade de motivar e condecorar os alunos que conseguiram um bom desempenho no jogo, além de que será um paralelo com os tradicionais jogos de vídeo game que apresentam o fato que o aluno “zerou” (terminou) o jogo. Segue abaixo o modelo do nível 09 e também o certificado final na Figura 5.18.

Figura 5.16. - Nível nove.




Fonte: O autor.

Figura 5.17. - Questionário.

# JOGO DOS PONTEIROS

**NOS AJUDE A DESENVOLVER.**

**Como foi para você aprender matemática em um jogo?**

**Qual o nível mais difícil e qual o motivo?**

**Sugira alguma melhoria para aperfeiçoar o jogo.**

Fonte: O autor.

Figura 5.18. - Certificado do jogo.


Fonte: O autor.

Antes de concluir este tópico do capítulo de funcionamento do jogo, sugerimos mais uma vez o controle temporal para a aplicação da terceira aula. A tabela abaixo poderá ser completamente alterada conforme a finalidade que cada professor sentir.

**Tabela 3 – Cronograma para organização da aula 03.**

| Jogo dos ponteiros – Aula 03 | |
|---|---|
| Correção e revisão | 07 min |
| Entrega do nível 07 | 15 min |
| Correção e reforço na linguagem | 07 min |
| Entrega do nível 08 | 12 min |
| Dicas durante o nível 08 | 14 min |
| Explicação da atividade final | 03 min |
| Apresentação do certificado | 01 min |
| Tempo total estimado | 45 min |

Fonte: O autor.

## 5.2. A aplicação do Jogo dos ponteiros em sala de aula.

A proposta metodológica do ensino de conceitos aritméticos foi aplicada em uma escola estadual na cidade de Araçatuba, utilizamos a dinâmica do jogo dos ponteiros, em turmas do fundamental II e do ensino médio. Analisaremos aqui os resultados e as impressões dos alunos diante da metodologia do jogo e se a motivação e comportamento melhoraram.

### 5.2.1. Impressões e resultados dos alunos.

O jogo foi aplicado no fundamental II em turmas do sétimo e oitavo ano e os resultados foram bastantes satisfatórios. Em três aulas a média de acertos no sétimo ano foi de 78,9% e de 77,8% no oitavo ano, mostrando que pode ser aplicado em turmas de diferentes faixas etárias pois a assimilação ainda sim foi bastante boa. A aplicação no ensino médio foi para em uma turma do primeiro ano e a assimilação também se mostrou positiva, com uma média de 76% de acertos, o que parece demonstrar que alguns conceitos aritméticos simples não haviam sido bem compreendidos pelos alunos anteriormente. Mas felizmente com o decorrer das "fases" os estudantes melhoraram o desempenho e mostraram relembrar e assimilar bem os conteúdos um pouco mais complexos.

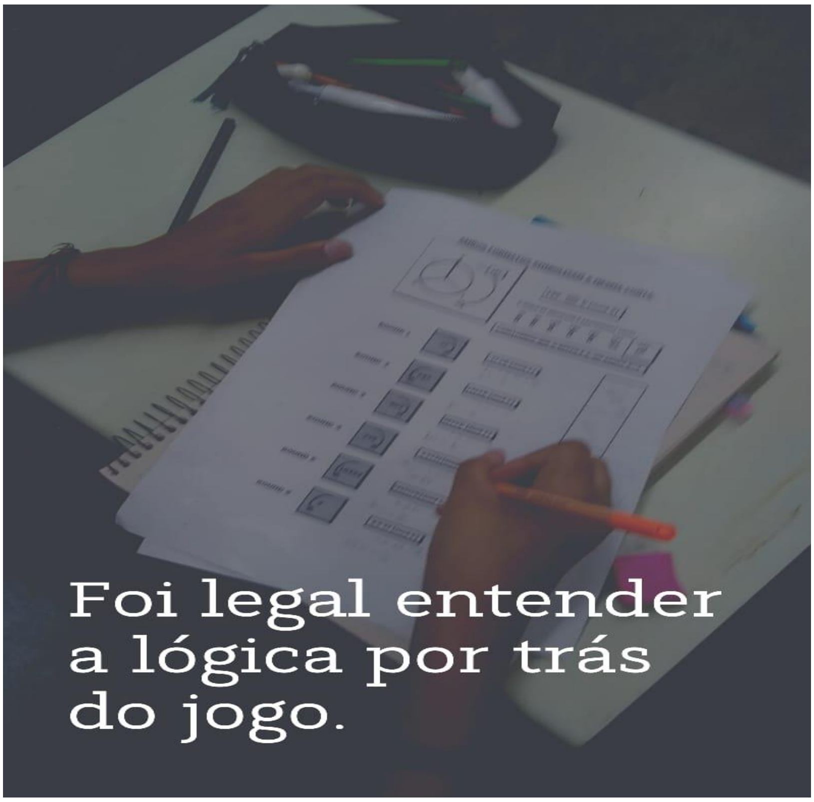
Durante a aplicação das aulas o professor titular da turma acompanhou os resultados e até durante algumas aulas participou de dentro da sala e viu o desempenho das turmas. Abaixo vemos os comentários dos professores titulares da escola onde o jogo foi aplicado:

