UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RENAN GUSTAVO ARAÚJO DE LIMA

ENGENHARIA DIDÁTICA EM UM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA: UM ESTUDO COM UMA PROFESSORA DE MATEMÁTICA

CAMPO GRANDE – MS
2021

RENAN GUSTAVO ARAÚJO DE LIMA

ENGENHARIA DIDÁTICA EM UM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA: UM ESTUDO COM UMA PROFESSORA DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

CAMPO GRANDE – MS

2021

RENAN GUSTAVO ARAÚJO DE LIMA

ENGENHARIA DIDÁTICA EM UM PROCESSO DE FORMAÇÃO CONTINUADA: UM ESTUDO COM UMA PROFESSORA DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Doutor em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

Campo Grande – MS, 01 de setembro de 2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
Universidade Federal do Pernambuco – UFPE

Profa. Dra. Veridiana Rezende
Universidade Estadual do Paraná – UNESPAR

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Profa. Dra. Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

DEDICATÓRIA

A todos que me apoiaram ao longo dessa jornada,

em especial, minha linda Jhenifer e o pequeno Eduzinho.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por não deixar faltar saúde ao longo dessa caminhada, que está ainda em construção.

À minha esposa Jhenifer, pelo amor irrestrito, apoio e companheirismo estando sempre ao meu lado.

Aos meus pais Antônio e Veranei, que sempre se dedicaram para me oportunizar condições para me dedicar aos estudos. Essa conquista também é de vocês.

À Tatiani pela parceria, conversas e ajudas em todos os momentos. Foi uma amiga que esse espaço acadêmico que me concedeu para a vida.

Ao professor José Luiz, que me acompanhou ao longo dessa minha trajetória acadêmica, até esse momento: graduação, mestrado e doutorado. Tenho certeza que terei oportunidade de continuar aprendendo contigo em novos momentos.

À professora Marilena, que desde o PIBID me acompanha e ajuda sempre que necessário. Sinto-me grato de poder trabalhar contigo e aprender cada vez mais.

Às professoras Paula, Sônia e Veridiana, pela leitura minuciosa e contribuições para o crescimento dessa pesquisa.

Aos integrantes do DDMat, pelos momentos de estudos, discussões, conversas e descontrações. Sinto que o grupo representa um espaço de compartilhamento e crescimento, tanto pessoal quanto profissional.

RESUMO

A presente investigação tem como objetivo geral analisar conhecimentos de uma professora de Matemática que participa de um processo de formação continuada pautado nas etapas da Engenharia Didática. Para isso, tomamos como base pesquisas que versam sobre o processo de formação continuada, que apresentam críticas nas ações que não levam em consideração a realidade do professor e a ausência do mesmo durante o processo de concepção da formação, para a proposição de um processo formativo que buscasse superar possíveis dificuldades. Como aporte teórico da pesquisa utilizamos a Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud, que fornece um quadro teórico acerca do desenvolvimento cognitivo do sujeito diante das situações propostas, em especial as ideias de conhecimentos operatórios e predicativos do sujeito e conhecimentos em ação. Além disso, pautamo-nos na Engenharia Didática que utilizamos como aporte no desenvolvimento dos momentos da formação proposta, a partir das fases que a compõe. Nesse sentido, propusemos um curso de extensão para os professores de Matemática do município de Coxim – MS, com o intuito de realizar um processo formativo que estivesse pautado nas fases que compõem a metodologia de pesquisa da Engenharia Didática. O curso de extensão, que teve a participação de uma professora de Matemática que lecionava em turmas do 6º ao 9º, foi desenvolvido em 14 encontros, com periodicidade semanal, no 2º semestre de 2018. Considerando as necessidades e interesse da docente, foram trabalhados os temas de frações, números decimais, sistemas de equações do 1º grau e relações métricas na circunferência. Para cada tema percorremos os momentos que constituem a Engenharia Didática, realizando o estudo preliminar do tema, elaboração e análise *a priori* da sequência didática, a experimentação e a análise *a posteriori* e a validação da sequência. Realizamos essa organização pois acreditamos que durante os encontros seria possível perpassar por situações que contribuíssem para a formação da professora, tanto em aspectos matemáticos, quanto didáticos. Os dados analisados na pesquisa foram oriundos das gravações de áudio e o diário de bordo dos encontros, além dos planejamentos da professora. Em nossas análises evidenciamos que a professora manifestava, com frequência, a forma operatória do conhecimento, com a mobilização de procedimentos e algoritmos de resolução diante das situações propostas. Entretanto, ao tentar justificar essas estratégias, ela tinha dificuldade em relacionar propriedades, relações e justificativas envoltas na situação, componentes da forma predicativa do conhecimento. Nesse sentido, durante os encontros houve situações que desestabilizaram os conhecimentos matemáticos docente, levando-a a momentos de reflexão, possibilitando a construção de conhecimentos. Em relação aos conhecimentos didáticos, verificamos que a docente mobilizava alguns elementos relacionados à ênfase de situações que privilegiavam o uso de técnicas de resolução, além de acreditar que seus alunos necessitavam de sua ajuda para a resolução das atividades, de modo que modelamos esses conhecimentos como conhecimentos em ação didáticos. No decorrer do processo formativo, a professora se deparou com situações, como a análise *a posteriori* das atividades, que a levaram a repensar suas escolhas, apresentando vestígios de novos conhecimentos didáticos. Por fim, destacamos o uso da Engenharia Didática no processo de formação continuada de professores, apresentando alguns limites do contexto profissional que dificultam o trabalho, como a necessidade de seguir o cronograma e calendário escolar, e potencialidades, das quais destacamos a utilização de elementos da Engenharia Didática durante o trabalho do professor, como os preceitos da análise *a priori* e posteriori.

Palavras-chave: Formação continuada. Conhecimento matemático. Conhecimento em ação didático. Conhecimentos operatórios. Conhecimentos predicativos.

ABSTRACT

This investigation has the general objective of analyzing the knowledge of a Mathematics teacher who participates in a process of continuing education based on the Didactic Engineering stages. For this, we considered as a base researches that deal with the process of continuing education, which present criticisms in actions that don't take into account the reality of the teacher and his or her absence during the process of conception of formation, for the proposition of a formative process that sought to overcome possible difficulties. As a theoretical basis to the research, we used the Theory of Conceptual Fields proposed by Vergnaud, which provides a theoretical framework about the individual's cognitive development in the face of the proposed situations, especially the ideas of the operative knowledge and predicatives of subject and knowledge in action. Besides, we were guided by the Didactic Engineering that we used as a contribution in the development of the moments of the proposed training, starting from the phases that compose it. In this sense, we proposed an extension course for Mathematics teachers in the city of Coxim - MS, in order to execute a training process that was guided by the phases that compose the Didactic Engineering research methodology. The extension course, which had the participation of a Mathematics teacher who taught in classes from the 6th to the 9th, was developed in 14 meetings, weekly, in the 2nd semester of 2018. Considering the needs and interest of the teacher, the topics covered were fractions, decimal numbers, systems of equations of the 1st degree and metric relations in the circumference. For each topic, we went through the moments that constitute Didactic Engineering, carrying out the preliminary study of the theme, elaboration and *a priori* analysis of the didactic sequence, the experimentation and *a posteriori* analysis and the validation of the sequence. We organized like this, because we believed that during the meetings it would be possible to go through situations that contributed to the formation of the teacher, both in mathematical and didactic aspects. The data analyzed in the research came from audio recordings and the meeting logbook, in addition to the teacher's plans. In our analysis, we showed that the teacher frequently manifested the operative form of knowledge, with the mobilization of procedures and resolution algorithms in the face of the proposed situations. However, when trying to justify these strategies, she found it difficult to relate properties, relationships and justifications involved in the situation, components of the predicative form of knowledge. In this sense, during the meetings, there were situations that destabilized the mathematical knowledge of the teacher, leading her to moments of reflection, enabling the construction of knowledge. In relation to didactic knowledge, we found that the teacher mobilized some elements related to the emphasis of situations that favored the use of resolution techniques, in addition to believing that her students needed her help to solve the activities, so that we model this knowledge as didactic knowledge in action. During the formative process, the teacher was faced with situations, such as *a posteriori* analysis of the activities, which led her to rethink her choices, showing traces of new didactic knowledge. Finally, we highlight the use of Didactic Engineering in the process of continuing education for teachers, presenting some limits of the professional context that hinder the work, such as the need to follow the school timetable and calendar, and potentialities, of which we highlight the use of elements of Didactic Engineering during the teacher's work, such as the precepts of *a priori* and *a posteriori* analysis.

Keywords: Continuing education. Mathematical knowledge. Didactic knowledge in action. Operative knowledge. Predicative knowledge.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO I -UMA BREVE VISÃO ACERCA DA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Iniciamos o nosso texto apresentando a trajetória que percorremos, como a pesquisa desenvolvida no mestrado, as nossas reflexões e inquietações que nos levaram a realização dessa investigação. Na pesquisa produzida no curso de mestrado (LIMA, 2015), realizamos uma sequência didática do conceito de combinatória, tendo como objetivo geral *investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema.* O enfoque do trabalho estava na construção do conhecimento de combinatória de futuros professores de Matemática no início da sua trajetória profissional. Para o desenvolvimento da pesquisa, pautamo-nos nos aportes teóricos e metodológicos[1] da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996), da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) e da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996).

Nesse contexto, desenvolvemos uma sequência didática organizada em 8 sessões e composta de 14 situações-problema de diferentes tipos de problemas combinatórios, a qual foi realizada com 29 alunos ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública de Mato Grosso do Sul. Para o desenvolvimento da pesquisa, percorremos os 4 momentos propostos na metodologia de pesquisa da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), sendo eles: as análises preliminares, a elaboração da sequência e desenvolvimento da análise *a priori,* a experimentação e a análise *a posteriori* e validação da sequência didática. Assim, realizamos ao longo da investigação um estudo acerca da combinatória, com a constituição de um quadro teórico-didático sobre o tema. Além disso, ao elaborar a sequência e realizar a análise *a priori* e *a posteriori* pudemos levantar hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos alunos diante das situações propostas e validá-las com o desenvolvimento da pesquisa.

Ao analisarmos as produções dos alunos, observamos que estes apresentavam dificuldades na resolução dos problemas combinatórios, como a identificação das características dos problemas e sua classificação, a utilização excessiva do uso de fórmulas (com a aplicação mecânica, sem a compreensão do problema) e pouca utilização de outras estratégias. No decorrer da sequência didática, percebemos que os alunos utilizavam de outras estratégias como a listagem de possibilidades, quando viável, e do Princípio Fundamental da Contagem, ao aumentarmos a quantidade de elementos do problema. Além disso, percebemos

[1] Nesse momento não apresentaremos as noções desses aportes, pois os mesmos são apresentados de maneira detalhadas no capítulo seguinte.

que os estudantes desenvolveram conhecimentos relacionados à percepção de regularidades e generalização na busca das soluções das atividades propostas.

Mas por qual motivo apresentamos a pesquisa que desenvolvemos no mestrado (LIMA, 2015), com estudantes de licenciatura em um contexto de discussão sobre formação continuada? Essa escolha foi realizada pois esse movimento que percorremos é fundamental para a pesquisa de doutorado que desenvolvemos. Ao término do mestrado e o início da vida docente, percebi[2] que diversos elementos que utilizei no desenvolvimento da pesquisa de mestrado, pautava a minha prática docente na escola. Mesmo que não realizasse de maneira estruturada, devido às condições de trabalho, percebi que a perspectiva de aprendizagem, a maneira que organizava as aulas (pensando em situações *adidáticas*), reflexão sobre possíveis dificuldades e como superá-las com as atividades que iria propor, entre outros, emergiam do trabalho docente. Dessa maneira, percebo que apesar da pesquisa de mestrado visar a aprendizagem de estudantes da licenciatura, ela se constituiu como um potente espaço formativo para mim, influenciando diretamente a minha prática profissional.

Colocamo-nos[3] a pensar, a partir de então, em possibilidades de formação continuada de professores de Matemática a partir de processos semelhantes ao percorrido na pesquisa do mestrado. Nesse sentido, intencionamos um espaço formativo no qual os professores pudessem refletir sobre os temas matemáticos, suas propriedades, exercícios, além de possíveis dificuldades dos estudantes e escolhas didáticas que pudessem contribuir para a superação delas. Diante desse contexto, apresentamos no decorrer desse capítulo alguns estudos que nos subsidiaram sobre a temática de formação continuada.

As formações inicial e continuada de professores são temáticas de relevância quando tratamos das pesquisas em Educação Matemática. A partir da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) – Lei Nº 9.394/96, ficou estipulado que a formação de professores para lecionar no ensino básico se daria por meio dos cursos de licenciaturas plenas, além de considerar a necessidade de momentos de formação continuada dos docentes. Com os cursos de ensino superior de licenciaturas plenas responsáveis pela formação inicial docente, os cursos de formação continuada teriam por objetivo "o aprimoramento de profissionais nos avanços, renovações e inovações de suas áreas, dando sustentação à sua criatividade pessoal e à de grupos profissionais, em função dos rearranjos nas produções científicas, técnicas e culturais" (GATTI, 2008, p. 58).

---

[2] Refiro-me em 1ª pessoa do singular por se tratar de uma experiência pessoal do pesquisador.
[3] Retornamos para 1ª pessoa do plural por se tratar do trabalho em conjunto do pesquisador e orientador.

Apesar de a formação inicial dos professores se darem por meio de cursos superiores de licenciatura plena, percebe-se que essa formação é por vezes pensada de maneira distante da realidade de sala de aula, com uma estrutura voltada para os saberes teóricos que estão envolvidos na prática docente, como cursos inspirados no modelo “3+1”[4] (PERRENOUD *et al.*, 2002). Nessa perspectiva, algumas condições do trabalho docente são deixadas de lado durante a formação inicial, por exemplo: a articulação entre a teoria e prática, a falta de material, questões além dos processos de ensino e aprendizagem presentes no ambiente escolar como a indisciplina e a violência, desorganização escolar, entre outras.

Diante dessas problemáticas que estão presentes no trabalho do professor, citadas anteriormente, as pesquisas que envolvem o tema formação de professores no Brasil passaram a ter espaço na área da Educação nas décadas finais do século XX, de maneira que podemos refletir sobre os processos de formação de professores. Marli André e suas colaboradoras (1999) realizaram uma investigação de estado da arte concernente às pesquisas que tiveram como temática a formação de professores na década de 1990. As autoras desenvolveram o levantamento das pesquisas tomando como base três categorias de trabalhos: dissertações e teses defendidas nos programas de pós-graduação em educação de 1990 a 1996, artigos publicados em 10 periódicos de 1990 a 1997 e as pesquisas apresentadas nos Grupo de Trabalho de formação de professores da Anped de 1992 a 1998.

Na primeira categoria, verificou-se que apenas 284 trabalhos dos programas de pós-graduação em educação tinham como foco a formação de professores, representando de 5% a 7% do total de dissertações e teses defendidas no período, sendo que 216 trabalhos, que representavam 76% das pesquisas de formação de professores, estavam concentradas na formação inicial. Dessas dissertações e teses que focavam na formação inicial, percebeu-se que a maior concentração estava nos cursos normais de formação[5], seguidos dos cursos de licenciaturas e pedagogia, voltado em especial para a avaliação dos cursos de formação. As demais pesquisas que envolviam a formação de professores se dividiam nas temáticas de

---

[4] O modelo de formação inicial “3+1” consiste em um curso organizado em 3 anos que envolviam disciplinas do conteúdo da área e 1 ano com disciplinas da área de educação. Esse modelo pode ser observado a partir dos anos de 1930 para a formação de professores, que a partir da formação de bacharéis, realizava a inclusão de um ano de disciplinas da área de educação. Conforme ressalta Moreira (2012 *apud* GIRALDO, 2018), por mais que os cursos de licenciatura não realizem explicitamente essa divisão dos anos de formação, a organização dos cursos utiliza o mesmo princípio, com as disciplinas do conteúdo de formação e da área pedagógica sendo planejados e desenvolvidos de maneira desarticulada.

[5] Os cursos normais de formação se tratavam de cursos, de nível secundário, que visavam a formação de docentes para os anos iniciais do Ensino Básico. Esses cursos normais foram extintos a partir da Lei nº 5.692, de 1971, que instituiu a formação a partir de uma Habilitação de segundo grau, chamada de Magistério (GATTI; BARRETO, 2009).

formação continuada e identidade e profissionalização docente, sendo que correspondiam a 14,8% (42 trabalhos) e 9,2% (26 trabalhos), respectivamente.

No que diz respeito a formação continuada, apesar de verificar uma pequena quantidade de pesquisas em relação à todas que envolviam a temática de formação de professores, por ser apenas 14,8%, percebeu-se que elas ocorreram de maneira diversificada, tanto nas questões relativas aos níveis de ensino, quanto às realidades pesquisadas, “revelando dimensões bastante ricas e significativas dessa modalidade de formação” (ANDRÉ *et al.*, 1999, p. 2). Essas pesquisas estavam distribuídas com o foco em propostas de formação do governo ou de Secretarias de Educação (43%), programas ou cursos de formação (21%), processos de formação em serviço (21%) e práticas pedagógicas (14%). Por fim, a terceira temática identidade e profissionalização docente tinha em sua maioria a busca pela identidade profissional e as concepções do professor sobre a profissão.

Ao analisar 115 publicações em revistas e periódicos que versavam sobre formação de professores, 30 trabalhos envolviam a formação continuada (28,7%), 27 artigos acerca da formação inicial (23,5%), 33 sobre identidade e profissionalização docente (28,7%) e 25 sobre prática pedagógica (22%). Já nos textos da Anped foram identificados 70 trabalhos, com 29 textos sobre formação inicial (41%), 15 textos que envolviam formação continuada (22%), 12 de identidade e profissionalização (17%), 10 de práticas pedagógicas (14%) e 4 de revisão de literatura (6%).

Dentre esses materiais analisados nos artigos de revistas e textos da Anped, no que se refere à formação continuada, foco da nossa investigação, percebeu-se que houve uma distribuição mais equilibrada, em comparação com as dissertações e teses. As pesquisas analisadas de periódicos se organizavam em torno de 3 grandes temáticas: a concepção de formação continuada, propostas voltadas ao processo de formação continuada e o papel dos professores e da pesquisa no processo formativo. Nos textos da Anped houve o foco na formação em serviço, com o estímulo do papel do professor, tendo como embasamento a reflexão sobre a prática. Dentre as propostas analisadas, destaca-se a predominância do conceito de processo crítico-reflexivo nas investigações, com o professor tendo um papel central na formação. Além disso, foi possível perceber a ideia de formação em serviço, oportunizando o desenvolvimento de novos conhecimentos a partir da reflexão, contribuindo para sua prática.

Fiorentini e seus colaboradores (2002) realizaram um balanço das pesquisas nos Programas de Pós-Graduação em Educação e Educação Matemática, com o total de 112 dissertações e teses defendidas de 1978 até fevereiro de 2002, acerca da formação e o desenvolvimento profissional do professor, tomando como focos temáticos a formação inicial, formação continuada e outros temas relacionados. Apesar da importância das temáticas consideradas na pesquisa de Fiorentini e seus colaboradores (2002), focaremos nos resultados apresentados sobre a formação continuada, por estarem relacionadas com a nossa pesquisa. Verificou-se que das 112 pesquisas levantadas, 51 estudos eram referentes a formação continuada, sendo 5 focos de trabalho: modelos, programas, propostas e projetos, 15; cursos de atualização e especialização, 6; investiga a própria prática dos formados, 3; grupos ou práticas colaborativas, 14; iniciação e evolução profissional do professor, 13.

Os autores destacam que ao analisar as propostas de formação continuada nesse período histórico (1978-2002), a ideia de um curso para o treinamento e capacitação dos professores foram deixadas de lado pelas pesquisas, pois essas propostas "consistiam em simplificações da prática profissional e reduziam o problema pedagógico à sua dimensão apenas instrutiva e, portanto, técnica, ignorando a dimensão formativa e humana da prática educativa, o que a torna complexa e plural" (FIORENTINI *et al.* 2002, p. 21). Dessa maneira, a perspectiva geral de formação continuada se modificou, a partir dos estudos sobre o pensamento do professor e sua postura reflexiva, com o desenvolvimento de projetos que se estruturavam a partir da construção conjunta das propostas, evidenciando o papel do professor durante a formação, com uma perspectiva crítico-reflexiva (FIORENTINI *et al.* 2002; ANDRE *et al.*, 1999). Além disso, destaca-se a reflexão sobre o professor como um sujeito de conhecimento e em transformação, de modo que seus saberes são constituintes para o seu desenvolvimento profissional.

No contexto da atividade docente, percebe-se a necessidade da realização de processos de formação continuada, que tem por objetivo propiciar momentos de atualizações, aprofundamentos das temáticas educacionais, apoiar a reflexão sobre a prática educativa e o processo de constante autoavaliação (BRASIL, 1999). Além disso, Imbernón (2010, p. 11) indica que "mais do que atualizá-los, deve ser capaz de criar espaços de formação, de pesquisa, de inovação, de imaginação". Nesse sentido, as atividades de formação continuada deveriam ser pensadas em consonância com a existência de projetos educativos relacionados a atividades docentes e suas problemáticas.

Com o destaque da necessidade dos processos formativos, verificou-se o aumento da oferta e participação de cursos de formação, sendo a modalidade presencial ofertada pelas Secretarias Municipais de Educação. Conforme apresentam Gatti e Barreto (2009) esses cursos tinham o enfoque na atualização e aprofundamento de conhecimentos necessários na atividade docente, a integração de novas tecnologias e as reorganizações sociais que as escolas estavam inseridas. Entretanto, percebe-se alguns problemas existentes nas propostas de formação e sua implementação junto aos professores, tendo em vista que as atividades são pontuais, e por diversas vezes, não respondem às necessidades pedagógicas dos docentes (BRASIL, 1999). Isso se deve ao fato de que, ao preparar uma formação continuada, não são consideradas as o ponto de partida dos professores, suas realidades e necessidades (IMBÉRNON, 2010; FIORENTINI *et al.* 2002; BRASIL, 1999). Esse distanciamento entre os professores que participam das formações e os formadores causa uma dualidade sobre a visão da formação continuada, tendo em vista que os professores questionam as ações distantes da realidade escolar e não colaboram para as problemáticas enfrentadas por eles.

Por outro lado, os formadores alegam que os professores buscam nas ações “receitas prontas” para serem aplicadas na escola. Além disso, Gatti e Barreto (2009), Imbernón (2010) e os Referenciais para a formação de professores (1999) ressaltam alguns problemas acerca dos cursos de formação de professores, sendo eles: a dificuldade da formação em massa, optando por formações gerais; palestras e cursos visando a um enfoque da apresentação teórica; a brevidade dos cursos, pressa na execução e descontinuidade das propostas; falta de incentivo tanto financeiro, quanto de condições dos professores para a participação, como a disponibilidade de materiais e a jornada de trabalho docente; dificuldade de fornecimento de instrumentos e apoio para as mudanças nas escolas.

Dentre os problemas, Gatti e Barreto (2009) destacam a ausência dos professores na definição de políticas de formação e na formulação dos projetos, sendo que essa integração poderia propiciar uma adequação nos objetivos e metodologias das formações, pensando nas realidades e condições vivenciadas pelos professores. Além disso, um outro aspecto que dificulta a participação dos docentes em atividades de formação continuada é a realidade enfrentada por eles ao longo de sua carreira. Conforme ressaltam as autoras, em média, o professor exerce oficialmente 30 horas semanais de atividades docentes, apesar de seu trabalho efetivo ultrapassar essa carga horária devido as demandas necessárias na sua atividade, como o planejamento das aulas, correção de provas, estudos e elaboração de materiais, entre outras (GATTI; BARRETO, 2009). Esse cenário que os professores enfrentam, em conjunto com dificuldades na flexibilização da sua jornada de trabalho para a participação de atividades de formação continuada, faz que a participação dos professores do ensino básico em formações continuadas fique destinada aos períodos noturnos ou aos sábados, aumentando a carga de atividades inerentes à sua profissão.

Nóvoa (1992) apresenta algumas considerações acerca da formação de professores, indicando aspectos que envolvem os desenvolvimentos pessoal, profissional e organizacional. Segundo o autor, a formação de professores tem como uma das problemáticas a falta de um processo articulado entre os momentos de formação e as atividades da escola, não levando em consideração as relações entre o trabalho individual do professor e a dinâmica coletiva escolar. O autor propõe que a formação deve considerar uma perspectiva crítico-reflexiva, na qual

> A formação não se constrói por acumulação (de cursos, de conhecimentos ou de técnicas), mas sim através de um trabalho de reflexividade crítica sobre as práticas e de (re)construção permanente de uma identidade pessoal. Por isso é tão importante <u>investir a pessoa</u> e dar um estatuto ao <u>saber da experiência</u> (NÓVOA, 1992, p. 13, grifo do autor)

Nesse sentido, é importante levar em conta os conhecimentos prévios dos professores, suas experiências, dificuldades e motivações que emergem no processo de formação e constituem sua prática docente. Ao considerar os aspectos constituintes do professor, a formação deixa de ocorrer em apenas um sentido (de professor formador para professor formando), assumindo-se como um processo interativo e dinâmico, no qual a troca de experiências e a partilha de conhecimentos constituem o espaço formativo, de modo que o docente tenha um papel ativo na sua formação e na dos demais colegas. Em conformidade a essa perspectiva, Imbérnon (2010) afirma que ao assumir essa postura o professor utiliza sua experiência e conhecimentos para desenvolver um papel ativo, criativo e construtivo na atividade de formação, deixando de lado a posição técnica na qual era subordinado à produção de conhecimentos que lhes eram apresentados.

No aspecto profissional, a formação deve considerar as dimensões coletivas tendo em vista que estas contribuem para a emancipação profissional, em oposição às organizações que consideram os professores individualmente. No início da nossa investigação tínhamos o intuito da constituição de um grupo de professores para a formação continuada que propusemos, tendo em vista o que foi apresentado. Entretanto, devido a contingências, que explicitamos no decorrer do texto, realizamos a pesquisa com apenas 1 professora de Matemática, buscando a constituição de um espaço de diálogos e partilhas de conhecimentos. Nesse sentido, Nóvoa (1992, p. 16) afirma que nesse processo formativo é importante “Valorizar paradigmas de formação que promovam a preparação de professores reflexivos, que assumam a responsabilidade do seu próprio desenvolvimento profissional e que participem como protagonistas na implementação das políticas educativas”. Ao assumir essa perspectiva de formação, é possível que o professor se depare com situações que lhe permitam refletir sobre situações do seu campo de trabalho e buscar por soluções, de modo que a formação continuada contribua para a sua formação tanto pessoal, quanto relacionada a aspectos profissionais (IMBERNÓN, 2010).

Ressaltamos que essa característica não é única, sendo possível e desejado diferentes práticas formativas, como a experimentação e o trabalho pedagógico em conjunto com seus pares, articulando com projetos e visões da escola, de modo que o professor não fique engessado em um único modelo. Dessa maneira, a formação de professores se constitui como uma oportunidade de mudanças e evoluções, na qual devemos estar cientes que a "formação não se faz antes da mudança, faz-se durante, produz-se nesse esforço de inovação e de procura dos melhores percursos para a transformação da escola" (NÓVOA, 1992, p. 17, grifo do autor). Por fim, a formação de professores deve considerar o professor em um papel ativo no processo, e não apenas como um receptor de conhecimentos previamente selecionados, sendo que os docentes devem possuir um papel ativo nos processos da atividade, desde a concepção, até a avaliação da formação. Essa característica possibilita a adequação da realidade dos professores, levando em consideração suas dificuldades, condições e, principalmente, possibilitando a troca e partilha de conhecimentos e experiências entre os professores.

Ao realizar uma investigação baseada na metanálise das dissertações e teses defendidas na área da Educação no ano de 2007, André (2010) identifica que os professores passaram a ter papel de protagonismos nessas pesquisas, participando efetivamente das diferentes etapas da formação continuada, como o planejamento e desenvolvimento da ação de formação. Dessa maneira, a autora (ANDRÉ, 2010, p. 178) afirma que essa característica do professor possuir papel ativo na formação "contribui para a articulação entre teoria e prática, possibilita aos professores das escolas o aprendizado da pesquisa e consequentemente favorece a busca da autonomia profissional".

Nesse sentido, percebe-se a importância da Universidade nos processos de formação continuada de professores, seja por meio de projetos de pesquisa e extensão, além das dissertações de mestrado e teses de doutorado que envolvem a temática. Assim, essas ações de formação continuada podem contribuir para o trabalho com novos conhecimentos do campo educacional nas redes de ensino, seja na incorporação do debate acadêmico para o ambiente escolar e contribuindo para a emancipação do professor na aceitação ou não de propostas prontas que não lhe dizem respeito diretamente (DAVIS *et al.*, 2011).

Diante do contexto supracitado, a pesquisa de Silva, Pinheiro e Magina (2017) intitulada "*Reflexões de uma professora do Ensino Fundamental sobre uma atividade multiplicativa no âmbito de uma formação continuada baseada na espiral RePaRe",* teve como objetivo investigar e intervir na prática de professores do Ensino Fundamental no que tange às estruturas multiplicativas. A proposta metodológica do RePaRe é estruturada em um esquema de espiral no qual a professora percorria momentos de Reflexão-Planejamento-ação-Reflexão, sendo que a ideia é que os professores participassem do processo não só como ouvintes, mas como produtores de conhecimentos. Esse projeto ocorria em paralelo com outra investigação acerca das estruturas multiplicativas, pautadas na Teoria dos Campos Conceituais. A proposta de formação foi estruturada em 6 momentos, sendo eles:

> (1) aplicação de um teste com problemas do Campo Conceitual Multiplicativo (CCM) para todos os educandos da escola (1º ao 5º ano do Ensino Fundamental), (2) tabulação dos resultados pelos pesquisadores, (3) posterior apresentação dos resultados aos professores, ao longo da formação, (4) reflexão coletiva sobre os resultados obtidos, com o aprofundamento teórico nos encontros formativos, (5) elaboração de atividades pelos professores formandos para serem realizadas em suas salas de aula, e (6) discussão coletiva sobre as atividades antes e depois de seu uso em sala de aula. (SILVA; PINHEIRO; MAGINA, 2017, p. 90-91).

As etapas supracitadas tinham como foco momentos de formação em conjunto entre os professores, permitindo que houvesse discussões dos conceitos matemáticos, trocas de experiências pedagógicas, a elaboração de situações-problema e a análise nas perspectivas do ensino e da aprendizagem. Assim, percebeu-se que esse ambiente no qual os professores foram submetidos propiciou momentos de reflexão, como no exemplo da professora analisada (SILVA; PINHEIRO; MAGINA, 2017).

Nesse contexto, a professora em questão, formada em pedagogia, teve o interesse em participar da atividade de formação pois acreditava que, por se tratar da área de Matemática, poderia discutir acerca dos conceitos e dificuldades. No texto, é apresentada uma sequência de atividades que a professora planejou em conjunto com outras duas professoras e desenvolveu com os alunos do 3º ano do ensino fundamental. As atividades consistiam no trabalho de grandezas e medidas, envolvendo o conceito de área. Nas 3 primeiras aulas a professora introduziu a ideia de medidas, instrumentos de medição, instrumentos padronizados de medidas e a noção de área, por meio de atividades que estimulassem trabalho dos alunos. Na quarta aula, foram aplicadas duas situações-problema que haviam sido desenvolvidas no grupo de formação, com o intuito de analisar as estratégias apresentadas pelos alunos.

Ao analisar esses momentos, foi possível perceber que os alunos compreenderam os problemas como situações aditivas, semelhante ao apresentado pela professora. Além disso, o grupo possibilitou à professora conhecer novas situações relacionadas ao ensino da multiplicação, mesmo ela continuando com vestígios do método aditivo. Compreendemos que a aprendizagem se trata de um processo, sendo compreensível a continuidade da mobilização de conhecimentos do método aditivo. Percebe-se também que a professora passou a se sentir incentivada a ouvir seus alunos, compreendendo que eles possuem conhecimentos suficientes para resolver os problemas propostos. Por fim, a formação contribuiu para a reflexão da docente sobre sua prática e a valorizar a relação teoria-prática, tendo oportunidade de compartilhar experiências com os colegas, enriquecendo sua prática.

A pesquisa de Andrade (2016) intitulada “Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental”, teve como objetivo geral analisar manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática, dos anos finais do ensino fundamental, sobre possíveis dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, em atividades matemáticas. No desenvolvimento da pesquisa, Andrade (2016) pautou-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 2011 *apud* ANDRADE, 2016) no que se refere aos tratamentos (trabalho dentro de um sistema de registros de representações) e conversões (mudanças de sistemas de registros de representações). Para isso, a autora constituiu um grupo com 4 professores de Matemática do ensino fundamental, com diferentes tempos de serviço, formando um espaço de discussão coletiva, possibilitando questionamentos e reflexões acerca dos sucessos e insucessos dos alunos na aprendizagem do tema. Mesmo que o grupo visasse discutir as estratégias dos alunos, os momentos dos encontros se constituíam como um espaço formativo para os professores, ao se depararem com situações apresentadas pela pesquisadora que os levavam a refletir sobre questões matemáticas e didáticas dos números racionais.

Nesse sentido, Andrade (2016) apresentou situações presentes em dois livros[6] de matemática do ensino fundamental para os professores debaterem e, ao analisar os encontros, foi possível verificar a ênfase no uso de técnicas de manipulação para mudanças dos tipos de registros (como a passagem da representação fracionária para a decimal), além do enfoque em um único tipo de representação. Entretanto, com o desenvolvimento dos encontros Andrade (2016) ressalta o envolvimento e a satisfação dos professores estarem envolvidos nos momentos do grupo, podendo expor seus pontos de vista e ouvir seus pares. Além disso, percebeu-se a reflexão dos professores nos conhecimentos por eles manifestados, como relatado por uma das professoras participantes da pesquisa:

> a prática pedagógica referente aos números racionais depois desses encontros será diferente. A visão mudou e veio acrescentar muito, principalmente às diferentes formas de representar um número racional, inclusive a sua decomposição no quadro valor de lugar. Pelo que já fui mudando no fazer pedagógico, durante os encontros, foi possível perceber diferenças na compreensão e na apreensão dos conteúdos ministrados. (ANDRADE, 2016, p.165).

[6] Foram utilizados os livros do 6º e 7º ano da coleção Praticando Matemática (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012 apud ANDRADE, 2016).

Ao analisarmos esse excerto, percebemos a importância do espaço que foi constituído pelos professores para sua formação, possibilitando momentos de debates e reflexões dos mesmos a partir das atividades matemáticas apresentadas pela pesquisadora, os quais tiveram condições de refletir e repensar sua prática no ensino de números racionais.

Nesse contexto, considerando as pesquisas apresentadas sobre formação de professores (BRASIL, 1999; NÓVOA, 1992; IMBERNÓN, 2010) que ressaltam a importância de o professor ter o papel ativo durante o processo de formação e as condições de trabalho vivenciadas na escola, pensamos que um processo semelhante ao que percorremos na pesquisa de mestrado, de elaboração desenvolvimento e análises de sequências didáticas pautadas na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), poderia se constituir um espaço de formação continuada de professores. Buscamos então na nossa investigação voltar o olhar para aspectos relacionados a constituição desse espaço formativo e a formação do professor, por meio de um trabalho em conjunto, de professores e pesquisadores pensando no ambiente escolar que estamos inseridos. Dessa maneira, acreditamos que a formação continuada que propomos é:

> um processo que provoca uma reflexão baseada na participação, com contribuição pessoal, não rigidez, motivação, metas comuns, normas claras, coordenação, autoavaliação, e mediante uma metodologia de formação centrada em casos, trocas, debates, leituras, trabalho em grupo, incidentes críticos, situações problemáticas, etc." (IMBERNÓN, 2010, p. 65-66).

Realizamos então uma formação continuada com uma professora de Matemática, pautada nas etapas da análise preliminar, elaboração de sequência didática e análise *a priori*, a experimentação, e a análise *a posteriori* e validação da sequência didática, que constituem a Metodologia de Pesquisa da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). Novamente deixamos claro que a intenção inicial da investigação seria a constituição com um grupo de professores de Matemática, que não foi possível no desenvolvimento da pesquisa, visando a diversidade de vivências dos professores, trocas de experiências e reflexões. Apesar disso, buscamos no trabalho com a professora a constituição desse processo formativo vai ao encontro do que verificamos no contexto da formação continuada no qual ela está inclusa em todas as etapas da formação, contribuindo, desenvolvendo e avaliando o processo, superando algumas dificuldades apresentadas sobre o tema (BRASIL, 1999; IMBERNÓN, 2010; NÓVOA, 1992). Dessa maneira, acreditamos que a vivência desse percurso de elaboração, desenvolvimento e análise de sequências didáticas pautadas nas etapas da Engenharia Didática podem propiciar a aprendizagem de novos conhecimentos, tanto matemáticos, quanto didáticos.

1.1 Objetivos

Tendo em vista o contexto apresentado, definimos como **objetivo geral** da pesquisa ***analisar conhecimentos de uma professora de Matemática que participa de um processo de formação continuada pautado nas etapas da Engenharia Didática,*** pois ao analisarmos os conhecimentos da docente, e suas modificações no decorrer do processo de formação desenvolvido, é possível realizar inferências acerca da proposta de formação continuada pautada nas etapas da Engenharia Didática.

Para atingirmos esse objetivo geral, elencamos **três objetivos específicos** sendo o primeiro ***analisar conhecimentos matemáticos de uma professora de matemática*** e o segundo objetivo ***analisar conhecimentos didáticos de uma professora de matemática acerca dos conteúdos dessa disciplina.*** Esses objetivos foram traçados tendo em vista que o trabalho docente e os conhecimentos necessários para a atividade não estão relacionados apenas a questões matemáticas. Assim, consideramos importante analisar dois aspectos que constituem o trabalho docente, conhecimentos matemáticos e conhecimentos didáticos, e como esses conhecimentos são mobilizados no decorrer do processo formativo.

Por fim, procuramos ***analisar limites e potencialidades da utilização das etapas da Engenharia Didática como ação estruturante em um processo de formação continuada de professores de Matemática.*** Esse **terceiro objetivo específico** foi elencado devido ao fato de propormos um processo formativo pautado nas etapas da Engenharia Didática com uma professora em serviço. A proposta visa a integração com o trabalho da professora com suas turmas típicas[7] na escola que trabalha, que tem suas condições de trabalho, demandas, restrições e suas limitações. Assim, estamos focados em analisar essa integração dos momentos de formação no trabalho da docente, evidenciando possibilidades de trabalho e suas limitações.

[7] Utilizamos esse termo para nos referirmos às turmas presentes na escola, seguindo a carga horária, todos os alunos matriculados, o calendário escolar, considerando todas as características presentes na escola da professora.

CAPÍTULO II - A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA COMO APORTE TEÓRICO PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Nesse capítulo apresentamos alguns estudos que contribuíram para o desenvolvimento da nossa investigação, em especial teorias inerentes ao campo da Didática da Matemática. Assim, discutimos alguns modelos epistemológicos e relacionada com a epistemologia construtivista apresentamos a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996, 2008), que nos orienta na perspectiva de aprendizagem e no trabalho de formação continuada que propomos. Além disso, serão abordadas a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996, 2009) e a Engenharia Didática (1996) que constituíram um papel central no desenvolvimento da proposta de formação continuada e na análise dos dados produzidos.

Para a realização da pesquisa e nas características presentes no processo de formação continuada que realizamos na investigação, nos colocamos em reflexão acerca de possíveis processos formativos e, principalmente, sobre diferentes modelos didáticos de ensino e seus pressupostos epistemológicos. Para isso, pautamo-nos no trabalho de Becker (2001), que apresenta alguns diferentes modelos de pensar o ensino e a aprendizagem e os pressupostos epistemológicos que os sustentam, relacionando com o modo que acreditamos que ocorra a aprendizagem e como isso contribui na organização no processo de formação continuada que propusemos. Além disso, ao refletirmos sobre diferentes perspectivas de ensino e aprendizagem, pautadas nos seus pressupostos epistemológicos, podemos compreender algumas escolhas que a professora participante da pesquisa apresenta ao longo dos encontros, contribuindo para a análise dos conhecimentos didáticos da docente.

Becker (2001) apresenta 3 modelos didáticos e os pressupostos epistemológicos relacionados com cada modelo, sendo eles: a pedagogia diretiva e o pressuposto epistemológico empirista; a pedagogia não-diretiva e o pressuposto epistemológico apriorista e uma terceira vertente que o autor intitulou como pedagogia relacional vinculada ao pressuposto epistemológico construtivista.

O primeiro modelo epistemológico que apresentamos é o modelo empirista, que teve como um expoente do empirismo moderno o filósofo John Locke (1632 – 1704). O modelo empirista tem como pressuposto que a aprendizagem do sujeito ocorre por meio do uso dos sentidos diante de informações de um meio exterior ao sujeito, sendo que

> Para o empirista clássico, os verdadeiros fundamentos do conhecimento são acessíveis aos indivíduos através dos sentidos. Os empiristas supõem que os indivíduos possam estabelecer como verdadeiras algumas afirmações confrontando o mundo através de seus sentidos. As afirmações assim estabelecidas constituem os fundamentos sobre os

> quais é construído o conhecimento adicional por algum tipo de inferência indutiva (CHALMERS, 1993, p. 153-154)

Percebe-se que no modelo epistemológico empirista há uma relevância na aprendizagem dos sujeitos por meio dos seus sentidos, como a visão e a audição, diante de informações que o sujeito se depara no decorrer de sua vida, seja o mundo dos objetos ou meios físicos e sociais que se depara. Se pensarmos nesse modelo epistemológico em sala de aula, estamos diante de um modelo didático diretivo que tem como crença que a aprendizagem dos estudantes ocorre por meio da transmissão do conhecimento realizada pelo professor.

No modelo diretivo, utiliza-se a analogia de o aluno poder ser representado como uma folha em branco ou uma tábula rasa, acreditando que ele não possui nenhum conhecimento relacionado ao tema que será estudado, cabendo ao professor o papel de ensiná-lo. Em conformidade com Becker (2001), o processo de ensino e aprendizagem são vistos como polos dicotômicos, no qual cabe ao professor ensinar e o aluno aprender, de modo que o protagonista em uma aula com esse pressuposto é o professor, que possui o conhecimento a ser transmitido aos seus alunos.

Se pensarmos em uma aula de Matemática nesse modelo, percebe-se que o professor acredita que seus alunos não são capazes de realizar atividades antes que ele tenha ensinado o conteúdo. Desse modo, inicia-se a aula com a apresentação do tema, a definição do saber, algumas técnicas de resolução e exemplos de como utilizá-las, cabendo aos alunos observar o professor para aprender sobre o tema. Assim, no modelo diretivo é "por excelência, do fixismo, da reprodução, da repetição" (BECKER, 2001, p. 19), no qual as mesmas perguntas são respondidas com as mesmas respostas. Verifica-se nesse modelo uma priorização no domínio de um sistema de técnicas para a resolução em uma classe de problemas, partindo de técnicas mais elementares para outras mais complexas. Nesse contexto de ensino, o papel do aluno é ficar em silêncio, se submeter à fala do professor, ouvindo, observando e repetindo quantas vezes for preciso até aprender o que o professor ensinou.

Becker (2001) apresenta um segundo modelo epistemológico apriorista sendo que, conforme o autor, o ""Apriorismo" vem de *a priori*, isto é, aquilo que é posto como condição do que vem depois. – o que é posto antes? – A bagagem hereditária" (BECKER, 2001, p. 20, grifo do autor). Nessa vertente epistemológica, acredita-se que ser humano já nasce com o conhecimento programado, bastando um mínimo de exercícios para que esse conhecimento seja despertado pelo sujeito. Assim, diferentemente do modelo epistemológico empirista, no modelo apriorista há a interferência mínima do meio físico e social na aprendizagem, já que isso é inato ao ser humano.

Considerando os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula, sustentados pelos pressupostos epistemológicos aprioristas, nos deparamos com o modelo didático não diretivo. Nesse modelo didático, o professor é visto como um auxiliar do aluno para a aprendizagem, tendo o papel de um facilitador, cabendo ao aluno o papel de protagonista nessa sala de aula. Como se defende que o conhecimento já está programado nos alunos, o professor não-diretivo acredita que o aluno irá aprender por si mesmo, independente do seu papel no processo de ensino, diminuindo a importância nas suas escolhas e ações em sala de aula. Desse modo, o professor deve interferir o mínimo possível no processo de aprendizagem dos estudantes, pois cabem a eles despertar o saber que já possuem.

Becker (2001, p. 19) afirma que esse modelo didático não é fácil de detectar, pois "Ele está mais nas concepções pedagógicas e epistemológicas do que na prática de sala de aula porque esta é difícil de viabilizar". Entretanto, é possível evidenciar alguns elementos dessa concepção em sala de aula, como quando nos deparamos em uma situação que o aluno não aprende determinado conhecimento, acreditar que isso ocorre devido o estudante não estar apto ou não possuir habilidades para aprendê-lo. Nesse sentido, o sucesso e a falha da aprendizagem dos estudantes não estão relacionados com ações realizadas nos processos de ensino, que perde a importância nesse modelo didático, mas a questões predeterminadas geneticamente nos estudantes.

Uma terceira vertente é a epistemologia construtivista, que tem como um expoente o psicólogo Jean Piaget, dando origem ao modelo didático intitulado por Becker (2001) como relacional. Nesse modelo didático, o professor não acredita que o aluno seja uma tábula rasa que aprende apenas de situações externas do meio como no empirismo, ou que basta que desperte a herança genética sobre um conhecimento, segundo o apriorismo. No modelo didático relacional o professor compreende que o aluno construirá um novo conhecimento a partir do momento que ele age e problematiza sobre sua ação. Desse modo, em conformidade com a epistemologia construtivista, o professor

> sabe que há duas condições necessárias para que algum conhecimento novo seja construído: a) que o aluno aja (assimilação) sobre o material que o professor presume que tenha algo de cognitivamente interessante, ou melhor, *significativo* para o aluno; b) que o aluno responda para si mesmo às perturbações (acomodação) provocadas pela assimilação do material, ou, que o aluno se aproprie, em um segundo momento, não mais do material, mas dos mecanismos íntimos de suas ações sobre esse material (BECKER, 2001, p. 23, grifo do autor).

Nesse contexto, o construtivismo acredita que para ocorrer a aprendizagem é necessário que o sujeito realize a assimilação de algo físico e social, externo a ele, provocando-lhe conflitos cognitivos. Assim, inicia-se um processo interno do sujeito, chamado de acomodação, em que realiza reflexões a partir do que foi visto no processo de assimilação, buscando novamente um equilíbrio cognitivo. Esse movimento é visto como um processo contínuo, mas não ocorre de maneira idêntica todas as vezes, pois a cada processo se torna mais consistente que o anterior, a partir das modificações do sujeito.

Retomando o contexto de sala de aula, nesse modelo didático, o professor acredita que o aluno pode aprender a partir das situações que podem lhe causar desequilíbrios, considerando o que o estudante já construiu. Assim, tanto o processo de ensino, quanto de aprendizagem são considerados, sendo a sala de aula vista como um meio que pode resultar em um espaço que propicia a construção e descoberta de novos conhecimentos para o aluno. No modelo didático relacional, tanto o professor quanto o estudante possuem um papel de destaque. No caso das aulas de Matemática, percebe-se que elas estão pautadas na exploração de problemas não triviais, que são propostos pelo professor, com o objetivo de propiciar um ambiente fecundo para a aprendizagem dos estudantes. Desse modo, o aluno possui um papel ativo na construção do conhecimento matemático, participando no processo de descobrimento indutivo e com uma postura autônoma, não ficando preso ao uso de técnicas matemáticas como no modelo diretivo.

Diante desses cenários apresentados por Becker (2001), coadunamos com o que é apresentado na epistemologia construtivista e o modelo didático relacional. Nesse contexto, percebe-se que os estudos de Piaget contribuíram para o desenvolvimento do campo da Didática da Matemática (DDM), sobre o qual nos apoiamos para a realização da nossa investigação. A Didática da Matemática nasceu e se desenvolveu com uma estreita relação com os processos de ensino e aprendizagem nas classes na França, tendo em vista "que não podemos separar a pedagogia da matemática na reflexão sobre o ensino da matemática e que é necessário estudar os fenômenos de ensino na complexidade da classe" (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2016).

No final da década de 60, percebeu-se na França que a formação dos professores que lecionavam naquele contexto educacional era insuficiente para a implementação do ensino na perspectiva do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Nesse sentido, a Comissão Curricular da Matemática Nacional estabeleceu a criação dos Institutos de Pesquisa em Educação Matemática (IREM), que tiveram como focos principais: a reunião de pesquisadores e professores do Ensino Básico em um trabalho conjunto; desenvolver pesquisas no campo da Educação Matemática; fornecimento de recursos para o ensino e o desenvolvimento da formação continuada dos professores em serviço. Atualmente, os IREM têm como objetivos

> interpretar e aplicar criticamente a pesquisa fundamental no ensino (incluindo a epistemologia, a educação matemática e as ciências educacionais), (b) para apoiar educadores e professores, (c) a experimentar com novos métodos, e (d) para disseminar os resultados positivos e negativos da pesquisa inovadora. (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015, p. 895, tradução nossa).

O campo da Didática da Matemática emerge da integração de pesquisas na Educação Matemática com problemáticas encontradas nas classes na França, focando não apenas em avanços teóricos para a área, mas também para o desenvolvimento de métodos e resolução de problemáticas presentes nas classes da França, tendo a importância "para expressar uma abordagem científica específica aos processos relacionados ao ensino e aprendizagem da matemática: um estudo dos aspectos desses processos específicos da matemática." (LABORDE, 2007, p. 137, tradução nossa). A Didática da Matemática, está focada em investigações no ensino e aprendizagem do conhecimento matemático e, diferentemente de outras linhas de investigação, percebe-se a presença do conteúdo matemático no desenvolvimento de diferentes teorias, como a Teoria dos Campos Conceituais, proposta por Vergnaud (1996; 2009) e a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1996; 2008).

Apesar de haver um foco no desenvolvimento de pesquisas na área da Educação Matemática por parte dos pesquisadores, por se tratar de um contexto no qual estavam inseridos professores do ensino básico, a responsabilidade do ensino dos alunos era compartilhada entre os docentes e os pesquisadores. Além do objetivo comum de ensino, com o desenvolvimento do campo da Didática da Matemática, percebeu-se que os pesquisadores também objetivavam avanços nas pesquisas da DDM e os professores tinham como foco o ensino da Matemática de maneira satisfatória e coerente (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015).

Evidenciamos a relação das teorias da DDM com os processos de ensino e aprendizagem, tendo em vista que foram desenvolvidas nesse âmbito de discussão. Dentre essas teorias, destacamos a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, que tem um papel importante na postura formativa e perspectiva de aprendizagem que acreditamos. O desenvolvimento da Teoria das Situações Didáticas (TSD), proposta por Brousseau (1996, 2008), teve início na década de 1970 visando processos de ensino e aprendizagem de matemática nas salas de aula das escolas da França. Nesse contexto, a TSD apresenta a ideia de situação *adidática* e estruturação do meio para os processos de ensino, que são intrínsecas na postura formativa que acreditamos.

Brousseau (1996) parte da observação do trabalho de três sujeitos em suas atividades matemáticas: o matemático, o aluno e o professor. O matemático parte de um problema contextualizado, seja no contexto social ou matemático, e trabalha em busca das resoluções. Ao longo de sua atividade, o matemático se depara com dificuldades, erros, correções, diferentes estratégias de resoluções até conseguir resolver o problema inicial. Posteriormente, ele faz uma "limpeza" no trabalho realizado, não apresentando todos os processos vivenciados, descontextualizando e despersonalizando o conhecimento matemático e apresentando à comunidade matemática sua produção. Pensando no caminho percorrido pelo matemático, por que o aluno, no processo de aprendizagem matemática, deve começar a partir da apresentação do saber matemático já institucionalizado, descontextualizado e despersonalizado?

Uma maneira de desenvolver a aprendizagem matemática com os alunos é a tentativa de o aluno percorrer alguns processos semelhantes ao do matemático, de modo que ele "aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que não são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc." (BROUSSEAU, 1996, p. 38). É importante ressaltar que por se tratar de um aluno, não se espera que o nível das descobertas seja igual ao dos matemáticos, tendo em vista os conhecimentos e contextos de cada sujeito. Entretanto, os processos vivenciados pelo matemático e pelo aluno são semelhantes, possibilitando que o aluno construa um conhecimento a partir de seu trabalho. Nesse contexto, entra em cena o professor que tem o papel de preparar situações adequadas para o trabalho do aluno. Essa adequação se dá ao pensar em situações que sejam possíveis de o aluno perpassar pelo percurso semelhante ao do matemático, pois caso as atividades matemáticas sejam muito fáceis não serão motivadoras, ocorrendo o mesmo se forem além das condições de o aluno resolver. Ao encontro do exposto, em nossa investigação consideramos que em um espaço formativo devem estar presentes algumas características dessa postura investigativa, na qual a professora participante construa seu conhecimento a partir do trabalho que realizou, como na resolução de atividades, realização de pesquisas e debates, ao invés de apresentar saberes, matemáticos ou didáticos, já institucionalizados.

A aprendizagem matemática pode ocorrer de diferentes maneiras, a partir da perspectiva de formação presente no professor/mediador que gerencia os processos de ensino. Dentre as diversas concepções de aprendizagem, nossa concepção está em conformidade ao apresentado por Brousseau (2008, p. 22), o qual destaca que "a aprendizagem é alcançada pela adaptação do sujeito, que assimila o meio criado por essa situação". Diante do exposto, o sistema didático na Teoria das Situações Didáticas pode ser modelado por meio das relações existentes entre o aluno, o professor e o saber em um determinado meio didático. Nesse contexto, um papel central na Teoria das Situações Didáticas é a elaboração do meio que permita adaptações do sujeito.

O meio a ser estruturado pelo professor é um sistema autônomo, antagônico ao sujeito, que causa desequilíbrios cognitivos no sujeito que o vivencia. Esse meio fornece informações ao sujeito e a partir dessas “ele toma decisões conforme regras, estratégias e conhecimentos, atua em função das informações que recebe e interpreta” (BROUSSEAU, 2008, p. 57). Esse meio antagonista é formado a partir de algumas escolhas *a priori* realizadas pelo professor, como as atividades matemáticas, materiais, organização da turma entre outras. Além disso, há outros elementos que compõem o meio que emergem durante a vivência do sujeito diante da atividade matemática, como os questionamentos, estratégias de resolução da atividade, meios de confrontação e validação das estratégias. Dessa maneira, Brousseau destaca que “O aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, [...]. Este, saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem” (BROUSSEAU, 1996, p. 49).

Na perspectiva de aprendizagem, Brousseau (1996, 2008) apresenta a noção de situação *adidática*, na qual propõe colocar o aluno em um papel ativo na construção do conhecimento por meio dos processos de adaptação que vivencia, sendo que:

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção dos “problemas” que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (BROUSSEAU, 2008, pp. 34-35).

Nesse cenário, o professor possui um papel fundamental na construção de conhecimento, pois ele é quem pensa em situações e em outros elementos que compõem o meio antagonista que irá causar conflitos cognitivos nos alunos e propiciarão a aprendizagem de novos conhecimentos. Nas situações *adidáticas* o saber matemático que está em jogo não é apresentado explicitamente ao aluno, sendo uma ferramenta necessária para a realização da situação proposta. Entretanto, salientamos que as situações *adidáticas,* que são compostas pelos momentos *adidáticos* de ação, formulação e validação, têm uma intenção didática e mesmo sem explicitar o saber envolvido, o professor e, principalmente, o aluno tem consciência dessa intenção de aprendizagem. Para isso, é importante que o aluno aceite a responsabilidade da aprendizagem por meio do problema proposto pelo professor, se envolvendo na busca pela solução. Essa etapa é chamada de devolução do problema (BROUSSEAU, 2008). Destacamos alguns possíveis questionamentos ao pensar na devolução do problema:

- Apesar de o aluno assumir a responsabilidade da aprendizagem, o professor não está ausente no processo. Na perspectiva *adidática,* o professor atua como mediador em todo o processo, desde a preparação das situações e do meio *adidático,* até o gerenciamento e o fomento das discussões em sala de aula com os alunos. Essa postura pode até mesmo provocar algumas dificuldades no professor, que tem que compreender que não é o responsável único pelo saber e a aprendizagem dos seus alunos, além de conseguir gerenciar a situação sem encerrá-la precipitadamente, por exemplo, revelando o saber em jogo na primeira dificuldade que aparecer;
- Se pensarmos na constituição dos três momentos *adidáticos,* a devolução é uma etapa inicial importante, tendo em vista que caso não ocorra, o aluno não se envolverá na situação e, consequentemente, não terá condições de construir o próprio conhecimento[8];
- Apesar da sua importância para os alunos vivenciarem situações que lhe permitirão construir seu conhecimento, a devolução não se caracteriza como um momento *adidático,* pois não está diretamente relacionado com a construção do conhecimento, mesmo sendo uma etapa indispensável para isso ocorrer, pois o protagonista é o professor.

Após ocorrer a devolução do problema, efetivamente se inicia a situação *adidática* vivenciada pelos alunos, perpassando pelos momentos de ação, formulação e validação. O momento *adidático* de ação tem uma característica mais operacional que os demais. O aluno, por vezes de maneira mais empírica, tenta resolver o problema proposto e, a partir dessas ações iniciais, recebe *feedbacks* do meio *adidático* que lhe ajuda a pensar em novas decisões. No momento de formulação o aluno, pautado nas informações do momento de ação, elabora estratégias que podem resolver o problema e as comunica, seja para um sujeito real ou cognitivo, as estratégias que possam levá-lo a resolver o problema proposto. Por fim, no momento *adidático* de validação os alunos presentes buscam validar as estratégias pensadas anteriormente, podendo haver uma confrontação de ideias com as informações propiciadas pelo

[8] "O conhecimento é o meio transmissível (por imitação, iniciação, comunicação, eæ.), mas não necessariamente explicável, para controlar uma situação e obter determinado resultado de acordo com uma expectativa ou exigência social. O conhecimento - ou reconhecimento - não é analisado, mas exigido como um desempenho sob a responsabilidade do ator

O saber é o produto cultural de uma instituição que visa identificar, analisar e organizar o conhecimento de forma a facilitar a sua comunicação, a sua utilização sob a forma de conhecimento ou saber e a produção de novos saberes" (BROUSSEAU; CENTEIO, 1991, p. 176, tradução nossa).

meio podendo confirmar ou refutar as estratégias pensadas. Deixamos claro que diferentemente dos momentos anteriores, esse possui um caráter menos empírico na busca pela validação das estratégias e, essas validações não necessitam ser efetivamente uma prova matemática (BROUSSEAU, 2008). Apesar de serem apresentados nessa ordem, as situações de ação, formulação e validação não são etapas definidas nessa ordem. Ao tentar resolver o problema, os alunos podem percorrer esses momentos em diferentes ordens, podendo ir e retornar para algum desses, caso seja necessário.

A Teoria das Situações Didáticas passou por um processo de evolução a partir do estudo e utilização no processo de ensino nas aulas de matemática. Inicialmente, pensava-se que as situações *adidáticas* dos alunos se encerravam no término dos momentos *adidáticos* de ação, formulação e validação. Entretanto, os professores em sala de aula sentiam que os conhecimentos produzidos pelos alunos ficavam implícitos na resolução dos problemas. Por isso, foi pensado a necessidade de um momento de institucionalização do saber, ocorrendo após os três momentos *adidáticos.* Na institucionalização, o professor confere um *status* aos eventos realizados na sala e, caso não tenha sido explicitado anteriormente, revela o saber que estava em jogo na situação, dando um *status* cultural ao saber (BROUSSEAU, 2008). Ainda que represente um momento importante da teoria, a institucionalização não se caracteriza como um momento *adidático*, pois nela o professor é quem está responsável pelo saber em jogo e não mais os alunos.

Deixamos claro no momento como vemos o uso da Teoria das Situações Didáticas no decorrer da nossa investigação. Como apresentamos, nossa perspectiva da aprendizagem coaduna com o exposto na TSD, na qual buscamos que a professora participante da nossa pesquisa seja um sujeito ativo na construção de seu conhecimento, de modo que não intencionamos apresentar definições e técnicas matemáticas prontas, nem definir metodologias para o desenvolvimento das aulas da professora. Pensamos que o trabalho em conjunto se constitua como um meio antagonista à professora, a partir das situações que ambos (pesquisador e professora) apresentarem, lhe causando momentos de conflitos cognitivos e reflexões sobre seus conhecimentos.

Um outro aspecto que difere do pensado inicialmente na TSD é a relação do sujeito com o saber em jogo na situação pois, como apresenta Brousseau (1996; 2008), apesar de os alunos saberem da intencionalidade didática das situações propostas, eles não conhecem, *a priori,* o saber que está envolto na situação. No caso do trabalho com a professora de Matemática, temos a consciência que o saber discutido durante os encontros não será implícito a ela. Entretanto, acreditamos que os preceitos da Teoria das Situações Didáticas nos ajudarão no decorrer dos encontros com a professora, ao assumirmos uma postura formativa inspirada no papel do professor durante os momentos *adidáticos*, realizando questionamentos e sem apresentar resultados prontos, possibilitando a reflexão da docente sobre os temas discutidos. Apesar de não ter como foco a análise das situações *adidáticas* no trabalho com a professora, é possível que durante a discussão das atividades, a professora possa percorrer alguns momentos característicos inerentes aos momentos de ação, formulação e validação.

Nesse contexto, pensamos ser importante a discussão da TSD e, principalmente, seus modos de uso, pois seus elementos constituem nossa perspectiva de aprendizagem e norteiam escolhas e posturas que tomamos ao longo da investigação. Por fim, inerentes do campo da Didática da Matemática, apresentamos no decorrer desse capítulo a Teoria dos Campos Conceituais, com destaque à ideia de campo conceitual, aprendizagem de competências pelos sujeitos, esquemas, invariantes operatórios, que nos subsidiaram na análise dos conhecimentos da professora, além da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) que tem o papel estruturante para o processo formativo no trabalho com a professora.

2.1 Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC), proposta por Gérard Vergnaud (1996, 2009), é uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro teórico para a aprendizagem de competências complexas. Se pensarmos no cerne da TCC, a teoria não foi desenvolvida especificamente com o cunho didático, como a Teoria das Situações Didáticas. Entretanto, por realizar uma discussão acerca dos processos de aprendizagem, considerando as filiações e rupturas das competências complexas do sujeito frente às situações vivenciadas, a TCC possibilita o seu uso em processos de ensino.

Vergnaud (2009) parte das ideias apresentadas por Piaget para pensar na aprendizagem pelo sujeito, tendo como ponto de partida que “Conhecimento é adaptação” (VERGNAUD, 2009, p. 13). Partindo desse princípio, fazemos um primeiro questionamento: a que o sujeito se adapta? O sujeito se adapta a um conjunto de situações, que constituem a experiência que ele vivencia e contribui para a aprendizagem de novos conhecimentos. Além disso, é importante considerar que além de vivenciar novas situações, há a evolução da organização de sua atividade que ele se adapta. Diferentemente da Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1996), na qual o termo situações é referente às interações do sujeito com o meio e, em especial, situações didáticas às interações que envolvem o professor, o aluno e um saber em um meio com intencionalidade didática, na Teoria dos Campos Conceituais o termo situação se refere a uma tarefa.

Nesse sentido, a experiência é um aspecto incontornável para a aprendizagem do sujeito, tendo em vista que "é ao longo da experiência que um indivíduo, adulto ou criança, encontra a maior parte das situações às quais ele deve se adaptar seja uma experiência cotidiana ou uma experiência profissional" (VERGNAUD, 2009, p.14). Apesar de Vergnaud partir dos estudos de Piaget do desenvolvimento psicogenético, há um avanço no que foi apresentado anteriormente, pois por entender que a aprendizagem advém da vivência de situações, a aprendizagem de novos conhecimentos, pelo sujeito, pode acontecer no decorrer de sua vida, não estando limitado às etapas de desenvolvimento psicogenético apresentado por Piaget (BESSOT, 2014). Assim, podemos distinguir dois diferentes tipos de classes de situações relacionadas aos conhecimentos do sujeito, sendo eles:

> 1- Classes de situações para as quais o sujeito dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação;
> 2- Classes de situações para as quais o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e de exploração, a hesitações, a tentativas abortadas, conduzindo-o, quer ao êxito, quer ao fracasso. (VERGNAUD, 1996, p. 156).

Ao nos depararmos com esses dois tipos de classe de situações, percebemos o quão importante é a necessidade de perpassar por diferentes situações, que contribuem para a formação de um repertório de conhecimentos que subsidiam a ação do sujeito. Pensamos na ação de um professor em sala de aula, que após se formar em um curso de licenciatura no qual estudou algumas estratégias de ensino, se depara com a realidade de uma sala de aula pela qual é responsável. Em um primeiro momento, ele pode ser confrontado com outras situações que não foram abordadas na sua formação inicial, mas terá que conviver e superar para a realização do seu trabalho. Com esse objetivo, o professor pode recorrer a diferentes estratégias, como a conversa com outros professores mais experientes que lhe passam algumas orientações a serem realizadas em sala de aula. Entretanto, por vezes, mesmo seguindo essas orientações o professor não consegue superar esse problema. Isso se deve ao fato de os conhecimentos do sujeito serem de naturezas distintas: enquanto alguns podemos expressar, os conhecimentos predicativos, outros são mobilizados na ação, sendo caracterizados como conhecimentos operatórios (VERGNAUD, 2009).

Dessa maneira, percebemos que apesar de ambos serem conhecimentos do sujeito, eles possuem características distintas e são mobilizados de modos diferentes. A forma operatória do conhecimento é adquirida, em especial, durante a experiência diante de uma situação, tanto no ambiente de formação inicial quanto no contexto profissional. É importante destacar que a experiência não se baseia apenas na familiaridade com as situações encontradas, mas também com as variedades e diferenças das situações. Assim, retomamos a ideia inicial que apresentamos que a experiência e a aprendizagem podem ser vistas como adaptação às situações. (VERGNAUD, 2002).

Os conhecimentos predicativos têm como característica principal a identificação de objetos no real, propriedades dos objetos e relações entre eles. Essa forma, que também pode ser apresentada na forma discursiva, sendo expressos por meio de uma linguagem, tem sua importância pois é por meio deles que os conhecimentos podem ser socializados e compartilhados, contribuindo para a estabilização dos invariantes operatórios em uma determinada comunidade. Isso nos leva à ideia do registro epistêmico que segundo Pastré, Meyen e Vergnaud (2019, p. 30) tem como objetivo "compreender, ao identificar uma situação dada, seus objetos, suas propriedades e suas relações". Esse tipo de registro está relacionado à forma predicativa do conhecimento, nos ajudando a identificar relações na situação e responder questões do tipo: como isso funciona? Entretanto, Vergnaud (2002) menciona que a linguagem natural é redutora em si, pois é difícil expressar todo o conhecimento mobilizado (mesmo que implicitamente) na ação, sendo destacados alguns pontos de relevância mobilizados durante o processo.

Nesse contexto, é necessário levar em consideração os conhecimentos da forma operatória, já que são esses que organizam e pautam a conduta do sujeito na ação. Destacamos que o conhecimento operatório está associado ao *know-how*[9] do sujeito durante a situação que está vivenciando, permitindo-o agir durante a ação. A forma operatória do conhecimento está associada ao registro pragmático, que tem por objetivo o êxito na ação. Apesar de não conseguir explicitar em alguns momentos, salientamos que as ações não são "vazias", já que são subsidiadas por um amálgama de conhecimentos do sujeito, pistas e percepção das relações presentes na situação, entre outras. Quando tentamos explicitar um conhecimento operatório, podemos nos remeter ao exemplo do *iceberg* apresentado por Vergnaud (1996) que menciona que a parte explicitável do conhecimento é apenas uma porção visível do *iceberg*, sendo necessário estar ciente da existência de outros conhecimentos implícitos. Portanto, o conhecimento não é fácil de comunicar e ensinar, o que nos leva a pensar na importância da

[9] Segundo o dicionário online de português, o significado de know-how se refere a uma aptidão ou habilidade para executar tarefas práticas ou para resolvê-las com competências. Disponível em:< https://www.dicio.com.br/know-how/>. Acesso em 03 de fevereiro de 2021

experiência e do trabalho coletivo na formação e não apenas na tentativa de explicitação de conhecimentos para o professor (VERGNAUD, 2002, p. 19).

Retomando o exemplo do professor iniciando sua carreira docente, percebe-se que por mais que o professor experiente explicite algumas estratégias para que o docente iniciante consiga superar as dificuldades encontradas, não é possível expressar todos os conhecimentos envolvidos nessa situação somente pela forma predicativa do conhecimento. Assim, o professor iniciante faz tomadas de ações, que lhe causam hesitações e reflexões, contribuindo para a construção de novos conhecimentos para a superação das dificuldades iniciais. Com o decorrer de sua carreira docente, quando deparado com situações semelhantes, o professor já dispõe de conhecimentos que lhe permitem superar essas dificuldades, como exposto anteriormente nas diferentes classes de situações. Assim, por mais que haja o estudo de algumas situações prévias na formação inicial e conversas com colegas, “a experiência é incontornável. Não podemos encontrar unicamente pela formação uma competência tão rica e adaptativa quanto aquela constituída no decorrer da experiência.” (VERGNAUD, 2009, p. 18).

Diante do exposto, percebemos que há classes de situações em que o sujeito já dispõe de um conjunto de conhecimentos que pautam sua ação. Vergnaud (1996, 2009) caracteriza um ponto central na Teoria dos Campos Conceituais que é a ideia de esquema. O esquema é a organização invariante da atividade para uma classe de situações. Retomamos o exemplo do professor em sala de aula. Após apresentar um novo conteúdo, ele propõe algumas situações para seus alunos responderem. Durante a atividade, um aluno com dúvida em um problema lhe procura, e o professor decide ir ao quadro reexplicar o conteúdo para a turma, repetindo essa organização com as demais turmas. Percebemos que sempre que confrontado com essa situação, o professor possui uma organização invariante da atividade caracterizando um esquema. Deixamos claro que o que é invariável no esquema é a organização, tanto motora, quanto do pensamento, e não apenas a conduta observável. Desse modo, Vergnaud (2009, p. 21) apresenta os quatro elementos que compõem um esquema, sendo eles:

- Objetivos, subobjetivos e antecipações;
- Regras em ação de tomada de informação e de controle;
- Invariantes operatórios;
- Possibilidades de inferências em situação.

Essa segunda definição de esquema, por meio dos quatro componentes, apresenta o ganho de serem analíticos, pois podemos compreender os esquemas do sujeito ao considerar cada componente que o compõem. Os objetivos são a parte intencional do esquema, que é essencial na organização da atividade, podendo se decompor em subobjetivos hierarquicamente agenciados, gerando antecipações. As regras em ação podem ser consideradas a parte geradora do esquema, sendo responsáveis pelo transcurso da conduta e da atividade. São as regras em ação que geram não apenas o comportamento observável, mas toda a atividade não observável, como as inferências (VERGNAUD, 2007). Pensando em um modelo analítico, mesmo com suas limitações, é possível pensar nas regras em ação na forma se ..., então... .

Os invariantes operatórios são compostos pelos conhecimentos em ação do sujeito, sendo decisivos nas questões epistêmicas e cognitivas, pois "em uma dada situação o sujeito dispõe de vários tipos de conhecimentos para identificar os objetos e suas relações e definir, a partir disso, objetivos e regras de conduta pertinentes" (VERGNAUD, 2009, p. 23). Uma das principais funções dos invariantes operatórios é coletar informações e inferir consequências úteis para a ação. É importante destacar que esses invariantes nem sempre são explícitos ou explicitáveis, e até mesmo conscientes para o sujeito. Os invariantes operatórios podem ser distinguidos em dois tipos, como os conceitos em ação e os teoremas em ação. Os conceitos em ação estão relacionados às retiradas de informações pertinentes da situação, como a identificação de objetos e as propriedades e relações. Vergnaud (2009) destaca que esses objetos podem se tratar de algo perceptível materialmente ou também de objetos que foram construídos pela ciência, cultura, ou pelo próprio sujeito. Já os teoremas em ação são proposições tidas como verdadeiras, para o sujeito, mobilizadas na ação da situação. Essas afirmações, apesar de serem verdadeiras para o sujeito, podem ser verdadeiras ou falsas do ponto de vista científico, determinando o domínio de validade delas.

Pensamos na seguinte afirmação: na análise combinatória, a ordem de escolha dos elementos é importante na formação de um conjunto. Essa afirmação é verdadeira nos problemas de permutação e arranjo, porém, nos problemas de combinação está fora de seu domínio de validade. Por outro lado, consideramos que conceitos em ação não são questionáveis quanto a sua validade, mas sim a pertinência na situação, enquanto os teoremas em ação podem ser afirmações verdadeiras ou falsas, apesar que para o sujeito trata-se de uma verdade. Pensar nesses aspectos contribui na identificação e análise de conhecimentos e dificuldades do sujeito, pois ao identificá-los sendo utilizados fora de seu domínio de validade, é possível propor situações que causem desequilíbrios cognitivos no sujeito com o intuito de desestabilizar teoremas em ação errôneos e construir novos conhecimentos.

Por fim, podemos entender as inferências de um esquema como as relações produzidas pelo sujeito durante a ação. Dessa maneira, são realizadas inferências entre as proposições mobilizadas de acordo com as características das situações, contribuindo para a continuidade da ação e tomada de novas decisões. Isso ocorre, pois, ao vivenciar uma situação o sujeito pode mobilizar diversos invariantes, de acordo com a complexidade da situação, sendo necessário relacioná-los. As inferências estão presentes em todas as atividades da situação, tendo em vista que “a atividade em uma situação não é nunca automática, mas sim regulada por adaptações locais, controle, ajustes progressivos” (VERGNAUD, 2007, p. 14).

Nesse contexto, ao pensarmos nos objetos matemáticos não podemos reduzir um conceito a uma simples definição, sendo necessário considerar “um conjunto de invariantes mobilizados na ação do sujeito” (VERGNAUD, 1996, p. 166). Desse modo, a TCC apresenta a ideia de conceito sendo composto pelos três conjuntos indissociáveis (S, I, L):

- Conjunto das situações que dão sentido ao conceito (S);
- Invariantes operatórios (I): compostos pelos conhecimentos que estruturam as organizações da atividade que podem ser mobilizados nas situações propostas;
- Conjunto da linguagem (L): são compostos pelas representações linguísticas e simbólicas que permitem representar o conceito e suas relações.

O conjunto das representações na Teoria dos Campos Conceituais tem mais que o objetivo de representar uma situação. Ele tem como aspecto o fluxo de consciência de cada sujeito, contribuindo para a identificação dos invariantes. Além disso, contribui para o raciocínio, na organização estruturante da ação, inferências e antecipação dos efeitos e dos objetivos. Assim, a representação não deve ser vista somente como um repertório de conceitos e formas simbólicas, mas como uma atividade, uma vez que “Os esquemas fazem parte integrante da representação, da mesma forma que as situações são para a atividade do sujeito e sua organização, uma referência ao real ao menos tão forte quanto os objetos e suas propriedades” (VERGNAUD, 2009, p. 26).

Pensar na aprendizagem de um conceito apenas como a apreensão de sua definição não é adequado, pois são de naturezas distintas. Uma definição possui um caráter social para a comunidade matemática, enquanto a ideia de conceito na Teoria dos Campos Conceituais há o enfoque cognitivo no sujeito perante uma situação. Para a aprendizagem de um conceito, o sujeito deve vivenciar um conjunto de situações que dão sentido ao conceito, perpassando pelas representações e invariantes que estão relacionados ao mesmo.

Nesse contexto, os conceitos não se encontram isolados, podendo ser organizados em campos conceituais, sendo que um campo conceitual é "um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão" (VERGNAUD, 2009, p. 29). A organização dos conceitos em campos conceituais permite designar subcampos da experiência, em torno de situações, invariantes e conceitos, além de ter em mente que a aprendizagem de um conceito é um processo jamais acabado e tendo em vista o estudo de novas situações que estão relacionadas, de modo que destacamos que independentemente do nível, é possível que ocorra a aprendizagem de novas competências pelo sujeito, a partir da ação em novas situações.

2.1.1 Campo da didática profissional

A Teoria dos Campos Conceituais se pauta nas noções de esquemas e processos de assimilação e acomodação propostos nos trabalhos de Piaget. Segundo Vergnaud, a aprendizagem é possível ao longo da vida do sujeito a partir das situações que atribuem sentido ao conceito, não limitando a um nível escolar. Assim, é possível pensar na aprendizagem do sujeito em diversos momentos de sua vida, dentre eles, na sua trajetória profissional. Desse modo, surge um primeiro questionamento: como é possível analisar o conhecimento do sujeito em sua trajetória profissional (VINATIER, 2007)?

Pastré, Mayen e Vergnaud (2019) apresentam que a ideia de campo profissional surgiu a partir do campo da prática e formação de adultos, em confluência com as correntes teóricas da psicologia do desenvolvimento, ergonomia cognitiva e a didática. A partir da verificação da dificuldade existente na análise do trabalho desenvolvido pelo sujeito, tendo em vista que o foco estava na construção de ações que buscavam a formação, Pastré (2017) destaca que o desenvolvimento da didática profissional tem o foco na análise do trabalho. Desse modo, na didática profissional "a análise do trabalho responde por um duplo objetivo - construir conteúdos de formação correspondentes à situação profissional de referência e utilizar as situações do trabalho como suporte para a formação de competências" (PASTRÉ, 2017, p. 626)

Evidenciamos que o campo da didática profissional não exclui os dispositivos de formação para o sujeito, mas atribui um destaque na análise do trabalho que o sujeito desenvolve na sua prática profissional e os conhecimentos envolvidos nessas ações. Nesse contexto, a didática profissional pautou-se das contribuições advindas do campo da psicologia do trabalho de língua francesa que possibilitou uma forma de examinar a dimensão cognitiva do trabalho. A ideia de trabalho nessa vertente é mais que a de realizar a ação profissional, pois se trata de uma conduta que o sujeito busca se adaptar às características da situação de maneira ativa. Assim, conforme destacam Ombredane e Favarge (1955 *apud* PASTRÉ, 2017) trabalhar envolve o diagnóstico e a análise das situações, elaboração de estratégias para a resolução dos problemas presentes, planejamento e uso das estratégias. Além disso, Leplat (1995; 2000 *apud* PASTRÉ, 2017) afirma que é necessário considerar que o trabalho realizado pelo sujeito vai além da tarefa prescrita, pois além de haver momentos de criação e adaptação às situações, devido às características reais enfrentadas o trabalho efetivado nunca se reduz ao que foi previamente apresentado.

Retomando o contexto profissional docente, é possível verificar essas características elencadas por Pastré (2017) relacionadas ao efetivo trabalho do professor. Se pensarmos na tarefa de ensinar um determinado conceito aos estudantes, por mais que o professor estruture sua aula e planeje suas atividades, no momento em que está em sala de aula ele se depara com situações que não eram consideradas inicialmente. No caso da sala de aula, há a possibilidade do professor ser confrontado com dificuldades de diferentes naturezas, como a dificuldade dos estudantes em temas já estudados, indisponibilidade de material escolar, questões disciplinares dos alunos, falta de interesse, entre outros fatores. Assim, diante da problemática que o professor é confrontado em sua aula e, tendo em vista a intenção de realizar a tarefa prescrita (o ensino do saber em jogo), é necessário que o professor consiga diagnosticar a situação que lhe é apresentada, elaborar e desenvolver estratégias viáveis para a situação. Podemos citar como exemplo diante da indisponibilidade de materiais para todos os alunos, a estratégia em que o professor modifica a organização da turma, colocando os estudantes para trabalhar em grupos.

A partir das questões apresentadas da psicologia do trabalho, percebe-se a existência da estrutura cognitiva da tarefa, que é mobilizada pelo sujeito durante sua realização. Com o intuito de explicar como se constituem e se desenvolvem competências profissionais, Pastré (2017) destaca o estudo do quadro teórico da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 2008), como uma teoria que "forneceu o elo que faltava para adaptar o quadro teórico da conceitualização na ação à didática profissional: um método para analisar uma classe de situações identificando os conceitos a serem mobilizados para resolver os problemas presentes nessa classe específica" (PASTRÉ, 2017, p. 629). Dessa maneira, em conformidade com o que apresentamos no tópico anterior, a Teoria dos Campos Conceituais fornece um quadro teórico que possibilita a análise de aspectos cognitivos do sujeito na ação, que nesse caso se refere ao trabalho no campo profissional.

Relacionando a ideia de conceito da TCC, percebemos que o campo profissional pode ser entendido a partir de uma variedade de situações presentes na prática profissional de um sujeito, lembrando a ideia de campo conceitual. Apesar de destacar a importância da variedade de situações necessárias para a aprendizagem, o campo conceitual se difere do campo profissional ao levar em consideração o enfoque das situações, pois enquanto no primeiro o foco está no saber em jogo, no campo profissional é a atividade a ser realizada que é destacada. Em conformidade com o apresentado por Pastré, Mayen e Vergnaud (2019, p. 68) na "didática profissional, a relação entre a situação e o saber a mobilizar não é claramente estabelecida. De fato, o que se procura é fazer aprender, é uma atividade e não um saber".

Essa diferenciação resulta em algumas consequências a serem consideradas quando se pensa em campo profissional, pois nele há outros elementos que devem ser levados em conta, como a presença de objetos materiais, situações reais a serem solucionadas, além de envolver diversos conhecimentos parciais do sujeito para diagnosticar as situações. A atividade na qual o sujeito está envolto leva em conta uma complexidade de fatores a serem considerados, como o contexto do trabalho, a interação com outras pessoas, prazos, custos, entre outras (PASTRÉ, MEYEN, VERGNAUD, 2019).

Com o enfoque nas situações às quais os sujeitos são confrontados no seu ambiente profissional, Vergnaud (2009, p.17) destaca a ideia de competência a partir de algumas abordagens:

- Um sujeito A é mais competente que B se souber fazer algo que B não sabe fazer;
- A é mais competente se o faz de uma maneira melhor (mais rápido, eficiente, entre outros);
- A é mais competente, se ele tem um repertório de recursos que lhe permitem adaptar o seu comportamento para os diferentes cenários que possam surgir;
- A é mais competente se estiver menos desamparado diante de uma situação nova, nunca encontrada antes.

Ao analisarmos as quatro abordagens apresentadas, percebemos que a primeira tem um enfoque mais no resultado, considerando se o sujeito resolve ou não a atividade que lhe é apresentada. Por outro lado, as demais abordagens não consideram apenas o resultado obtido, mas sim a atividade que o sujeito realizou, e para a análise dessa atividade é possível retomar a ideia de esquemas. Destaca-se nesse contexto a relação entre esquemas-situações, pois não há esquemas sem uma situação, enquanto que as situações são identificadas dentro de uma classe por meio dos esquemas do sujeito (PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2019). Nesse sentido, Pastré (2017) salienta que o uso da ideia de esquemas permite analisar a invariância e a adaptabilidade do sujeito diante das situações. Uma das funções dos esquemas é o questionamento do real, possibilitando transformações quando estão diante de novas situações, de modo que a competência não consiste em repetir continuamente processos e modos de operações, mas se ajustar às condições para que a ação seja bem adaptada. Além disso, o conceito de invariante operatório, um dos componentes do esquema, possibilita refletir sobre as relações entre a teoria e a prática, pois "se a conceitualização pode ser pensada no coração da ação, como princípio organizador, […] Essa conceitualização só pode ocorrer na forma de um conhecimento em ato, aquele mobilizado, por exemplo" (PASTRÉ, 2017, p. 628).