**Professor Cleomar Insfran Santana:** A proposta do jogo foi bastante produtiva com os estudantes, sai um pouco do padrão das aulas e traz a ideia de um jogo. Um ponto interessante é que inicialmente tem baixa complexidade o que gera interesse e competitividade entre os alunos.

**Professor Celso Fioravanti Junior:** Eu gostei da didática do jogo, pois aprender uma atividade "brincando" desperta a curiosidade e facilita a compreensão. A atividade faz os alunos chegarem à solução de uma forma lúdica e agradável.

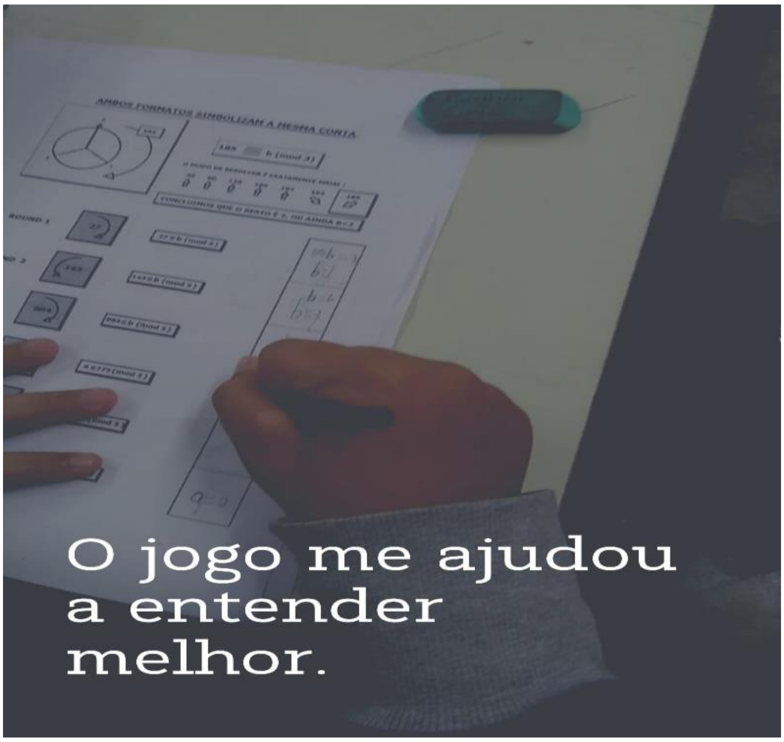
Após observarmos os comentários feitos pelos professores das turmas e também nos depararmos com a assertividade dos alunos, veremos agora as impressões dos alunos participantes do jogo nas figuras 5.19, 5.20, 5.21 e 5.22.

Figura 5.19. – Aluna a (07°ano).