Novamente pensando no trabalho de um professor de Matemática, citamos como exemplo o caso de um professor que tem como organização de aulas a ideia de ensinar seus alunos por meio da sua explanação, com a apresentação da definição dos conceitos, exemplos de situações e a proposição de exercícios que visam a repetição do apresentado. Ao considerarmos as ideias de esquemas e, em especial invariantes operatórios que são destacados no campo da didática profissional, é possível compreender as escolhas e ações realizadas pelo docente no desenvolvimento da sua atividade, como a identificação de conhecimentos em ação advindos de uma prática didática diretiva, pautada na epistemologia empirista (BECKER, 2001).

Em concordância à ideia de que não é possível dissociar a aprendizagem da atividade, Pastré, Mayen e Vergnaud (2019) ao analisarem o contexto do campo profissional apresentam as atividades produtivas e construtivas. Uma atividade em si tem a característica de ser produtiva na medida que transforma o real (material, social ou simbólico), como na resolução da situação proposta no campo profissional, enquanto a atividade construtiva ao transformar o real, o sujeito transforma a si. Os autores ressaltam que as atividades construtivas e produtivas são indissociáveis, mas se considerar a temporalidade das atividades, elas podem ser diferentes. A atividade produtiva ocorre e se encerra ao fim da realização de uma atividade, o fim de uma ação, seja com o êxito ou o fracasso. Já a atividade construtiva não tem essa temporalidade definida, uma vez que o sujeito pode refletir sobre suas ações, sobre a sua compreensão da situação, as decisões tomadas, mesmo após o término da atividade produtiva.

Ao considerar essas diferenciações, podemos compreender algumas diferentes maneiras de pensar a aprendizagem, como as aprendizagens incidentais e intencionais. Na aprendizagem intencional o foco está na aprendizagem do sujeito, havendo uma intencionalidade didática, sendo privilegiadas as atividades construtivas que propiciam a reflexão e a construção do conhecimento do sujeito. Nesse sentido, as atividades produtivas, que têm o foco na resolução de situações, se tornam um apoio para objetivo que é a aprendizagem a partir da reflexão da situação proposta. Vemos essa realidade nos ambientes escolares, no qual propomos aos alunos situações e atividades com o objetivo da construção de um saber, e não pensando a atividade como o objetivo-fim. Podemos verificar essa característica na ideia de situação fundamental, presente na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008), na qual o professor propõe um ou mais problemas aos alunos com o objetivo da mobilização e consequente construção do conhecimento que está envolto na situação. Assim, a aprendizagem intencional tem características mais reprodutíveis e a possibilidade de institucionalização dos conhecimentos presentes.

No campo profissional, muitas vezes essa ordem é alterada, tendo em vista que o enfoque do sujeito é a atividade produtiva, ocorrendo a aprendizagem incidental. Nessa aprendizagem, o objetivo-fim do sujeito é a resolução da tarefa que está presente no seu contexto profissional. Apesar disso, conforme ressaltam Pastré, Mayen e Vergnaud (2019) é possível que haja a reflexão do sujeito, suas escolhas e análise da situação, possibilitando a construção de um conhecimento profissional, pois as atividades produtivas e construtivas são indissociáveis. O que muda nas aprendizagens incidentais e intencionais é o foco das atividades, pois na aprendizagem incidental a atividade construtiva pode ser considerada um efeito da atividade produtiva. Dessa maneira, a atividade produtiva deixa de ser apenas um suporte e tem um papel central no processo de aprendizagem, possibilitando as reflexões a partir da sua realização. Esse contexto de aprendizagem é encontrado no ambiente profissional do sujeito, no qual ele é envolto de situações a serem resolvidas por meio de ações, e a partir de um processo reflexivo pode ocorrer a atividade construtiva.

Dessa maneira, "A didática profissional escolheu enfatizar a análise da atividade construtiva que acompanha a atividade produtiva, isto é, analisar a aprendizagem sob sua forma antropologicamente primeira, a aprendizagem incidente" (PASTRÉ, MEYEN, VERGNAUD, 2019, p. 26). Deixamos claro que não afirmamos que uma aprendizagem deve ser privilegiada em detrimento da outra. Entendemos que é importante para nós, pesquisadores, estarmos cientes de que o processo de aprendizagem que ocorre por meio de adaptação às situações propostas pode ser oriundo de diferentes processos. Enquanto na aprendizagem intencional as situações propostas têm o intuito de provocar a aprendizagem, no ambiente de trabalho (campo profissional) o sujeito também está imerso em um ambiente que pode ocorrer a aprendizagem, apesar de o foco estar na resolução das situações que emergem em seu contexto. Assim, é importante compreender que pode coexistir um sujeito conhecedor e um sujeito atuante, se levarmos em consideração que o conhecimento não existe apenas de uma forma, mas de duas:

a forma operatória e a forma predicativa. Uma das características da forma predicativa é a possibilidade de identificação dos objetos, propriedades, relações dos objetos, enquanto é a forma operatória que permite compreender como uma ação é organizada, além de adaptações da ação para as situações vivenciadas.

Retomando a ideia de campo profissional para a prática do professor, percebe-se que o docente não opera em um ambiente estático, mas está envolto em situações dinâmicas, que são compostas por questões didáticas, burocráticas, interações humanas, questões culturais, sua constituição histórica, entre outros. Nesse contexto, ser professor envolve muito mais do que preparar a aula e desenvolvê-las, mas a presença de 3 componentes intrínsecos a sua prática: os objetos técnicos, objetos de uso e as formas de conversação com o ambiente que está inserido (PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2019). Os objetos técnicos estão relacionados aos saberes envoltos na área de formação do professor, no caso de um professor de matemática, seus conhecimentos e relações com os saberes matemáticos que irá trabalhar com seus alunos. Assim, esse primeiro componente do campo profissional do professor influencia as formas da realização do seu trabalho pois a partir dos conhecimentos e relações dele com um determinado saber, o docente determinará as situações que serão propostas aos seus estudantes.

O segundo componente do campo profissional, os objetos de uso, estão relacionados ao trabalho do professor em relação com seus alunos. Quando nos referimos da relação do professor com os estudantes, não estamos nos referindo apenas a questões de diálogos e bom ambiente com a turma (que também fazem parte desse componente), mas também a compreensão de processos de aprendizagem dos estudantes e metodologias de ensino que podem contribuir para a aprendizagem dos alunos.

Tomamos como exemplo hipotético dois professores de Matemática no momento do ensino de equações do 1º grau com suas turmas de 7ª ano do ensino fundamental. Um primeiro professor inicia o estudo do tema a partir da proposição de algumas equações e explicita que o objetivo da tarefa é encontrar o valor da incógnita que satisfaz a equação. Para isso, ele apresenta como técnica a ideia da operação inversa, "invertendo a operação do número que mudar de lado da igualdade". Enquanto isso, o segundo professor inicia a aula com a apresentação de situações representadas em uma balança de equilíbrio e solicita que seus alunos busquem estratégias para encontrar o valor do peso desconhecido, tendo como objetivo que seus alunos iniciem o trabalho com o princípio da igualdade. Nesses exemplos, relacionados ao componente de objetos de uso, evidenciamos que as escolhas didáticas dos professores estão relacionadas aos modos como seus alunos apreendem e as suas concepções epistemológicas de aprendizagem.

Por fim, a terceira componente do campo profissional do professor são as formas de conversação com o ambiente que está inserido. Refletindo acerca da ideia apresentada por Chevallard (1996) sobre instituições e relações institucionais[10], percebe que o professor em seu campo profissional está inserido em uma instituição, no caso a escola, que possui pessoas, saberes e regras, as quais ele deve se relacionar para a realização de seu trabalho. Assim, o trabalho do professor no seu campo profissional vai além da preparação e desenvolvimento de suas aulas, devido a necessidade de considerar outros elementos para realizar suas tarefas, por exemplo: as regras de funcionamento da escola que está inserido, disponibilidade de objetos físicos e ambientes de trabalho (como materiais didáticos e laboratórios), quantidade de aulas por cada turma, espaço físico da sala de aula, quantidade de alunos por turma, entre outros fatores.

Cabe ressaltar que não estamos nos referindo a esses elementos como algo que somente atrapalha o trabalho do professor, mas ressaltando a necessidade de o docente considerá-los durante sua prática. Apesar disso, por mais que o docente reflita sobre esses elementos, percebe-se que nem todos estão sob controle, sendo considerado uma restrição em seu campo profissional. Chevallard (2009, p. 12, tradução nossa) caracteriza que

> Em princípio, tudo é condição; mas diremos que uma condição é uma restrição para uma certa instância U - uma pessoa ou instituição - quando U não pode, tendo em vista todas as outras condições vigentes, razoavelmente esperadas, por um determinado período de tempo, ser capaz de modificar esta condição. Colocando de outra forma, uma restrição para U é uma condição não modificável por U. Condições que não aparecem como restrições serão chamados de condições, simplesmente, ou, para evitar qualquer ambiguidade, condições modificáveis (por U).

Em concordância com o exposto no excerto supracitado, no caso do campo profissional do professor, Wozniak (2007, p. 1809, tradução nossa) explicita que essas condições e restrições presentes não são reduzidas apenas ao "imediatamente identificável *dentro* da sala de aula: o professor e os conhecimentos dos alunos, o material didático disponível, a organização temporal do ensino, etc". Assim, é necessário considerar também "algumas condições "exógenas" e restrições provenientes do exterior da sala de aula e até mesmo de fora do sistema educacional" (WOZNIAK, 2007, p. 1809, tradução nossa).

[10] Chevallard (1996, p. 129) destaca que "a instituição poder ser quase o quer que seja. […] Uma escola é uma instituição, tal como o é uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição <<trabalhos orientados>>, a instituição <<curso>>, a instituição <<família>>". Assim, Chevallard descreve a instituição como um local, não necessariamente físico, no qual estão associados objetos (por exemplo: pessoas, saberes, entre outros) que constituem uma relação, chamado de relação institucional

Por fim, relacionados a forma de conversação com o ambiente que está inserido, Pastré, Mayen e Vergnaud (2019) afirmam que a atividade docente envolve situações com diferentes prazos de realização que devem ser gerenciadas pelo professor. Os autores identificam a presença de atividades com diferentes prazos de realização, como atividades de curto prazo como a gestão de uma aula; escolhas de tarefas que provoquem a aprendizagem; suas adaptações, simplificando-as ou dificultando-as de acordo com seus alunos; e atividades de longo prazo como o cumprimento do currículo; análise da aprendizagem dos alunos no bimestre, semestre e no ano letivo.

2.2 Engenharia Didática

Apresentaremos alguns preceitos da Engenharia Didática (ED), desenvolvida como uma metodologia de pesquisa no campo da Didática da Matemática. A Engenharia Didática foi desenvolvida a partir dos trabalhos em conjunto dos pesquisadores e professores nas décadas de 1970 e 1980, em especial o de Brousseau na teorização da Teoria das Situações Didáticas. A ED foi modelada como uma organização metodológica que contribuísse para a elaboração, desenvolvimento e análise de sequências didáticas, sendo sistematizada e publicizada por Michèle Artigue (1996) como uma metodologia de pesquisa estruturada no campo da Didática da Matemática. Além disso, expomos outros usos da Engenharia Didática, como na criação de sequências didáticas para o ensino típico, além de possibilidades para a formação de professores, que nos propomos a fazer nesta nossa investigação.

2.2.1 Engenharia Didática como metodologia de pesquisa

A Engenharia Didática é uma metodologia de pesquisa que fornece um quadro teórico para a elaboração, desenvolvimento e análise de sequências de ensino (ARTIGUE, 1996). Nesse contexto,

> A Engenharia Didática é sobre a criação de modelos consistentes e relevante e realizar dispositivos de ensino de um conhecimento, destinado a descrever ou prever, e a explicar os eventos observáveis de um determinado episódio de ensino (situações ou currículo) observadas ou previstas:
>
> - Observado, a fim de reunir as informações que possibilitarão a explicar *a posteriori* o seu progresso e os seus resultados, e permitir a sua reprodução.
>
> - Considerado para determinar as condições reprodutíveis (realizável e transmissível) do seu curso e seus resultados observáveis. O estudo da consistência e relevância desses modelos refere-se a um exame crítico de todos os conceitos

> relacionados ao ensino, aprendizagem e a própria constituição do assunto ensinado (BROUSSEAU, 2013, p. 4, tradução nossa).

Dessa maneira, a Engenharia Didática foi desenvolvida no campo da Didática da Matemática com o intuito de contribuir no desenvolvimento de investigações em que são realizadas a elaboração e análise de sequências de ensino. Dada a sua origem nos trabalhos em conjunto dos professores e pesquisadores nos IREM, a Engenharia Didática emergiu a partir do envolvimento de professores, pesquisadores e alunos, constituindo uma experiência de ensino para um determinado objeto matemático. Nesse sentido, com a ED é possível criar condições para a observação, possibilitando o estudo científico de fenômenos didáticos, além de testar a validade de teorias e métodos (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2016).

Percebe-se que a Engenharia Didática se situa na interseção de duas preocupações existentes no campo da Didática da Matemática, conforme ressaltado por Perrin-Glorian e Bellemain (2016, p. 4), sendo elas: o estudo didático da Matemática, considerando o estudo da organização matemática consonante ao projeto de ensino; e a observação das atividades[11] matemáticas dos alunos e dos professores diante dos problemas propostos na organização matemática. Nesse sentido, a ED está intrinsecamente ligada à construção dessa ciência, não havendo separações entre a teoria, observação e a prática, tendo em vista que o desenvolvimento teórico da ED surge a partir da observação, em conformidade ao que é apresentado por Bessot (2011, p. 32 *apud* PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2016, p. 6, tradução nossa, grifo do autor):

> *A teoria das situações produz ferramentas teóricas específicas dialeticamente com engenharia didática que colocará em teste essas ferramentas teóricas e produza novas. A teoria é então o instrumento de consistência verificando os resultados assim para eliminar as contradições, não entre teoria e prática, mas na interpretação do que é observado, entre o necessário e o contingente.*

Sua estrutura possibilita ao pesquisador uma organização na elaboração e desenvolvimento de sequências didáticas, levando em consideração aspectos do objeto matemático e de outros elementos envoltos no processo de ensino, como os alunos com os quais serão desenvolvidas as atividades, as condições e restrições que estão presentes na situação, levantamento de possibilidades de eventos que podem ocorrer e como superá-los, caso seja necessário e um meio analítico das atividades desenvolvidas.

[11] Compreendemos que para Vergnaud a palavra atividade é vista no sentido de o sujeito estar em atividade, no sentido da ação do sujeito. Mas deixamos claro que, predominantemente, no decorrer do texto utilizamos a palavra atividade no sentido de atividades matemáticas, como situações matemáticas.

Ao desenvolver a metodologia da Engenharia Didática foram organizados quatro momentos para a realização das sequências de ensino, sendo elas: a análise preliminar; o desenvolvimento da sequência didática e a análise *a priori*; a experimentação e a análise *a posteriori*. Apesar de estar organizada em 4 etapas, a Engenharia Didática não tem como obrigatoriedade a rigidez em sua estrutura, sendo possível o pesquisador retomar alguma etapa anterior caso seja necessário, tendo em vista que a realização da ED "visa permitir o estudo empírico de fenômenos didáticos" (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2016, p. 08).

O conhecimento matemático não é um objeto cristalizado, imutável desde sua criação. A Matemática é uma ciência humana, e como tal, passa por transformações e descobertas no seu desenvolvimento. O pesquisador e/ou professor têm como função levar em consideração essa característica no processo de transposição do saber matemático para situações de ensino em sala de aula, pois "conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos" (BRASIL, 1997, p. 26). Nesse sentido, na primeira etapa da Engenharia Didática, a análise preliminar, trata-se da constituição de um quadro teórico pautado na análise epistemológica do conteúdo estudado, do ensino habitual e seus efeitos, das dificuldades e concepções de alunos quando estudam o tema, entre outros aspectos que podem contribuir com o seu objetivo para a construção da sequência didática (ARTIGUE, 1996). Dessa maneira, essa etapa não se trata simplesmente de um levantamento matemático do objeto, estando presente também aspectos epistemológicos, cognitivos e institucionais que servirão como referência para as demais etapas da ED.

Os aspectos epistemológicos são referentes ao conteúdo que será desenvolvido na sequência didática, considerando a evolução histórica, os obstáculos que foram vivenciados e relações com outros objetos matemáticos. Nos aspectos cognitivos são abordados o desenvolvimento do público-alvo com qual será desenvolvida a atividade, dificuldades já encontradas relacionadas no trabalho com esse conteúdo, escolhas didáticas que contribuíram para a aprendizagem do conteúdo, entre outros. Por fim, os aspectos institucionais também são considerados, como as condições de ensino nas quais a sequência didática será desenvolvida: o currículo institucional, o tempo disponível para a atividade, as características da escola e da turma escolhida, as condições existentes e restrições impostas na situação. Para o desenvolvimento das análises preliminares, pode-se utilizar de estudos originais, além de fontes bibliográficas de outras áreas do conhecimento como história, psicologia cognitiva, tendo em vista o quadro teórico ao qual está vinculada, para a elaboração de atividades e hipóteses da pesquisa.

O segundo momento da ED é a elaboração da sequência didática e a análise *a priori* da mesma. Para a elaboração da sequência didática, levando em consideração os resultados obtidos na etapa anterior e os aportes teóricos que norteiam a investigação, o pesquisador organiza situações que possibilitem a construção de um novo conhecimento a partir dos conhecimentos prévios dos alunos, além de considerar as influências do meio *adidático* no processo de aprendizagem. Assim, no momento da elaboração de uma sequência didática o pesquisador determina as atividades da sequência didática e as variáveis didáticas[12] que contribuirão com o objetivo da investigação. Assim, são realizadas as análises *a priori*, com o objetivo do levantamento de hipótese das estratégias e resoluções que podem ocorrer no desenvolvimento da sequência didática. É necessário ter em mente que na análise *a priori* o pesquisador realiza as hipóteses tendo como referência o aporte teórico e os resultados das análises preliminares. Esse momento é de suma importância, pois durante a realização das atividades "o pesquisador estará mais preparado para compreender o que esses alunos estão fazendo e, consequentemente, saber que tipo de intervenção deve realizar para favorecer a aprendizagem" (BITTAR, 2017, p. 107).

A experimentação é o momento no qual as atividades elaboradas são desenvolvidas em sala de aula com os alunos. Nesse momento que são observados os efeitos das escolhas do meio *adidático* e os *feedbacks* que são proporcionados aos alunos, além de suas interações, tendo em vista a evolução de seus conhecimentos.

Por fim, a partir dos dados produzidos na experimentação são realizadas as análises *a posteriori* da sequência didática e a validação. Esse processo é pautado na análise das produções dos alunos (*a posteriori)* e a confrontação com as hipóteses realizadas na análise *a priori*, constituindo a validação da Engenharia Didática. Durante esse processo, o objetivo é analisar a evolução do aluno no decorrer do processo vivenciado, além de observar se o meio proposto para o desenvolvimento das atividades possibilitou retroações para a reflexão dos alunos. Como indica Bittar (2017), a análise *a posteriori* deve ser feita ao longo da investigação, pois esse movimento pode redefinir os rumos da sequência didática. Esse processo da validação permite verificar se o meio desempenhou o papel esperado, como previsto na análise *a priori,* além de tentar explicar eventos não previstos inicialmente. Dessa maneira, as concordâncias encontradas podem contribuir para a validação de alguma hipótese teórica, enquanto os eventos que não foram antecipados *a priori* podem ser ainda mais relevantes, pois podem revelar uma

[12] As variáveis didáticas são escolhas nas situações propostas que interferem diretamente nas estratégias mobilizadas pelos alunos. Elas têm como função levar os alunos a utilizarem determinadas estratégias, em detrimento de outras (ARTIGUE, 1996).

inadequação do meio ou falta no aporte teórico, podendo revisar hipóteses e refinar conceitos teóricos (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015; PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2016). Há diversas investigações que utilizam a metodologia da Engenharia Didática no Brasil, nas quais podemos evidenciar que o trabalho de pesquisa, produção da sequência didática, elaboração das hipóteses, desenvolvimento das atividades com os alunos e as análises ficam a cargo do pesquisador, como na pesquisa de Silva (2011), que apresentamos a seguir.

A pesquisa de Silva (2011) intitulada "Um estudo sobre a noção de limite de progressões geométricas infinitas com os alunos do Ensino Médio" teve como objetivo geral analisar a construção da noção de limite por alunos do ensino médio, num estudo de progressões geométricas infinitas. Para isso, a autora desenvolveu uma sequência didática composta de 12 sessões (de aproximadamente 50 minutos), sendo divididas em 6 blocos de atividades e totalizando 15 tarefas ao longo da sequência, utilizando como aportes teóricos e metodológicos a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996), a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996) e a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 3º ano do ensino médio, dos quais 6 foram selecionados para a análise da pesquisa devido à assiduidade de 90% nas sessões propostas.

No decorrer da investigação, Silva (2011) analisou que os alunos apresentavam dificuldades no reconhecimento de uma sequência numérica e na compreensão no conceito de limite, como a noção de infinito potencial. No desenvolvimento das atividades propostas, a pesquisadora evidenciou que os alunos conseguiram compreender a ideia de sequências, como em atividades que deduziram a fórmula do termo geral da Progressão Geométrica (PG) e a Soma dos n primeiros termos de uma PG. Além disso, verificou-se que algumas escolhas didáticas, como o uso de representações figurais, possibilitaram a desestabilização de conhecimentos e evidenciaram dificuldades como a noção de infinito potencial. É importante destacar que, condizente ao apresentado por Vergnaud (1996), a aprendizagem de um conceito é um processo e a pesquisa realizada por Silva (2011) constituiu uma parte desse caminho a ser percorrido, conforme ressaltado pela pesquisadora. Entretanto, foi possível verificar que a sequência proposta permitiu que os alunos iniciassem o processo de construção da noção de limite, sendo necessária novas situações para a continuidade desse processo.

Como dito anteriormente, devido ao trabalho em conjunto dos professores e pesquisadores nos IREM nas décadas de 1970 e 1980, o professor possuía um papel ativo no desenvolvimento teórico no campo da Didática da Matemática. Podemos observar tal contribuição na necessidade de pensar nos momentos de devolução e institucionalização na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996), que só foi modelado após a necessidade dos professores ao desenvolverem sequências didáticas com os alunos. Entretanto, percebemos que no atual contexto educacional brasileiro, essa integração do professor com a pesquisa é dificultada devido à realidade profissional docente, como a carga horária elevada, pouco tempo para a formação continuada, entre outros fatores (GATTI; BARRETO, 2009).

Deixamos claro que o fato que as pesquisas desenvolvidas no contexto brasileiro, terem essa dificuldade de desenvolver o trabalho em conjunto com os docentes não desmerecem seu valor acadêmico. Entretanto, esse é um aspecto importante para refletirmos ao pensar na integração da pesquisa e do ensino escolar, tendo em vista o que ocorria no processo de surgimento da Didática da Matemática (DDM). O professor, imerso na realidade escolar brasileira, tem dificuldade de participar de momentos de formações continuadas integradas com pesquisas no campo da Educação Matemática, sendo que sua integração poderia contribuir tanto para a sua formação quanto para o ensino típico e o desenvolvimento teórico da DDM. Essa característica nos leva a pensar na potência dos aportes do campo da DDM para a formação docente e a integração com o ensino típico brasileiro, como a discussão de outros modos de uso da Engenharia Didática, além de uma metodologia de pesquisa.

2.2.2 Engenharia Didática como ferramenta para a formação

Como apresentamos, o campo da Didática da Matemática esteve relacionado desde seu desenvolvimento com aspectos relativos aos processos de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática na França. Nessa perspectiva, a Engenharia Didática envolve os professores, pesquisadores e alunos em um ambiente de ensino, tendo como uma das vertentes a possibilidade de compreender limitações e oportunidades para os professores, além de pensar em formas para o ensino de conceitos matemáticos. Nesse contexto, destacamos algumas potencialidades da ED nos seus modos de uso, como ajudar a pensar nos conhecimentos dos alunos em situações de ensino; compreender as ações e os trabalhos dos professores, pensando nos conhecimentos e escolhas didáticas desses sujeitos que estão inseridos diretamente no sistema didático, sendo que "Estudar o conhecimento dos professores num ambiente pedagógico é um desafio de investigação; usando resultados de engenharia didática estabelecidos permitem aos pesquisadores minimizar as variáveis" (MARGOLINAS; DRIJVERS, 2015, p. 6, tradução nossa). Nesse contexto de pesquisa, problematiza-se o professor, com seus conhecimentos, suas escolhas didáticas, as condições e limitações de trabalho que estão intimamente relacionados aos processos de aprendizagem dos alunos, contribuindo não somente para sua formação docente, mas para o avanço teórico da área.

É possível pensar não apenas o enfoque na pesquisa acerca do ensino e/ou a aprendizagem de um conceito matemático, mas considerar a ED como um objeto que vai além de uma metodologia de pesquisa, permeando as relações de pesquisa e a ação no sistema de ensino. Além disso, a ED permite compreender possibilidades e limitações do trabalho docente, uma maneira de possibilitar que os questionamentos dos professores sejam considerados no campo da pesquisa, desenvolvendo o campo teórico e podendo fornecer respostas aos professores, além de novas formas para ensinar matemática. Pensando no ensino da matemática, esse processo pode ocorrer sob certas condições favoráveis, como o tempo didático de ensino estar de acordo com o tempo de aprendizagem dos alunos, materiais didáticos, formação do professor, entre outros elementos. Nesse contexto, é possível pensar na Engenharia Didática pertencente a um processo de transposição didática viável no ensino típico, sendo que o produto gerado é tão importante quanto o método (PERRIN-GLORIAN; BELLEMAIN, 2016).

Percebe-se que esse movimento de problematização da ED ganhou força no campo da Didática da Matemática, quando foi tema central da 15ª Escola de Verão de Didática da Matemática[13], em 2009, sendo pensada como um método para ajudar a compreender o ensino, além de refletir na produção de recursos didáticos para o ensino e a formação do professor (PERRIN-GLORIAN, 2009). Entretanto, esse movimento já estava presente em pesquisas anteriores, como nos questionamentos de as situações ficarem obsoletas e a reprodutibilidade em outros contextos. A tese de Perrin-Glorian (1992, *apud* PERRIN GLORIAN, BELLEMAIN, 2016) teve como um dos enfoques a construção de situações viáveis para o ensino típico, buscando formas de melhorar o ensino de alunos e de professores. Nesse contexto, era necessário adaptar as situações sob as condições reais de sala de aula, respeitando suas limitações e regras do contrato didático presente, sendo necessário determinar o que era essencial. Nesse contexto, percebeu-se que o processo de negociação das adaptações das situações com os professores que não produziram as atividades inicialmente possibilitava analisar as preocupações dos docentes, necessidade de formação, os conhecimentos que possuíam, o processo transpositivo do saber, entre outros fenômenos. Assim, foi possível perceber que as dificuldades foram maiores que as esperadas inicialmente, sendo que a Engenharia Didática assumiu um papel importante para estudar fenômenos didáticos do contexto profissional docente. Nesse processo, a Engenharia Didática assume um papel diferente da clássica (que é utilizada como metodologia de pesquisa), pois no enfoque da formação de professores os sujeitos "são adultos que devem conhecer as matemáticas

---

[13] É um importante evento da Didática da Matemática, que ocorre na Franca a cada dois anos, que propicia a apresentação de avanços teóricos recentes nas pesquisas da área.

envolvidas, que altera as questões e os antecedentes” (PERRIN GLORIAN, BELLEMAIN, 2016, p. 33, tradução nossa).

Nesse contexto foram apresentadas formas de usos da Engenharia Didática com o foco na formação dos professores, dentre eles a engenharia didática para o desenvolvimento e formação, que tem como objetivo estudar a adaptação de situações a partir de outras já produzidas (como sequências didáticas desenvolvidas em outras pesquisas), tendo em vista as condições do ensino típico e as necessidades dos professores. Partindo de situações já produzidas, oriundas de uma engenharia didática clássica, o trabalho em conjunto com o professor no processo de adaptação é importante pois requer um estudo aprofundado das condições de implementação e os modos nos quais o professor gerencia essa nova organização dos processos de ensino. O trabalho em conjunto é uma possibilidade de contribuição para que os professores lidem com problemas que se encontram na prática, apesar de não ter o objetivo de fornecer soluções prontas.

Cabe ressaltar que a negociação no trabalho conjunto do pesquisador e do professor é fundamental, tendo em vista algumas questões que podem aparecer, por exemplo: Como é realizado o processo de adaptação das situações, sem perder as características fundamentais do meio elaborado? E ao desenvolver a sequência didática, como gerenciar os momentos de devolução e institucionalização, que em geral, não estão totalmente explicitados na descrição da sequência? Percebemos que essas questões que emergem no trabalho em conjunto levam o pesquisador e o professor à reflexão, pois a:

> Implementação do trabalho em sala de aula e a observação desta implementação permite compreender melhor a práticas usuais dos professores, as possíveis falhas relativas às condições que deve promover a aprendizagem dos alunos, mas também enriquecimentos que poderiam ser engenharia inicial incorporando elementos que fazem parte de professores (PERRIN-GLORIAN, BELLEMAIN, 2016, p. 37, tradução nossa).

Assim, no caso do pesquisador o trabalho pode ocasionar um refinamento teórico das hipóteses, como a dificuldade dos alunos, do professor e condições do ensino, enquanto o professor está inserido em um processo de reflexão, com novos elementos e questionamentos, sendo necessário mobilizar a todo momento seus conhecimentos, sejam matemáticos ou didáticos, na escolha e gerenciamento das situações, pois o que está em jogo é a aprendizagem de seus alunos. Por fim, há também nesse trabalho em conjunto o processo de validação, como na Engenharia Didática clássica. Enquanto na ED clássica essa validação ocorre por meio do confronto das hipóteses levantadas na análise *a priori* com as situações analisadas *a posteriori*, na perspetiva da formação de professores essa validação está relacionada aos modos de usos dos professores no processo de adaptação, refletindo acerca do que eles aceitam usar, como foram implementadas, entre outras características.

É importante ressaltar que ao focarmos na perspectiva da formação de professores, os usos da Engenharia Didática são ampliados para além da metodologia de pesquisa. Há uma atenção ao produto que é produzido e ao papel do professor e seus conhecimentos. Nessa vertente, como apresentado anteriormente, é possível utilizar de produções já concebidas e a partir do trabalho com o docente analisar as adaptações realizadas para o trabalho com seus alunos, levando em consideração a sua realidade e seus conhecimentos. Esse processo é uma das maneiras de pensar a formação docente a partir dos usos da Engenharia Didática.

É possível pensar também em outros modos de utilização da Engenharia Didática, além de um processo de adaptação de sequências didáticas produzidas. Consideramos que as próprias etapas constituintes da ED são um espaço propício para reflexão acerca de conhecimentos matemáticos e didáticos dos sujeitos que as produzem, pois além de ser uma metodologia de pesquisa que fornece um quadro para a elaboração de sequências didáticas voltadas para um determinado saber, também pode propiciar um espaço formativo para professores de Matemática, integrando-os ao campo de pesquisa e, em especial, fornecendo elementos que os ajudem para os problemas da sua prática, levando em consideração o funcionamento real de suas aulas e suas necessidades (PERRIN-GLORIAN, BELLEMAIN, 2016).

Um sujeito, seja o pesquisador ou professor, ao percorrer os momentos presentes na ED está imerso em um processo de reflexão acerca dos objetos matemáticos a serem desenvolvidos com os alunos e as suas concepções didáticas para o desenvolvimento da aula, tendo em vista que percorrerá as análises preliminares com a pesquisa dos aspectos epistemológicos, cognitivos e institucionais de um saber. Além disso, na elaboração e a análise *a priori* da sequência didática, perpassará por momentos em que há a necessidade de mobilizar conhecimentos matemáticos e didáticos para a escolha de algumas situações em detrimento de outras e uma reflexão inicial para a elaboração de hipóteses do que pode ocorrer em sala de aula; na experimentação, é o momento que o sujeito desenvolve a sequência e está diante das situações pensadas anteriormente. Por fim, nas análises *a posteriori* e validação, serão momentos nos quais o sujeito analisa como efetivamente ocorreram as situações em sala de aula e confronta com as hipóteses iniciais, permitindo validá-las ou refletir sobre os motivos que ocasionaram as diferenças verificadas.

Diante das possíveis utilizações da ED visando a formação de professores, propomos em nossa investigação um processo formativo nessa última perspectiva apresentada. Nessa proposta formativa nos baseamos na estrutura que compõe a Metodologia de Pesquisa da

Engenharia Didática, visando percorrer durante os encontros com a professora momentos de elaboração, desenvolvimento e análise de sequências didáticas de temas matemáticos escolhidos pela docente. Assim, esperávamos que essa proposta de formação continuada possibilitasse que a professora refletisse sobre questões que pudessem emergir das discussões, provocando desequilíbrios e possibilitando a aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos e/ou didáticos para a docente.

Durante o processo não assumimos o papel de formador que apresenta definições e atividades prontas, elaboradas previamente, e sim de mediador, condizente com nossas perspectivas (Teoria das Situações Didáticas e Teoria dos Campos Conceituais). Por se tratar da realidade específica da professora, intencionamos partir das demandas profissionais dela, com suas tarefas, proposições e angústias, para a constituição de um espaço formativo, delimitando os temas matemáticos e objetivos de cada encontro com a docente. Essa escolha tem o intuito de que o trabalho em conjunto que desenvolvemos estivesse integrado com a realidade e atribuições da professora, possibilitando a aprendizagem por meio da reflexão dessas atividades e contribuindo para a participação do professor nas diversas etapas da formação continuada. Nesse sentido, consideramos esse momento de formação como um espaço que coloca "os professores em situações de identificação, de participação, de aceitação de críticas e de discrepâncias, suscitando a criatividade e a capacidade de regulação" (IMBERNÓN, 2010, p. 65).

A formação continuada é composta por situações e discussões que emergem no trabalho com a professora, que perpassa a realização de análises preliminares, elaboração e análise *a priori* das sequências didáticas, experimentações e análises *a posteriori* e validações das sequências didáticas que são desenvolvidas tomando por base os temas escolhidos. Dessa maneira, esses momentos percorridos em conjunto com a professora puderam levá-la a reflexões e à construção de novos conhecimentos, constituindo um processo formativo para a docente.

Intencionamos constituir de um meio antagônico, que pudesse causar conflitos cognitivos em conhecimentos prévios da professora, possibilitando desestabilizá-los e construir novos conhecimentos. Por se tratar de um trabalho em conjunto com uma professora, os conhecimentos presentes durante os encontros não se limitaram aos matemáticos, mas também didáticos, que serão analisados a partir de elementos da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 2009). No que se refere aos conhecimentos matemáticos da professora, pautamo-nos nas formas operatórias e predicativas do conhecimento mobilizadas pela docente durante os encontros, além da modelagem de teoremas em ação que pudessem emergir. Em relação aos aspectos didáticos, a partir das escolhas de situações matemáticas, escolhas didáticas para a organização das aulas, entre outras ações, modelamos o que chamamos de Conhecimento didático em ação pois, em conformidade com a TCC, os conhecimentos do sujeito são a base da conceitualização na sua atividade. Assim, buscamos no decorrer das análises identificar e analisar conhecimentos didáticos em ação da professora, suas reflexões sobre esses conhecimentos e, porventura, a construção de novos conhecimentos didáticos em ação.

CAPÍTULO III - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Esta investigação foi desenvolvida a partir de um caráter qualitativo devido aos nossos objetivos e intenções, pois nessa abordagem investigativa tem-se a predominância de dados descritivos, a ênfase no processo em detrimento do produto, a não neutralidade do pesquisador em relação à sua pesquisa, entre outros aspectos (GARNICA, 2001). Nesse contexto, realizamos nossas escolhas a partir dos aportes teóricos e dos objetivos que apresentamos, tendo em vista que "A pesquisa qualitativa, […], é um meio fluido, vibrante, vivo e, portanto, impossível de prender-se por parâmetros fixos, similares à legislação, às normas, às ações formalmente pré-fixadas" (GARNICA, 2001, p. 42). Assim, no decorrer do capítulo são descritas as escolhas realizadas para o desenvolvimento da formação continuada, como a proposição do curso de extensão e o seu funcionamento. Além disso, apresentamos também uma escolha metodológica baseada no trabalho de Powel, Francisco e Maher (2004) acerca da atividade de análise dos dados produzidos na investigação.

A proposta inicial que intencionamos foi a constituição de um grupo de professores de matemática com o intuito da constituição de um espaço de formação acerca de aspectos matemáticos e escolhas didáticas de conteúdos matemáticos. Julgamos importante a elaboração de um curso de extensão, desenvolvido no segundo semestre de 2018, intitulado *"Uma proposta de estudos de temas matemáticos com professores que ensinam matemática no município de Coxim*", cadastrado e desenvolvido no Instituto Federal de Mato Grosso do Sul – Campus Coxim (IFMS)[14]. Essa escolha foi tomada frente à realidade do professor, tendo em vista a necessidade ter suas participações em ações de formação continuada reconhecidas em momentos futuros, como na participação de processos seletivos para a distribuição de aulas. O curso de extensão teve o objetivo de *propiciar momentos de formação continuada para a discussão de aspectos matemáticos e escolhas didáticas de professores de Matemática que lecionavam em turmas do ensino fundamental.* Condizente ao que discutem Nóvoa (1992), Imbérnon (2010) e os referenciais para a formação de professores (BRASIL, 1999), pensamos no projeto como um espaço aberto a interações e proposições dos professores, de modo que esses docentes tivessem um papel de protagonismo na sua formação, seja nas discussões ou nas escolhas do curso, como os conteúdos trabalhados.

[14] O local de cadastro do projeto de extensão se deve ao fato do pesquisador estar trabalhando na Instituição e o IFMS ser uma instituição conhecida na realidade local nas questões formativas da população.

Realizamos a divulgação do curso de extensão e da pesquisa de doutorado que estávamos desenvolvendo nas escolas públicas do município de Coxim-MS[15], focando nos professores de Matemática que lecionavam em turmas do 6º ao 9º ano, para que pudessem compartilhar suas experiências em sala de aula e os conteúdos escolhidos estivessem relacionados com os lecionados na escola. Em um primeiro momento, 4 professoras se mostraram interessadas e se inscreveram no curso, sendo estipulado em conjunto que os encontros ocorreriam às terças-feiras, no campus do IFMS, das 18:20 às 19:30 com uma periodicidade quinzenal.

Conforme apresentamos no início do capítulo, fazer pesquisa, em especial na área da educação, pode gerar imprevistos, contratempos e em especial modificações de modo que estamos cientes que a "investigação que interage e, interagindo, altera-se. É alteração que se aprofunda nas malhas do fazer e forma-se em-ação" (GARNICA, 2001, p. 42). Apesar de se mostrarem interessadas, devido a algumas modificações nas jornadas de trabalho (como a carga horária, lotação das aulas na Sala de Tecnologia) e questões particulares, somente uma professora se fez presente para a participação efetiva do curso proposto. Nesse momento, cabe ressaltar que a escolha de se trabalhar com um grupo de professores contribuiria para a pluralidade de olhares, experiências e discussões. Entretanto, a realidade é como ela é e não como esperamos que seja, e diante da situação que nos encontrávamos decidimos dar continuidade no curso de extensão apenas com a professora, tendo em vista que ela se mostrou interessada em continuar com o objetivo de contribuir para a sua formação.

Após definida a professora, em um primeiro momento foi debatida a ideia do curso de extensão e como pensamos no desenvolvimento do curso, com a apresentação dos momentos que constituem a Engenharia Didática (ARTIGUE 1996), que serviram como estrutura no desenvolvimento do curso de extensão. Essa escolha teve como objetivo que a professora estivesse inserida no processo de elaboração, execução e análise das sequências didáticas desenvolvidas, tendo um papel ativo nas escolhas tomadas.

Durante esse processo desenvolvido em conjunto, os dados que foram analisados na nossa pesquisa foram produzidos por meio de gravações de áudio dos encontros entre a professora e pesquisador e o diário de bordo do pesquisador. Para a análise dos dados produzidos, nos pautamos em algumas fases apresentadas por Powell, Francisco e Maher

[15]O município de Coxim está localizado na região norte do estado de Mato Grosso do Sul (MS) e possui uma população de cerca de 33 mil habitantes, no levantamento realizado pelo IBGE em 2019. Apesar de ser uma cidade pequena, é considerada uma cidade pólo da região norte do estado de MS. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/ms/coxim.html? acesso em 04 de dezembro de 2019.

(2004). Powell e seus colaboradores (2004) apresentam um modelo analítico para o desenvolvimento do pensamento matemático a partir de gravações de vídeo, com o intuito de investigar manifestações desses processos nos sujeitos da pesquisa, sendo elas: observar atentamente aos dados do vídeo; descrever os dados do vídeo; identificar eventos críticos; transcrever; codificar; construir o enredo e compor a narrativa. Cabe ressaltar que apesar de utilizarmos nossa investigação dados oriundos das gravações de áudio e as anotações do caderno de bordo dos encontros com a professora, alguns dos momentos propostos por Powell, Francisco e Maher (2004) vão ao encontro do que propusemos na investigação e contribuíram para a organização e análise dos dados produzidos. Dessa maneira, destacamos os momentos que compuseram nosso caminho metodológico para a análise dos dados:

A fase de *observação dos dados produzidos* tem o intuito de o pesquisador se familiarizar com os dados que foram gravados durante o encontro, sem ter a necessidade de colocar um enfoque analítico. Isso se deve ao fato de que por estar envolto com as discussões, alguns eventos ou discussões podem ter passado despercebido das anotações. Cabe ressaltar que esse momento foi realizado por nós após o término de cada reunião com a professora, pois esse contato com as gravações nos ajudou a pensar a dinâmica dos próximos encontros;

Um segundo momento que percorremos foi a fase de *transcrição* na qual foi realizada a transcrição dos áudios gravados, pois acreditamos que as "transcrições revelam coisas importantes nem sempre visíveis de outra forma" (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 112). Por meio das transcrições obtemos um registro permanente que contribui para a organização e a análise dos dados, em conjunto com as anotações do caderno de bordo, pois essa etapa fornece uma organização sequencial das discussões realizadas no encontro com a professora;

Posteriormente, realizamos as fases da *identificação dos eventos críticos e codificação*: Nessa fase analítica, identificamos nos dados momentos relacionados com nossos objetivos que nomeamos como *evento crítico*. Conforme afirmam Powell, Francisco e Maher (2004, p. 105) "Eventos críticos são contextuais. Um evento é crítico em sua relação a uma questão particular perseguida pela pesquisa". Nesse sentido, consideramos eventos críticos um evento relacionado aos conhecimentos da professora, sejam de cunho matemático ou didático, ou então aspectos relacionados ao seu campo profissional, que nos levam a inferir limites e possibilidades da Engenharia Didática na formação do professor. Ao identificar eventos críticos, seja nos dados transcritos ou no diário de bordo, a codificação visa identificar temas que ajudam o pesquisador a interpretar os dados. Nesse sentido, a atividade de codificação se desenvolve "por meio de seus quadros teóricos, suas questões de pesquisa e o nexo que observam" (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 115).