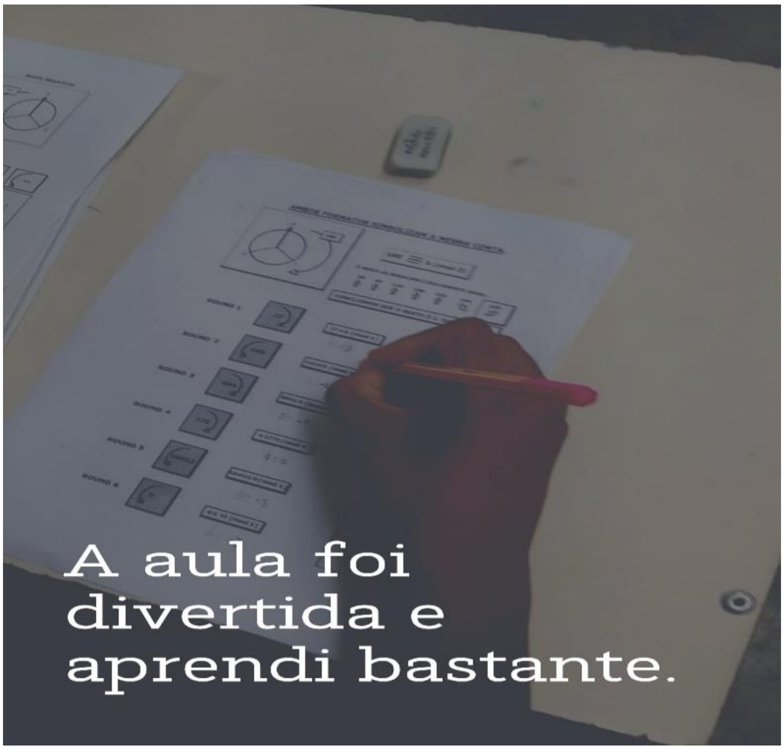

Fonte: O autor.

Figura 5.20.- Aluno b (08°ano).



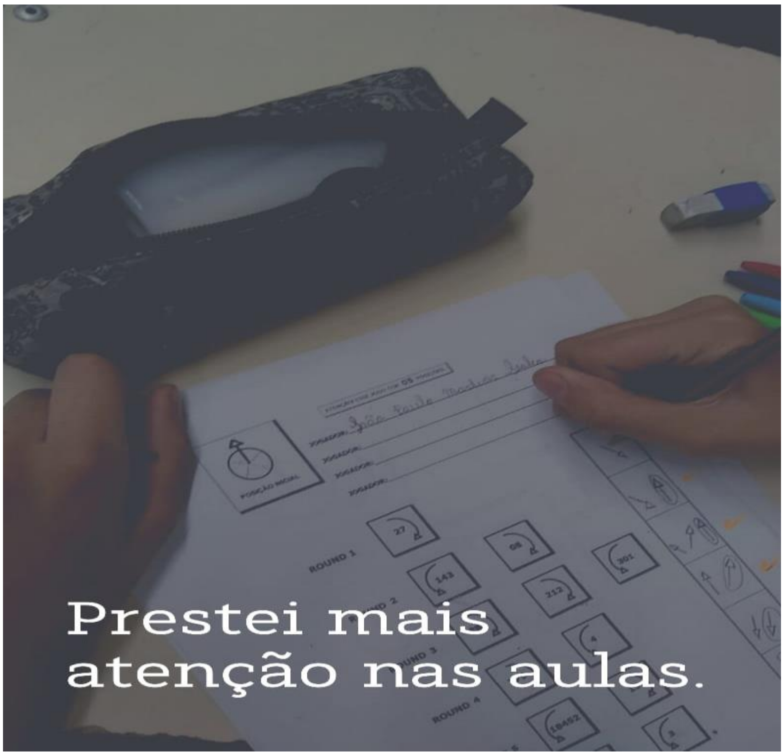

Fonte: O autor.

Figura 5.21. Aluno c (08°ano).




Fonte: O autor.

Figura 5.22. Aluno d (01°ano do médio).




Fonte: autoria própria.

Após as análises das estatísticas e comentários, observamos que os alunos tiveram um bom desempenho e realizaram a atividade com boa motivação, curiosidade e interesse. Adicionado a isso, o trabalhando traz consigo um importante tema da matemática curricular e fortalece uma base estrutural para os alunos continuarem avançando.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização de jogos tem se mostrado, de fato, um importante aliado para o ensino de Matemática, sendo o presente trabalho, uma contribuição para ilustrar como a resolução de problemas práticos podem ser solucionados, de maneira elegante e precisa, através de noções da Aritmética. Com efeito, a Aritmética torna-se uma ferramenta da Matemática crucial para compreender lógicas, padrões, facilitar processos e desenvolver bases para um conhecimento quase ilimitado. É uma das áreas mais utilizadas da matemática, nas atividades do dia a dia da humanidade. O professor ao compartilhar das ferramentas matemáticas com os alunos, possibilita encurtar caminhos para que se consiga visualizar o melhor direcionamento para o resultado. E assim ampliamos esses mecanismos em situações cotidianas (concretas e abstratas) para escolher dentre as soluções mais satisfatórias.

Com a experiência relatada neste trabalho, podemos concluir que a inserção de jogos atinge sua eficácia plena para o ensino, quando é capaz de evidenciar o problema enfrentado e a necessidade de sua resolução. Para que, de fato, os aprendizes possam apreciar a importância do conteúdo explorado frente ao problema apresentado. Estas condições, aliadas a dinâmica atrativa dos jogos, tende a ser uma combinação favorável para manter o interesse e atingir os objetivos propostos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ACADEMY, K. Use of Khan Academy and Mathematics Achievement. **Khan Academy**, Southern California, 2018. Disponível em: https://cdn.kastatic.org/downloads/2018_LBUSD_Efficacy_Study_Research_Brief.pdf .Acesso em: 12 jul. 2021.

JURMAN, N. Modelo de aprendizagem da Quest vinculado a ganhos de aprendizagem significativos. **Quest to Learn**, New York City, 2018. Disponível em: https://www.q2l.org/about/research/. Acesso em: 2 fevereiro. 2021

FADEL, L. M. et al. **Gamificação na educação.** São Paulo: Pimenta Cultural, 2014.

HAIDT, R. C. C. **Curso de didática geral**. 6. ed. São Paulo: Ática, 1999. (Série Educação).

HEFEZ, A. **Introdução a Aritmética**. Rio de Janeiro: Impa, 2010.

LOPES, M. da G. **Jogos na educação:** criar, fazer e jogar. São Paulo: Cortez, 2001.

MAIER, R. R. **Teoria dos números**, Brasília: Universidade de Brasília, 2005.

PAVÃO. C. G. Aprendizado de matemática no Brasil ainda precisa de melhorias. **UNIT**, Sergipe, 2021. Disponível em: https://portal.unit.br/blog/noticias/aprendizado-de-matematica-no-brasil-ainda-precisa-de-melhorias/. Acesso em: 14 set. 2021.

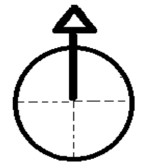
PIAGET, J. **A equilibração das estruturas cognitivas**: problema central do desenvolvimento. Rio de Janeiro: Zahar; 1976.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante**: relações lógico – aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Ed. Artes Médicas, 1995.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. Disponível em: https://www.fmcsv.org.br/pt-BR/biblioteca/brinquedos-brincadeiras-criancas-pequenas/?gclid=Cj0KCQjwl_SHBhCQARIsAFIFRVVOlEs8EYh5g1idwkxmfKXoF1lMP9V8pHgHEoiyWjY7nM3gRHDU4BYaApUaEALw_wcB. Acesso em: 05 junho. 2021.

WANIEWSKI. B. Meet the game designers who are on a quest to make nyc public school more fun. **Fast Company**, New York City, 2012. Disponível em: https://www.fastcompany.com/3003920/meet-game-designers-who-are-quest-make-nyc-public-school-more-fun. Acesso em: 08 ago. 2021.

# APÊNDICE A – Propostas da aula 01.



POSIÇÃO INICIAL

ATENÇÃO! ESSE JOGO TEM **04** POSIÇÕES.

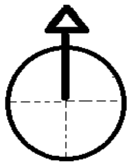
JOGADOR:______________________________

JOGADOR:______________________________

JOGADOR:______________________________

JOGADOR:______________________________

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **ROUND 1** | 13 | | | |
| **ROUND 2** | 06 | | | |
| **ROUND 3** | 08 | 12 | 07 | |
| **ROUND 4** | 37 | | | |
| **ROUND 5** | 27 | 12 | | |
| **ROUND 6** | 31 | 09 | 13 | |



POSIÇÃO INICIAL

ATENÇÃO! ESSE JOGO TEM **04** POSIÇÕES.