Como apresentamos anteriormente, em relação a nossa pesquisa, buscamos identificar elementos relacionados aos conhecimentos em ação da professora, tanto matemáticos, quanto didáticos mobilizados pela professora no decorrer dos encontros pautado na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 2009). Assim, a identificação e análise desses conhecimentos foram realizados a partir dos momentos de estudos dos temas matemáticos escolhidos pela professora, das escolhas realizadas pela docente durante a elaboração e análise *a priori* das sequências didáticas a serem desenvolvidas com seus alunos e no momento de análise *a posteriori* e validação das sequências didáticas que a docente aplicou com os estudantes.

Para a análise dos conhecimentos matemáticos da professora, baseamo-nos nas formas operatórias e predicativas do conhecimento, como apresentado por Vergnaud (1996), pois evidenciamos que esses elementos iam ao encontro do que foi mobilizado e/ou explicitado pela professora durante o trabalho em conjunto conosco, além da identificação de alguns teoremas em ação mobilizados. Citamos como exemplo para essa escolha alguns momentos que identificamos que a professora tinha dificuldades de explicitar justificativas e propriedades dos conceitos, condizente com a forma predicativa, mas manifestava a forma operatória do conhecimento, resolvendo a situação em questão.

No que se refere aos aspectos didáticos, pautada na ideia de conhecimento em ação apresentado por Vergnaud (1996; 2009) e nos modelos didáticos e pressupostos epistemológicos descritos por Becker (2001), modelamos os Conhecimentos didáticos em ação mobilizados pela professora no decorrer dos encontros. Ressaltamos que a nossa investigação está integrada às atividades presentes do campo profissional da professora, como na elaboração de situações para os alunos, desenvolvimento das aulas e análise do trabalho desenvolvido. Desse modo, em conformidade com Pastré (2017), a modelagem de conhecimentos em ação didático da professora nos permite analisar a conceitualização da docente diante de uma classe de situações de seu campo profissional. Para isso, consideramos as escolhas de atividades matemáticas, escolhas didáticas para a organização das aulas, ações explicitadas pela professora, entre outros elementos para a identificação e análise desses conhecimentos em ação didáticos.

Por fim, há a fase intitulada de *construindo o enredo*, que tem como característica a interpretação dos dados e as inferências realizadas pelo pesquisador. Assim, a construção do enredo decorre da interpretação e análise dos eventos críticos evidenciados, sendo importante ter em mente a não linearidade dessa etapa. Caso seja necessário, o pesquisador pode retomar os dados, examinar os eventos críticos, as anotações, as transcrições, com o intuito de compreender e aprofundar os dados analisados.

O modelo de Powell, Francisco e Maher (2004) é utilizado para análise de dados produzidos por meio de gravações em vídeo, sendo composto por 7 etapas que já mencionamos anteriormente. Entretanto, na nossa investigação pautamo-nos nas 5 etapas que explicitamos, pois julgamos que essas nos fornecem elementos para uma organização metodológica para a transcrição dos áudios, identificação de momentos importantes e análise dos dados. Cabe ressaltar que essas etapas constituem um modelo metodológico para a análise dos dados, de modo que o pesquisador tem uma liberdade para a retomada das etapas anteriores de acordo com sua necessidade.

No trabalho em conjunto com a professora, realizamos os temas de multiplicação e divisão de frações e números decimais para uma turma de 6º ano, sistema de equações no 8º ano e relações métricas na circunferência no 9º ano. Salientamos novamente que esses conceitos matemáticos abordados foram definidos a partir das demandas profissionais da professora, de acordo com suas dificuldades e os temas que estavam previstos a serem trabalhados no referencial curricular da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED/MS). Ressaltamos que devido a necessidade de a professora seguir o cronograma e o referencial curricular da SED/MS, se mostrou necessário que os encontros ocorressem com uma periodicidade semanal, para que as sequências didáticas que elaboramos fossem desenvolvidas nas aulas previstas. Assim, o trabalho em conjunto com a docente totalizou 14 encontros com duração média de 1h30min cada, conforme o quadro apresentado a seguir:

Quadro 1 - Organização dos encontros de formação

Encontro	Data do Encontro	Trabalho desenvolvido
1	07/08/2018	Início do trabalho em conjunto - conversa inicial
2	14/08/2018	Análise preliminar de frações
3	21/08/2018	Elaboração da sequência e análise *a priori* de frações
4	28/08/2018	Análise preliminar de números decimais
5	04/09/2018	Análise *a posteriori* e validação de frações/ Elaboração da sequência e análise *a priori* de números decimais
6	11/09/2018	Elaboração da sequência e análise *a priori* de números decimais
7	18/09/2018	Análise *a posteriori* e validação de números decimais/ Elaboração da sequência e análise *a priori* de multiplicação e divisão de números decimais

8	25/09/2018	Análise preliminar de sistemas de equações do 1º grau
9	02/10/2018	Elaboração da sequência e análise *a priori* de sistemas de equações do 1º grau
10	09/10/2018	Análise *a posteriori* e validação de multiplicação e divisão de números decimais
11	23/10/2018	Análise preliminar de relações métricas na circunferência
12	06/11/2018	Elaboração da sequência e análise *a priori* de relações métricas na circunferência
13	21/11/2018	Análise *a posteriori* e validação de sistemas de equações do 1º grau/ Análise *a posteriori* e validação de relações métricas na circunferência
14	27/11/2018	Fechamento do trabalho em conjunto

Fonte: dados da pesquisa

Assim, ao longo do processo de formação continuada, buscamos que a professora participasse ativamente dos momentos de elaboração, desenvolvimento e análise das sequências didáticas. Nesse sentido, apresentamos um quadro descrevendo o funcionamento de cada etapa da ED no trabalho em conjunto com a professora, explicitando os conteúdos trabalhados, materiais envolvidos em cada etapa e os responsáveis pela execução:

Quadro 2 - Fases da Engenharia Didática na investigação

Fases da Engenharia Didática (ED)	Conteúdos	Materiais envolvidos na fase da Engenharia Didática (ED)	Responsável pela execução
Análise preliminar	Frações	Brasil (1998); Brasil (2018); Bianchini (2015); Dante (2015); Pereira (2017); Monteiro e Groenwald (2014); Ebserh (2015); Oliveira (2016)	Seleção e 1º estudo dos materiais: pesquisador; Estudo, discussão e reflexão sobre os materiais selecionados: professora e pesquisador
	Números decimais	Brasil (1998); Brasil (2018); Bianchini (2015); Dante (2015); Esteves e Souza (2012); Andrade (2016); Ribeiro (2011); Jucá e Sá (2012); Cunha e Magina (2004)	
	Sistemas de equações do 1º grau	Brasil (1998); Brasil (2018); Bianchini (2015); Dante (2015); Rocha (2010); Chiari (2011); Barros, Fernandes e Araújo (2012)	

	Relações métricas na circunferência	Brasil (1998); Brasil (2018); Bianchini (2015); Dante (2015); lista de exercícios de relações métricas na circunferência[16]	
Elaboração da sequência didática e análise *a priori*	Frações; números decimais; sistemas de equações do 1º grau; Relações métricas na circunferência	Atividades estudadas durante a análise preliminar, dos livros didáticos e elaboração de novas atividades a partir das discussões realizadas.	Professora e pesquisador
Experimentação	Frações; números decimais; sistemas de equações do 1º grau; Relações métricas na circunferência	Aplicação da sequência didática desenvolvida	Professora
Análise *a posteriori* e validação	Frações; números decimais; sistemas de equações do 1º grau; Relações métricas na circunferência	Protocolo da resolução dos estudantes; anotações e relatos da professora sobre o desenvolvimento da aula	Professora e pesquisador

Fonte: dados da pesquisa

Nos encontros em que foram realizadas a análise *preliminar* construímos, em conjunto com a professora, o quadro teórico-didático para cada um dos conteúdos escolhidos, com leituras e discussões do desenvolvimento histórico dos temas; as propriedades dos objetos matemáticos; orientações de documentos oficiais; como estavam apresentados em livros didáticos e outras pesquisas que abordam o ensino e a aprendizagem dos temas. Cabe ressaltar que na semana que antecedia os encontros em que seriam realizados os estudos *preliminares* dos temas, coube ao pesquisador a procura e seleção dos materiais que seriam discutidos com a professora. Essa dinâmica foi necessária pois evidenciamos a dificuldade que a professora teria em realizar essa primeira seleção de materiais, tendo em vista a sua jornada de trabalho (com a carga horária de 40h, sendo 32 horas em sala de aula), um dos seus períodos de planejamento de aula já estava sendo ocupado para a realização dos encontros e a necessidade da professora em realizar o planejamento para as aulas das suas outras turmas. Apesar disso, durante os encontros, os materiais selecionados eram lidos e discutidos durante o trabalho em

[16] Disponível em: <https://studylibpt.com/doc/163801/lista-de-exerc%C3%ADcios-sobre-rela%C3%A7%C3%B5es-m%C3%A9tricas-na-circunfer%C3%AA...>. Acesso em 12 de novembro de 2020.

conjunto com a professora, servindo como um mote inicial para as discussões, reflexões e considerações do estudo *preliminar* dos temas.

A elaboração e análise *a priori* das sequências didáticas foram realizadas nos encontros que sucederam o estudo *preliminar* do tema escolhido pela professora. Para isso, solicitávamos que durante a semana a professora refletisse sobre o que foi discutido no encontro do estudo *preliminar* e como seria a sequência didática a ser desenvolvida, podendo buscar novos materiais para o próximo encontro. Assim, novamente em conjunto, o pesquisador e a professora construíam a sequência didática a partir das reflexões do encontro anterior, sendo considerado o livro didático adotado na escola da professora (BIANCHINI, 2015) e outros livros didáticos, as atividades discutidas no encontro anterior e a elaboração de novas problemas que contemplassem os objetivos que esperávamos atingir com os estudantes. Apesar de se tratar de um trabalho em conjunto, no momento da elaboração da sequência didática, a professora possuía o controle das atividades que seriam ou não desenvolvidas com seus estudantes, tendo em vista que era a responsável pelas turmas que seriam desenvolvidas as atividades. Além disso, realizávamos a análise *a priori* de cada atividade selecionada para a sequência didática, sendo elencadas as possíveis estratégias e dificuldades que poderiam ocorrer durante o desenvolvimento da sequência didática.

O momento da *experimentação* das sequências didáticas ficava sob responsabilidade exclusiva da professora, sendo desenvolvidas durante suas aulas típicas, seguindo o horário escolar, o planejamento e o cronograma da Secretaria do Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED/MS). Essa escolha foi tomada diante das contingências que nos deparamos durante a realização do curso de extensão, como a indisponibilidade[17] de horários para o acompanhamento da docente. Entretanto, com o intuito de discutirmos as produções dos estudantes, a professora buscava anotar as resoluções e registrar, por meio de fotos, as produções dos estudantes durante o desenvolvimento das sequências didáticas.

Por fim, a realização da análise *a posteriori* e validação das sequências didáticas eram feitas pela professora e o pesquisador nos encontros em conjunto. Como a *experimentação* havia ficado a cargo da docente, ela narrava como havia sido desenvolvidas as aulas em que a sequência didática tinha sido aplicada, apresentando as produções e considerações dos estudantes, além de sua reflexão sobre o ocorrido. Desse modo, realizávamos a discussão das estratégias e dificuldades que foram apresentadas, refletindo sobre as nossas escolhas, as

[17] Durante a realização do curso de extensão, os horários de aula da professora eram conflitantes com os horários de aula do pesquisador no IFMS-Campus Coxim, impossibilitando o acompanhamento da experimentação das sequências didáticas.

atividades propostas e as hipóteses que havíamos realizado no momento *a priori*. Além disso, nesse encontro destinado à análise *a posteriori* e validação da sequência didática, realizávamos um fechamento do tema trabalhando, refletindo sobre o que foi estudado e desenvolvido, além de pensar em possibilidades para as próximas vezes que a professora fosse trabalhar o tema com os seus alunos.

CAPÍTULO IV - UM PROCESSO DE FORMAÇÃO PAUTADO NA ENGENHARIA DIDÁTICA

Nesse capítulo apresentamos a análise do processo de formação que desenvolvemos no qual buscamos a*nalisar conhecimentos de uma professora de Matemática que participa de um processo de formação continuada pautado nas etapas da Engenharia Didática***.** Nesse sentido, ao analisarmos o quadro dos encontros realizados com a professora é possível perceber que devido à realidade que vivenciamos no processo de formação, há momentos que iniciamos as análises preliminares e elaboração de sequências didáticas de um conteúdo antes de realizar a análise *a posteriori* e validação de outro tema. Decidimos então apresentar, em um primeiro momento, um relato sobre a professora Joana e, na sequência do capítulo, dividimos em tópicos relacionados aos temas trabalhados em conjunto com a professora.

4.1 A professora Joana

Joana[18] é uma professora de 26 anos[19], formada em um curso de Matemática - Licenciatura em uma Universidade Pública Federal, há 4 anos e residente do munícipio de Coxim-MS. Após se formar no ano de 2014, ela trabalhou por 6 meses em uma escola particular na cidade de Campo Grande e no início de 2015 retornou para Coxim, onde trabalha 40 horas semanais, sendo 32 horas em sala de aula, em uma escola pública estadual com turmas de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Ao ser questionada sobre como se vê na profissão docente, a professora demonstra um engajamento com seus alunos a todo o momento, como vemos nos excertos a seguir:

> J.: A primeira coisa é como a gente vai fazer para dar aula. Como vai passar para aluno e fazer com que ele aprenda. Tenho essa vontade que ele aprenda, porque tem muitos que estão lá por estar (se referindo a colegas que não apresentam essa característica). […] Parece que eu realmente estou no local certo. Eu vi que estou no local certo desde o estágio.
>
> J: Eu tenho minhas dificuldades? Para caramba. Mas eu vou tentar ao máximo atingir o meu objetivo que é o quê? O meu aluno (a aprendizagem). Tem colega na escola que não está preocupado. Não sei se é porque eu estou nova na profissão que ainda tenho mais interesse. O colega fala que se o aluno quiser bem, se não quiser eu estou aqui. Cara, eu não consigo agir assim. Porque eu falo para os meus alunos que eu não vejo outra saída a não ser estudar.

---

[18] Atendendo uma solicitação da professora que participou do trabalho conosco, a chamaremos de Joana e nas transcrições abreviaremos com a letra J.

[19] Todos os dados referentes à professora como a idade e tempo de serviço se referem aos dados da época de realização do trabalho realizado em conjunto com ela.

Percebe-se que Joana tem uma preocupação com o processo de aprendizagem dos estudantes, colocando-os como elementos centrais na sua prática profissional. Podemos evidenciar esse fato no momento em que se refere a um colega de trabalho que tem uma postura diferente da dela, lhe causando um incômodo ao relatar o fato. Essa característica inerente de Joana é explicitada mesmo diante de situações em que é surpreendida em seu trabalho, quando relata a situação:

> J: Quando eu entrei (na escola) fui fazer alguma atividade, com uma folha de impressão, o aluno olhou para minha cara, amassou e jogou no lixo e falou: eu não vou fazer. Aí você para e pensa: eu parei, planejei e o guri olhar na minha cara e amassar... No meu primeiro ano eu entrei e ele fez isso. São coisas que acontece que você aprende. […] E outra coisa: tenho aluno que não tem mesa em casa. Vai pesquisar onde? Uma dentre outras coisas que a gente discute é se pode passar tarefa, mas eu quase não passo. Lá não pode. Você não sabe se o aluno tem onde fazer a tarefa ou ele acorda às 4:30 da manhã porque ele é da fazenda e vai pegar o ônibus para chegar às 7 horas na escola morto de cansado e com fome. Sai da escola às 11:20 e o ônibus chega na fazenda às 14:00 e ainda vai ter que trabalhar. E no outro dia, como que você vai cobrar atividade do aluno?

Conforme foi relatado por Joana, a atividade do professor, imerso no seu campo profissional, é maior que apenas preparar e desenvolver aulas. É necessário considerar outros aspectos presentes no trabalho do professor, como se relacionar com os mais diversos perfis de estudantes e as formas de conversação com o ambiente que está inserido (VINATIER, 2007; PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2019). Nesse caso, Joana destaca momentos que marcaram a trajetória profissional, como na situação inesperada do estudante que se recusou a fazer a atividade proposta ou quando ressalta a realidade vivenciada pelos seus alunos. Destacamos e Apresentamos no decorrer da análise que fatores como os citados influenciam a prática profissional de Joana, como suas escolhas para as aulas de Matemática.

Ao ser questionada sobre sua formação inicial, em uma universidade pública federal, percebemos que a professora relaciona constantemente o seu período de formação com suas experiências já propiciadas no exercício da docência.

> J: A graduação com relação ao conteúdo matemático para estar dentro da sala de aula, não uso muito. Mas aquelas práticas, de preparar a aula, de como começar uma aula é o que eu mais uso da minha graduação. […] Então pensa assim: a faculdade te prepara? Com certeza, mas tem certas coisas que a gente só vivencia na prática. Eu posso chegar e falar isso, isso e isso, mas você não vai saber se você não passar (pela situação). Te dá uma base, te dá um norte, é fundamental. Mas certas situações que estão acontecendo ali no dia a dia só vivenciando para você saber como lidar.

Essa fala de Joana está em consonância ao apresentado por Perrenoud e colaboradores (2002) quando destacam que, por vezes, um curso de licenciatura está focado em excesso em uma formação dos saberes teóricos em detrimento de situações que estão diretamente relacionadas com a prática docente. No caso da professora, podemos verificar essa característica ao observarmos o currículo presente na sua graduação, com a presença das disciplinas de Cálculo 1, 2 e 3; cálculo numérico; álgebra 1,2, 3 e 4; álgebra linear, análise real 1 e 2, entre outras disciplinas que estavam voltadas para a formação de saberes teóricos do campo da Matemática do Ensino Superior.

Os conceitos matemáticos presentes no Ensino Básico ficaram mais restritos às disciplinas de Prática de Ensino de Matemática. A disciplina de Prática de Ensino de Matemática 1, com a duração anual, e as Práticas de Ensino de Matemática 3[20], 4, 5 e 6, semestrais, estavam mais relacionadas com os conteúdos da Matemática escolar e possibilidades de ensino. Por exemplo, na disciplina de Prática de Ensino de Matemática 1 foi trabalhado o ensino das operações por meio de materiais concretos, como a sapateira[21], e na disciplina de Prática de Ensino de Matemática 5, o uso de tecnologias educacionais como recurso didático. Essa formação, conforme relatado por Joana a leva a refletir sobre seus conhecimentos e dificuldades no seu trabalho, como:

> J.: Se me dessem agora o ensino médio (aulas), seria mais desafiador ainda porque eu teria que voltar (a estudar) e tem muita coisa que vou ter dificuldade em passar para eles (alunos). Coisas que eu não tive na minha formação na escola e não tive na graduação, porque o professor considerou que a gente já sabia. Renan, trigonometria Renan. Eu nunca tinha visto aquilo na escola, quem me ensinou aquilo foi o Pedro[22]. […]. Eu acho que eu tenho mais dificuldade com essa parte de matemática do que essa parte de preparar, parte didática em si. A didática nem tanto. […] No nono ano começava potência, radiciação e eu tive que voltar a estudar. Porque aquilo ali me tirou da zona de conforto que eu estava habituada a trabalhar.

Destacamos a reflexão da docente sobre sua formação, relatando dificuldades em conceitos matemáticos da Educação Básica, como trigonometria, potenciação e radiciação. Entretanto, ressaltamos que apesar das dificuldades matemáticas, a professora Joana se mostra aberta a dialogar sobre elas, buscando maneiras de superá-las, seja estudando os temas ou no

[20] Não houve a disciplina intitulada Prática de Ensino de Matemática 2, pois as disciplinas passaram ter a duração semestral devido a uma mudança curricular no curso de Matemática. Como a disciplina de Prática de Ensino de Matemática 1 que Joana cursou tinha a duração anual, as demais disciplinas de Prática de Ensino de Matemática começaram a partir da 3.

[21] A sapateira é um material concreto que mobiliza a ideia do quadro valor lugar no trabalho das operações de adição e subtração. Além disso, a utilização desse material contribui para a passagem do material concreto para o algoritmo usual (BITTAR; FREITAS, 2005).

[22] Professor de Matemática que trabalha com a professora na escola em que leciona.

trabalho em conjunto com os colegas. Essa postura da professora contribuiu para o desenvolvimento do trabalho em conjunto conosco, como nas discussões dos temas matemáticos, um dos objetivos da nossa formação.

Em relação aos aspectos didáticos, a professora Joana se mostra mais confortável para a realização da atividade docente nas turmas que trabalha, atribuindo essa característica a sua experiência em sala de aula, como quando relata: "*Hoje vou dar aula no sexto ano, eu não pego mais meu livro para ficar estudando o que eu vou fazer ou não, sei o que é (que deve fazer nas aulas)"*. Evidenciamos a partir da fala da professora que essas situações estão relacionadas ao fato que é apresentado por Vergnaud (2009, p. 14) que afirma que "é ao longo da experiência que um indivíduo, adulto ou criança, encontra a maior parte das situações às quais ele deve se adaptar seja uma experiência cotidiana ou uma experiência profissional". Do campo profissional da professora emergem atividades[23] que pautam a sua conduta, como situações de ensino que está habituada e dispõe de conhecimentos matemáticos e didáticos para a realização, ou novas atividades que a levam a retomar os estudos para executá-las.

Quando foi perguntada sobre suas escolhas didáticas no ensino da Matemática, Joana explicita a ideia de utilizar problemas como uma ferramenta inicial do trabalho docente: *"Eu acredito que começar com problema funciona. Pelo menos para mim funciona. Não atinge 100% da turma, mas se for de outro jeito eu acredito que vai ser pior. Se eu ficar só eu falando não ia dar certo. Eu acho que já é um jeito diferente."*. A ideia de iniciar um tema por meio de problemas é uma estratégia de contextualização para seus alunos, sendo que Joana descreve sua organização do seguinte modo:

> J: Eu passo definição, bastante exemplo e muitos exercícios. Mas eu não começo o conteúdo assim: definição. Nossa Senhora se eu colocar aquilo no quadro (definição matemática) eu acabo com a raça dos guris. […] Eu acho que para o aluno aprender ele precisa do exercício. Exercitar. Mas se eu vejo que tem uma atividade bacana que pode ajudar eu vou e faço.

Verificamos que Joana explicita a mobilização de atividades exploratórias e o uso de situações-problema ao trabalhar com os alunos. Entretanto, essas atividades estão inseridas em um cenário de contextualização do tema a ser trabalhado com os estudantes. Em sua fala, a professora apresenta algumas características do modelo epistemológico empirista e do modelo didático diretivo (BECKER, 2001), como quando explicita a ideia de transmissão do conhecimento: *"Como vai passar para aluno e fazer com que ele aprenda"* e *"vou ter*

---

[23] Utilizamos a palavra atividade no sentido que discorremos no tópico do campo profissional, como uma tarefa que o sujeito deve realizar na sua prática (PASTRÉ, MEYEN, VERGNAUD, 2019)

dificuldade em passar para eles (alunos)". Além disso, Joana indica a utilização de uma organização clássica nas suas aulas a partir de definição-exemplos-exercícios, privilegiando momentos de exercícios, com o trabalho das técnicas apresentadas, quando relata que *"para o aluno aprender ele precisa de exercício. Exercitar"*. Essa organização foi presente em outros momentos do trabalho em conjunto, que discorremos ao longo da análise, que nos levou a considerar que está relacionada a um conhecimento didático da professora que modelamos como *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$) – Para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução.* Evidenciamos elementos relacionados a esse *conhecimento em ação didático*, nos relatos de suas escolhas didáticas sobre os temas, no estudo preliminar dos temas e nos momentos de elaboração da sequência didática que realizamos na formação.

Por fim, em relação às formações continuadas, Joana se mostra disposta a participar de atividades de formação, apesar de relatar críticas à maneira como é pensada, sem considerar a realidade escolar: *"eu acho que para mim, em todas as formações, falam coisas que eu não consigo aplicar. O que eu não gosto é da parte teórica."* Podemos relacionar essa característica com o apresentado por Imbernón (2010) e os Referenciais para a formação de professores (1999) que afirmam a falta de integração dos docentes na concepção das atividades de formação continuada, não atendendo demandas do seu campo profissional. Nesse sentido, apesar de intencionarmos investigar a estruturação de espaço formativo que é pautado nas etapas da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), deixamos aberto à professora a escolha dos temas, das turmas e situações para os encontros, de maneira que pudessem contemplar o seu desejo:

> J: Nossa, são coisas fora da realidade (as formações continuadas que participou). Então eu espero que eu consiga levar para minha sala de aula. Se não vai ter sido um tempo perdido. Espero conhecimento para mim, mas é para o meu trabalho.

É possível perceber o olhar da professora para as atividades que deve realizar no seu campo profissional, de modo que podemos relacionar com as atividades produtivas destacadas por Pastré, Meyen e Vergnaud (2019). Por mais que a Joana considere a construção de novos conhecimentos e sua formação, o principal objetivo da professora é a realização das atividades inerentes a sua profissão, como o ensino de números decimais para os alunos. Deixamos claro que Joana não deixa de considerar sua aprendizagem como um aspecto importante da formação continuada, mas que seu objetivo central está nas atividades presentes no seu campo profissional que devem ser realizadas.

Nesse sentido, a formação continuada que propusemos também considera as demandas da professora inserida na concepção do campo profissional (PASTRÉ 2017), pois não deixamos de ter a intencionalidade da formação do sujeito, mas consideramos a análise do trabalho da docente e os conhecimentos envolvidos nas suas ações. Durante a formação, consideramos aspectos da aprendizagem incidental na qual partimos de situações da prática da professora e realizamos o estudo, pautado nas etapas da Engenharia Didática, com o intuito de contemplar essas situações de atividades produtivas, como no ensino de números decimais e sistemas de equações do 1º grau. Assim, a atividade produtiva possui um papel central na formação continuada, possibilitando as reflexões a partir da sua realização, pois “A didática profissional escolheu enfatizar a análise da atividade construtiva que acompanha a atividade produtiva, isto é, analisar a aprendizagem sob sua forma antropologicamente primeira, a aprendizagem incidente” (PASTRÉ, MEYEN, VERGNAUD, 2019, p. 26).

4.2 Os encontros com a professora Joana

Nesse tópico apresentamos o trabalho desenvolvido com a professora Joana sobre os temas escolhidos por ela, com o estudo preliminar dos conceitos, a elaboração e análise *a priori* das sequências didáticas, o relato das experimentações pela professora e, por fim, a análise *a posteriori* e validação das sequências didáticas. Apesar de inicialmente intencionarmos realizar um momento da Engenharia Didática em cada encontro, houve situações que perpassaram por mais de um momento como: o estudo preliminar e a elaboração de uma atividade em um dia, ou então, a análise *a posteriori* de uma atividade já desenvolvida e a elaboração e análise *a priori* do restante da sequência didática. Assim, decidimos apresentar o trabalho que foi desenvolvido durante os encontros, e não separados nos momentos da ED, por ser mais fidedigno ao trabalho desenvolvido.

Por fim, acreditamos que as sequências didáticas elaboradas, com a análise *a priori* de cada questão, representam um produto importante para a professora Joana, tendo em vista que um dos seus objetivos relacionados ao contexto profissional era a aplicabilidade em sua sala de aula. Além disso, acreditamos que a sequência didática, com as possíveis estratégias e dificuldades dos alunos, sintetiza o trabalho realizado ao longo dos encontros, pois foram elaboradas a partir das discussões e escolhas realizadas em conjunto entre a professora e o pesquisador. Dessa maneira, após a análise de cada encontro, apresentamos as atividades da sequência didática naquela reunião, além das possíveis estratégias e dificuldades que poderiam ser apresentadas pelos estudantes durante a experimentação das sequências didáticas.

4.2.1 Frações

Encontro do dia 14 de agosto de 2018

No dia 07 de agosto de 2018, ao realizar a conversa inicial com a professora Joana, visamos identificar possibilidades com a professora, descrevendo o processo que percorreríamos no trabalho em conjunto, como os momentos da Engenharia Didática, a partir das demandas propostas pela docente. Joana indica uma possível dificuldade de trabalhos desse tipo na realidade escolar que está inserida, por exemplo:

> porque o tempo é assim (rápido). Eu acho que é complicado a gente ficar aplicando essas teorias, porque a gente tem o currículo, ele precisa ser cumprido, eu planejei minha aula e do nada alguém bate na minha porta e fala que vai ter uma palestra, vai

> ter que descer. Foge do nosso controle. […] Eu pensei, é possível pela quantidade de aula seria o 6º e 8º ano. Porque são seis aulas.

Verificamos que ao realizar o trabalho imerso no ambiente escolar, com as turmas típicas da docente, é importante levar em consideração questões que fogem do controle da professora, como situações não previstas que modificam o que havia planejado, conforme relatado. Nesse contexto, a professora tenta privilegiar o trabalho com as turmas dos 6º e 8º ano, pois no horário escolar a disciplina de Matemática possui 6 aulas semanais, diferentemente das turmas do 7º e 9º ano que possuem uma quantidade menor de aulas, que para a professora causa uma restrição no trabalho desenvolvido (CHEVALLARD, 2009). Joana definiu como primeiro tema de trabalho o conteúdo de frações, com a turma do 6º ano, tendo como foco nas multiplicações e divisões de frações, pois esse tema ela já tinha iniciado no 1º semestre letivo do ano de 2018, de acordo com o referencial curricular da Secretaria Estadual de Educação (SED/MS).

No dia 14 de agosto de 2018 iniciamos o trabalho das análises preliminares sobre frações, a partir de alguns problemas de fração sobre tópicos que a professora Joana já tinha trabalhado com seus alunos, como frações de uma quantidade, comparação de frações e adição e subtração de frações. Apresentamos um dos problemas de frações equivalentes que foram selecionados para a discussão com a professora:

Quadro 3 Problema de fração equivalente

Seu João decidiu distribuir sua coleção de 64 bolinhas de gude entre seus 4 filhos: Antônio, Kaio, Ricardo e Júnior. Para tanto, disse a Antônio: filho, repartirei minha coleção em 4 partes iguais e você receberá uma dessas partes". Para Kaio, disse: Filho, repartirei minha coleção em 8 partes iguais e você receberá 2 dessas partes". A Ricardo disse: Repartirei minha coleção em 16 partes iguais e você receberá 4 dessas partes". E a Júnior, o Filho mais novo, disse que iria repartir a coleção em 32 partes iguais e que ele receberia 8 dessas partes. É possível afirmar se algum dos filhos recebeu uma quantidade maior de bolinhas? Quantas bolinhas cada um recebeu?

Inicialmente, Joana foi resolvendo alguns problemas que levamos sem dificuldades, momento no qual evidenciou a ideia de frações equivalentes: *"está todo mundo recebendo a mesma quantidade né? Na minha cabeça está todo mundo recebendo a mesma quantidade, porque é tudo equivalente. Ele então dividiu em quatro e deu para cada um a mesma quantidade."*. Com o objetivo de proporcionar uma discussão sobre o tema, questionamos a professora sobre como seus alunos resolveriam um problema desse tipo:

> R: Você acha que os alunos conseguirão fazer?
> J: Se eu explicar, conseguem. De primeira eu acho que não.
> R:Você fala por causa da interpretação?
> J: É.
> R: E se reescrever o problema na forma de um diálogo, não em texto corrido (utilizando ponto final e travessão). Acha que eles teriam conseguido fazer?
> J: Acho que não. Estou pensando na sala. Eles pensando sozinho não. Se eu não for encaminhando... Eles não vão saber nem como começar, ter essa ideia de fração equivalente.
> […] Se tivesse separadinho eles conseguem entender que são equivalentes. […] Vou falar uma coisa, que pode ser um erro meu, eles são muito bons de executar. Ah esses meninos, os acima da média, conseguem ler e interpretar sozinhos. Os outros eu tenho que ler e interpretar junto com eles.
> R: Entendi.
> J: Se eu não leio o problema eles não resolvem, Renan. Agora se você for com uma lista lá de fração, eles resolvem tudinho. Eles são bons em calcular.

Evidenciamos nessa situação elementos do *Conhecimento em ação didático 1.1 (*$C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)* quando explicita que seus alunos são *"muito bons de executar"* e *"agora se for uma lista lá de fração, eles resolvem tudinho. Eles são bons em calcular",* tendo em vista que essa característica que ela descreve de seus alunos podem advir das escolhas didáticas que ela privilegia no trabalho dos temas matemáticos. Em conformidade ao relatado no encontro anterior, Joana destaca que considera importante o momento do trabalho com a técnica, dando uma ênfase a esse momento no estudo com os alunos.

Além disso, verificamos novamente vestígios da perspectiva empirista no relato da professora (BECKER, 2001), que considera fundamental a sua ajuda no momento de atividades exploratórias ou situações-problema. Caso não faça essa intervenção, Joana acredita que os alunos não conseguirão resolver as atividades propostas, seja por não compreender o problema ou não saber qual conhecimento matemático mobilizar, com exceção dos estudantes que relata serem acima da média. Desse modo, modelamos esse conhecimento didático da professora como o *Conhecimento em ação didático 2.1 (*$C_{d2.1}$ *– os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor).* É possível verificar elementos desse conhecimento em ação em outras situações explicitadas por Joana, como em outro problema de fração equivalente que trabalhou com os alunos:

> J: Eu te falei Renan, eu que tive que encaminhar, porque se fosse sozinha eles não conseguem. […]. Primeiro mostrei para eles que eles chegaram nos nove décimos, aí quanto falta eu mostrei na figura, porque eles não estavam entendendo por meio da conta. […] Mas tudo eu encaminhando (a resolução).

Evidenciamos que esse conhecimento em ação influencia nas escolhas e na postura de Joana, uma vez que ao propor esses problemas se põe à frente da turma resolvendo as atividades em conjunto com os estudantes. Nesse sentido, algumas ações apresentadas por Joana estão relacionadas aos conhecimentos em ação didáticos *1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)* e *2.1 ($C_{d2.1}$ – os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor)* que modelamos, orientando sua prática em situações semelhantes à apresentada.

Na continuidade dos estudos na análise preliminar, verificamos a importância do conceito de frações equivalentes no estudo de frações, que devem ser privilegiados em situações de comparações de frações e operações entre elas, como recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL,1998) e na Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018). A professora Joana afirma que para o ensino das operações de adição e subtração, com denominadores diferentes, ela utiliza os algoritmos para encontrar o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e para encontrar as novas frações realizar a divisão do MMC pelo denominador e multiplicar pelo numerador da fração original, como explicita: "*Eu faço por Mínimo Múltiplo Comum. Quando eu tô trabalhando no oitavo produtos notáveis e tem que juntar frações, eu pergunto para eles o que eles têm que fazer. Eles já falam, MMC, pois já foram meus alunos".* Destacamos que essa estratégia didática explicitada pela professora pode estar relacionada a mobilização do *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* pois ao trabalhar as operações entre frações, a docente recorre à técnica da fatoração já trabalhada com os estudantes que, segundo a professora, *"fatoram muito bem [...] faço eles fatorarem, fatorarem, fatorarem, até eles entenderem. Então quando eles chegam na fração, eles estão fatorando bem.".*

Além disso, diante de situações que envolvem adição e subtração de fração Joana evidencia um caráter operatório de seu conhecimento (VERGNAUD, 2009), pois quando está frente às situações desse tipo, consegue resolvê-las mobilizando o algoritmo para encontrar o Mínimo Múltiplo Comum e a fração equivalente por meio da "regra" (para o novo numerador divide o valor do MMC pelo denominador e o resultado multiplica pelo numerador).

> R: A professora Luíza[24] não faz assim (direto por MMC). Ela usa a ideia de fração equivalente.
> J: Mas e se for um monte de fração Renan?
> R: Ela trabalha o MMC, mas depois.
> J: Mas como seria por equivalência? Por exemplo você vai somar fração $\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$.

---

[24] A professora Luíza se trata de uma amiga de Joana, com quem estudou no curso de Matemática – Licenciatura na UFMS. Luíza é professora de uma escola pública municipal do município de Campo Grande -MS, com aulas nas turmas de 6º ao 9º do Ensino Fundamental.

> R: Primeiro ela trabalha com denominadores iguais. Nesse caso aqui, eles percebiam que não conseguiam fazer, mas conseguiam com mesmo denominador. Então ela falava: vamos achar frações que fiquem com denominadores iguais. E fazia $\frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \ldots$
> J: Mas ela fazer isso desde o início né. Imagina eu chegar lá agora e fazer isso com meus alunos.
> R: Sim. Mas depois que percebeu que ir multiplicando até achar uma fração equivalente, perguntava: como que eu faço para achar mais rápido a fração equivalente? Então entrava o MMC. Quando soma as frações $\frac{2}{3} + \frac{4}{7}$, faz o MMC e aquela regrinha do divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima, meus alunos têm uma dificuldade terrível de lembrar. A ideia é encontrar uma fração equivalente, na verdade, ela justifica a regra.
> J: Ah Renan, essa é uma boa.
> R: Quem que eu multipliquei no denominador? 7. Então quem tem que ser no numerador? 7.
> J: Ah, eu vou fazer assim com os alunos também. Que é uma confusão.
> R: A ideia é por fração equivalente.
> J: Nossa que vale uma confusão na cabeça deles. […] Eu nunca tinha pensado nisso não. Eles chegam lá no 6º fazendo isso (a regra de dividir e multiplicar).

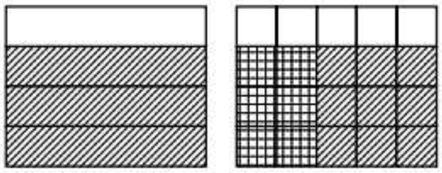
Nesse evento percebemos que a professora Joana valoriza o caráter operatório do conhecimento diante dessas situações, pois conforme indica Vergnaud (2009) a forma operatória do conhecimento organiza e pauta a conduta do sujeito na ação. Assim, essa forma do conhecimento está relacionada ao êxito na ação, nesse caso resolver as operações entre frações, que a professora faz sem maiores problemas. Destacamos esse evento como uma das potencialidades do processo formativo que propomos pautados nas etapas da ED, nesse caso o momento das análises preliminares, pois a partir do estudo das recomendações do ensino de fração que é apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacional (BRASIL, 1998), pudemos identificar como a professora Joana trabalha as operações de frações, evidenciando alguns vestígios de seus conhecimentos e as estratégias mobilizadas. Além disso, a partir das interações, foi possível que Joana pudesse refletir sobre um conhecimento operatório que utiliza frente às situações de operação de frações com denominadores diferentes, identificando algumas propriedades que envolvia o procedimento, como a ideia da fração equivalente que estava envolvida nas ações realizadas.

Outro tópico no estudo de frações é a apresentação de situações que contemplem os diferentes significados do conceito, como a ideia da multiplicação utilizando a ideia de "partes de partes de um total", como apresentado no PCN (BRASIL,1998):

Figura 1- Multiplicação com a ideia de partes de partes do total

A compreensão da multiplicação com frações pode ser pensada como "partes de partes do total" (neste caso a multiplicação não se apóia na idéia de adição reiterada).

Assim, $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ pode ser interpretado como procurar $\frac{2}{5}$ dos $\frac{3}{4}$ de um todo.



$\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$

Fonte: (BRASIL, 1998, p. 104)

A professora Joana relata trabalhar com diferentes significados da fração, além da ideia de parte-todo, como o significado de divisão. No que se refere a esse significado da multiplicação de frações, Joana explicita que não conhecia esse significado e tenta realizar a multiplicação de $\frac{2}{3}.\frac{1}{4}$:

> J: De acordo com o outro exemplo, começo pelo $\frac{1}{4}$, e depois faz o quê? Peraí, já então você vai dividir em 2. E você tem $\frac{2}{3}$. E pegaria o quê? (confusão)
> R: A fração é $\frac{2}{3}$.
> J: Então em três né. Espera aí de novo. É $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ os divido em 3 partes, que vou pegar dois, né!
> R: E quanto seria o resultado?
> J: $\frac{2}{12}$, né! Ah, entendi.

A partir dessa resolução, a professora Joana decide trabalhar uma atividade de multiplicação de frações, utilizando o método geométrico com o uso do papel quadriculado pois *"Dá para usar papel quadriculado que eu pedi para comprar para ensinar função para o nono."*. Percebe-se novamente que a professora Joana se mostra aberta a novas atividades que podem contribuir para a aprendizagem de seus alunos, como nessa atividade de multiplicação. Cabe ressaltar que nesse encontro, dia 14/08/2018, tínhamos previsto realizar um estudo preliminar sobre o tema de frações e a elaboração da sequência didática seria realizada nos próximos encontros.

Entretanto, cabe ressaltar que a formação que propusemos estava situada no campo profissional da professora, sendo necessário considerar as condições que estavam impostas, como o currículo que ela devia seguir, pois como Joana diz: *"já está dentro do que eu estou* *fazendo"*. Nesse contexto, evidenciamos que o currículo que Joana deve seguir é uma restrição no trabalho que realizamos, pois é necessário que a docente siga um cronograma previamente estabelecido pela Secretaria Estadual de Educação, que por meio dos planejamentos online mensais determinam os tópicos que devem ser desenvolvidos naquele período. Essa característica nos impediu, por diversas vezes, de continuar o momento de análise preliminar dos temas, pois era necessária a elaboração da sequência didática a ser desenvolvida com os alunos conforme o referencial curricular da SED.