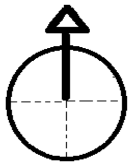
JOGADOR:________________________________________

JOGADOR:________________________________________

JOGADOR:________________________________________

JOGADOR:________________________________________

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **ROUND 1** | 101 | | | |
| **ROUND 2** | 121 | | | |
| **ROUND 3** | 35 | 50 | 203 | |
| **ROUND 4** | 73 | 07 | 160 | |
| **ROUND 5** | 327 | 12 | | |
| **ROUND 6** | 327 | 14 | | |



POSIÇÃO INICIAL

ATENÇÃO! ESSE JOGO TEM **04** POSIÇÕES.

JOGADOR:______________________________________

JOGADOR:______________________________________

JOGADOR:______________________________________

JOGADOR:______________________________________

| | | | |
|---|---|---|---|
| **ROUND FINAL 1** | 6002 | 408 | |
| **ROUND FINAL 2** | 541285 | | |
| **ROUND FINAL 3** | 75040001 | | |
| **ROUND FINAL 4** | 88900075 | 2 | |
| **ROUND FINAL 5** | 302 (...) 134 | | |
| **QUAL O TERMO 74 DESSA SEQUÊNCIA?** |  1 2 3 4 5 6 7 . . . | | |

APÊNDICE B – Propostas da aula 02.


ATENÇÃO! ESSE JOGO TEM **05** POSIÇÕES.

**JOGADOR:**________________________________________

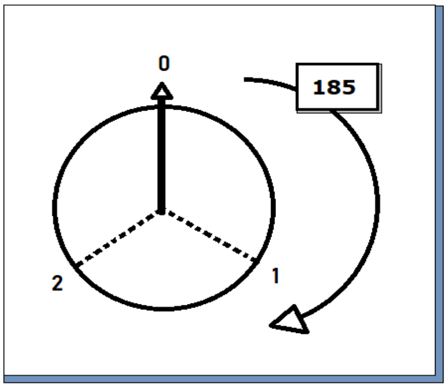
**JOGADOR:**________________________________________

**JOGADOR:**________________________________________

**JOGADOR:**________________________________________

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **ROUND 1** | 27 | | | |
| **ROUND 2** | 143 | 08 | | |
| **ROUND 3** | 884 | 212 | 301 | |
| **ROUND 4** | 775 | 4 | | |
| **ROUND 5** | 18452 | 15 | | |
| **ROUND 6** | 2 | 3 | | |

## AMBOS FORMATOS SIMBOLIZAM A MESMA CONTA.




$185 \equiv b \pmod 3$

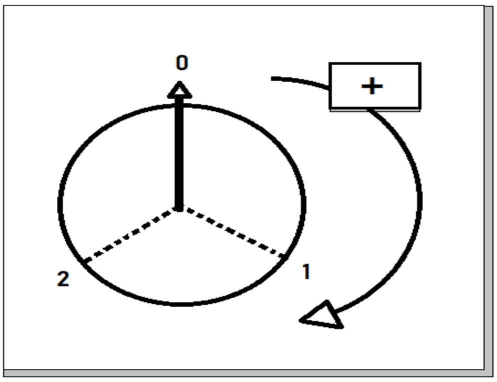
O MODO DE RESOLVER É EXATAMENTE IGUAL :

30 60 120 180 183 184 185

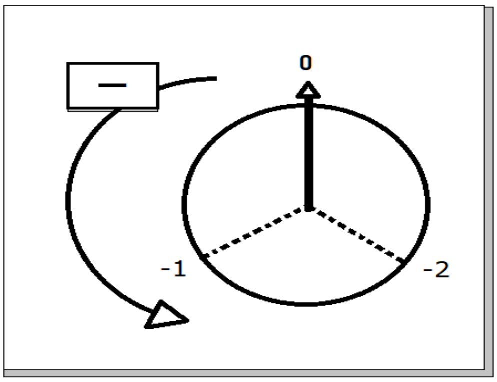
**CONCLUIMOS QUE O RESTO É 2, OU AINDA B=2**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ROUND 1 | 27 | $27 \equiv b \pmod 5$ | |
| ROUND 2 | 143 | $143 \equiv b \pmod 5$ | |
| ROUND 3 | 884 | $884 \equiv b \pmod 5$ | |
| ROUND 4 | 775 | $a \equiv 775 \pmod 5$ | |
| ROUND 5 | 18452 | $18452 \equiv b \pmod 5$ | |
| ROUND 6 | 3 | $a \equiv 32 \pmod 5$ | |