Iniciamos então a discussão da primeira atividade que seria aplicada com os estudantes durante a semana, com o levantamento de possíveis estratégias e dificuldades que os alunos poderiam manifestar durante a aula. A atividade escolhida, que apresentamos a seguir, por Joana fazia parte da lista de problemas e exercícios que levamos para iniciar as discussões do tema, e esse momento de seleção da atividade ocasionou o diálogo:

Quadro 4- Atividade de multiplicação de fração

Utilizando o papel quadriculado, resolva as multiplicações de frações: a- 2/3 x 4/6 b- 3/4 x 2/3 c- 1/5 x 1/2

J: Você não consegue copiar aquela atividade e me mandar por e-mail? Não precisa copiar tudo só aquela parte do exercício.
R: Vamos pensar em uma atividade.
J: Eu sei, mas eu quero fazer esse daqui.
R: Será que a gente consegue pensar em alguma atividade, algum problema. Porque nessa atividade contém dois exemplos resolvidos direto.
J: Tudo bem, eu acho que primeiro vou fazer mostrar esses daí. Como é que resolve e a partir daí criar o problema. Entendeu?
R: Você acha que eles não dão conta de fazer um problema?
J: Sem eles nunca lhe terem vistos essa ideia? Você fala que eu vou entregar o problema e a folha.
R: Um problema de uma herança. Se você fizesse que o pai tinha um terreno e deu $\frac{3}{5}$ para o filho...
J: Não sei se eles vão ter a ideia do desenho. Falar que eles não vão poder usar a conta...
R: Não, pode deixá-los usarem. Mas será que eles vão ver um problema desse tipo com uma multiplicação? Poderia até dar uma folha em branco e criar um problema do terreno, como a herança. O pai deu $\frac{3}{5}$ para você e você decidiu vender uma parte. Será que eles vão associar com uma multiplicação?
J: Não sei. pode ser...
R: Então deixa eles fazerem e discute com eles no final que esse problema pode ser pensado pela ideia da multiplicação.

> J: Não sei, posso tentar. Posso dividir a turma? Aí põe um desses alunos bons com os outros. Eu vou ver se eu acho algum problema para aplicar, mas a minha intenção é mostrar para eles que daria para ser sem problemas. Eu usando papel.
> R: Não tem problemas. Pode fazer do jeito que você está pensando em fazer. A situação-problema a gente discute no próximo encontro, então. Eu te mando essa atividade.

Em um primeiro momento é possível evidenciar aspectos de conhecimentos didáticos de Joana, por meio de vestígios dos *conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução) e conhecimento em ação didático 2.1 ($C_{d2.1}$ – os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor)* que são manifestados durante o diálogo para a elaboração da atividade. Joana novamente indica uma resistência em propor uma situação-problema diretamente aos estudantes, julgando ser necessário que ela faça alguns exemplos iniciais para que eles compreendam a resolução. Essa postura de Joana está em conformidade ao apresentado por Becker (2001) em relação à perspectiva empirista, pois a professora acredita que seus alunos, exceto alguns "bons", não seriam capazes de realizar a atividade, cabendo a ela, no papel de professora ensinar os estudantes como deveria ser feito. Além disso, conforme apresentado pelos PCN (BRASIL, 1998) o trabalho com a ideia geométrica deve ser desenvolvido como uma maneira de atribuir significado para as situações de multiplicação. Porém, ao longo do debate, Joana considera essa resolução como um algoritmo para a resolução de multiplicações, realizando as divisões da região plana de acordo com as frações para encontrar o resultado, cabendo a ela mostrar como faz esse procedimento, para então os alunos resolverem os exercícios propostos.

Esse evento nos marcou por causar um conflito de perspectivas e escolhas didáticas para a aprendizagem dos estudantes. Considerando os aportes teóricos que somos consonantes, como a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996; 2008), acreditamos que essa atividade poderia ser uma possibilidade de proporcionar aos alunos que perpassassem por momentos *adidáticos*, a partir de uma situação-problema que pudéssemos elaborar. Entretanto, a professora Joana, pautada em seus conhecimentos didáticos, considerava adequado a realização da atividade da maneira que apresentamos anteriormente, após a resolução de dois exemplos na lousa.

Esse processo nos faz pensar no tipo de formação que estamos propondo. Por mais que no momento de elaboração da atividade as escolhas de Joana não estavam condizentes com a que acreditamos, era necessário respeitar as escolhas de Joana na sua ação docente. A professora realiza essas escolhas, não por achar que é mais fácil para ela, mas por causa de seus conhecimentos didáticos, condições de sua turma, o tempo didático que tem para desenvolver a aula, entre outros fatores. Por mais que trabalhamos em conjunto, a professora Joana é a responsável pela ação de ensinar os estudantes. Além disso, destacamos que a aprendizagem de um sujeito não é algo impositivo, mas sim processual, a partir das experiências que ele vivência (VERGNAUD, 2009). Desse modo, intencionamos ao longo da formação proposta, que Joana se depare com situações que lhe causem reflexões sobre seus conhecimentos, podendo realizar outras escolhas didáticas.

Atividades da sequência didática discutidas no dia 14 de agosto de 2018

1- Utilizando o papel quadriculado, resolva as multiplicações de frações:

a- 2/3 . 4/6

b- 3/4 . 2/3

c- 1/5 . 1/2

Estratégia 1: Algoritmo da multiplicação

Elencamos o uso do algoritmo da multiplicação como uma possível estratégia de ser mobilizada pelos estudantes nessa atividade, devido às escolhas didáticas da professora que já trabalhou com seus alunos a multiplicação por meio do algoritmo. Dessa maneira, é possível que mesmo propondo a atividade por meio do papel quadriculado a estratégia do algoritmo seja mobilizada durante a resolução, seja para obter a resposta ou para validá-la. Assim, no item a, os alunos podem recorrer ao seguinte procedimento:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{18}$$

Estratégia 2: Utilizar o material quadriculado

Conforme o apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacional (BRASIL, 1997) um dos significados da multiplicação está associado à configuração retangular. Nesse sentido e, tendo em vista que a professora apresentou essa estratégia no início do trabalho, os alunos podem utilizar o papel quadriculado para realizar as operações de multiplicação. Por exemplo:

Dificuldade 1- Representação figural da fração

Uma possível dificuldade inicial na resolução da atividade pode estar na representação figural das frações dadas, ocasionando resoluções incorretas devido à representação de uma fração diferente da fração dada.

Dificuldade 2- Dividir apenas a parte pintada ao representar a segunda fração.

Essa dificuldade está relacionada à ideia de distratores[25] na representação figural da fração. A ideia de distrator pode ocorrer se o aluno não realizar as divisões em toda a área da figura, dividindo apenas a parte pintada da primeira figura. Assim, o inteiro é apresentado com divisões de partes que não são iguais, podendo ocasionar uma dificuldade, caso os alunos não percebam que devem fazer novas subdivisões até que as partes divididas sejam iguais.

Dificuldade 3- Compreensão do significado da multiplicação (inverter a ordem das frações $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$)

Uma dificuldade na resolução é a compreensão da multiplicação, onde $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$. Apesar de resolverem $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ e obterem o mesmo resultado, elencamos essa dificuldade devido à compreensão da propriedade comutativa da multiplicação.

Encontro do dia 21 de agosto de 2018

No dia 21 de agosto de 2018 estava prevista a elaboração e a análise *a priori* da sequência didática que seria desenvolvida pela professora ao longo da semana. Devido às condições de trabalho da professora e a obrigatoriedade de atender ao calendário escolar, fez-se necessário que a elaboração e análise a priori da sequência didática ocorresse em apenas um encontro. Joana iniciou a reunião relatando algumas situações sobre a atividade de multiplicação de frações utilizando o papel quadriculado, que havia sido planejado na semana anterior:

> J: Eu não olhei nada Renan. Vou falar bem a real para você, sabe por quê? Eu não consegui fazer direito a atividade porque semana passada eu estava finalizando

---

[25] Pautadas nos erros cometidos pelos estudantes, nas representações figurais de fração, Melo e colaboradores (2013) utilizam o termo distrator quando os alunos não levam em consideração a necessidade que as partes da figuram tenham a mesma área. Dessa maneira, mesmo que uma figura seja dividida em 4 partes com áreas diferentes, com 1 dessas partes destacada, os alunos podem utilizar a fração podem representar essa situação utilizando a fração $\frac{1}{4}$.

algumas coisas com eles e sexta-feira eu apliquei a atividade do CRE4[26]. Sobrou ontem para eu aplicar. A minha aula de ontem era a 3ª, eles têm que descer mais cedo para merenda e para o recreio. Então são 40 minutos de aula. Quando eu cheguei, os alunos não estavam em sala, eles estavam na sala de vídeo que a professora de Ciências tinha levado. Eles subiram depois do sino e demorou para eu organizar. Se eu tive meia hora foi muito. De verdade… eu percebi que eles não entenderam muito. Eu fiz os dois exemplos, entreguei a folha e eu tive que ir muito de carteira em carteira para explicar novamente.
R: Vamos lembrar o que a gente falou que poderia acontecer na aula.

J: Primeiro eles tinham que perceber que tinha que começar pela primeira fração. você quer $\frac{2}{3}$ de quem? Do $\frac{4}{6}$. Então precisa começar com $\frac{4}{6}$. E foi isso que não entra na cabeça da maioria. Por exemplo: $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$. eles queriam tentar três retângulos. Eles faziam $\frac{4}{6}$ e pintava quatro (partes das 6 divididas). Aí depois ia fazer $\frac{2}{3}$ e pintava só dois quadradinhos (da interseção).
R: Ah ele não pegava a fileira inteira. Ele não pintava $\frac{2}{3}$ do inteiro. Aí ficaria essa parte só de verde. E qual seria o resultado da multiplicação? A parte que tá pintado das duas cores.
J: Mas fui eu que falei para eles. Ah verdade! Mas eu falei para eles que eu queria pintar $\frac{2}{3}$ (da fração incial). Olha porque que eles não pintaram tudo. No exemplo quando eu fui fazer, eles queriam pintar a metade toda até o final. E aí eu falei não. É só metade de tanto (da outra fração). Então pinta só até a colorida. Fui eu que falei para eles. Você vai olhar que nenhum deles pintaram porque eu que falei.
R: Mas vamos pensar, tá errado isso que você fez?
J: Eu não sei! E agora?
R: Pegar só o $\frac{2}{3}$ do $\frac{4}{6}$ só.
J: Porque eu falei para eles assim: essa daqui a primeira ($\frac{4}{6}$) que foi dividida em três partes, eu quero duas delas.
R: E está errado?
J: Não, porque acaba dando certo. por exemplo: $2x4 = 8$ (e conta os quadradinhos para confirmar), do total de 18.
R: Se eu for pensar $\frac{2}{3}$ do $\frac{4}{6}$, eu posso pensar que o $\frac{4}{6}$ é isto (parte pintada). E apenas dessa parte que eu vou pegar $\frac{2}{3}$. Aí dividir até o final. Mas se eu dividir só até essa parte aqui?
J: Ah não ia ter o total.
R: Isso eu não ia ter o total, $\frac{8}{18}$.
J: Fui eu que falei para eles.

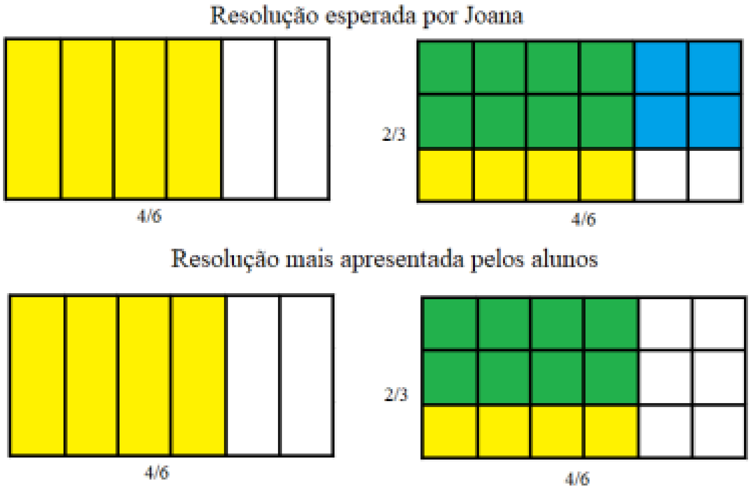
Inicialmente notamos uma dificuldade de Joana, que apesar de ter planejado uma atividade a ser desenvolvida com sua turma, enfrenta imprevistos que impedem a realização da forma que desejava. Esses imprevistos estão presentes no campo profissional de um professor, que se depara com as questões do horário de aula, estrutura e regras da instituição escolar (como a sala de vídeo ser distante da sala de aula e o horário de liberação dos alunos para o intervalo) e o cronograma do currículo que deve ser seguido, impedindo a professora de desenvolver a

[26] A professora se refere é a Coordenadoria Regional de Educação – região 4 (CRE-4), da Secretaria Estadual de Educação, que propôs uma formação continuada com os professores de Matemática organizado em 4 encontros anuais que discutiam algumas atividades que deveriam ser desenvolvidas em sala de aula pelos professores.

atividade em outro momento, que podem ser vistas como uma restrição institucional para Joana (CHEVALLARD, 2009). Essa característica deve ser ressaltada pois ao desenvolvermos a investigação no ambiente profissional de Joana, com suas turmas típicas, é necessário considerar tais acontecimentos durante os encontros para adequar a sua realidade.

Em relação a atividade, a professora mostrou-se descontente com o resultado da experimentação devido à resolução dos alunos não ocorrer conforme o esperado. Joana acreditava que seus alunos multiplicariam como foi visto no encontro anterior, como proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacional (BRASIL, 1998), no qual ao considerar a segunda fração, os alunos pintassem a região inteira e não apenas a região representada na primeira fração, como na imagem a seguir:

Figura 2- Representação das estratégias descritas

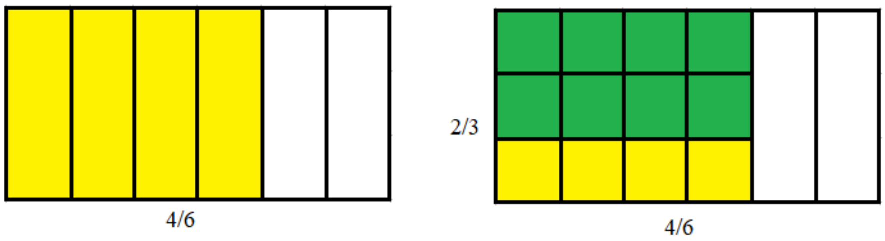


Fonte: dados da pesquisa

Devido à diferença entre o que esperava e o que aconteceu, Joana acreditava que a atividade não deu certo com sua turma e, a partir de um momento de análise *a posteriori* das questões foi possível refletir sobre o seu desenvolvimento. Por mais que tenha visto no encontro anterior, compreendemos a ideia processual da aprendizagem (VERGNAUD, 1996) e podemos evidenciar que Joana ainda está em um processo de desequilíbrios do uso dessa estratégia quando defrontada com uma situação inesperada, como quando questionada se a estratégia dos alunos estava errada, responde: *"Eu não sei! E agora?"*. Ao longo da discussão, tentamos manter uma postura de questionamentos, que levassem Joana a refletir sobre a situação, sem responder diretamente se a estratégia estava correta ou não. Tal postura advém da perspectiva apresentada na Teoria das Situações Didáticas, em especial as situações *adidáticas* (BROUSSEAU, 1996; 2008), na qual o professor (nesse caso, nós, proponentes do trabalho formativo) age como um mediador para a reflexão do sujeito (a professora Joana).

Durante a reflexão sobre a atividade com seus alunos, Joana percebe que a estratégia elaborada por eles pode ser justificada por causa de uma instrução dada nos exemplos realizados (“*Mas fui eu que falei para eles. Ah verdade! Mas eu falei para eles que eu queria pintar* $\frac{2}{3}$ *(da fração inicial). Olha porque que eles não pintaram tudo”.)*. Apesar de discutirmos na análise *a priori*, Joana se questiona se essa resolução é válida, ou seria necessário realizar como o visto nos Parâmetros Curriculares Nacional (BRASIL, 1998) e percebe que essa estratégia está correta. Além disso, durante a reflexão da atividade foi possível discutir a ideia de distrator que pode aparecer durante a resolução:

Figura 3 - Resolução discutida com Joana



Fonte: dados da pesquisa

Nessa estratégia é importante observar que ao representar a fração $\frac{2}{3}$, a divisão em 3 partes iguais é feita apenas na região considerada pela fração $\frac{4}{6}$ **.** Desse modo, após pintar 2 partes dentre as 3 divididas, é importante que os alunos observem ao indicar a resposta final que a região plana não está dividida em partes iguais, sendo necessário realizar a divisão. Ao ser questionada sobre o que achou da atividade e as resoluções dos estudantes, Joana reflete sobre essa situação:

> R: E esse processo, o que que você achou? O que você pensou que ia acontecer e realmente aconteceu? O que você não pensou que iria acontecer e aconteceu? como que ajudou você na sala de aula...
> J: Eu achei que eles iriam sair melhor. Eles gostaram eles acharam diferente, mas eles olhavam para mim com uma cara: E agora? A primeira fração eles dividiam certo, o problema era achar a segunda fração da primeira.
> R: Mas a gente falou que poderia aparecer essa dificuldade...
> J: Mas eu não esperava que seria um número tão grande de alunos. Que eu tivesse que auxiliar tantos alunos individualmente, os alunos que são bons e dariam conta de fazer o processo mecânico sozinhos. Então eu acho assim que eles estão, é um erro talvez meu, muito habituados com o mesmo processo mecânico, tradicional.

> R: E você já tinha passado coisas assim para eles?
> J: Não, eu tô pegando um pouco mais agora em problema, Renan. […] se eu passar a conta para eles, eles vão fazer. E você acha que o aluno é bom, mas só fazendo conta.

Ressaltamos uma potencialidade da análise *a posteriori* no processo formativo de Joana, pois permitiu que ela refletisse sobre as situações desenvolvidas em sala de aula, retomando novamente aspectos matemáticos da multiplicação de frações por meio da ideia de áreas de figuras planas. Esse momento de análise *a posteriori* e validação da atividade permitiu um primeiro momento de desestabilização do *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)* pois ao analisar as produções de seus alunos, a docente indica que por mais que eles consigam realizar o algoritmo da multiplicação corretamente, em outras atividades podem ter dificuldades, levando-a a repensar suas escolhas futuras. Além disso,

> R: Isso que você falou que você não esperava tanta dificuldade dos alunos? A gente ter pensado antes te ajudou em sala?
> J: Esperava que alguns tivessem, não muitos... sim, ajudou. aí eu falei o que ele tinha que pintar, porque eu já imaginava que poderia acontecer isso.
> J: Porque eu já estou até vendo, adição subtração até vai e a multiplicação? […] então eu apliquei aquela atividade do CRE, fui pensando em que o aluno pode até fazer de certo ou de errado.
> R: Já foi pensando?
> J: Já fiz.

Destacamos que essa fala de Joana pode apresentar uma potencialidade dos usos da ideia da Engenharia Didática na prática da professora. Por mais que o contexto profissional do professor apresente limitações para o uso da Engenharia Didática na sua prática, é possível incorporar alguns preceitos presentes na ED, como a noção de análise *a priori*, em outras atividades, refletindo sobre possíveis dificuldades e estratégias dos estudantes, pois conforme afirma Bittar (2017, p. 107) o professor "estará mais preparado para compreender o que esses alunos estão fazendo e, consequentemente, saber que tipo de intervenção deve realizar para favorecer a aprendizagem".

Após a análise da atividade desenvolvida pela professora, ao iniciarmos a elaboração da sequência didática que seria desenvolvida com os estudantes ao longo da semana, Joana apresenta um problema que passou a seus alunos e a estratégia de resolução de um deles:

Quadro 5- Problema descrito por Joana

Em uma cidade $\frac{7}{9}$ dos moradores praticam futebol e $\frac{4}{7}$ dos moradores jogam vôlei. Qual desses esportes é o mais praticado?

> J: Esse aluno aqui ele fez uma coisa que eu não sei falar se está certo ou errado. Você tem uma folha aí, olha o que ele fez. Então tem que comparar as frações $\frac{7}{9}$ e $\frac{4}{7}$. Eu ensinei daquele jeito de encontrar o denominador comum e depois comparar o numerador. Ele pegou a fração tem o menor denominador e foi acrescentando um inteiro até chegar no outro denominador. $\frac{5}{8}$ mais um inteiro, $\frac{6}{9}$ (foi somando 1 no numerador e no denominador). Então $\frac{6}{9}$ era menor que $\frac{7}{9}$ que era o futebol. E a resposta deu certo, Renan.
> R: E esse processo dele está certo?
> J: Eu não sei, isso que eu quero te perguntar também, meu filho. Ele é um dos meninos que sempre vem com um monte de coisa, eu fiz de outro jeito. E vai dando certo, menino.
> R: Tá, mas esse jeito está certo?
> (pausa de um minuto pensando)
> J: Por que a gente não pode... se bem Renan, denominador entre 7 e 1 daria o 7. Eu não sei se vai valer para todos. Ele (o aluno) criou outro jeito da multiplicação, eu falei para ver se valia para outros e ele viu que não dava.
> R: E esse jeito dá certo?
> (Momento de reflexão).
> R: Qual a ideia para comparar frações, Joana? Comparar $\frac{7}{9}$ com $\frac{4}{7}$?
> J: Como assim?
> R: Qual é a ideia que usa para comparar $\frac{7}{9}$ com $\frac{4}{7}$?
> J: Eu coloco para ter o mesmo denominador?
> R: Por quê?
> J: Não sei! Não sei por que, eu aprendi assim, eu uso assim. Não sei te pensar o porquê.

Observa-se que havia em Joana uma impregnação de práticas tecnicistas, manifestadas pela valorização da forma operatória em detrimento da forma predicativa. Isso apesar de ela ter realizado estudos teóricos de Matemática, não conseguia encontrar justificativas para o teorema em ação matemático falso utilizado pelo aluno para comparar frações (*teorema em ação falso: é possível encontrar uma fração equivalente somando o mesmo número no numerador e denominador*). Ao pedir para justificar se a estratégia do estudante está correta, a professora tem dificuldades em explicitar as relações e propriedades que estão envolvidas nessa situação, características que são componentes da forma predicativa do conhecimento (VERGNAUD, 2009). Para a validação da estratégia com o estudante, a professora mobiliza algumas características operatórias, resolvendo o problema por meio do procedimento do MMC e compara as respostas. Entendemos que Joana sabe resolver esta situação, no entanto é notável um caráter operatório de seu conhecimento matemático, quando ela consegue resolver a atividade sem problemas, mas ao analisar a estratégia do aluno tem dificuldades em justificar se está correto. A partir desse questionamento, identificamos uma possibilidade de questionar Joana sobre a validade da estratégia do aluno, questionando o procedimento que a docente realiza em situações de comparação de fração. Dessa maneira, a professora busca compreender a estratégia do estudante, perpassando por alguns momentos de reflexão sobre o tema:

> J: É por questão das partes iguais?
> R: Quando a gente coloca no mesmo denominador, a gente está dividindo em partes iguais. E qual é a nossa comparação?
> J: A quantidade que eu tomei, que eu considerei. O numerador.
> R: E por que a gente manda colocar no denominador igual?
> J: Porque está comparando coisas iguais.
> R: Então por que a gente fala para colocar no mesmo denominador?
> J: Para comparar as coisas iguais (dividido em partes iguais).
> R: Nessa hora que você está comparando, qual é o processo que você faz para chegar no mesmo denominador?
> J: A da fatoração. Vai fatorar o 7 e o 9, vai chegar no mesmo denominador, como se fosse o MMC. Nesse caso aqui o 63.
> R: E depois?
> J: Você multiplica por 7, aqui por 7 também (mesma multiplicação do numerador e denominador). Lá por 9 e por 9. Aqui seria 49 (numerador da primeira fração) e lá o 36 (numerador da segunda fração).
> R: E por que você pode mudar esta fração ($\frac{5}{9}$) para esta ($\frac{49}{63}$) e desta ($\frac{4}{7}$) esta ($\frac{36}{63}$)?
> J: São as mesmas frações equivalentes.
> R: Comparar essas frações aqui que foram dadas, você pode comparar $\frac{49}{63}$ e $\frac{36}{63}$?
> J: Pode porque elas são as mesmas.
> R: E nesse processo que o aluno fez, isso acontece?
> J: Hum, se eu simplificar não vai voltar ser aquela (fração original).
> R: É o mesmo processo?
> J: Não.
> R: Quando ele partiu dessa e foi somando 1 e 1(somando 1 no numerador e denominador), que fração que ele chegou?
> J: $\frac{6}{9}$
> R: Esta fração é equivalente a $\frac{4}{7}$?
> J: Não. $\frac{6}{9}$ é equivalente a $\frac{2}{3}$.
> R: Então foi coincidência (acertar a resposta). O processo não é o mesmo.
> J: Ah entendi.
> R: Se a gente faz com $\frac{5}{7}$ ao invés de $\frac{4}{7}$? Faz do seu jeito.
> J: Dá $\frac{45}{63}$ e $\frac{49}{63}$ (fez o mmc)
> R: Qual é a maior?
> J: O $\frac{7}{9}$.
> R: E se fosse no outro processo (do aluno)?
> J: Ele vai acrescentando 1. $\frac{6}{8}$, $\frac{7}{9}$. Aí seria igual.
> R: Nesse processo ele tá somando 1. Mas na verdade ele não tá aumentando porque o processo tá errado, ele tá aumentando. Mexendo no denominador.
> J: Até porque nem pode somar com denominador diferente. Eles inventam uns trem.
> R: Eu não tinha pensado nesse jeito não. Mas o que ele está fazendo não tem uma lógica? O que ele quer fazer quando ele tá fazendo esse processo?
> J: Para poder chegar no denominador comum. A ideia de chegar no denominador comum ele fez, do jeito que ele fez não está certo, mas esses meninos sempre procuram um jeito de fazer.
> R: Ele falou porque que tá acrescentando 1 e 1(no numerador e denominador).
> J: Do inteiro. Porque eu falo para eles sempre que se multiplicar em cima por 9, em baixo tem que ser por 9 também.

> R: Pensa que há equivalência, porque se estou somando em cima e embaixo pelo mesmo valor. Não tinha pensado nisso? Porque ele mexeu é na operação, mas os números (do numerador e denominador) são os mesmos.
> J: Não.

No caso da professora, ela sabe que o que está envolto na situação é o conceito de frações equivalentes. Entretanto, é importante para o trabalho da docente a compreensão da estratégia mobilizada pelo estudante, tendo que validá-la ou refutá-la. Inicialmente, Joana mobiliza a estratégia de encontrar as frações equivalentes por meio do Mínimo Múltiplo Comum para poder comparar as frações com o mesmo denominador. No momento de validação da estratégia do aluno, a professora compara a resposta dele com a sua, tendo em vista que não há dúvidas da estratégia do MMC, como quando justifica: "*eu aprendi assim, eu uso assim*". Por mais que tenha validado, inicialmente para o estudante, verificamos que Joana está em um processo de desequilíbrios com a situação, não tendo certeza da validade ou não da estratégia. Nesse caso, a estratégia apresentada pelo estudante para encontrar frações equivalentes é incorreta, pois ao somar o mesmo número, diferente de 0, no numerador e denominador a fração encontrada representa uma quantidade diferente da fração inicial.

Quando é pedido para Joana justificar a estratégia que ela utilizou, a professora descreve o processo do MMC, tentando validar sua estratégia por meio da ideia de frações equivalentes. Nesse momento, a partir do questionamento se essa justificativa também é válida para a estratégia do aluno, Joana percebe que por meio das operações que ele realizava não era possível obter frações equivalentes, verificando a invalidade da estratégia.

Ao ser proposto uma nova comparação, entre as frações $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{9}$, novamente Joana encontra as frações equivalentes por meio do MMC, com o objetivo de compará-las, verificando que a fração $\frac{7}{9}$ é maior (pois $\frac{49}{63}$ é maior que $\frac{45}{63}$) . Ao pensar na estratégia do estudante, Joana percebe que as frações resultantes seriam iguais ($\frac{7}{9}$), o que difere da estratégia do MMC que ela utilizou. Nesse processo de formação, é importante que a professora observe que o estudante não mobiliza essa estratégia de maneira aleatória, mas que elabora uma regra a partir de seus conhecimentos. Nesse caso, inferimos que o estudante compreende a necessidade de encontrar frações equivalentes para fazer a comparação. Além disso, ele considera a necessidade de utilizar o mesmo número na operação com o numerador e o denominador, mas utiliza a adição ao invés da multiplicação ou divisão. Estar ciente disso possibilita à professora realizar uma intervenção com o aluno para que supere essa dificuldade.

Consideramos que durante essa situação Joana perpassou por momentos que lhes causaram desequilíbrios cognitivos, tendo que buscar estratégias, explicitá-las e justificá-las, constituindo momentos importante para a compreensão dos conceitos que estavam em jogo na situação. Desse modo, além de mobilizar um conhecimento operatório, Joana passa a refletir sobre as propriedades que estavam envolvidas na sua estratégia e na do estudante. Esse momento de reflexão sobre as justificativas e propriedades, que compõem a forma predicativa do conhecimento, é importante no trabalho do professor pois são por meio deles que os conhecimentos são compartilhados em uma determinada comunidade (VERGNAUD, 2002; 2009).

Na elaboração da sequência didática[27], sempre consideramos a quantidade de aulas disponíveis para o seu desenvolvimento, nesse caso, 7 aulas pois há a data de aplicação da avaliação escolar. Joana considera adequado iniciar a sequência por meio de exercícios de multiplicação de fração, que apresentamos a seguir, conforme descreve:

Quadro 6 - Atividade de Multiplicação de Fração

Em seu caderno, calcule cada produto abaixo, simplificando quando possível:		
a) $\frac{9}{20}\ x\ \frac{5}{6}$	d) $2\frac{1}{3}\ x\ 3\frac{2}{5}$	g) $\frac{4}{5}\ x\ 0\ x\ \frac{5}{4}$
b) $\frac{3}{8}\ x\ \frac{5}{3}$	e) $\frac{1}{2}\ x\ \frac{2}{11}\ x\ \frac{3}{7}$	h) $\frac{7}{3}\ x\ \frac{3}{7}$
c) $3\ x\ \frac{2}{5}\ x\ \frac{1}{3}$	f) $\frac{4}{5}\ x\ 0\ x\ \frac{5}{4}$	

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

> J: Eu pensaria em operações de frações e depois alguns problemas.
> R: Como você pensa em começar? Com problemas?
> J: Com exercícios mesmo. O que eu queria era uma coisa do tipo assim: em seu caderno calcule o produto e simplifique quando possível (atividade do livro), entendeu. De multiplicação e divisão.
> R: Você acha que eles podem errar e que estratégias que eles podem fazer?
> J: Errar, eu tenho certeza (que não). Vai lá e eu me decepciono de novo.
> R: O que mais que você pensa em fazer depois? E por que que você quer começar por essa atividade?
> J: Eu acho que é para ele ficar habituado já nos detalhes de simplificação multiplicação, é mais fácil do que resolver outras coisas. Porque para resolver o problema ele teria uma dificuldade a menos. Porque ele teria dificuldade para resolver o problema, de interpretar e resolver ainda. E ainda teria que pensar no cálculo (caso não tivesse trabalhado antes).

[27] Como relatamos no início da sessão, apresentamos apenas algumas atividades e elementos da análise *a priori*, para o desenvolvimento da narrativa da análise. A sequência didática e a análise *a priori* desenvolvida estão apresentadas por completo após o momento analítico do tema de frações.

É possível verificar que essa escolha da professora Joana está relacionada ao *Conhecimento em ação didático 1.1* ($C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* pois conforme indicado por ela, assim seus alunos teriam uma dificuldade a menos no momento de resolver problemas. Por mais que ela tenha questionado isso na análise *a posteriori* da atividade com o papel quadriculado, destacamos que por se tratar de um conhecimento em ação da professora não é apenas uma situação que irá desestabilizá-la ao ponto de não mobilizar esse conhecimento. Além disso, vemos a preocupação da professora em não se "decepcionar" novamente com os estudantes como na atividade anterior. Essa característica demonstra a preocupação de Joana com seus alunos, de modo que suas escolhas são pensadas no êxito dos mesmos ao longo das atividades.

Para o estudo de divisão de fração, a professora decide trabalhar inicialmente uma atividade análoga à multiplicação de fração. Ao questionar quais possibilidades poderiam aparecer em sala de aula, Joana cita as seguintes estratégias *"Faço muito repetir a primeira (fração) e multiplicar pelo inverso da segunda (fração), mas eles também falam de multiplicação cruzada que veem lá no 5º ano"*, considerando como uma possível dificuldade a ordem que começa a divisão, pois em sua experiência menciona que alguns alunos começam pela segunda fração.

Após essas atividades de exercícios, Joana decide terminar a sequência com algumas situações-problema que envolvam os conceitos de fração, como frações de uma quantidade, frações equivalentes e comparação de fração.

Quadro 7 - Situação-problema resolvido por Joana

Osvaldo resolveu repartir um sítio. Ele ficou com $\frac{1}{3}$ das terras e dividiu a outra parte entre seus quatro filhos. Represente com uma fração a parte do sítio que cada filho de Osvaldo recebeu?

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

Quadro 8 - Problemas da sequência didática semelhantes ao exemplo resolvido

4- Para realizar um trabalho, dividiu-se um fio de cobre em 3 partes iguais. Cada uma dessas partes foi dividida ao meio, finalmente, cada uma dessas partes foi dividida em 4 partes iguais. Qual é a fração que cada uma dessas partes menores representa?

5- Comprei um tablet. Dei de entrada $\frac{2}{5}$ do valor e dividi o restante em 6 prestações iguais. Represente com uma fração a parte do valor do tablet que deverei pagar em cada prestação.

Fonte: (BIANCHINI, 2015)

Por mais que seus alunos já tenham vistos esse tópico, observamos na professora vestígios do *Conhecimento em ação didático 2.1 ($C_{d2.1}$ – os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor)* pois ela decide resolver um exemplo semelhante junto com os alunos, para que em um momento posterior, eles tentem resolver outros problemas semelhantes, que trouxemos a seguir, como quando relata: *"Sim, mas não é fazer direto. É fazendo junto e eu ia fazendo. Aí o outro problema deixar para eles sozinhos. Vou fazer assim"*. É possível identificar novamente na escolha didática que seria desenvolvida com os estudantes uma característica do modelo didático diretivo, relacionado à perspectiva empirista, com a intenção dos alunos reproduzirem o modelo apresentado pela professora (BECKER, 2001).

Por fim, ao analisarmos alguns problemas de frações que estávamos discutindo, Joana identifica uma possibilidade do trabalho do seguinte problema com seus alunos, em especial o estudante que apresentou a estratégia de somar 1 unidade no numerador e denominador, no seguinte problema:

Quadro 9 - Problema da sequência didática de comparação de frações

Ana e Bianca recebem, por mês, a mesma quantia em dinheiro. Ana gasta 3/4 do que ganha e Bianca, 3/5. Quem gasta mais?

Fonte: (PEREIRA, 2017)

> R: E essa atividade que trabalha tanto equivalência quanto comparação de fração?
> J: Essa é legal porque aí eu vou fazer com aquele aluninho aquela estratégia do somar 1. Eu quero fazer essa atividade. No geral eles estão resolvendo pela fatoração para encontrar o denominador comum. Só o precioso que colocou aquela estratégia. Alguns não fazem a ideia do MMC, ficam completando a tabuada para ver qual que é o número tem tanto na tabuada do 3 quanto na tabuada do 4. Acaba sendo o MMC, mas mais mental.

Evidenciamos uma das características da análise *a posteriori* e validação da Engenharia Didática, como uma potencialidade de repensar suas escolhas didáticas para a aprendizagem dos estudantes. Desse modo, a partir da discussão da estratégia do seu aluno na atividade que ela apresentou, a professora se mostrou interessada em colocar esse problema na sequência didática por ser um meio de desestabilizar seu aluno e possibilitar a ele o reconhecimento do seu próprio erro, além de identificar outras possíveis estratégias de resolução como a identificação dos múltiplos comuns pela tabuada.

Atividades da sequência didática discutidas no dia 21 de agosto de 2018

2- Em seu caderno, calcule cada produto abaixo, simplificando quando possível. (BIANCHINI, 2015)

a) $\frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6}$

b) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3}$

c) $3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$

d) $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{5}$

e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{7}$

f) $\frac{4}{5} \cdot 0 \cdot \frac{5}{4}$

g) $\frac{6}{15} \cdot \frac{5}{2}$

h) $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7}$

Estratégia 1- Uso dos algoritmos da multiplicação

É possível realizar a operação de multiplicação de maneira direta, multiplicando os numeradores das frações entre si e os denominadores de maneira semelhante. Logo, uma possível multiplicação seria:

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} = \frac{45}{120}$$

Estratégia 2- Utilização do método geométrico

Para a multiplicação de fração, os alunos podem recorrer ao método geométrico que trabalharam na aula anterior com o uso do papel quadriculado.

Dificuldade 1: Simplificação da fração

Uma dificuldade elencada pela professora é a percepção da simplificação da fração, quando possível. De acordo com suas experiências em sala de aula, a professora relata que, por vezes, os alunos não conseguem verificar a possibilidade de simplificar. Essa dificuldade está condizente a apresentada por Monteiro e Groenwald (2014) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que os alunos têm dificuldades na compreensão que uma mesma fração pode ser escrita de diferentes maneiras.

3- Efetue as divisões indicadas, simplificando quando possível. (BIANCHINI, 2015)

a) $\frac{5}{8} : \frac{7}{6}$ c) $\frac{1}{8} : \frac{1}{2}$ e) $2 : 3\frac{1}{2}$

b) $\frac{9}{5} : \frac{3}{2}$ d) $3\frac{1}{2} : 7$ f) $0 : 3\frac{1}{9}$

Estratégia 1: Algoritmo da divisão de fração

Nessa estratégia o aluno pode mobilizar a estratégia do algoritmo usual da multiplicação de fração na qual mantém a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda fração.

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} \rightarrow \frac{5}{8} . \frac{6}{7} = \frac{30}{48}$$

Ao mobilizar a estratégia 1, uma dificuldade que pode acontecer é a inversão da primeira fração ao invés da segunda. Tal procedimento resultará em uma divisão diferente da solicitada, por exemplo o item a:

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} \rightarrow \frac{8}{5} . \frac{7}{6} = \frac{48}{30}$$

Estratégia 2- Multiplicação cruzada

Novamente nessa estratégia o aluno mobiliza um procedimento, já visto anteriormente como dito pela professora, de realizar a multiplicação cruzada dos membros da fração. Assim, multiplica-se o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração e o resultado será o numerador da fração resultante. Posteriormente, multiplica-se o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda fração, resultando no denominador da resposta.

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} = \frac{30}{48}$$

Ressalta-se que os alunos podem inverter os resultados encontrados, colocando o primeiro valor descrito como o denominador e o segundo como o numerador da fração resultante, sendo uma segunda dificuldade possível, como:

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} = \frac{48}{30}$$

Dificuldade 1- Inverter a operação na divisão de fração;

Ao realizar a inversão da fração, os alunos podem ter dificuldades em compreender a troca da operação de divisão para a multiplicação, não compreendendo que dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo seu inverso.

Dificuldade 2: Realizar a divisão entre os numeradores e entre os denominadores

Essa dificuldade está relacionada à tentativa de realizar a operação de divisão de maneira direta, dividindo os numeradores das frações entre si e os denominadores de maneira semelhante. Logo, uma possível divisão poderia ser:

$$\frac{9}{8} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Exemplo 1: Osvaldo resolveu repartir um sítio. Ele ficou com $\frac{1}{3}$ das terras e dividiu a outra parte entre seus quatro filhos. Represente com uma fração a parte do sítio que cada filho de Osvaldo recebeu? (BIANCHINI, 2015)

Durante a elaboração da sequência didática, Joana decidiu resolver alguns problemas na lousa para, posteriormente, propor algumas situações-problema aos estudantes. Desse modo, não elencamos possíveis estratégias e dificuldades que poderiam ser manifestadas na resolução do problema em sala de aula pois ele foi resolvido como exemplo pela professora.

Para a resolução da atividade em sala de aula, Joana descreve a intenção de no primeiro momento realizar a subtração utilizando por meio da estratégia do MMC.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Em um segundo momento, para realizar a partilha da quantidade restante pelos 4 filhos, Joana indica a utilização do algoritmo da divisão, do seguinte modo:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{1} \rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$$

Assim, após realizar a divisão e obter a fração $\frac{2}{12}$, a professora sinaliza a realização da simplificação da fração, obtendo como resposta a fração $\frac{1}{6}$.

4- Para realizar um trabalho, dividiu-se um fio de cobre em 3 partes iguais. Cada uma dessas partes foi dividida ao meio, finalmente, cada uma dessas partes foi dividida em 4 partes iguais. Qual é a fração que cada uma dessas partes menores representa? (BIANCHINI, 2015)

5- Comprei um tablet. Dei de entrada $\frac{2}{5}$ do valor e dividi o restante em 6 prestações iguais. Represente com uma fração a parte do valor do tablet que deverei pagar em cada prestação. (BIANCHINI, 2015)

Estratégias para os problemas 4 e 5

Estratégia 1: Uso do algoritmo de divisão de fração.

Essa estratégia está relacionada ao uso do algoritmo da divisão de fração, podendo ser qualquer um dos dois procedimentos descritos anteriormente.