**RESTO POSITIVO**

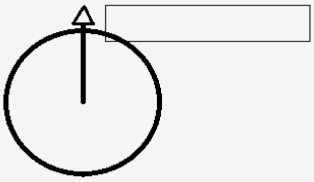



**RESTO NEGATIVO**

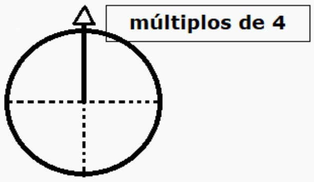



**PARABÉNS VOCÊ JÁ ESTÁ SE TORNANDO AVANÇADO NA MATÉRIA.**

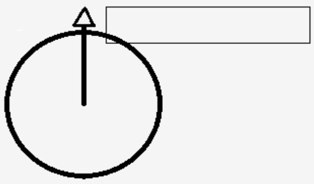
➡ **NESTE NÍVEL COMPLETAREMOS OS ESPAÇOS QUE ESTÃO FALTANDO.**



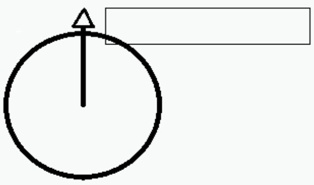
$143 \equiv b \pmod{3}$



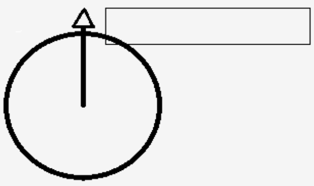

$884 \equiv b \pmod{4}$



$987 \equiv b \pmod{6}$

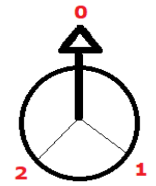


$18452 \equiv b \pmod{5}$



$4343 \equiv b \pmod{3}$

# APÊNDICE C – Propostas da aula 03.




POSIÇÃO INICIAL

ATENÇÃO! ESSE JOGO TEM **03** POSIÇÕES.

**PROPLAYER**

**JOGADOR:**________________________________________

**JOGADOR:**________________________________________

**JOGADOR:**________________________________________

**JOGADOR:**________________________________________

**PARABÉNS AGORA VOCÊ JÁ É UM PROPLAYER**

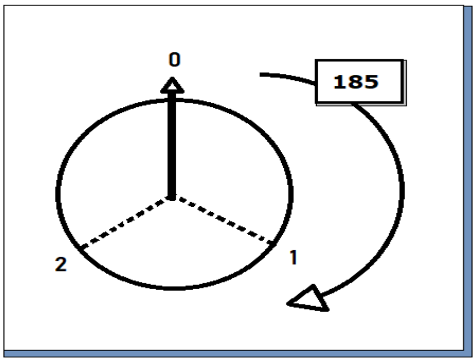
➡ **NESTE NÍVEL VERIFICAREMOS SE EXISTE CONGRUÊNCIA OU INCONGRUÊNCIA.**

**!ATENÇÃO: TODOS OS EXERCÍCIOS SE REFEREM AO MÓDULO 3**

$\equiv$ $\not\equiv$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **FINAL ROUND 01** | 19 | ☐ | 34 | | |
| **FINAL ROUND 02** | 87 | ☐ | 102 | | |
| **FINAL ROUND 03** | 218 | ☐ | 173 | | |
| **FINAL ROUND 04** | 879 | ☐ | 1012 | ☐ | 1404 |
| **FINAL ROUND 05** | 8187 | ☐ | 1217 | ☐ | 44102 |

## AMBOS FORMATOS SIMBOLIZAM A MESMA CONTA.




$$185 \equiv b \pmod{3}$$

**O MODO DE RESOLVER É EXATAMENTE IGUAL :**

**30 60 120 180 183 184 185**

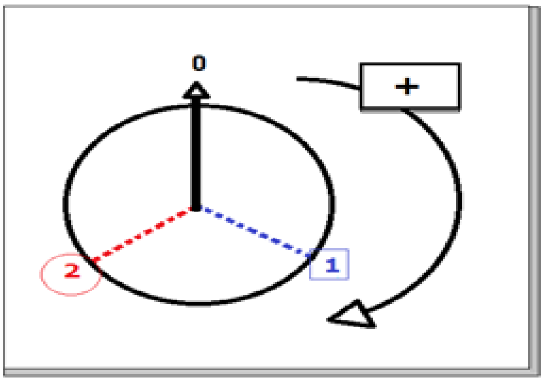
**CONCLUIMOS QUE O RESTO É 2, OU AINDA B=2**

**PARABÉNS AGORA VOCÊ JÁ É UM PROPLAYER**

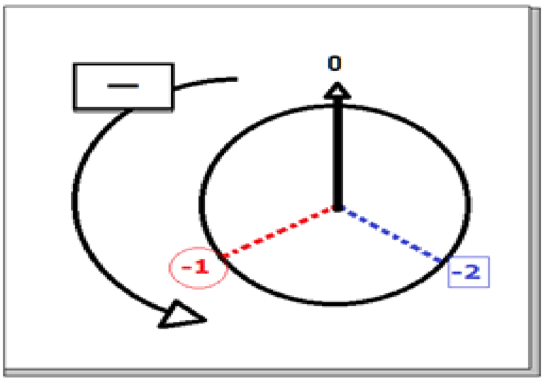
➡ **NESTE NÍVEL VERIFICAREMOS SE EXISTE CONGRUÊNCIA OU INCONGRUÊNCIA.**

| | | $\equiv$ | $\not\equiv$ |
|---|---|---|---|
| **FINAL ROUND 01** | $193 \equiv 1 \pmod{4}$ | | |
| **FINAL ROUND 02** | $6038 \equiv 2 \pmod{5}$ | | |
| **FINAL ROUND 03** | $7045 \equiv 4 \pmod{4}$ | | |
| **FINAL ROUND 04** | $107 \equiv 15 \pmod{4}$ | | |
| **FINAL ROUND 05** | $x \equiv x \pmod{9}$ | | |

**RESTO POSITIVO**




**RESTO NEGATIVO**




**conclusão:** $-1 \equiv 2 \pmod 3$ e $1 \equiv -2 \pmod 3$

*lembrar do módulo

PARABÉNS AGORA VOCÊ JÁ É UM **PROPLAYER**

→ **NESTE NÍVEL VERIFICAREMOS SE EXISTE CONGRUÊNCIA OU INCONGRUÊNCIA.**

| | | $\equiv$ | $\not\equiv$ |
|---|---|---|---|
| FINAL ROUND 01 | $362 \equiv 14 \equiv 2 \bmod(4)$ | | |
| FINAL ROUND 02 | $1658 \equiv 14771 \equiv 18 \bmod(10)$ | | |
| FINAL ROUND 03 | $13 \equiv -17 \equiv 43 \bmod(30)$ | | |
| FINAL ROUND 04 | $15021 \equiv 45881 \equiv 17 \bmod(5)$ | | |
| FINAL ROUND 05 | $4508x \equiv x \bmod(10)$ | | |

# APÊNDICE D – Gabaritos para correção.

| G A B A R I T O | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | NÍVEL 01 | NÍVEL 02 | NÍVEL 03 | NÍVEL 04 | NÍVEL 05 | |
| ROUND 1 | → | → | ↓ | ↘ | ↘ | 2 |
| ROUND 2 | ↓ | ← | ← | ↑ | ↘ | 2 |
| ROUND 3 | → | ↓ | ← | ↑ | ↖ | 4 |
| ROUND 4 | → | ↓ | → | ↗ | ↑ | 0 |
| ROUND 5 | ← | → | ↓ | ↙ | ↙ | -3 |
| ROUND 6 | ← | → | ◇ | ↖ | ↘ | -2 |

| G A B A R I T O | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | NÍVEL 06 | NÍVEL 07 | NÍVEL 08 | NÍVEL 09 |
| ROUND 1 | 2 -1 | $\equiv$ | $\equiv$ | $\equiv$ |
| ROUND 2 | 0 0 | $\equiv$ | $\not\equiv$ | $\not\equiv$ |
| ROUND 3 | 3 -3 | $\equiv$ | $\not\equiv$ | $\not\equiv$ |
| ROUND 4 | 2 -3 | $\not\equiv$ $\not\equiv$ | $\equiv$ | $\not\equiv$ |
| ROUND 5 | 2 -1 | $\not\equiv$ $\equiv$ | $\equiv$ | $\equiv$ |