Dificuldade 1- Modelagem do problema

Para a resolução do problema, os alunos podem apresentar uma dificuldade na modelagem do problema, como a interpretação ou a transposição da linguagem materna para uma linguagem matemática, para posteriormente, aplicar o algoritmo da divisão

Exemplo 2: Juliana passará 3/5 de suas férias na praia e o restante em casa. Sabendo que Juliana possui no total 45 dias de férias, quantos dias ela passará em casa? (EBSERH, 2015)

Para a resolução com os alunos, Joana indica a realização da resolução encontrando, em um primeiro momento a fração que representa o restante das férias de Juliana, por meio da subtração das frações:

$$\frac{1}{1} - \frac{3}{5} \rightarrow \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

Em um segundo momento, Joana observa que para a continuidade da resolução do problema é necessário encontrar a quantidade equivalente a fração $\frac{2}{5}$, utilizando o seguinte procedimento:

$$\frac{2}{5}\ de\ 45 \rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{45}{1} = \frac{90}{5} = 18$$

6- Para encher 2/3 de uma piscina são necessários 6000 litros de água. Qual a capacidade dessa piscina? (PEREIRA, 2017)

7- Roberto e Marina juntaram dinheiro para comprar um videogame. Roberto pagou por 5/8 do preço e Marina contribuiu com R$ 45,00. Quanto custou o videogame? (EBSERH, 2015)

Estratégia 1 – Representação na forma figural

Para a resolução dos problemas 6 e 7, os alunos podem utilizar de uma representação figural do todo para encontrar a fração correspondente à parte que está faltando. Dessa maneira, no problema 6, a representação é dividida em 3 partes iguais e verifica que cada parte equivale a 3000 L, portanto a capacidade total da piscina é de 9000 L.

Estratégia 2- Encontrar a quantidade restante

Inicialmente é possível encontrar a fração restante do inteiro por meio de uma operação de subtração. Assim, no problema 7, os alunos verificam que Marina contribuiu com $\frac{3}{8}$ do videogame que equivale a R$ 45,00. Em um segundo momento, é necessário verificar quanto vale $\frac{1}{8}$ do valor do videogame, realizando uma divisão ou por meio da representação figural, obtendo o valor de R$15,00. Por fim, como cada parte vale R$15,00 e foi dividido em 8 partes iguais, o valor do videogame é de R$ 120,00.

Dificuldade 1- Encontrar a fração do restante;

Em ambos os problemas, uma dificuldade inicial pode ser na tentativa de encontrar o valor restante, seja pelo uso indevido de uma operação aritmética ou uma representação figural incorreta.

8- Ana e Bianca recebem, por mês, a mesma quantia em dinheiro. Ana gasta 3/4 do que ganha e Bianca, 3/5. Quem gasta mais? (PEREIRA, 2017)

Estratégias 1- Encontrar duas frações equivalentes de mesmo denominador

Nessa estratégia os alunos buscam duas frações equivalentes às frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$ que possuam o mesmo denominador. Para isso, é possível que os alunos percorram essa estratégia por meio de 3 procedimentos:

- Utilização do algoritmo para encontrar o Mínimo Múltiplo Comum e encontrar a fração equivalente por meio da “regra” (para encontrar o novo numerador divide o valor do MMC pelo denominador e o resultado multiplica pelo numerador);
- Operações de multiplicação de um mesmo número no numerador e denominador da fração até encontrar um denominador comum;
- Encontrar o denominador comum por meio de uma sequência de múltiplos e posteriormente encontrar as frações equivalentes.

Estratégia 2- Representação figural

Os alunos representam as duas frações por meio de figuras e encontram as frações correspondentes para depois compará-las. É importante ressaltar que para a validade dessa estratégia é necessário que os inteiros sejam iguais e as divisões sejam feitas em partes iguais, para poder compará-las. Por isso, uma possível dificuldade é o uso de inteiros com tamanhos diferentes e as divisões das partes não sejam iguais, o que ocasionaria uma comparação indevida.

Dificuldade 1: Comparar os números naturais

Uma dificuldade presente no estudo de frações é a comparação das partes das frações (BRASIL, 1998; OLIVEIRA, 2016). Nesse contexto, os alunos podem concluir que como os numeradores das duas frações são iguais e o denominador da fração $\frac{3}{5}$ é maior que da fração $\frac{3}{4}$, então a fração $\frac{3}{5}$ é a maior fração. Para superar essa dificuldade, a professora pode recorrer a ideia de frações equivalentes para comparar as frações ou ao uso de uma representação figural.

Dia 04 de setembro de 2018

O momento de análise *a posteriori* e validação da sequência didática de frações ocorreu no dia 04 de setembro de 2018, pois no dia 28 de agosto de 2018 iniciamos o estudo preliminar do conceito de números decimais que seria desenvolvido com os alunos. Isso foi necessário pois julgamos importante ter pelo menos 1 encontro para realizar o estudo preliminar para, posteriormente, realizar a elaboração da sequência didática. Como o cronograma que a professora deveria seguir estava estipulado o trabalho de números decimais no início de setembro, nesse encontro dividimos o trabalho em dois momentos: a análise *a posteriori* de frações, que apresentamos nesse momento, e a elaboração e análise *a priori* de parte da sequência didática de números decimais, que está contido no tópico sobre o conceito.

Ao analisarmos as atividades propostas em sala de aula, a professora Joana relata que os alunos conseguiram resolver as atividades como havíamos previsto em aula, apresentando algumas das dificuldades previstas: *"alguns tiveram aquela dificuldade que a gente comentou da simplificação, um número de alunos que teve essa dificuldade, mas a maioria deles já consegue fazer isso"*. Percebemos nesse momento uma característica importante no campo profissional de Joana que influencia nas suas escolhas e análises é a avaliação escolar. Em conformidade com o apresentado por Pastré, Mayen e Vergnaud (2019) a análise da atividade docente envolve situações de curto prazo, como a análise de uma aula ou de longo prazo, como a avaliação da aprendizagem dos estudantes em um determinado período. Assim, Joana utiliza sua avaliação como um meio de referência para o desenvolvimento dos alunos, a partir das situações que ela considerou na avaliação e seu resultado. Nesse caso, a docente relata que sua avaliação foi pensada da seguinte maneira:

> J: Na sexta-feira eu dei a prova que tinha esse conteúdo para eles. Tinha três exercícios, sendo que um era de cálculo. Antes eu fazia ao contrário na minha prova, era mais cálculos e apenas um problema. Agora já inverti porque eu estou vendo que eles têm dificuldade em pensar, o que ele precisa fazer.

Consideramos esse momento importante no trabalho em conjunto, pois Joana indica reflexões, com indicativos de desestabilização do *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* pois a professora se pôs a pensar sobre uma característica que estava invariante na organização de sua avaliação, decidindo modificá-la. Isso se dá a partir de uma escolha da professora, pois a avaliação dos estudantes não foi realizada em um trabalho em conjunto conosco[28]. Além disso, devemos considerar o quão importante é essa mudança pois, no contexto profissional de Joana, a prova avaliativa tem uma função maior que verificar a aprendizagem dos estudantes, como feito de maneira processual em sala de aula, mas se trata de um documento institucional da aprendizagem dos alunos. Assim, ao modificar a avaliação, Joana sinaliza uma perspectiva do que é importante no estudo da Matemática, indo além de técnicas de resolução, como ela explicita.

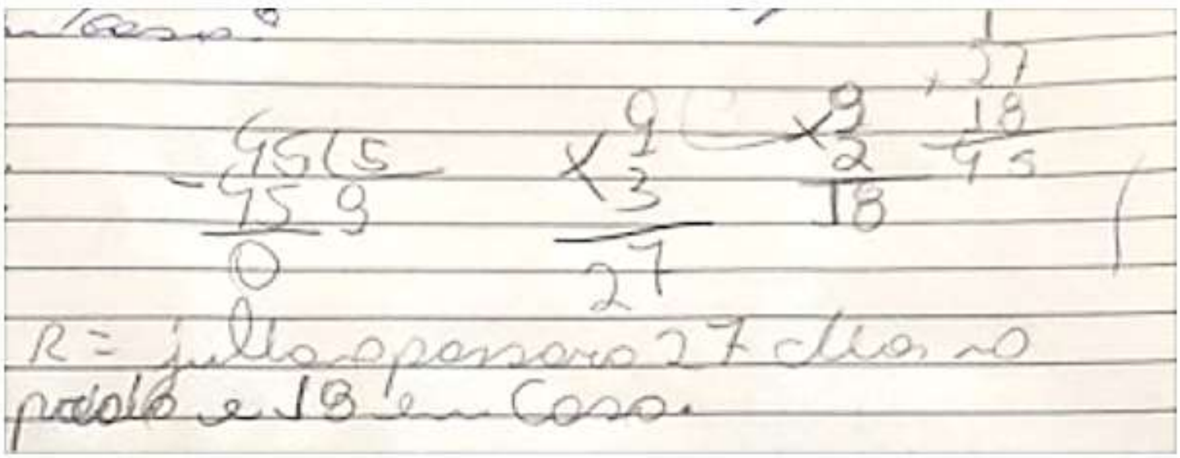
[28] Cabe ressaltar que a elaboração da avaliação escolar poderia estar contemplada durante o trabalho em conjunto com a professora. Entretanto, como havia a necessidade de realizar o estudo preliminar e a elaboração da sequência didática dos outros temas trabalhados com a professora, para atender o cronograma escolar, não foi possível a elaboração da avaliação escolar no trabalho em conjunto com a professora Joana.

Em relação às demais atividades propostas na sequência didática, verificamos que os alunos, de maneira geral, conseguiram resolver, utilizando as técnicas de resolução de multiplicação e divisão de frações e com a representação figural, como relata Joana:

> R: A outra coisa que nós levantamos é a ideia de esquecer de inverter operação quando inverte a segunda fração. Houve alguma dificuldade?
> J: Não, agora não. As pessoas que estavam com isso às vezes, eles faziam só a fração e não invertiam a operação.
> R. Depois na sequência tinham alguns probleminhas de divisão do Bianchini (livro).
> J. Isso era tipo assim: o pai tinha um terreno e pegou $\frac{1}{3}$ para ele e tinha o restante dos filhos. Qual é a fração que ficou para cada filho? Então deixa eu ver primeiro qual era esse restante então. Eu os encaminhei para ver o que era esse restante. Com desenho eles pegam (entendem) bem Renan. Eu queria que eles pegassem bem a conta por que se eu desse número maior? Tem mais para você ficar fazendo esse desenho...
> R: Mas como eles resolveram isso? Só pelo desenho?
> J: Assim, essa fração restante eles não conseguem para saber, tem que armar a conta para saber que é $\frac{2}{3}$. Se o pai tem $\frac{1}{3}$ e o restante é o $\frac{2}{3}$.
> R: E a gente pegou uns probleminhas de saber a quantidade complementar. Por exemplo, aquela do Juliano passou $\frac{3}{5}$ de suas férias ... Esse era do mesmo tipo daquele da piscina e da Mariana e do Roberto. A primeira dificuldade que você levantou era encontrar a fração restante. Depois como estratégia utilizar a operação para encontrar a fração restante. Estratégia de utilizar a forma figural, encontrar o correspondente do $\frac{3}{5}$ e ver quanto que falta. Além de encontrar a fração restante, também era possível encontrar a quantidade que tem e ver a quantidade restante.
> J. Acho que esse aluno fez assim (problema da Juliana). Ele pegou 45 dividido por 5 e deu 9. Depois ele multiplicou por 3 porque ele falou que são $\frac{3}{5}$. Aí ele achou 15.

Figura 4- Resolução do aluno no exemplo 2

Exemplo 2: Juliana passará 3/5 de suas férias na praia e o restante em casa. Sabendo que Juliana possui no total 45 dias de férias, quantos dias ela passará em casa? (EBSERH, 2015)



Fonte: dados da pesquisa

Conforme descreve Joana, seus alunos conseguiram resolver as atividades propostas, como na resolução apresentada, na qual o aluno mobilizou as operações de divisão e multiplicação na resposta da atividade. Como previsto no momento da análise preliminar, o estudante encontrou a quantidade correspondente à fração $\frac{3}{5}$, quando dividiu por 5 e multiplicou o resultado por 3. Além disso, é possível verificar que o aluno também encontra a quantidade correspondente à fração $\frac{2}{5}$, quando multiplica $9\ x2 = 18$, realizando uma validação da sua estratégia ao somar as duas quantidades e verificar o total de dias das férias. Em relação à estratégia dos estudantes que recorreram a uma representação figural, que a professora indica que *"eles pegam (entendem) bem",* corroboramos com o apresentado por Vergnaud (1996) em relação à importância do conjunto das representações linguísticas e não linguísticas, que permitem representar os conceitos e suas relações. Nesse sentido, as representações figurais, mobilizadas pelos estudantes, podem ter uma tripla função diante da situação, como:

> - ajuda à designação e, portante à identifica, das invariantes: objectos, propriedades, relações, teoremas;
> - ajuda ao raciocínio e à inferência;
> - ajuda à antecipação dos efeitos e dos objetivos, à planificação e ao controlo da acção. (VERGNAUD, 1996, p. 180)

Nesse contexto da discussão da estratégia por meio da representação figural e refletindo sobre as estratégias mobilizadas pelos estudantes em outras situações-problema de frações, Joana questiona sobre o uso recorrente da representação figural. Assim, discutimos com a professora a ideia de variável didática (ARTIGUE, 1996), pensando na elaboração de novas atividades.

> J: Na prova eu coloquei esse problema da piscina, com outros valores, e uma de completar o estacionamento. Muitos fizeram com o desenho, eu aceitei. Só na hora de corrigir a prova na lousa que eu falei que se tivesse um número maior, você vai ficar fazendo desenho, se fosse 100 partes é conveniente desenho?
> R: Então, mas a gente fez a sequência muito rápida né. Porque se coloca um problema de 100 partes em sala de aula, o que será que eles vão fazer? Essa é a ideia de variável didática, o que eu posso alterar e mexer no problema que vai influenciar na estratégia do aluno.
> J: É aquela zona de conforto dele, sabe.
> R: Nem é zona de conforto dele. É eficaz para aqueles problemas, mas na hora que você modifica (o problema), eles vão ter que pensar em outro jeito de representar.
> J: Para o início, para eles entenderem eu mostrei por meio de desenho, mas eu não queria que ficassem só nisso.
> R: Então o que a gente conclui é trabalhar outros problemas com valores maiores, que somente a estratégia do desenho não dá conta.

Esse evento que apresentamos revela uma potencialidade do uso da Engenharia Didática no trabalho em conjunto com a professora, pois ao realizarmos a análise *a posteriori* e validação da sequência didática, foi possível refletir sobre o uso da estratégia da representação figural pelos estudantes. Por mais que tivéssemos pensado *a priori* o uso dessa estratégia, Joana destaca que alguns estudantes podem vir a ter dificuldades em outros problemas devido à limitação dessa estratégia. Nesse sentido, ressaltamos a necessidade de trabalhar com a ideia de variável didática, ao propor algumas atividades nas quais a representação figural seja ineficiente, levando os estudantes a mobilizarem outras estratégias. Entretanto, entendemos que devido às restrições impostas no campo profissional de Joana (CHEVALLARD, 2009), como o tempo didático para o ensino de frações, nos deparamos com uma limitação no trabalho em conjunto, pois apesar de evidenciarmos essa necessidade de propor novas atividades no momento da análise *a posteriori* e de validação da sequência, não foi possível a proposição dessas atividades aos alunos

Em um outro momento de análise *a posteriori*, Joana relembra a resolução da atividade *“Ana e Bianca recebem, por mês, a mesma quantia em dinheiro. Ana gasta 3/4 do que ganha e Bianca, 3/5. Quem gasta mais?”* (PEREIRA, 2017) pelo seu aluno que utiliza a estratégia de somar 1 unidade no numerador e denominador, que diante da situação proposta mobilizou a mesma estratégia:

> J: Aquele menino fez o exercício daquele jeitinho, e fez hum. Eu falei que sabia que ele ia fazer assim, aí ele: credo professora, eu sou tão previsível assim. Ele ficou bravo. Mas deu trabalho, ele não quis entender o porquê que não podia.
> R.: Mesmo você falando?
> J: Uhum, ele, mas por quê? (Ele falava) Não professora, mas eu acrescentei a mesma coisa. Aí ele estava querendo dizer que não tinha alterado (o valor da fração).
> R: E como você discutiu com ele?
> J: Primeiro eu tentei falar só da adição. Quando é o denominador diferente não pode ser daquele jeito. […] aqui é a resolução do aluno de somar mais 1[...] a resposta dele deu errado, (respondeu) nenhuma das duas.
> R: Essa que a gente fez várias coisas, mas o que que você achou de ter ido para sala de aula depois de ter pensado em algumas estratégias e dificuldades dos problemas?
> J: Facilita na hora, dificuldades que a gente pensou de fato aconteceram. Então facilitou para mim, o modo de como eu iria tratar essa dificuldade. Mostrar de outra maneira, realizar outro problema. O caso daquele aluno, se não fosse isso, acrescentar 1 em cima e 1 embaixo, iria passar batido para mim. Eu não ia parar para pensar: será que o jeito é válido? Ele me mostrou ali na hora, eu falei: ah, tá! Mas eu mesma não me questionei se valia, entendeu? E quando a gente discutiu, viu que não valia e eu comecei a pensar em fazer um exercício para voltar àquele problema para ele. Dito e feito, ele fez desse jeito e eu pude trabalhar e mostrar para ele que não dava. Mostrar para ele se podia adicionar na adição e subtração desse modo, aí ele falando não né. Ele falou: não professora, mas eu fiz a mesma coisa no numerador e denominador, não estou alterando. Aí eu mostrei para ele que era o resultado diferentes das frações, dividi e mostrei: se são duas coisas iguais e tá dando resultado diferente...

Pautados na discussão da estratégia apresentada pelo estudante, Joana propôs uma atividade na qual pudesse realizar uma intervenção com ele. Assim, foi possível que a docente trabalhasse com o aluno discutindo a ideia de fração equivalente e apresentando que o procedimento do estudante não resultava em frações desse tipo. Além disso, a professora destaca as discussões que precederam a aula como um momento importante para esse evento, podendo ser uma ferramenta para seu trabalho pois, a partir desses momentos de análise *a priori* e *a posteriori*, Joana repensou sobre as estratégias de seus estudantes, suas escolhas didáticas e ações em sala de aula.

Finalizando o encontro do dia 04 de setembro de 2018, último dia do trabalho com frações, Joana explicita o que achou do estudo, elaboração, desenvolvimento e análise da primeira sequência didática que realizamos no trabalho em conjunto:

> J: Eu gostei até do resultado, pela prova entendeu. O trabalho com eles eu acho que ficou legal. Conversando com o professor que dá aula para os 6os anos da manhã, ele falou que tá arrancando o cabelo para ensinar para os meninos. Nesses conceitos que eu falo, a gente joga lá no início, mas eles sabem, eles lembram. Não foi uma coisa momentânea que acertou ali na hora. Posso dizer assim que eu demorei para perceber isso, acho que foi mais agora quando você me trouxe aquela lista de problemas, pensei: mas espera aí, eu quase não trabalho isso com meu aluno. Porque às vezes é até uma dificuldade minha. Já é o quarto ano que eu estou trabalhando com 6º ano, eu nunca tinha pensado tanto assim na questão da situação-problema e é importante porque ele vai trabalhar o raciocínio, essa questão de fazer a conta. Igual eu comentei com eles e eles falaram é verdade, que vocês estão muito como máquina que só opera. Eu falei: acho que vocês (estarem assim) é mais uma dificuldade minha. E aí eu acabava passando para os meus alunos. Isso vou pensar até para as outras turmas minhas. Talvez por ser mais cômodo a gente faz isso, pela falta de tempo, porque imagina você ficar procurando problema e pensando tal tal tal para todos os exercícios, para todos os conteúdos, não é fácil.

Evidenciamos no relato de Joana uma reflexão sobre alguns aspectos relacionados ao exercício da profissão docente, quando relata a questão da avaliação, aprendizagem dos alunos e suas escolhas didáticas. Inicialmente, retomamos a ideia de quão importante é a avaliação para Joana, que a utiliza como uma ferramenta de validação de suas escolhas didáticas. Desse modo, ao perceber que seus alunos se saíram bem na avaliação, a professora, de certa forma, validava as escolhas didáticas que compuseram a sequência didática elaborada. Essa característica não é exclusiva de Joana, mas sim de um professor imerso em seu campo profissional, pois a avaliação tem uma função institucional de avaliação de aprendizagem, sendo necessário aplicada após um determinado período de tempo (GATTI, 2003).

É possível evidenciar nesse evento um momento de reflexão do conhecimento didático da docente relacionado ao *Conhecimento em ação didático 1.1 (*$C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* pois Joana indica que apenas saber técnicas de resolução não garante a aprendizagem de seus alunos em outras situações. Nesse sentido, a professora explicita uma característica invariante no seu trabalho como as escolhas de atividades ao longo de sua experiência. Apesar de Joana relatar que esse fato pode ocorrer por questão de comodidade, as ações da professora são pautadas por seus conhecimentos, como presença constante da característica operatória de seu conhecimento e do *conhecimento em ação didático* 1.1, que a orienta a realizar tais ações.

Apesar disso, a partir das reflexões propiciadas por meio dos encontros, os momentos de estudo preliminar, elaboração e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação da sequência didática, é possível identificar vestígios de um novo conhecimento didático de Joana, que modelamos como *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias)*[29], pois ela ressalta a importância de trabalhar outras habilidades com essas atividades, como o raciocínio e não ficar apenas como uma *"máquina de calcular"*.

[29] Enumeramos os conhecimentos em ação didático em 1.1 e 1.2 por estes estarem relacionados a uma perspectiva de aprendizagem matemática.

4.2.2 Números decimais

Dia 28 de agosto de 2018

No dia 07 de agosto de 2018 iniciamos o trabalho com o estudo preliminar de números decimais, de acordo com a escolha da professora. Diferentemente do estudo de frações, a escolha desse tema teve o intuito de elaborar uma sequência didática que contemplasse todo estudo de números decimais que a professora iria começar com sua turma de 6º ano. Desse modo, iniciamos o trabalho a partir de uma reflexão sobre as escolhas de Joana em outros anos quando trabalhou com o tema:

> R: Decimal. O que você já fez? Como você trabalha decimal com os alunos?
> J: Bom ano passado trabalhei no projeto da SED, com uma turma de 6º ano na qual eu trabalho algumas atividades diferenciadas, inclusive o meu aqui de Coxim foi escolhido para apresentar em Campo Grande. Nos números decimais tem um mercadinho, várias situações envolvendo números decimais. Também tem uns probleminhas envolvendo dinheiro e depois aí para a questão do mercadinho, para eles fazerem a compra, o dinheiro, passar troco, quanto que daria. Foi desse jeito que eu fiz ano passado, mas eu comecei com situações-problemas de adição e subtração envolvendo dinheiro, porque já é um conteúdo que está dentro do referencial. Queria ver o sistema monetário e já é um conteúdo do referencial que eles veem o sistema racional na forma decimal.
> R: E depois?
> J: Adição e subtração eu trabalhei junto e que eu trabalhei a multiplicação e divisão. O que eu vejo é que eles têm bastante dificuldade, até nas outras séries, a regra da vírgula que na multiplicação você conta no final e na adição e subtração tem que colocar vírgula embaixo de vírgula. Às vezes quando estou trabalhando volume, eles estão fazendo o cálculo e colocam uma vírgula no lugar errado. Daí eles falam que foi só uma vírgula. Então eu vou lá e mostro para eles com a ideia do dinheiro, será só a vírgula mesmo? Será que não vai alterar o valor numérico? Porque operar adição e subtração (nos números naturais) eles sabem, mas eles erram nessa parte da vírgula.

Ao citar as escolhas didáticas sobre o tema, Joana sinaliza algumas possibilidades de contextualizar o ensino de números decimais, em especial com a ideia do Sistema monetário, também previsto no currículo da SED. Cabe ressaltar que em alguns conteúdos Joana sinaliza a escolha didática de iniciar o tema por meio de situações-problema, como no caso dos números decimais. Entretanto, conforme relatado pela professora, de modo geral, a escolha realizada por Joana visa a apresentação da situação-problema como uma maneira de contextualizar o início do trabalho com os estudantes, tendo como foco a apresentação de técnicas de resolução. No caso dos números decimais, percebe-se que a professora contextualiza o tema de números decimais com o Sistema Monetário, com o objetivo de iniciar o estudo com as operações de adição e subtração de números decimais. Nesse sentido, percebemos que a professora se mostra disposta a tentar outras atividades, como a ideia do mercado, apesar de relatar que o uso dessas situações tem como objetivo inicial a introdução das operações matemáticas e seus procedimentos algorítmicos, como quando relata que seu foco estava "*Nas operações ou nas frações de base 10, e nas transformações: se for 10 anda uma casa, se for 100 andam duas casas*".

Começamos o estudo preliminar a partir de algumas considerações presentes nos Parâmetros Curriculares Nacional (BRASIL, 1998, p. 101), sobre uma possível dificuldade dos alunos na comparação dos números decimais a partir do tamanho da escrita. Nesse sentido, ao comparar 2,3 e 2,175, acreditam que o segundo número é maior pois tem mais casas decimais. Ao ser deparar com essa afirmação, Joana destaca que essa é uma dificuldade presente no seu trabalho: *"Aham! Acham que isso é maior Renan, porque têm mais casas decimais. Eles fazem direto".* Durante a discussão de comparação de números decimais, é possível evidenciar algumas características do conhecimento predicativo de Joana como dificuldades conceituais de números decimais, como a ideia do Sistema de Numeração Decimal e ao justificar os algoritmos das operações com esses números:

> R: E essa daqui se quiser comparar 0,12 e 0,120. Lê para mim esse número.
> J: Não é zero vírgula cento e vinte e zero vírgula doze?
> R: Vamos discutir isto.
> J: Eles vão falar que esse daqui (0,120) é o maior. Mas aí você não tem que acrescentar o zero (no 0,12)? Não sei, Renan.
> R: Tenho que colocar o 0? Como que você compararia?
> J: A princípio ia falar isto, mas parando para pensar...
> R: Você achou que o 0,120 é maior?
> J: Sim olhando... pela questão da quantidade da casa decimal, mas depois eu fui parar para ver: ah não! Depois que eu vi que é o mesmo número.
> R: Mas como que você justifica isso agora?
> J: Ah eu não sei explicar. Talvez pela questão do zero? Nesta casa vai ter o 0 que não é o valor numérico.
> R: Essa é sua justificativa?
> J: Eu falando para você sim. Agora se fosse para falar com os alunos aí eu teria que pensar. Acho que aquela coisa, aquele negócio do quadro valor lugar que não tem zero e outro tem. E o 0 é a mesma coisa. Mas e aí é ou, não é?
> R: São iguais. Se fosse para comparar 0,2 e 0,12 qual é maior?
> J: 0,2.
> R: Por quê?
> J: 0 e 0 igual. Próxima casa 2 e 1, e o 2 é maior que 1.
> R: Essa é a sua comparação?
> J: Uhum. Vai comparando por casa decimal. É que eu não lembro os nomes, mas vamos pegar as nossas unidades, dezenas e centenas. Se tá lá mesmo significa que a mesma quantidade (faz um exemplo no quadro valor lugar). Aqui é a mesma (unidade), vamos para a próxima casa. Eu sei que esse é maior. É que eu não estou lembrando os nomes, mas dá para comparar.

Figura 5- Representação da resolução de Joana utilizando o Quadro valor lugar

	Dezena	Unidade	décimos	centésimos	milésimos
0,12		0	1	2	
0,120		0	1	2	0
0,2		0	2		

Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente, ao ser solicitada para a leitura de dois números decimais (0,12 e 0,120), Joana os lê como *"zero vírgula cento e vinte e zero vírgula doze"*, indicando a existência de um teorema em ação falso (*teorema em ação falso: o número decimal é um número natural que possui vírgula*), estando em conformidade ao apresentado por Esteves e Souza (2012) que indicam a dificuldade de considerar os números decimais como números naturais separados por vírgulas. Desse modo, em um primeiro momento, a professora não considera o Sistema de Numeração Decimal, no qual esses números decimais são equivalentes a doze centésimos e cento e vinte milésimos. Além disso, diante de uma situação de comparação, notamos que Joana consegue realizar a comparação, demonstrando um *know-how* para a situação, característica de um conhecimento operatório, mas ao ser solicitada a justificativa da afirmação, ela demonstra uma insegurança quando diz: *"Ah eu não sei explicar. Talvez pela questão do zero?"*.

Ressaltamos a dificuldade de Joana em relação ao conhecimento predicativo para a situação, ao verificarmos que não consegue explicitar como explicaria aos alunos que 0,12 e 0,120 representam o mesmo número. Além disso, é possível identificar que o conhecimento operatório da professora para essa situação se encontra em fase de adaptação, tendo em vista os momentos de incertezas que a professora manifesta para resolver a situação.

Diante da comparação entre os números 0,2 e 0,120, percebemos elementos de um conhecimento predicativo da professora na situação de comparação, quando ela relata uma organização invariante na comparação de números decimais, na qual compara o número a partir de cada casa decimal. Nesse procedimento, Joana justifica suas ações, relacionando os números com o Sistema de Numeração Decimal, no qual faz a comparação em cada casa decimal, até verificar qual número é maior. Nesse sentido, a docente consegue identificar objetos, propriedades e relações existentes na situação, sendo uma das características que compõe a forma predicativa do conhecimento (VERGNAUD, 2002).

A partir das discussões desse evento que apresentamos, propusemos a reflexão e discussão da seguinte atividade, presente nos materiais que estávamos estudando no momento preliminar, no qual é possível evidenciar uma dificuldade de Joana sobre o Sistema de Numeração Decimal nos números decimais:

Figura 6 - Atividade do Sistema de Numeração Decimal

Atividade 8

Uma professora escreveu no quadro o número 8,512 e pediu que os alunos fizessem sua decomposição.

Em seguida levantou os seguintes questionamentos aos seus alunos:

- Oito unidades equivalem a quantos décimos?
- Cinco décimos equivalem a quantos centésimos?
- Um centésimo equivale a quantos milésimos?
- Cinquenta e um centésimos correspondem a quantos milésimos?
- Quantos décimos têm no número 8,512?
- Quantos centésimos têm no número 8,512?
- O número 8,512 equivale a quantos milésimos?

Fonte: Andrade (2016)

R: 8 unidades equivalem a quantos décimos?
J: Nem sei. 8 unidades equivalem... (1 MINUTO). Não sei, nem pensar.
R: Não tem nem ideia?
J: Não, mas eu sei que está relacionado com esse negócio que eu estou falando (quadro valor lugar).
R: E 8 unidades, são quantos décimos?
J: Não sei.

Percebe-se que ao se deparar com essa atividade, Joana relata uma dificuldade em realizar a conversão de unidade para décimos, refletindo se está relacionado com a ideia do Quadro Valor Lugar. A professora utiliza o quadro valor lugar como um procedimento de conversão para os números, sem se questionar as propriedades que envolvem esse procedimento. Assim, para verificar quantas décimos equivalem a 8 unidades, ela coloca o número 8 na posição da unidade e completa com 0 até a casa decimal que é solicitada, nesse caso 80 décimos. Entretanto, novamente nos colocamos em uma posição de questionar esse procedimento, que resultou no seguinte evento:

> R: Então o que é o décimo?
> J: A décima parte de um número, de um inteiro.
> R: Então 8 unidades são quantos décimos?
> J: Não vai ser 8 décimos? Não! Ai, não sei Renan! Me ensina a fazer a conta que eu faço.
> R: Não, me ensina a fazer a conta, rsrsrs. Vamos Lá.
> J: Tá vai, fala de novo.
> Retomou o quadro valor lugar nos inteiros.
> J: Eu estou tentando (relacionar com) a régua.
> R: Qual é a escala da régua?
> J: É centímetro, mede 100. Mas é em relação ao metro né.
> R: E o metro é o nosso o que, no Sistema Internacional de Medidas.
> J: É o padrão. É a unidade-padrão.
> R: E o centímetro é o que?
> J: É a centésima parte do metro.
> R: Um metro tem quantos centímetros?
> J: 100.
> R: Então se pensar na régua, ela representa quais unidades para a gente?
> J: Centímetro.
> R: E ela eu posso relacionar com o que?
> J: Centésimo.
> R: Aqueles (marcações) menores são o que?
> J: Não é o milímetro? É a milésima parte.
> R: E cabem quantos no centímetro?
> J: São 10.
> R: E o décimo? Na régua quem seria o décimo?
> J: Tem que ser maior que esses né (centímetros, milímetros). Estranho né, um centímetro e aqui dentro tem 10 milímetros. Não tem sentido não, 10 com 1000. Então por que no metro vai ter mil tracinhos desses pequenininhos? Deve ser né…
> R: E o milímetro?
> J: É a milésima parte do metro. Ah, então tem que ter mil tracinhos. AHHH!
> R: E 100 dos tracinhos maiores, para os centímetros. E o decímetro?
> J: 10?
> R: Por quê?
> J: Decímetro, dez.
> R: E se eu pedir para você representar um decímetro para mim (na fita métrica)?
> J: Eu vou contar dez partes, desse daqui maior, que é o centímetro.
> R: 10 centímetros é um decímetro. Então quantos decímetros tem no metro?
> J: 10.
> R: Quantos centímetros tem no metro?
> J: 100.
> R: Quantos milímetros tem no metro?
> J: 1000.

Nesse evento, percebe-se que a atividade proposta e as questões postas à professora constituíram um momento de desequilíbrios nos conhecimentos de Joana. Apesar de saber realizar as conversões por meio do uso do quadro valor lugar, Joana se mobilizou na tentativa de compreender os procedimentos que realizava e os conhecimentos que estavam envolvidos nos mesmos. Assim, evidenciamos que durante a situação apresentada a professora tenta realizar a transformação por meio do quadro valor lugar e relacionar de maneira empírica com o Sistema Métrico Decimal:

> R: E na parte decimal, essa regra vale?
> J: Tem que valer né. É a unidade e depois vem a vírgula.
> R: E depois?
> J: Decímetro.
> R: É medida?
> J: Ah, décimo, centésimo e milésimo. Era assim mesmo. 8 completava com o 0,80 (realizou o quadro valor lugar). AH!
> R: 5 décimos são quantos centésimos?
> J: Colocava o 5 aqui e completava.
> R: Aí você está fazendo com regrinha de novo (completando o quadro valor lugar). Mas por que 5 décimos são 50 centésimos?
> J: Não sei explicar se não for (com a regra do quadro valor lugar).
> (Retomou a ideia métrica)
> R: 1 decímetro, tem quantos centímetros?
> J: 100.
> R: 100?
> J: Se eu vou precisar de 10 para ter o ... (usou o quadro valor lugar). Por que esse não está entrando em minha cabeça Renan? 1 unidade tem quantos décimos, Renan?
> R: Eu que te pergunto.
> J: Eu sei que 1 décimo é 1/10. Tem 10. E por que 8 unidades tem 80? Ah! Porque se 1 tem 10, 8 é 80. 5 décimos equivalem a quantos centímetros? É 500 ou 50? (tempo para pensar) 1 décimo tem 100 centésimos?
> R: Tem 100 em relação a quem?
> J: 1 décimo tem quantos centésimos?
> R: Um decímetro tem quantos centímetros?
> J: 10. Ah então é 50.
> R: Então quando eu conto 10 centímetros é um décimo, do 10 ao 20 (centímetros), dois décimos… até o 100, são 10 décimos.
> J: Difícil isso hein! No quadro valor lugar vai. Muito difícil.
> R: 1 centésimo são quantos milésimos?
> J: A cada um centésimo vou ter 10 milésimos, não é? 1 cm tem 10 milímetros.
> R: E agora 51 centésimos tem quantos milésimos?
> J: 510.
> R: Por quê?
> J: Multiplicar por 10, porque a cada um (centésimo) eu vou ter 10 (milésimos).
> R: E agora quantos décimos tem o número 8,512?
> J: 5, não?
> R: Quantos décimos eu consigo fazer em 8,512? Por exemplo: quantas dezenas eu consigo com 120?
> J: 12.
> R: E quantos décimos eu consigo fazer em 8,512?
> J: Eu não gostei desse trem não Renan. Eu não achei nada de legal. Estou tendo que pensar demais para fazer um trem desse.

É possível identificar nesse evento momentos de desequilíbrios de Joana ao refletir sobre o tema, por exemplo: “*Por que esse não está entrando em minha cabeça Renan? 1 unidade tem quantos décimos, Renan?”*. Ressaltamos que a todo o momento tentamos manter uma posição de questionar a professora, apesar das dificuldades (como ter a presença de apenas 2 pessoas), buscamos questões sem dar respostas definitivas, mantendo-a nesse processo de construção do seu conhecimento. Assim, a partir dos questionamentos, Joana pôde refletir sobre a questão e elaborar algumas hipóteses sobre o tema: "*Eu sei que 1 décimo é 1/10. Tem 10. E por que 8 unidades tem 80? Ah! Porque se 1 tem 10, 8 é 80"* e *"A cada um centésimo vou ter 10 milésimos né. 1 cm tem 10 milímetros"*. Por fim, Joana apresenta a seguinte resposta:

> R: Pensando por posição, quantos décimos eu consigo fazer? Como que você faz do seu jeito usando o quadro?
> J: Eu só coloquei o número aqui. Eu falaria 500, mas não é, né?
> R: Esses 2 milésimos formam um décimo?
> J: Não.
> R: Esse um centésimo forma um décimo?
> J: Não.
> R: Eu tenho quantos décimos aqui (apenas na parte decimal)?
> J: 5. Aqui formam 80 (parte inteira). Então 85.
> R: E quantos centésimos tem esse número?
> J: 851.
> R: Por quê?
> J: Porque aqui vão ter 800 (parte inteira), mais o 50 (décimos) e o 1. Esse aqui ainda não forma (milésimos). Então na hora de ler não é 8 vírgula 512. 8 inteiros e 512 milésimos. Ir para falar isso para o aluno.
> R: Mas não é difícil.
> J: Nem me fala. Não estou vendo nada de fácil nessa conta aqui hoje Renan.

Ao longo da resolução da atividade proposta, Joana apresenta novamente uma forte característica operatória na resolução da situação, de modo que consegue realizar as conversões entre as casas decimais. Além disso, percebemos que Joana também conclui a importância do sistema de numeração decimal durante o processo de ensino aos alunos, pois diferentemente do apresentado no início do encontro, percebe até mesmo a atenção necessária da leitura desses números (ESTEVES; SOUZA, 2012), como: *"Então na hora de ler não é 8 vírgula 512. 8 inteiros e 512 milésimos. Ir para falar isso para o aluno*". Desse modo, quando questionada as justificativas desses procedimentos, a professora se depara com uma situação que lhe causa uma desestabilização e inicia um processo de reflexão buscando compreender essas questões. Nesse contexto, ressaltamos que o momento de estudo preliminar do tema e a perspectiva de aprendizagem, sem apresentar diretamente a solução da atividade e com questionamentos à professora, constituíram uma ferramenta importante no processo de formação da professora sobre o Sistema de Numeral Decimal para os números decimais.

Posteriormente ao evento descrito, continuamos o estudo preliminar de números decimais e nos deparamos com a pesquisa de Ribeiro (2011) que apresenta como possibilidade para iniciar o ensino dos números decimais o uso do material dourado, para a compreensão do Sistema de Numeração Decimal, em detrimento das operações aritméticas. O autor faz essa escolha pois acredita que após esse trabalho inicial os alunos podem atribuir significados às operações. Ao começar o estudo com as operações com Joana, novamente percebemos uma característica operatória do conhecimento, quando ela mobiliza os algoritmos corretamente, como na adição (vírgula embaixo de vírgula), multiplicação (contagem da quantidade de casas decimais nos fatores e colocar a mesma quantidade no produto) e na divisão (igualar a quantidade de casas decimais do dividendo e do divisor e retirar as vírgulas), mas tem dificuldades em justificá-las. Isso pode ser verificado quando reflete sobre o algoritmo de adição e subtração e diz: *"Ah, então tem justificativa!",* ou quando questionada do procedimento da multiplicação: *"Também tem justificativa?"*. Assim, nesse momento de análise, apresentamos o evento relativo à operação de divisão com as discussões realizadas:

> R: E essa parte de que compreender o algoritmo? Da divisão, de cortar a vírgula?
> J: É, por quê?
> R: É, por quê?
> J: Sei lá.
> R: O que é o cortar a vírgula? Faz 2,15 : 3,1.
> J: Aí eu teria que acrescentar um zero (no 3,1) para poder cancelar a vírgula.
> R: Como você justifica isso? […] por isso que é importante a ideia da representação (um dos itens apresentados no trabalho de Andrade (2016) e Ribeiro (2011)[30]).
> J: Da fração.
> R: Vai representar então?
> J: 2,15 seria 215 sobre 100 ($\frac{215}{100}$). E o 3,1 seria 31 sobre 10 ($\frac{31}{10}$). Mas como eu acrescentei seria 310 sobre 100 ($\frac{310}{100}$).
> R: Então 2,15 dividido 3,1 é uma divisão. Eu posso escrever como?
> J: Pela fração ($\frac{2,15}{3,1}$).
> R: Igualar a quantidade de casas decimais e tirar a vírgula? Quando eu multiplico por 10, isso daí dá o quê?
> J: Por 10? Mas aí ainda continua com vírgula né. Aí eu vou ter que multiplicar de novo. Ah, 215! Aí sim 310.

A partir das discussões dos trabalhos durante o estudo preliminar, começamos a discutir as operações, nesse caso a divisão, e Joana mobilizou a ideia de diferentes representações dos números racionais para compreender a divisão entre números decimais. Inicialmente, a professora converte o dividendo e o divisor em frações ($\frac{215}{100}$ e $\frac{31}{10}$) e somente após ser questionada como pode ser escrita uma divisão que representa como $\frac{2,15}{3,1}$. Cabe ressaltar que essa representação da divisão por meio de fração é um significado trabalhado pela professora com seus alunos, pois ao longo do estudo de frações, ela sempre ressaltava que privilegia a fração como uma divisão. Assim, ao ser questionada o que acontece quando multiplica a fração por 10, Joana percebe a ideia de fração equivalente que está envolta no procedimento de igualar a quantidade de casas decimais e retirar a vírgula. Apesar de compreender esse procedimento,

[30] Materiais que estavam sendo estudados nesse encontro do estudo preliminar do dia 28 de agosto de 2018.

esse evento nos leva a outro momento que Joana tem dificuldades de compreender os procedimentos, que é a divisão com a resposta decimal:

> J: Fala para mim, eu não sei justificar, igual esse exemplo: ficaria 215 dividido por 310. Quando resolve a gente põe 0 (zero no dividendo), 0 (no quociente) e vírgula. Não tem isso? Eu sei que é menor por isso coloca o 0.
> R. O que a gente tá trabalhando a unidade decimal, uma divisão com casas decimais. $\frac{215}{310}$, você igualou já. Essa divisão que está fazendo tem parte decimal? Então aqui centena, dezenas, unidade. O que é divisão Joana?
> J: Um número vezes o divisor que dá o dividendo.
> R: Vamos conversar por aqui: dá para dividir duas centenas por 315?
> J: Não.
> R: Então 0. 21 dezenas posso dividir para 310 pessoas? Não. 215 unidades eu posso dividir por 310?
> J: Não.
> R: Eu não posso dividir. Quantas unidades vai ficar para cada um? 0. Agora que a questão que a gente viu anteriormente, 215 unidades têm quantos décimos?
> J: 2150.
> R: Se é décimos como que eu represento a parte decimal?
> J: Com a vírgula. Ah tá! Entendi.
> R: Agora dá por 6. 6 o quê?
> J: Décimos. Por isso que eu ponho embaixo... Ah, entendi!
> R: Sobrou 290 o quê?
> J: Décimos.
> R: Após a operação você pode acrescentar um 0.
> J: É porque ele (um aluno) falou que acha que vai outra vírgula, mas não tem.
> R: O que é esse 0 que acrescenta aqui então?
> J: Para transformar do décimo para o centésimo. São dois mil e novecentos centésimos põe um 0. E aquele caso que quando sobe um 0 para o quociente?
> R: Mas aí é quando coloca dois 0 no dividendo. Por exemplo: 40 dividido por 2. 4 dezenas divido por 2, dá duas dezenas. E o 0?
> J: É porque eu falo 0 dividido para 2.
> R: Isso. 0 unidades dá para dividir?
> J: 0.
> R: Então pronto. Dividiu as quatro dezenas e agora 0 unidades consegue para dividir? Fica zero. Aqui no decimal, deu 2900 se for menor, eu posso dividir os centésimos para cá se não der nenhum, 0 centésimos. E aí eu vou para milésimos. Não deu para distribuir centésimos vou ter que distribuir milésimos.
> J: Entendi.

Esses eventos apresentados ao longo do encontro do dia 28 de agosto de 2018, nos indicam uma característica marcante da professora Joana, que mobiliza com frequência a forma operatória do conhecimento diante das situações propostas. Assim, quando solicitada para resolver algumas atividades, em especial às relacionadas às operações aritméticas, ela utilizava de algum procedimento ou algoritmo para a resolução, mas ao ser questionada das justificativas desses procedimentos, a professora apresentava dificuldades. Essa característica nos leva a refletir sobre suas escolhas didáticas para o ensino de seus alunos, pois se percebe que para algumas classes de situações, como as operações aritméticas de números decimais, Joana "dispõe, no seu repertório, num dado momento do seu desenvolvimento, e em determinadas circunstâncias, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação"

(VERGNAUD, 1996, p. 156), relacionadas à forma operatória do conhecimento. Assim, é possível que devido a algumas dificuldades que possui em explicitar propriedades e relações, presentes em conhecimentos predicativos, Joana priorize o ensino de técnicas algorítmicas aos estudantes, apresentando procedimentos que resolvam as situações propostas. Ao encontro do que evidenciamos, Joana reflete sobre sua formação e como isso influencia na sua prática docente, seja relacionado aos números decimais como em outros conteúdos como trigonometria: *"Por exemplo: eu não suporto, porque eu não sei a questão de trigonometria. Não vou passar para o meu aluno de uma maneira segura, então talvez ele também estava com essa dúvida."*

No final do encontro, diante de todas as discussões, passamos a refletir sobre possibilidades de ensino de números decimais, como as escolhas de Joana nos anos anteriores e a proposta de Ribeiro (2011) da utilização do material dourado para a compreensão do Sistema de Numeração Decimal:

> R: Porque se a gente usa o material dourado para fazer unidade, dezena e centena, a gente pode usar para o décimo, centésimo, milésimo.
> J: Hum, dá para usar esse daí com material dourado.
> R: E o 8,512?
> J: Eu ia pegar oito cubos grandes, cinco placas, uma barra e dois cubos pequenos.
> R: E o que eu uso para fazer isso? A ideia de décimo, centésimo e milésimo.
> J: Então vou ter que trabalhar muito bem esse negócio hein. Antes das operações, trabalhar o significado das posições dos números. Trabalhar esse significado Renan.
> R: O que achou?
> J: Gostei. Esse eu vi mais função. Talvez porque eu ainda não tenho trabalhado. Mas sozinha não teria pensado em tudo isso.
> R: Você tinha feito uma proposta de ensino para mim no começo do encontro de começar com alguns probleminhas e a questão monetária e operações.
> J: Já mudei! Eu vou ver na escola quantos materiais dourados eu tenho.

É possível verificar que o trabalho realizado com Joana se caracterizou como um momento de aprendizagem, possibilitando que a professora refletisse sobre os conceitos estudados, as dificuldades manifestadas por ela, além de possibilidades para o ensino do tema, quando relata a importância de trabalhar com seus alunos o Sistema de Numeração Decimal no ensino dos números decimais. Desse modo, percebe-se que durante o estudo Joana repensa algumas escolhas didáticas, considerando utilizar o material dourado no ensino do tema, diferentemente do que tinha feito nos anos anteriores.

Além disso, destacamos a etapa de análise preliminar como um momento de potencialidade na formação de professores, pois é possível que os docentes perpassem por situações que lhes desestabilizem e os façam refletir sobre questões matemáticas e didáticas, indo ao encontro do que Joana relata: *"Mas sozinha não teria pensado em tudo isso.*". Apesar disso, ressaltamos que um fator limitador no trabalho em conjunto são as condições de trabalho docente que Joana está inserida, consonante ao apresentado por Gatti e Barreto (2009). Devido às condições de seu campo profissional, carga horária de serviço, o currículo que deve seguir, entre outros fatores, esse trabalho de análise preliminar teve que ser feito em apenas 1 dia, com 1h20min de discussão, nos impedindo de continuar em alguns momentos de discussão e aprofundar em outros tópicos como as diferentes representações dos números racionais.

Dia 04 de setembro de 2018

No encontro do dia 04 de setembro realizamos iniciamos a elaboração e análise *a priori* da sequência didática, pois em um primeiro momento da reunião foi feita a análise *a posteriori* e validação da sequência didática de frações, que apresentamos anteriormente. Quando começamos a pensar na sequência didática, Joana indica uma intenção didática de como iniciar o trabalho com números decimais, pautada nas reflexões do encontro anterior e pesquisas que realizou ao longo da semana:

> J: Eu queria trabalhar para eles entenderem, até isso que estava com dificuldade de ver, entender realmente o que é um número decimal. Então eu acho que é isso aí. Porque ir para o problema então eu não sei como faz, vai acabar caindo no trabalho com as operações. Eu vi na escola o material dourado, mas eu não sei se dá para eu começar já levando o material Dourado. Eu gostei daquela ideia que a gente viu na pesquisa. Mas assim na sua opinião, até quero a sua ajuda nisso, é válido começar com problema e a partir do problema, o uso do material dourado para ele compreender aquilo (ideia do número decimal)? Ou apresentar o material dourado primeiro e depois tratar os problemas? Olha esse aqui é o plano de aula do professor (plano de aula pesquisado por Joana durante a semana) …

É possível evidenciar uma reflexão da professora sobre suas escolhas didáticas, de modo que ela apresenta a intenção de trabalhar com seus estudantes a noção de número decimal, o valor posicional do Sistema de Numeração Decimal, em detrimento do foco inicial de operações, que fazia anteriormente. Novamente percebemos uma desestabilização acerca do *Conhecimento em ação didático 1.1 (*$C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* pois diferentemente da sequência didática de frações e de escolhas de anos anteriores com números decimais, a professora tenta privilegiar outras atividades que levem à compreensão de números decimais, para em um segundo momento trabalhar as operações aritméticas.

Destacamos o envolvimento da professora ao longo do processo, pois apesar de estarmos cientes da demanda existente no seu campo profissional, durante a semana Joana buscou mais atividades, planejamentos e assistiu vídeos que a ajudassem no processo de elaboração da sequência didática. Além disso, Joana apresenta vestígios do *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias),* pois sinaliza uma escolha didática que deseja ao sugerir no início da sequência didática com seus alunos a atividade vista na pesquisa de Andrade (2016) como uma possibilidade dos estudantes compreenderem o valor posicional dos números decimais, por meio de manipulação do material dourado, visto na pesquisa de Ribeiro (2011) e no planejamento que encontrou. Desse modo, adaptamos a atividade de Andrade (2016) como a primeira atividade de nossa sequência didática:

Quadro 10 - Atividade de números decimais

1- Após apresentar a unidade, o décimo, o centésimo e o milésimo correspondente no material dourado. Responda: a- Quantos décimos tem em 2 unidades? b- Quantos centésimos tem em 2 unidades? c- Quantos milésimos tem em 2 unidades? d- Quantos centésimos tem em 5 décimos? e- Quantos milésimos tem em 5 décimos? f- Quantos centésimos tem em 3 unidades e 4 décimos? g- Como eu posso representar 35 décimos com o material dourado? E se eu tiver que utilizar a menor quantidade de peças possível?

Fonte (adaptado): Andrade (2016)

Nesse momento, percebemos que uma limitação do trabalho docente pode ser a disponibilidade dos materiais manipuláveis para a realização das atividades pensadas. No caso da professora, ela verificou que sua escola possuía apenas 3 materiais dourados e questionou que poderia ser um impeditivo para essa escolha didática, pois: *"não são muitos. Para a minha sala do 6º ano só com três (materiais dourados) vai ficar muita criança em cada grupo".* A professora sempre se mostra disponível para organizar a turma em grupos para a realização das atividades, entretanto, por causa dessa limitação didática, fica insegura devido à organização que teria que realizar, com muitos alunos por grupo. Desse modo, tivemos a ideia de deixar esses materiais como um apoio aos grupos, sendo colocados em 3 ilhas de apoio espalhadas na sala de aula, com os estudantes se dirigindo até a ilha para manipular as peças do material dourado quando tivessem necessidade e respondessem no caderno.

Para o desenvolvimento da atividade, seria apresentado aos alunos as peças do material dourado, nomeando o cubo grande como unidade, a placa como décimo, a barra seria chamada de centésimo e o cubo pequeno o milésimo. Assim, seria entregue a atividade, com os alunos realizando as transformações a partir da manipulação do material. Outra diferença em relação as escolhas vistas no tema de frações é que Joana propõe deixar que os alunos, em um primeiro momento, façam a atividade sem que ela mostre um exemplo, relacionado ao *Conhecimento em ação didático 2.1 (*$C_{d2.1}$ *– os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor).* Após a definição da atividade, levantou-se como possíveis hipóteses na análise *a priori* que os alunos resolveriam por meio da manipulação do material dourado (estratégia 1) e a percepção da regularidade do Sistema de Numeração Decimal (estratégia 2) e, como uma dificuldade inicial, a associação de cada peça com o valor estabelecido (dificuldade 1).

Após a resolução da atividade 1, propusemos duas atividades que envolviam a representação fracionária:

Quadro 11 - Atividades 2 e 3 de números decimais

2- Que fração eu posso representar o décimo (placa), o centésimo (barra) e o milésimo (cubo pequeno) em relação a unidade (cubo grande)? 3- Como é possível representar a $3\frac{1}{2}$ sem utilizar frações? E $\frac{1}{4}$?

Fonte: dados da pesquisa

Propusemos a atividade 2 com o objetivo que os estudantes pudessem sistematizar as regularidades que estavam envolvidas na atividade 1, descrevendo que o décimo pode ser representado com a fração $\frac{1}{10}$ em relação a unidade, o centésimo $\frac{1}{100}$ e o milésimo $\frac{1}{1000}$. Na terceira atividade tínhamos o intuito que os alunos mobilizassem diferentes representações dos números racionais, como a representação figural, o material dourado e, dentre essas, a ideia do número decimal, para que os alunos pudessem perceber a relação entre as casas decimais e outras maneiras de representar um número decimal. Com essas atividades, esperávamos que os estudantes sistematizassem as regularidades de transformação dos números decimais e a conversão[31] em diferentes formas de representação.

Para as últimas as aulas de matemática da semana que estávamos planejando, Joana pensou em apresentar a ideia de número decimal, a partir do quadro valor lugar, destacando a relação de cada casa decimal com a unidade. Nesse momento, é proposto à professora iniciar com uma situação-problema, para a introdução da ideia do número decimal, como no excerto a seguir:

> J. Primeiro eu acho que ver o que um número decimal, mesmo Renan. Ver essa associação.
> R: E se fizer um probleminha daquele de dividir uma bala para cinco pessoas que ele vai fazer 1 sobre 5 e pensar na ideia da divisão com o quadro valor lugar (para apresentar número com vírgula) …
> J: Mas aí Renan já ia começar com a divisão?
> R: Mas não é divisão de decimal por decimal. É a divisão de natural por natural, que vai dar o número decimal.
> J. Eu sei, mas sem ter passado pelas outras operações?
> R: Tá operando adição com adição. Um probleminha por exemplo: quatro crianças compram cinco barras de chocolate, com quanto ficariam? O que é que vai dividir números para começar da vírgula, usando o quadro valor lugar sem o resto, e na divisão quando vê que não dá mais pra dividir as unidades perguntar para eles agora que a gente faz? Aí eles vão falar dividir em partes menores. E como que podemos dividir em partes menores, o que a gente pode fazer?
> J: Aí eles vão falar dos décimos. É uma boa. Vou passar para ele esse quadro (valor lugar) que está aqui, imprimir e colocar lá: centena, dezena, unidade, décimo, centésimo e milésimo. […] Olha aqui mesmo fala (planejamento do professor) como que eu apresentarei um número decimal, para separar a parte decimal da inteira usa a vírgula. E se tiver dificuldade, no dia a dia a gente usa muito a ideia de decimal para representar dinheiro.
> J: Eu pensei em não sair do dinheiro Renan, porque eles já pensam até na relação dos centavos da vírgula. Porque imagina a barra de chocolate 1,25.
> R: Pode ser então, vamos fazer assim. A atenção que tem que ter no dinheiro é que a gente não divide em décimos de real.
> J: Tudo bem, mas aí eu vou relacionar com aquela coisa que a gente vai ter visto na aula anterior. Se eu tenho 1 inteiro, ele vale 10 décimos.

Durante o momento de elaboração da sequência didática, com as conversas e reflexões, Joana considera a ideia de utilizar uma situação-problema para a apresentação do número decimal, conforme o que verificou no planejamento que pesquisou. Cabe ressaltar a escolha da professora em utilizar uma situação que envolvia o Sistema Monetário, com o intuito de fomentar a discussão com os estudantes em um contexto cotidiano, mas se atentando a limitação existente, como a inexistência dos décimos e milésimos de real. Assim, a professora indica que para contornar essa limitação, durante a divisão, irá retomar as relações que seriam trabalhadas

[31] Segundo Duval (2003) "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo: passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica".

na aula anterior, como quando relata: *“mas aí eu vou relacionar com aquela coisa que a gente vai ter visto na aula anterior. Se eu tenho 1 inteiro, ele vale 10 décimos”* relatando Percebe-se também que há vestígios do *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)* mobilizados por Joana quando questiona a necessidade de seguir uma organização didática rígida de trabalhar uma situação-problema somente após apresentar as técnicas de resolução, quando explicita: *“mas sem ter passado pelas outras operações”.* Apesar disso, durante o diálogo da atividade que seria proposta, a professora elabora a seguinte situação relacionada com o sistema monetário, e com o cotidiano de seus alunos:

Quadro 12 - Problema de divisão de números naturais com quociente decimal

4- Quatro irmãos querem comprar um chocolate que custa 5 reais. Se eles forem dar a mesma quantia, com quanto que cada irmão deve contribuir?

Fonte: dados da pesquisa

Percebe-se ao longo desse encontro que situações que foram estudadas no encontro anterior influenciam nas escolhas didáticas da professora. É possível evidenciar que para a introdução da ideia de números decimais, Joana prioriza atividades relacionadas ao significado desses números, como o Sistema de Numeração Decimal e as relações de cada casa decimal com a unidade. A professora ressalta a intenção de deixar as operações aritméticas em um segundo momento, tendo em mente a importância desse trabalho inicial para a compreensão dos algoritmos da adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. Desse modo, inferimos que durante esse processo uma reflexão acerca do conhecimento didático relacionado ao *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* com vestígios de um conhecimento didático reelaborado, a partir das reflexões, relacionado ao *Conhecimento em ação didático 1.2 ($C_{d1.2}$ – para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias),* a partir da reflexão das escolhas didáticas da docente.

Além disso, ressaltamos a potencialidade do momento de estudo preliminar do tema de números decimais na formação da professora, pois ao realizar essas escolhas didáticas Joana não apresenta apenas características operatórias do conhecimento, como ênfase de técnicas e algoritmos de resolução. Pode-se verificar elementos relacionados a propriedades e justificativas do conceito, como quando relata: *“Tudo bem, mas aí eu vou relacionar com aquela coisa que a gente vai ter visto na aula anterior. Se eu tenho 1 inteiro, ele vale 10* *décimos".* Desse modo, evidenciamos que os momentos de reflexão que Joana perpassou no encontro anterior orienta em suas escolhas didáticas, pois ela apresenta alguns elementos relacionados ao seu conhecimento predicativo, como o destaque ao foco nas propriedades, além de explicitá-los no momento de planejamento.

Atividades da sequência didática discutidas no dia 04 de setembro de 2018

1- Após apresentar a unidade, o décimo, o centésimo e o milésimo correspondente no material dourado. Responda: [32]

h- Quantos décimos tem em 2 unidades?

i- Quantos centésimos tem em 2 unidades?

j- Quantos milésimos tem em 2 unidades?

k- Quantos centésimos tem em 5 décimos?

l- Quantos milésimos tem em 5 décimos?

m- Quantos centésimos tem em 3 unidades e 4 décimos?

n- Como eu posso representar 35 décimos com o material dourado? E se eu tiver que utilizar a menor quantidade de peças possível?

Estratégia 1- Manipulação do Material Dourado

A partir da apresentação de que o cubo grande é chamado de unidade, a placa de décimo, a barra de centésimo e o cubo pequeno de milésimo, os alunos manipulam o material dourado verificando a quantidade correspondente a cada item. Por exemplo, no item a, é possível realizar a contagem e verificar que 10 placas correspondem a uma unidade, então em duas unidades têm 20 décimos.

Estratégia 2- Percepção de regularidades

Após um manuseio inicial do material dourado, é possível que os alunos percebam a regularidade existente entre a unidade, décimo, centésimo e milésimo e realize a multiplicação para encontrar a solução.

Dificuldade 1- Relacionar as peças ao valor estabelecido

[32] Fonte (adaptado): Andrade (2016)

Uma dificuldade inicial está em relacionar as peças do material dourado com os valores estabelecidos (unidade, décimo, centésimo e milésimo), podendo levar em composições e decomposições equivocadas.

2- Que fração eu posso representar o décimo (placa), o centésimo (barra) e o milésimo (cubo pequeno) em relação a unidade (cubo grande)?

Estratégia 1 – Ideia de Fração

Conforme solicitado na atividade, nessa estratégia os alunos mobilizam o significado parte-todo de fração para buscar a representação adequada para cada peça. Assim, por meio de regularidades percebidas na atividade anterior, ou pela manipulação do material dourado, obtém-se a fração relacionada a cada peça. Por exemplo: a placa representa $\frac{1}{10}$ do cubo que representa a unidade.

3- Como é possível representar a $3\frac{1}{2}$ sem utilizar frações? E $\frac{1}{4}$?

Estratégia 1 – Representação Figural

Uma estratégia de nível mais empírico é o uso de representações figurais para representar a função. Essa estratégia advém da trajetória dos alunos, pois no estudo de funções é usual esse tipo de representação. Além disso, é possível que os alunos representem por meio de desenhos relacionando com as peças do material dourado, por terem trabalhado nas atividades anteriores com esse recurso.

Estratégia 2 – Representação com números decimais

Para essa estratégia, os alunos podem mobilizar a ideia de número decimal para a representação das frações solicitadas, tendo em vista que esse tipo de representação numérica é mobilizado no cotidiano do aluno.

Dificuldade 1 - Associação da fração com o número decimal

Por se tratar do início do estudo formal dos números decimais, conforme afirmam Esteves e Souza (2012), os alunos podem ter dificuldades na associação da fração com o número decimal correspondente, interpretando-os como dois objetos matemáticos distintos.

4- Quatro irmãos querem comprar um chocolate que custa 5 reais. Se eles forem dar a mesma quantia, com quanto que cada irmão deve contribuir?

Estratégia 1- Fração

Para a resolução da situação proposta, pode-se mobilizar a representação fracionária, contemplando o significado de divisão, para a resolução da atividade. Dessa maneira, como os R$5,00 devem ser divididos em 4 partes iguais, cada irmão contribui com $\frac{5}{4}$. Entretanto, ao utilizar essa ideia, uma dificuldade a se observar é o uso da $\frac{4}{5}$ devido ao trabalho usual da relação parte todo em que o numerador é menor que o denominador.

Estratégia 2 – Relação com o sistema monetário

Por se tratar de um problema que envolve o sistema monetário, os alunos podem resolvê-lo como se estivessem na situação, por meio de uma decomposição e divisão dos valores em 4 partes iguais. Então, percebe-se que se cada irmão contribuir com R$ 1,00, eles terão R$ 4,00 e para completar o R$ 1,00 que falta cada irmão contribui com mais R$0,25, totalizando R$1,25.

Estratégia 3 – Algoritmo da divisão

Nessa estratégia, mobiliza-se o algoritmo da divisão para encontrar o valor que cada irmão deve contribuir, realizando 5:4. Por se tratar de um problema inicial que pode ser resolvido pela divisão, os alunos podem ter dificuldades na continuidade do algoritmo quando a divisão apresentar o resto 1.

5- Juca disse que 4,876 é maior que 4,89 porque tem mais algarismos. Ele está certo? Justifique sua resposta.

Estratégia 1 - Comparação das casas decimais

Essa primeira estratégia é a comparação dos números por meio de cada casa decimal. Assim, como os valores das unidades e dos décimos são iguais, percebe-se que o 4,89 é maior que o 4,876 pois na casa do centésimo o 9 é maior que o 7.

Estratégia 2 – Comparar o número da parte decimal

Incialmente, iguala-se a quantidade de casas decimais nos dois números e se comparam a parte decimal para verificar qual é maior. Assim, percebe-se que o 4,89 é maior que 4,876 pois ao comparar 890 é maior que 876. Entretanto, uma dificuldade que pode ocorrer nessa estratégia é fazer a comparação sem considerar o sistema posicional e comparar 89 e 876, concluindo que 4,876 é o maior (BRASIL, 1998).

Dificuldade 1 - Tamanho da escrita numérica

Em conformidade ao apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) o tamanho da escrita numérica pode ser um indicativo, no caso dos números naturais, para comparação entre dois números. Caso utilizada essa estratégia, os alunos podem indicar que o número 4,876 é maior que o número 4,89 pois há mais casas decimais.

Observação: em ambas as estratégias é possível mobilizar o recurso do quadro valor lugar para fazer a comparação.

Dia 11 de setembro de 2018

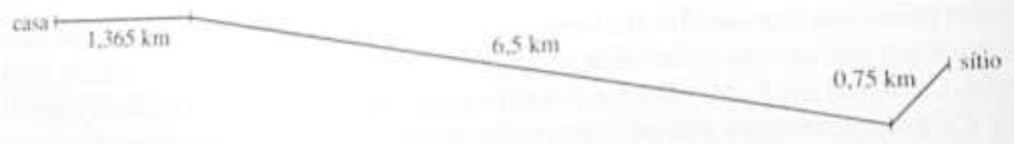
O encontro do dia 11 de setembro teve a intenção de continuar a elaboração da sequência didática, após as 5 atividades pensadas no encontro anterior. Iniciamos a elaboração da sequência didática, focando nas operações de adição e subtração para ser trabalhada ao longo da semana de aulas com a turma do 6º ano da professora.

Joana ressalta a intenção de iniciar o trabalho com os estudantes a partir dos problemas presentes no livro didático dos estudantes (BIANCHINI, 2015), focando nas atividades de adição e subtração. Nesse momento, notamos uma postura no trabalho de Joana, apresentando elementos de um novo conhecimento didático, ao deixar que os estudantes tentem resolver os problemas sem apresentar um exemplo anterior, como quando relata: "*Eu vou deixar um tempo e pedir para eles resolverem*". Esse novo conhecimento, que é mobilizado em outros momentos, modelamos como *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação).*

Nesse contexto, iniciamos essa parte da sequência didática a partir das duas situações-problema a seguir, com o objetivo de apresentar o algoritmo da adição com os números decimais.

Quadro 13 - Problema 6 de adição e subtração de números decimais

6- Laércio fez um esquema do percurso entre a casa onde mora e o sítio dele. Observe esse esquema. Nele, as distâncias são indicadas em quilometro.



Fonte: Bianchini (2015)

Quadro 14 - Problema 7 de adição e subtração de números decimais

7- Observe a situação a seguir:

Fonte: Bianchini (2015)

a) Qual é o valor de troco que Marcos irá receber?

b) Qual o valor total que Marcos irá obter após receber o troco?

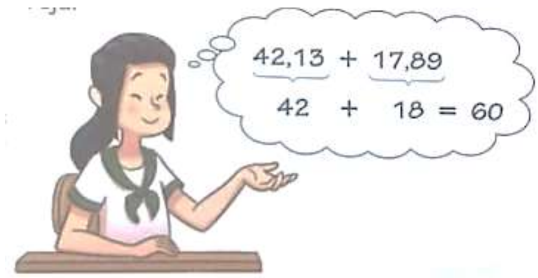
Fonte: Bianchini (2015)

Durante a análise *a priori* dessas atividades, levantamos a possibilidade de os estudantes mobilizarem as estratégias da representação fracionária e o algoritmo da adição, para a primeira atividade. Já para a segunda atividade, é possível que eles mobilizem os algoritmos da adição e subtração, além da técnica de completamento para verificar qual o valor que irá receber de troco. Ao analisarmos a organização da sequência didática, exposta após a análise, observamos que Joana realiza algumas escolhas didáticas diferentes das adotadas no conteúdo de fração. Nesse sentido, a sequência didática de adição e subtração de números decimais inicia com 2 situações-problema para dar início ao trabalho com os algoritmos, que recebe uma atenção apenas na terceira atividade, e finalizada com mais duas situações contextualizadas. Assim, as escolhas de Joana estão consonantes ao *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias),* em detrimento à ênfase a técnicas matemáticas, relacionadas ao *Conhecimento em ação didático 1.1 (*$C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução).*

Após a terceira atividade, que está centrada no trabalho com os algoritmos de adição e subtração, Joana relata a intenção de trabalhar a atividade 9, que apresentamos a seguir, pautada na justificativa exposta no diálogo:

Quadro 15 – Problema 9 de adição e subtração de números decimais

9- Débora quer calcular mentalmente o valor aproximado de 42,13 + 17,89. Para isso, ela arredondou cada parcela para a casa das unidades mais próximas e, em seguida, efetuou o cálculo. Veja.



Calcule mentalmente o resultado aproximado de cada item:

a) 2,86 + 4,95 b) 11,24 + 5,67 c) 9,11 + 31,74

d) 12,12 - 6,43 e) 32,77 – 9,64 f) 53,42 – 10,38

Fonte: Bianchini (2015)

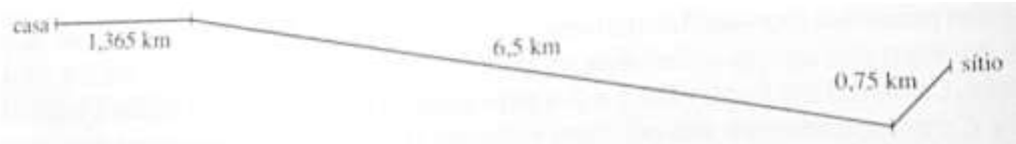
> R: E aí depois o que você faria?
> J: O que trouxe nas pesquisas ou nos parâmetros de fazer arredondamento. Tem esse exercício aqui que é para arredondar e calcular mentalmente. Dá para fazer esse.
> R: É importante discutir com eles quando que é útil arredondar, porque senão vai ter uma quantidade de erros e está levando erro de arredondamento. Como você acha que eles fariam o exercício do cálculo mental?
> J: Primeiro vou jogar alguns exercícios na lousa. Alguns poderiam pensar como eu pensei de resolver e depois aproximar. Vou fazer conforme você falou, vou deixá-los bem livres para fazer como eles querem e depois a gente vai discutindo.

Nesse evento evidenciamos novamente elementos do *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação),* pois Joana considera a possibilidade de deixar que seus alunos tentem resolver as atividades sem uma intervenção explícita nas estratégias, como quando apresentava um exemplo de como fazer. Nesse sentido, compreendemos o processo que Joana está perpassando na formação a partir de novas situações, diálogos e reflexões lhe possibilita repensar suas escolhas didáticas. Além disso, é possível verificar uma influência do trabalho preliminar nas escolhas didáticas da professora, como quando decide colocar uma atividade que trabalhe o arredondamento e o cálculo mental na sequência de atividades, retomando pontos que foram vistos no estudo de algumas pesquisas e dos Parâmetros Curriculares Nacional (BRASIL, 1998) feitos anteriormente.

Atividades da sequência didática discutidas no dia 11 de setembro de 2018

6- Laércio fez um esquema do percurso entre a casa onde mora e o sítio dele. Observe esse esquema. Nele, as distâncias são indicadas em quilômetro.

Figura 7 - Representação do problema 6 de números decimais



Fonte: Bianchini (2015)

Calcule, em quilômetro, a distância da casa de Laércio até a entrada do sítio dele.[33]

Estratégia 1 - Soma de fração

Conforme afirma Ribeiro (2011) uma importante estratégia no ensino dos números racionais é o uso de diferentes representações. Nesse sentido, pode-se transformar os valores apresentados em frações e realizar a soma das frações encontradas. Cabe ressaltar que ao trabalhar com frações é possível que os alunos apresentem dificuldades na soma de frações, em especial com denominadores diferentes.

Estratégia 2 - Algoritmo da adição dos decimais

Para a resolução dessa estratégia, mobiliza-se o algoritmo da soma de números decimais, considerando o sistema posicional para a montagem do algoritmo. Entretanto, conforme destacam Jucá e Sá (2012) devido à memorização de regras e desconhecimento do sistema posicional decimal, os alunos podem montar de maneira indevida o algoritmo da adição.

[33] Fonte: Bianchini (2015)

7- Observe a situação a seguir:

Figura 8 - Representação do problema 7 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

a) Qual é o valor de troco que Marcos irá receber?

b) Qual o valor total que Marcos irá obter após receber o troco?[34]

8- Calcule: [35]

a) 0,075 + 0,325
b) 0,725 + 0,275
c) 1,6 + 4
d) 3,716 + 8,634
e) 7,7 – 4,7
f) 16,05 – 8,8
g) 26,44 – 25,4
h) 168,6 – 90,16

Estratégias para as atividades 7 e 8:

Estratégia 1- Algoritmo da subtração (e adição)

De maneira análoga à apresentada para a atividade 6, durante a resolução das atividades os estudantes podem utilizar os algoritmos da subtração e da adição. Dessa maneira, na atividade 7, no item a, os alunos descobrem que o troco que Marcos receberá será R$ 1,25. Já no item b, ao somar o troco com a quantidade que Marcos indica ter, os alunos concluem que ele ficará com o total de R$ 21,75.

[34] Fonte: Bianchini (2015)

[35] Fonte: Bianchini (2015)

Dificuldade 1 – Representação decimal do número inteiro

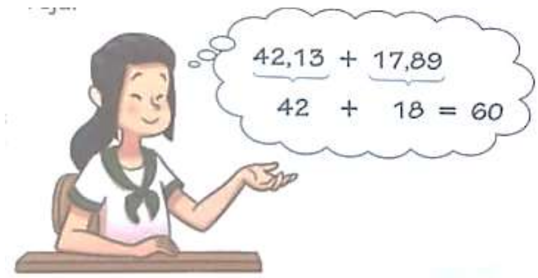
Devido à dificuldade de relacionar os números naturais com os números decimais (ESTEVES; SOUZA, 2012), ao mobilizarem a estratégia do algoritmo da adição e subtração, realizando 20 – 18,75, os alunos podem ter dificuldades em posicionar corretamente os algarismos, respeitando o Sistema de Numeração Decimal.

Estratégia 2 – Técnica do Completamento

Uma possibilidade de realizar essas atividades é por meio da técnica do completamento, por exemplo: na atividade 7, após considerar o valor da compra, refletem qual o valor que falta para totalizar R$ 20,00, que foram usados para o pagamento. Assim, com R$ 0,25 completa R$19,00 e para atingir o valor total, falta apenas R$ 1,00, totalizando R$ 1,25 no valor que Marcos recebeu de troco.

9- Débora quer calcular mentalmente o valor aproximado de 42,13 + 17,89. Para isso, ela arredondou cada parcela para a casa das unidades mais próximas e, em seguida, efetuou o cálculo. Veja.

Figura 9- Representação do problema 9 de números decimais



Fonte: Bianchini (2015)

Calcule mentalmente o resultado aproximado de cada item.[36]

a) 2,86 + 4,95
b) 11,24 + 5,67
c) 9,11 + 31,74
d) 12,12 - 6,43
e) 32,77 – 9,64
f) 53,42 – 10,38

Estratégia 1 - Realizar o arredondamento e o cálculo mental

[36] Fonte: Bianchini (2015)

Conforme apresentado no exemplo da atividade, os alunos podem realizar um arredondamento inicial e depois mobilizar a técnica do cálculo mental. Apesar de exemplificado na atividade, os alunos podem encontrar dificuldades no cálculo mental caso decidam realizar primeiro a operação para depois realizar o arredondamento. Conforme apresentado por Guimarães (2009), no trabalho inicial com cálculo mental os alunos podem encontrar dificuldades na organização e elaboração de estratégias de resolução, como a tentativa de reproduzir o algoritmo mentalmente.

Estratégia 2 – Algoritmo da adição (subtração)

Apesar da atividade solicitar o cálculo mental, é possível que os alunos mobilizem o algoritmo da adição (subtração) durante a resolução da atividade proposta.

10- Ganhei da minha avó R$ 100,00 na sexta-feira. No sábado, comprei uma camiseta de R$ 37,50 e uma bermuda de R$ 36,25. Além disso, tomou um lanche de R$ 7,75. Quanto sobrou da quantia que ganhei?[37]

Estratégia 1 – Composição dos gastos

Inicialmente os alunos podem realizar a soma de todos os gastos realizados e, em um segundo momento, verificar quanto resta do dinheiro que ganhou da avó. Para isso, eles podem recorrer às estratégias já cotadas como o cálculo mental, o uso dos algoritmos e a técnica do completamento.

Estratégia 2 – Subtração sucessivas

Diferentemente da estratégia anterior, é possível que os alunos resolvam o problema seguindo uma ordem cronológica dos eventos descritos, realizando a subtração de cada gasto a partir do valor que tem no momento.

11- Preciso comprar uma borracha, uma lapiseira e uma caneta. Qual desses objetos eu consigo comprar se eu tenho apenas R$2,60?[38]

---

[37] Fonte: Bianchini (2015)
[38] Fonte: Bianchini (2015)

Figura 10 - Representação do problema 11 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Para esse problema que tem como objetivo a comparação dos números na forma decimal, elencamos como possíveis estratégias:

Estratégia 1 - Comparação das casas decimais

Uma primeira estratégia é a comparação dos números decimais a partir de cada casa decimal. Desse modo, após compararem a parte inteira de todos os números decimais, que são iguais, os estudantes percebem que é possível comprarem a caneta ou a borracha, já que possuem a primeira casa decimal menor que a primeira casa decimal referente ao valor que tinham para comprar os produtos (R$ 2,60).

Estratégia 2 – Comparar o número da parte decimal

Nessa estratégia, compara-se a parte decimal dos números envolvidos no problema, verificando que não é possível comprar apenas a lapiseira, já que sua parte decimal (0,99) é maior que a parte decimal do valor que se tem para comprar os produtos (0,60).

12- Veja essa oferta:

Figura 11 - Representação do problema 12 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Para as pessoas que compraram esses óculos de sol hoje, quanto economizariam em relação ao preço de ontem?[39]

Estratégia 1 – Algoritmo da subtração

Os estudantes podem mobilizar o algoritmo da subtração para encontrar a diferença do preço dos óculos. Desse modo, ao armar a subtração 112,70 – 97,40, os alunos obtêm o valor de R$ 15,30.

Estratégia 2 – Técnica do completamento

Por meio da técnica do completamento, é possível que os alunos reflitam que partindo dos R$97,00 seria necessário R$15,00 para obterem R$112,00. Dessa maneira, faltariam apenas R$ 0,30 para atingir o valor da roupa no dia anterior de R$ 112,70, descobrindo a variação de R$ 15,30 no valor do produto de um dia para o outro.

Estratégia 3 – Cálculo mental

Após terem trabalhados com a técnica de cálculo mental na atividade 9, pode ser que os estudantes utilizem essa estratégia para a resolução da atividade 12. Assim, os estudantes podem verificar a diferença na parte inteira (real) e a parte decimal (centavos), obtendo R$ 15,30.

Dia 18 de setembro de 2018

[39] Fonte: Bianchini (2015)

O encontro do dia 18 de setembro foi organizado em dois momentos relacionados ao trabalho com números decimais. Inicialmente, realizamos o momento de análise *a posteriori* e validação das atividades que já haviam sido desenvolvidas pela professora, como as de introdução dos números decimais e as operações de adição e subtração. Em um segundo momento realizamos a elaboração e análise *a priori* da sequência didática de multiplicação e divisão de números decimais.

No começo da análise *a posteriori*, retomamos[40] a atividade do material dourado que foi proposta aos estudantes, na qual deveriam realizar as conversões entre os valores do Sistema de Numeração Decimal, considerando a parte decimal (décimos, centésimos e milésimos). Joana apresentou a atividade aos estudantes e relatou a que os alunos realizaram da seguinte maneira:

> J: Comecei! Menino, vou te dizer bem a real, antes de eu passar o material dourado quando eu estava explicando aquelas perguntas, alguns já tinham feito. Mentalmente assim sabe, sem o recurso material, sem nada. Aqueles que eu falo para você que são bons. […] só que eles são muito assim: a gente multiplicou. […] a maioria deles já conseguiu fazer a princípio sem manipular. Já perceberam esse padrão da multiplicação, um grupo ou outro que manipulava. Eu vou te falar, (mais) usando a ideia da multiplicação do que o próprio material. Quando eles pegavam o material às vezes confundiam, que o cubo seria unidade, eles precisavam de 10 placas para poder formar o cubo.

Conforme relatado pela professora, foi possível verificar que os estudantes conseguiram realizar as transformações, sem a necessidade de ficar restrito à manipulação do material dourado. Assim, a professora destaca que, de modo geral, os estudantes perceberam a regularidade existente nas conversões entre as casas decimais, de décimos para milésimos, por exemplo, e realizavam as multiplicações necessárias para encontrar a resposta. Além disso, como previsto *a priori*, a docente relata a dificuldade inicial na manipulação dos estudantes do material dourado, realizando algumas associações indevidas.

Após essa atividade, a professora decidiu acrescentar uma atividade que não havia sido pensada em um momento *a priori*, pautada no planejamento do professor que estudamos durante a elaboração da sequência didática, que utilizava como recurso o uso do quadro valor lugar. Assim, a professora apresentava alguns números, como: 2 inteiros e 4 centésimos, e solicitava que eles colocassem no quadro valor lugar, ou então apresentava um valor no quadro valor lugar e solicitava que eles escrevessem, por extenso, qual era o número.

---

[40] Ressaltamos que no encontro anterior, dia 11/09/2018, houve um momento de discussão da aplicação da atividade. Por termos retomado a análise a posteriori dessa atividade no encontro do dia 18/08, para a organização do texto, decidimos apresentar as discussões juntas nesse momento.

> J: Coloquei vários números, depois eu trago certinho. O milésimo eu colocava aqui (quadro valor lugar), então tinham uns (alunos que perguntavam) esse restante o que colocar (na casa dos décimos e centésimos)? Por exemplo: um inteiro e cinco centésimos, mas nessa casa tem a necessidade (de colocar 0 na casa dos décimos)? Porque nessas outras (parte inteira) eu falei para eles que não tinha (necessidade). Perguntei para eles: você acha que aqui tem necessidade de colocar ou não o 0? Se colocar vai estar certo ou errado? Diferente daqui que não necessita, mas aqui sim.

Destacamos esse evento como uma característica importante do campo profissional da professora, que apesar de planejar *a priori* as atividades que seriam propostas aos estudantes, no momento que estava em sala de aula decide realizar algumas modificações a partir da sua análise da situação. Nesse sentido, Joana propõe uma atividade, pautada nos estudos preliminares, com o uso do quadro valor lugar para trabalhar com os estudantes a ideia do valor posicional e o modo de ler os números decimais, consonante ao estudado na pesquisa de Esteves e Souza (2012).

Nesse contexto, ressaltamos que o processo formativo que propusemos não se resume à elaboração de atividades sobre determinados conteúdos matemáticos, mas também contribui na formação profissional de Joana, tanto em questões matemáticas, quanto didáticas. Desse modo, acreditamos que durante e após esse processo, a professora possa mobilizar alguns aspectos que perpassaram na formação continuada, como alguns elementos do estudo preliminar, análise *a priori* e *a posteriori* das atividades (ARTIGUE, 1996) em outros momentos da sua prática docente. Joana relata que sua escolha didática contribuiu para o trabalho dos estudantes pois conseguiu relacionar com o uso do material dourado e trabalhou uma atividade de comparação entre números decimais: "*aqui 0,5 (é décimos) e isso aqui 0,05 (centésimos) de ser maior, de ser menor. Nesse sentido, o quadro valor lugar foi bom.*" Além dessa atividade, ela relata que propôs outras atividades:

> J: Ontem, segunda-feira, eu imprimi uma lista de 18 atividade bem bacanas para eles fazerem. Começava com pintar e representar 8 décimos. Tinha que pintar $\frac{8}{10}$ depois para colocar esse número no quadro valor lugar. Eu gostei dessa atividade, porque aqui Renan, já explicou o porquê que fica 0,8. Porque, por exemplo, 8 centésimos vai ficar 0,08, então eu achei legal essa atividade da fração. Porque eles sabem aquela regra sobre (denominador) 10 é um 0, sobre 100 dois 0, mas por quê? Porque falei a própria leitura da fração já fala né, oito décimos. Então esse 8 está na casa de quem? Então acharam legal isso.

Verificamos novamente o interesse de Joana com a aprendizagem dos seus alunos, com a preocupação de buscar novas atividades além do que foi pensado anteriormente. Nessas atividades é possível observar a atenção da professora em aspectos conceituais de números decimais, como em relacionar o número racional na forma fracionária e na forma decimal. Além disso, diferentemente dos anos anteriores, a professora privilegia algumas atividades que possibilitam as justificativas de procedimentos aos alunos, relatando que *"queria que eles entendessem não ficasse só com a regrinha"* como a conversão de fração para decimais. Nesse contexto, após um momento de reflexão nos estudos preliminares, destacamos uma importância dada pela professora nas propriedades e relações do conceito de números decimais, característica presente na forma predicativa do conhecimento (VERGNAUD, 2002), em detrimento de procedimentos sem justificativas.

Na continuidade do momento da análise *a posteriori*, apresentamos a atividade 4 elaborada no momento *a priori*:

Quadro 16- Problema de divisão de números naturais com quociente decimal

4	-Quatro irmãos querem comprar um chocolate que custa 5 reais. Se eles forem dar a mesma quantia, com quanto que cada irmão deve contribuir?

Fonte: dados da pesquisa

Essa atividade tinha como objetivo a sistematização dos números racionais na forma decimal, ao realizar a divisão entre dois valores naturais. Assim, apesar de previsto na análise *a priori* a possibilidade do uso do algoritmo da divisão, acreditávamos que quando chegassem no resto da divisão (1), os estudantes relacionassem com o sistema monetário e realizassem a decomposição dos valores, obtendo R$ 1,25 para cada. Entretanto, durante a resolução da atividade, Joana verificou que os estudantes mobilizaram o algoritmo usual, utilizando a vírgula e acrescentando o 0 no resto para continuar a divisão, e ao questioná-los: *"só não entendia como que estavam fazendo. Eles falaram que a outra professora já ensinou: sobrou um, coloca zero e vírgula.".* Apesar de mobilizarem o algoritmo da divisão corretamente, Joana continuou com a atividade tendo em vista o objetivo dela, questionando aos alunos: "*eu perguntei para eles por que que faz isso? [...] ninguém sabia explicar".* Novamente percebemos uma preocupação de Joana em aspectos conceituais do tema, questionando os estudantes sobre as justificativas que permite a realização dos procedimentos que realizaram.

Nos problemas de adição e subtração, evidenciamos que de maneira semelhante à atividade anterior, os estudantes mobilizaram o algoritmo usual, colocando vírgula embaixo de vírgula. Entretanto, diferentemente do caso anterior, Joana observou que os estudantes realizaram esse procedimento ao mobilizarem a ideia do quadro valor lugar: *"Olha, eles montaram o quadro valor lugar completo, as casas e fizeram a operação. Ninguém fez um outro jeito diferente*". Ao refletir sobre as escolhas didáticas realizadas *a priori* e as resoluções dos estudantes no momento *a posteriori*, presentes na Engenharia Didática (ARTIGUE 1996), acreditamos que as atividades propostas por Joana, como a importância dada às propriedades dos números decimais, o sistema posicional trabalhado no quadro valor lugar, entre outros pontos contribuíram para que os estudantes ampliassem o domínio numérico do Sistema de Numeração Decimal, ampliando do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números decimais, possibilitando a compreensão do algoritmo usual da adição e subtração dos números decimais, sem a necessidade de descrever a regra *vírgula embaixo de vírgula*.

Nesse sentido, ao refletirmos sobre as escolhas didáticas, a professora relata que "*eu acho que eles estão conseguindo entender o processo, entender o que está acontecendo, associando o que lembravam e a entendendo o porquê".* Também destacamos a postura de Joana no trabalho com os estudantes, de modo que a docente apresenta um repertório, que mobiliza durante a sua prática quando julga ser necessário, como nas modificações iniciais da sequência didática planejada. Outro momento possível de evidenciar esse repertório foi quando seus alunos conseguiram realizar as primeiras adições, propõe a adição de um número natural com um decimal, questionando-os e propondo que reflitam sobre a situação, quando relata: *"aí eles já se confundiam. Aí questionei o que representava os números inteiros*[41]*, aí quando relacionavam com o quadro valor de lugar eles faziam".*

No término desse primeiro momento *a posteriori* da sequência didática de números decimais, refletimos acerca das escolhas didáticas realizadas ao longo das atividades, bem como as hipóteses pensadas, e Joana apresenta as seguintes reflexões:

> R: O que está achando sobre o ensino de decimais até agora?
> J: Vamos ver se a prova vai condizer com o que eu estou vendo no decorrer das aulas. Mas como nos exercícios que a gente se propôs eles estavam fazendo, me deram um retorno bom. (Houve) Coisa outra mais pontual como o caso da subtração (erros no algoritmo), mas foi a primeira vez que eu passei para eles e dentre os 27 (alunos) erraram 1 ou 2.
> R: Para os próximos anos o que você pensa que pode mudar do que a gente propôs até agora?
> J: Eu vou tentar manter as ideias. Trabalhar mais focada nos problemas e menos nas operações. Questionar mais eles e fazer eles pensarem, porque nos anos anteriores e até nas outras turmas, eu fico mais no mecânico. Mas essa turma também me dá uma condição boa, eu não sei se em outras turmas terão essa mesma condição.
> R: Você tá dando aula para o 7º, 8º e 9º ano. Acha que nessas turmas você não consegue fazer nada? Essas coisas que a gente tá discutindo, acha que consegue usar alguma coisa lá ou que não usará nada?
> J: Uma coisa que eu acho, com sinceridade, eu não sei se foi por comodismo meu ou tem muita coisa que o professor tem que fazer. Eu não daria conta para cada conteúdo e cada turma que eu tenho de pensar antes: vou trabalhar esse problema; ah, o Joãozinho pode pensar desse jeito! Se ele pensar desse jeito, o que que eu posso estar fazendo? Por onde eu posso estar indo? Essa é uma dificuldade que pode aparecer. Não tem como Renan. E outra coisa algumas meninas (professoras) vendo eu fazer o

[41] Apesar de falar de números inteiros, Joana se referia ao contexto de uma quantidade inteira, referente aos números naturais, e não ao conjunto dos números inteiros, que são estudados no 7º ano.

> planejamento falaram que eu não colocava as páginas e os exercícios que eu iria trabalhar, sabe por quê? Eu tenho que trabalhar esse conteúdo de acordo com os alunos estão me respondendo. […] é porque eu não quero me prender e colocar para depois não me cobrarem: Ah, mas você não fez esse exercício.

A professora relata que seus estudantes conseguiram resolver as atividades propostas, com um bom índice de acertos, como visto no excerto supracitado. Percebe-se novamente que, no caso da professora Joana, as avaliações que são aplicadas, como um requisito institucional, tem um papel de validação das escolhas realizadas pela professora Joana. Diferentemente da Engenharia Didática, produzida por um pesquisador com o enfoque na pesquisa sobre um saber, que a validação ocorre por meio do confronto das análises *a priori* e *a posteriori*, no caso da formação de professores inseridos no seu campo profissional, há elementos institucionais que são incontornáveis, como a prova escrita (PERRIN-GLORIAN, 2009).

Conforme afirma Perrin-Glorian (2009) essas restrições institucionais que estão presentes no trabalho com a ED na produção de recursos ou na formação de professores devem ser levadas em consideração a partir do ponto de vista teórico. Isso nos leva em alguns pontos presentes no campo profissional da professora: qual escolha teria a professora caso os resultados apresentados ao longo do processo de estudos e da prova escrita fossem discrepantes? Apesar das escolhas e hipóteses terem propiciado que os estudantes realizassem as atividades, mobilizando propriedades e estratégias esperadas, qual posição a professora adotaria caso seus alunos não fossem bem na prova escrita? Essas questões são importantes para refletirmos sobre como ocorre e quais elementos são considerados pela docente no processo de validação das sequências didáticas produzidas à luz da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996). Destacamos que essa reflexão não foi realizada pois durante os encontros houve uma confluência entre a produção dos estudantes no desenvolvimento da sequência didática e da avaliação escrita aplicada pela professora.

Além disso, é possível evidenciar que Joana explicita novamente vestígios do *Conhecimento em ação didático 1.2 ($C_{d1.2}$ – para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias),* quando a professora considera continuar o trabalho com o foco em situações-problema, com atividades que levem os estudantes a refletirem sobre estratégias e justificativas, não somente nas turmas que realizamos o trabalho em conjunto, como nas outras em que leciona. Desse modo, percebe-se que a professora problematiza a postura que apresentava, como as escolhas didáticas que focavam predominantemente no trabalho com técnicas algorítmicas, relacionadas ao *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber* *previamente técnicas de resolução),* como quando destaca: *"Eu vou tentar manter as ideias. Trabalhar mais focada nos problemas e menos nas operações. […] Questionar mais eles e fazer eles pensarem, porque nos anos anteriores e até nas outras turmas, eu fico mais no mecânico".*

Por fim, percebemos novamente uma angústia da professora em relação à demanda de seu campo profissional. Em conformidade ao explicitado por Gatti e Barreto (2009), Joana ressalta a dificuldade na realização desses momentos que percorremos em conjunto, pautados na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), caso queira estender para todas as suas turmas. Essa característica do serviço da docente a leva até a pensar que não pode ser realizado por questão de comodismo dela, o que não se caracteriza. Corroboramos com a visão da professora acerca das dificuldades na elaboração e o desenvolvimento de sequências didáticas ao considerarmos realizá-las no rigor da Engenharia Didática. Entretanto, ao longo do trabalho em conjunto, foi possível evidenciar que alguns preceitos e elementos presentes na ED podem contribuir no trabalho da professora, como um esboço de momento *a priori* nas atividades escolhidas para seus alunos.

Em um segundo momento da reunião do dia 18 de setembro, começamos a elaboração e análise *a priori* das atividades de multiplicação e divisão de números decimais que seriam desenvolvidas com os estudantes ao longo da semana. Como nos momentos anteriores, no início da elaboração da sequência Joana descreve que nos anos anteriores "*passava um problema e perguntava que operação iria fazer",* observamos indícios do conhecimento didático da professora que estava voltado para o uso de técnicas algorítmicas. Por mais que decidisse começar com problemas, ao longo dos encontros percebemos que essas atividades eram um recurso didático para a apresentação de técnicas de resolução, como o algoritmo da multiplicação e divisão.

Ao ser questionada sobre a maneira que conduziria a aula diante de um questionamento dos estudantes sobre a multiplicação de números decimais, nos deparamos com a seguinte situação:

> R: Se o aluno perguntasse para você, mas por que que eu não considero a vírgula (durante a multiplicação) e depois eu conto a quantidade de casas decimais?
> (demora pensando)
> J: Eu não sei. Eu mesmo não sei. Nem pensando no quadro valor lugar eu consigo justificar porque quando eu estou multiplicando 1,2 vezes 3,6, eu pulo depois de duas casas. Se eu colocar no quadro valor de lugar vai dar o espaço de duas casas? Só se for isso, pois eu nunca parei para pensar o porquê.
> R: Como que a gente podia representar esse daqui? (3,6)
> J: Se eu for representar o outro. 1,2 . 3,6. Mas é multiplicar no quadro?
> R: Tem várias maneiras de fazer.
> J: Mas justificando?

R: O que é essa multiplicação de 1,2 . 3,6? O que significa isso? Como eu posso representar essa multiplicação?
J: Sem ser assim? Por fração.? Meu Deus! 12 décimos vezes 36 décimos da 432 centésimos. Tudo bem com a fração, eu consegui imaginar. Mas e assim (forma decimal)?
R: O que que significa essas duas casas decimais? E por quê? O que que está implícito nesse processo de contar as casas decimais e colocar a vírgula? A ideia de fração já consegue justificar?
J: Justifica.
R: Por exemplo: 2,42 . 1,3. Quanto dá?
J: Multiplicando tudo... 3,146.
R: Por quê?
J: Tá se fosse na fração seria 242 centésimos vezes 13 décimos. 3146 sobre 1000.
R: Como eu posso representar?
J: 3,146.
R: Então como a gente pode justificar para o aluno? Quando você multiplica normal sem contar a vírgula, e as casas decimais você chegou em qual valor aqui (primeiro exemplo)? 432. E no segundo caso, 3146.
J: É porque o milésimo?
R: É a multiplicação do 242 . 13 e 12 . 36.
J: O numerador.
R: E por que no primeiro que são duas casas decimais e no segundo três casas decimais então?
J: Décimo, centésimos e milésimos daqui debaixo do denominador (no segundo exemplo)? Então é a mesma quantidade. Então tenho duas casas, é o décimo, centésimos. 3 casas décimos centésimos e milésimos (por causa da multiplicação no denominador). Ahhh!
R: Isso. Como que você ensinava essa parte?
J: Não falava. Só multiplica, depois conta as casas decimais.

Nesse evento, evidenciamos que a professora Joana consegue resolver uma situação envolvendo a multiplicação de números decimais, quando explicita o procedimento e o resultado de maneira correta. Assim, destacamos novamente um componente operatório do conhecimento em sua ação, em consonância ao que Vergnaud (2002) afirma, pois, essa forma de conhecimento organiza e pauta a conduta do sujeito na ação, estando associada ao *know-how*. Entretanto, ao se deparar diante de uma questão das justificativas desses procedimentos, a professora indica não saber as propriedades que estão envoltas na situação. Estamos cientes que a linguagem natural pode ser redutora por si, ocasionando dificuldades em expressar todo o conhecimento mobilizado na ação, mas nesse caso a professora manifesta algumas dificuldades acerca da forma predicativa do conhecimento. Nesse sentido, a forma predicativa do conhecimento tem como um dos objetivos a identificação no(do) real, propriedades e relações, tendo um papel importante na sistematização de um saber em uma comunidade (VERGNAUD, 2002; PASTRÉ, MAYEN, VERGNAUD, 2019). De modo análogo ao evento ocorrido na multiplicação de números decimais, ao abordarmos a divisão, apresentamos o seguinte evento:

R: E a divisão.?

J: Eu não sei justificar! (respondeu de bate pronto, sem nem esperar acabar a pergunta)
R: Como eu divido 5,4 por 2?
J: Eu sei que andou uma (casa decimal no 5,4) acrescentou um 0 aqui no 2.
R: Por quê? (tanto eu quanto ela perguntamos)
J: Eu não sei. 5 inteiros e 4 décimos para 2 inteiros. Aí você transformou tudo em décimo ou inteiros?
R: Como eu posso representar isso daqui?
J: $\frac{54}{10}$ dividido por 2.
R: Como posso representar essa divisão toda? Você falou com os seus alunos sobre que significado pode ter (a fração)
J: A divisão. Então $\frac{5,4}{2}$ (representada por meio da fração).
R: E o que eu posso fazer com essa fração?
J: Outra fração.
R: Que fração?
J: Uma equivalente aqui. Se eu multiplicar em cima por 10 embaixo por 10. E aí fica $\frac{54}{20}$.
R: Que foi o que você tinha feito aqui quando você igualou (quantidade de casas decimais).
J: Mas por que que ele (o aluno) vai saber que é por 10? Por que são décimos?
R: Qual é ideia aqui Joana? Você não sabe dividir dois números inteiros?
J: Por que que a justamente o 10? E não pode ser um outro número?
R: Poder eu posso fazer por outro número. Posso multiplicar por 20, mas eu vou aumentando uma coisa e depois eu vou ter que diminuir. A vantagem de multiplicar por 10, por 100 e por 1000 é que o valor não mexe com os números e sim com as casas decimais.

Os questionamentos propostos contribuíram na constituição de um momento de desequilíbrios de Joana sobre as justificativas que estão envoltas nos algoritmos da multiplicação e divisão. Nesse sentido, intencionamos realizar algumas indagações à professora que lhe permitisse refletir, tentando descobrir as propriedades que envolviam a situação. Inicialmente, a professora resolve a situação por meio do algoritmo e busca justificá-lo a partir da mobilização do quadro valor lugar, como na situação de conversão das unidades decimais. Ao ser questionada sobre os possíveis tipos de representação, Joana utiliza a representação fracionária e a ideia de fração para formular as justificativas dos algoritmos da multiplicação e divisão, respectivamente. Percebe-se que ao elaborar essas justificativas, Joana utiliza uma comparação com a sua resposta obtida com o uso do algoritmo como uma forma de validação da mesma, como quando expressa: *"Então é a mesma quantidade. Então tenho duas casas, é o décimo, centésimos. 3 casas décimos centésimos e milésimos (por causa da multiplicação no denominador). Ahhh!"*.

A partir desses eventos apresentados, verificamos como as dificuldades matemáticas de Joana encontravam arraigadas. Durante o estudo preliminar de números decimais, ocorrido no dia 28 de agosto, houve momentos de discussão sobre as operações com números decimais, conforme apresentamos. Naquele momento, Joana também perpassou por reflexões, desequilíbrios e reequilíbrios cognitivos e estabilização, ainda que momentâneas, acerca de conhecimentos relacionados a essas propriedades e justificativas. Isso corrobora com a concepção de aprendizagem que acreditamos, em concordância ao apresentado por Vergnaud (1996; 2009), na qual a aprendizagem de um sujeito ocorre de maneira processual, de modo que por mais que Joana novamente demonstre um momento de estabilização, ao longo de sua experiência profissional a docente pode se deparar com novas situações que lhe causem desequilíbrios, reflexões e momentos de aprendizagens. Além disso, esses eventos nos levam a refletir sobre as escolhas didáticas de Joana no trabalho com seus alunos estão relacionadas com seus conhecimentos matemáticos, pois ao ser perguntada como trabalhava a multiplicação com os estudantes, ela relata: *"Não falava (de justificativas). Só multiplica, depois conta as casas decimais".* Inferimos que tais escolhas podem ser devido à predominância do conhecimento operatório de Joana diante dessas situações, em detrimento ao conhecimento predicativo, de modo que ela prioriza o trabalho com técnicas algorítmicas no estudo de números decimais.

Pautada nas discussões realizadas, em especial na conversão das frações de denominador decimal para números com a representação decimal, iniciamos a sequência de atividades de multiplicação e divisão com a atividade a seguir:

Quadro 17 - Atividade de regularidades de multiplicação e divisão de potência de base 10

13 - Realize a multiplicação e divisão usando a calculadora:

a-	3,18 x 10	g) 54,6 : 10
b-	3,18 x 100	h) 54,6 : 100
c-	3,18 x 1000	i) 214,3 : 100
d-	10 x 9,5	j) 214,3 : 1.000
e-	100 x 0,0075	k) 35 : 10
f-	10.000 x 0,0456	l) 35 : 100

Fonte: Bianchini (2015)

Após essa, elencamos duas outras questões que os estudantes realizassem as operações de potência de base 10, sem o uso da calculadora, e justificassem as respostas. A escolha de iniciar a sequência didática com essa atividade, com o uso da calculadora, tinha como objetivo que os estudantes percebessem as regularidades presentes na multiplicação e divisão de potência de base 10, conhecido como *andar a vírgula*. Essa escolha foi devido à ideia da professora de buscar justificar os algoritmos para os alunos, após a resolução de algumas situações-problema, como quando diz: *"(continuaria com) alguns problemas e depois acho que o algoritmo. [...] Aí que eu entraria com fração".* Além disso, Joana decide apresentar alguns problemas, por exemplo:

Quadro 18 - Situação-problema relacionada a multiplicação de números decimais

16 - Karla foi ao mercado comprar tomate que estava custando R$ 2,20 o quilo. Sabendo disso, responda: a- Se Karla comprar 2 kg, qual valor ela irá pagar? b- Se comprar 1,5 kg, qual valor ela irá pagar? c- E se comprar 1,7 kg?

Fonte: dados da pesquisa

Nessa atividade temos como objetivo que os alunos sintam a necessidade do uso da operação de multiplicação durante a resolução. Em um primeiro momento, a questão continha apenas os dois primeiros itens, mas durante a análise *a priori* elencamos que os estudantes poderiam resolvê-lo a partir da operação de adição e a decomposição do preço do quilograma (Kg) do tomate, como ressalta Joana: *"um quilo e meio. Ah, mas esse meio ele pode pegar e dividir né?"*. Para atender nosso objetivo, acrescentamos o item c, levando os alunos a buscarem outras estratégias. Novamente evidenciamos uma potencialidade da Engenharia Didática na composição do trabalho da professora, ao pensar nas possíveis estratégias dos estudantes e poder modificar uma variável didática do problema, com o intuito da mobilização de uma estratégia.

Após um exercício para trabalhar com o algoritmo da multiplicação, a sequência didática é composta por 3 situações-problemas que poderiam ser resolvidas por meio da multiplicação e/ou divisão, como a atividade a seguir:

Quadro 19 - Problema da sequência didática de multiplicação e divisão de números decimais

21- Uma costureira usou 2 metros e 75 centímetros de cetim para cada túnica dos participantes de um coral.

Figura 12 - Representação do problema 21 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Quantos participantes há nesse coral? Quanto sobrou de tecido?

Fonte: Bianchini (2015)

A escolha dessas atividades teve como objetivo a sistematização da operação de divisão com os números decimais, tendo em vista que uma possível resolução seria por meio dessa estratégia. Além disso, consideramos que os estudantes poderiam resolver as atividades de outros modos, como o uso de estimativas; multiplicações sucessivas até encontrar a quantidade que se aproximava, entre outras. Entretanto, um dos pontos levantados por Joana seria a eficiência da estratégia da divisão diante dessa situação. Finalizamos a sequência didática de números decimais, que está apresentada após o momento de análise, com um exercício de divisão para o trabalho com a técnica algorítmica.

Ao final do encontro do dia 18 de setembro, quando realizamos a análise *a posteriori* das atividades já desenvolvidas e a elaboração e análise *a priori* da sequência de multiplicação e divisão de números decimais, Joana apresenta uma característica importante do seu contexto do trabalho, informando um novo curso proposto pela Coordenadoria Regional de Educação, que ela iria realizar, que seria em 4 terças-feiras durante o período noturno (25 de setembro; 09 de outubro; 23 de outubro e 13 de novembro). Como começávamos nossa reunião no final da tarde, e diante da impossibilidade de nos encontrarmos em outro dia da semana, decidimos continuar o trabalho com o tempo disponível, reorganizando as pautas dos próximos encontros. Assim, ao invés de realizarmos a análise *a posteriori* das atividades que elaboramos, optamos em iniciar o trabalho com sistemas de equações do 1º grau para atender ao calendário escolar que esse conteúdo estava previsto, e a análise das atividades de números decimais foi realizada no dia 09 de outubro. Novamente percebemos as condições que Joana estava inserida no seu campo profissional, sendo necessário realizar adequações no trabalho que desenvolvemos como a organização e a pauta dos encontros. Assim, finalizamos o encontro do dia 18 de setembro com a seguinte fala de Joana: *"Beleza, agora ainda vou para a escola porque tem reunião lá. Rhum, tô atrasada (19h)!"*.

Atividade da sequência didática discutidas no dia 18 de setembro de 2018

13- Realize a multiplicação e divisão usando a calculadora:[42]

g-	3,18 x 10	m-	54,6 : 10
h-	3,18 x 100	n-	54,6 : 100
i-	3,18 x 1000	o-	214,3 : 100
j-	10 x 9,5	p-	214,3 : 1.000
k-	100 x 0,0075	q-	35 : 10
l-	10.000 x 0,0456	r-	35 : 100

Estratégias: Uso da calculadora

Essa atividade tem como objetivo a percepção da regularidade das multiplicações e divisões por uma potência de base 10. Assim, os alunos utilizam a calculadora para obter as respostas das operações solicitadas, registrando-as no caderno.

14- Sem o uso da calculadora, qual é o produto de 3,459 x 100? Por que é esse valor?

15- Sem o uso da calculadora qual é o quociente de 35,46 : 10? Por que é esse valor?

Descrevemos as estratégias e dificuldades das atividades 14 e 15:

Estratégia 1 – Percepção de regularidade

[42] Fonte: Bianchini (2015)

Após realizar a atividade anterior, é possível que os alunos percebam a regularidade existente no comportamento da posição da vírgula após as operações de multiplicação e divisão por uma potência de base 10. Desse modo, pautado nessa regularidade, verifica-se que a resposta da atividade 14 é 3459 e da atividade 15 é 3,546.

Estratégia 2 – Algoritmo da multiplicação (divisão)

Ao analisar o Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul, observamos que no 5º ano é realizado um estudo com os números racionais na forma decimal, contemplando as operações aritméticas (MATO GROSSO DO SUL, 2019). Nesse contexto, os alunos podem mobilizar o algoritmo da multiplicação para resolver o 14 e o algoritmo da divisão para a atividade 15.

Dificuldade 1 – Compreensão dos algoritmos da multiplicação e divisão

Pesquisas relacionadas com o ensino e aprendizagem de números decimais identificaram que uma das dificuldades presentes no tema é o uso de técnicas algorítmicas em detrimento da compreensão do sistema de numeração decimal (ESTEVES; SOUZA, 2012; CUNHA, MAGINA, 2004). Ao mobilizar o algoritmo da multiplicação os alunos podem ter dificuldades na sua compreensão, podendo recorrer à regra da adição e subtração (colocando vírgula embaixo de vírgula). Já no algoritmo da divisão, é possível que não compreendam a ideia de igualar a quantidade de casas decimais e depois retirar as vírgulas.

16- Karla foi ao mercado comprar tomate que estava custando R$2,20 o quilo. Sabendo disso, responda:

d- Se Karla comprar 2kg, qual valor ela irá pagar?

e- Se comprar 1,5kg, qual valor ela irá pagar?

f- E se comprar 1,7 kg?

Estratégias 1 – Soma

Uma primeira estratégia, com o nível mais empírico é a soma sucessiva do valor do quilograma do tomate, como no item a: 2,20 + 2,20 = 4,40.

Estratégia 2 – Decomposição e soma

Essa estratégia consiste na decomposição do valor do quilograma para quantidades parciais solicitadas. Assim, sabe-se que o quilograma do tomate custa R$2,20, então 0,5 kg custa R$ 1,10, totalizando R$ 3,30 o valor de 1,5 kg de tomate.

Estratégia 3 – Operação de Multiplicação

Nessa estratégia, que pode ser mobilizada nos três itens dessa atividade, o aluno mobiliza a operação de multiplicação para encontrar o valor pago na compra do produto. Dessa maneira, pode-se recorrer ao algoritmo da multiplicação tendo como parcelas o valor do quilograma do tomate pela quantidade comprada.

17- Efetue cada uma das multiplicações abaixo.

a)	2,7 x 3,9	d)	24 x 3,14
b)	5,75 x 7	e)	4,5 x 7,6
c)	0,45 x 0,82	f)	0,125 x 48

Estratégia 1- Algoritmo da multiplicação

Para a resolução da atividade 17, é possível a utilização do algoritmo da multiplicação em todos os itens. Por exemplo, na resolução do item a, após montar a multiplicação de 2,7 x 3,9, obtém como resultado 10,53.

Dificuldade 1 – Compreensão dos algoritmos da multiplicação

De maneira análoga a apresentada na análise *a priori* das atividades 14 e 15, os estudantes podem apresentar dificuldades na utilização do algoritmo da multiplicação, em conformidade ao apresentado em pesquisas sobre o tema (ESTEVES; SOUZA, 2012; CUNHA, MAGINA, 2004).

Estratégia 2 – Conversão e uso da representação fracionária

Para o uso da estratégia 2, os alunos realizam a conversão dos valores decimais para frações e realizam a multiplicação de fração, seguindo a ideia de multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

18- Sandra comprou em uma loja 10 metros de fita dourada e pagou R$ 0,85 cada metro. Em outra loja, ela comprou 8,20 m de por R$ 1,10 cada metro. Em qual das lojas Sandra gastou mais dinheiro? Quanto foi a diferença?[43]

Para encontrar o valor gasto na primeira loja, os alunos podem utilizar das seguintes estratégias:

Estratégia 1 – Soma sucessiva

Apesar de ser trabalhosa, uma possível estratégia é o uso da soma de 10 parcelas de R$ 0,85, obtendo R$ 8,50.

Estratégia 2 – Percepção de regularidade

Após perceber que o valor gasto na primeira loja é possível de ser encontrado a partir da multiplicação de R$ 0,85 por 10, utiliza-se a regularidade trabalhada na atividade 14. Assim, por se tratar de uma multiplicação por 10, o valor gasto será de R$ 8,50.

Além disso, há a possibilidade de encontrar os valores gastos por meio da terceira estratégia:

Estratégia 3 – Uso da multiplicação

Nesse momento, o uso da multiplicação pode ser feito utilizando a forma decimal ou a forma fracionária, como descrita anteriormente. Em um segundo momento, realiza-se a comparação dos valores encontrados para verificar em qual loja Sandra gastou mais. Por fim, para encontrar a diferença gasta, os alunos podem utilizar o algoritmo da subtração ou a técnica do completamento.

19- Resolva[44].

[43] Fonte (adaptado): Bianchini (2015)
[44] Fonte: Bianchini (2015)

Figura 13 - Representação do problema 12 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Estratégia 1- Algoritmo da divisão

Para encontrar o valor pago por cada chiclete, utiliza-se o algoritmo da divisão, dividindo 15 ∶ 20, obtendo como resultado o valor de R$ 0,75.

Estratégia 2 – Decomposição

Na estratégia 2, realiza-se a decomposição a partir do valor descrito, verificando que 10 chicletes custam R$ 7,50. Posteriormente, pode-se realizar a divisão do valor de 7,50 por 10, por meio do algoritmo ou da regularidade já trabalhada anteriormente, encontrando o valor unitário do chiclete de R$ 0,75.

20- Paula encheu o tanque de combustível do carro e anotou em um bloquinho de papel o número 12.349, que correspondia, no hodômetro (marcador de quilometragem) do painel do carro, aos quilômetros rodados. Após alguns dias, ela retornou ao posto e voltou a encher o tanque do carro. Verificou que a bomba de etanol indicava 48 litros e que o número mostrado no hodômetro de seu carro era 12.805.[45]

[45] Fonte: Bianchini (2015)

Figura 14 - Representação do problema 20 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

a) Quanto Paula pagou pelos 48 litros de combustível, sabendo que, nesse dia, o etanol custava R$ 2,395 o litro naquele posto?

b) Quantos quilômetros o carro de Paula faz com 1 litro de etanol?

Após encontrar a distância percorrida a partir dos valores apresentados no problema (seja por meio do algoritmo da subtração ou por completamento), os estudantes têm a possibilidade de utilizar as seguintes estratégias:

Estratégia 1 – Uso dos algoritmos da multiplicação e divisão

Para o item a, pode-se mobilizar o algoritmo da multiplicação para encontrar os valores gastos, multiplicando 48 x 2,395 = 114,96, e encontrando o valor de R$ 114,96. Já no item b, após encontrar a distância percorrida a partir dos valores apresentados no problema (seja por meio do algoritmo da subtração ou por completamento), mobiliza-se o algoritmo da divisão realizando 456 : 48 = 9,5, verificando que o carro fez 9,5 km/l.

Estratégia 2 - Conversão e uso da representação fracionária

Como explicitado na estratégia anterior, é possível realizar a multiplicação e a divisão, para resolver os itens a e b, respectivamente. Para isso, os estudantes podem mobilizar uma representação fracionária durante a resolução, por exemplo: no item a, é possível converter 2,395 em $\frac{2395}{1000}$ e 48 em $\frac{48}{1}$ para realizar a multiplicação das frações. Assim, $\frac{48}{1} . \frac{2395}{1000} = \frac{114960}{1000}$ e, convertendo novamente para a forma decimal, obtém-se 114,96.

21- Uma costureira usou 2 metros e 75 centímetros de cetim para cada túnica dos participantes de um coral.[46]

Figura 15 - Representação do problema 21 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Quantos participantes há nesse coral? Quanto sobrou de tecido?

Estratégia 1- Algoritmo da divisão

Inicialmente, utiliza-se do algoritmo da divisão de 50 : 2,75 para encontrar a quantidade de túnicas confeccionadas. Destacamos que como a quantidades de túnicas confeccionadas pertencem ao conjunto dos números naturais, uma dificuldade pode ser no uso do algoritmo após o resto ser menor que o divisor, obtendo um quociente não natural.

Estratégia 2 - Tentativa e estimativa

Nessa estratégia é possível estimar a quantidade de participantes e verificar se a quantidade de túnicas produzidas são a maior possível a partir da quantidade de tecidos. Assim, ao considerar 15 participantes, por exemplo, percebe-se que ainda sobra tecido para fazer mais túnicas, até encontrar uma quantidade (18 participantes) que não há mais tecido suficiente.

Estratégia 3 – Conversão e uso da representação fracionária

[46] Fonte: Bianchini (2015)

Com o intuito de realizar a divisão da quantidade total de tecidos pela quantidade utilizada para a produção de cada túnica, após realizar a conversão para a representação fracionária, os estudantes podem realizar a divisão do seguinte modo:

$$\frac{50}{1} : \frac{275}{100} \rightarrow \frac{50}{1} \cdot \frac{100}{275} = \frac{5000}{275}$$

Ao obterem a fração $\frac{5000}{275}$, é possível que os alunos realizem a simplificação da fração $(\frac{200}{11})$ e, posteriormente, após converterem para a representação decimal de 18,181818…, concluem que é possível produzir 18 túnicas.

22- Calcule os quocientes.[47]

a) 25,46 : 6,7

b) 1,6632 : 0,924

c) 124,976 : 8,56

d) 0,09 : 0,36

e) 203,82 : 15,8

f) 93,4656 : 9,736

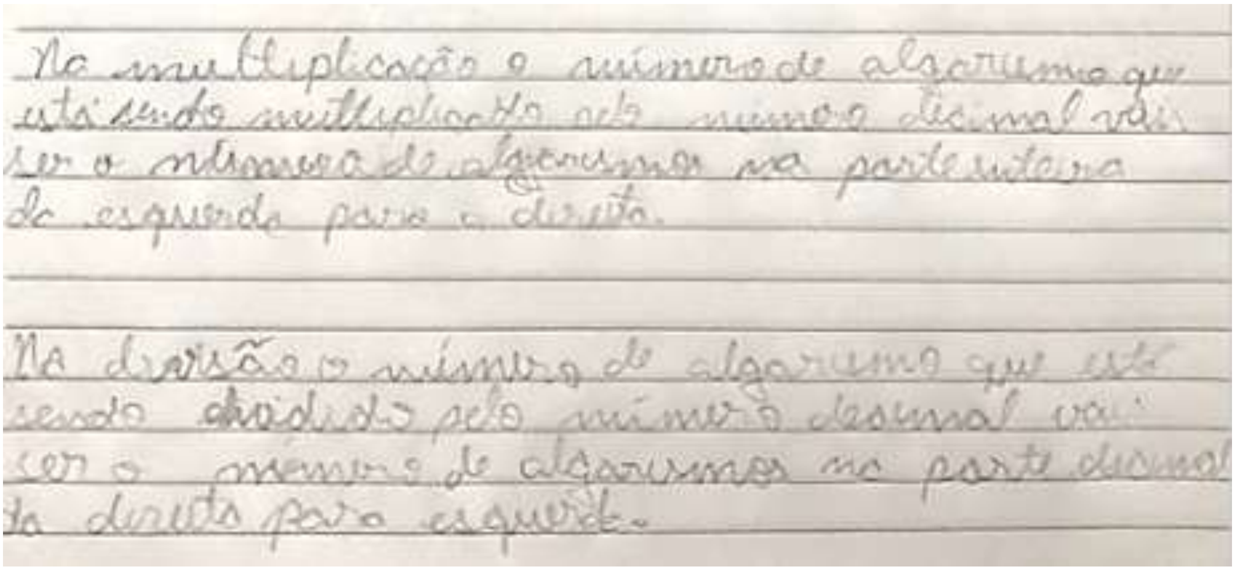
[47] Fonte: Bianchini (2015)

De maneira análoga ao apresentado na atividade 21, para a resolução da atividade 22, os estudantes podem mobilizar as *estratégias do algoritmo da divisão (Estratégia 1)* e a *conversão e uso da representação fracionária (Estratégia 2).*

Dia 09 de outubro de 2018

No encontro do dia 09 de outubro foi realizada a análise *a posteriori* da sequência didática de multiplicação e divisão de números decimais e a sua validação. Começamos o encontro relembrando as primeiras atividades que tinham como objetivo a percepção da regularidade da multiplicação e divisão por uma potência de base 10. Joana descreve que durante o momento de experimentação *"(deixei) que eles fizessem e me chamaram para mostrar. Ele falou: ah professora, tá dando mesmo resultado! Só tá mudando a vírgula. Uma hora vírgula está aqui a outra está ali".* Ao serem solicitados, os alunos escreveram o que estava acontecendo com as multiplicações e divisões, como a produção a seguir:

Figura 16- Protocolo de resolução de um estudante na atividade de multiplicação por uma potência de base 10

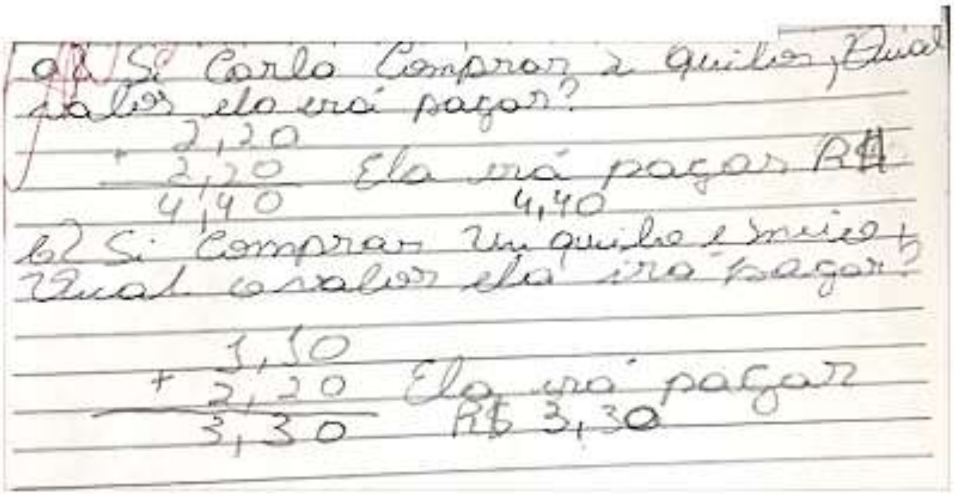


Fonte: dados da pesquisa

Ao analisarmos o protocolo do estudante, verificamos que após o uso da calculadora nos itens anteriores, ele descreve a regularidade que percebeu durante a resolução, indicando o que ocorre com a vírgula. Assim, o aluno descreve que na multiplicação a vírgula irá se movimentar da esquerda para direita e na divisão, no sentido contrário. Além disso, ele relaciona o número de algarismos (quantidade de 0 na potência de base 10) com a movimentação da vírgula. Semelhante a essa resolução, os demais alunos realizaram as atividades 2 e 3 que solicitavam a multiplicação e divisão sem o uso da calculadora a partir do que identificaram nessa atividade, sem a tentativa dos algoritmos dessas operações.

No decorrer da sequência Joana propôs aos estudantes a atividade 16, em que Karla iria ao mercado, com o intuito de iniciar o estudo com o algoritmo da multiplicação entre números decimais. Como previsto *a priori*, os estudantes mobilizaram para a resolução dos itens a (Karla comprou 2 Kg) e b (comprou 1,5 Kg) estratégias semelhantes à apresentada:

Figura 17 - Protocolo de resolução de um estudante na atividade de multiplicação de números decimais



Fonte: dados da pesquisa

Semelhante ao que descrevemos na análise *a priori* da atividade, no item a o estudante realizou a soma do valor do quilograma do tomate, duas vezes, tendo em vista que Karla iria comprar 2 Kg. Já no item b, como ela iria comprar 1,5 Kg, o estudante realiza a decomposição do preço por Kg, que era R$ 2,20, encontrando o valor referente à 0,5 Kg (R$ 1,10). Desse modo, ele realiza novamente a soma entre os dois valores, de maneira correta, encontrando quanto foi pago em 1,5 Kg de tomates. Ao considerarmos essa possível estratégia e o objetivo da atividade, propusemos um terceiro item no qual Karla compraria 1,7 Kg de tomate, com o intuito da mobilização da multiplicação. Destacamos o excerto a seguir extraído da discussão sobre o desenvolvimento dessa atividade com os alunos:

> R: Dessa primeira atividade, aqui alguma coisa te surpreendeu?
> J: Foi mais ou menos que a gente já tinha previsto. Eu achei que por ter dito 1 kg e meio, sem pensar nessa lógica de meio ser metade. Mas alguns não pensaram assim e

> não pensava que poderia sair pela multiplicação. Eu achei que um número maior de alunos fossem fazer por multiplicação, uma vez que eles já falaram que viram nos anos anteriores, quando a gente estava fazendo adição e subtração. Então eu pensei que não seria novidade, mas foi. E depois eu introduzi a ideia da multiplicação e divisão com os números decimais. E eu vou falar para você, eu posso dizer que eu não sei essa parte de divisão (o trabalho com a turma), tem muita coisa que no decorrer da sequência que eu não consegui fazer certinho, (não) consegui seguir nosso roteiro certinho. Teve dia que não teve aula, teve um dia que eles desceram para ver filme, então não estava programado. Então fechei com eles apenas ontem. O que eu pude perceber é que a ideia da multiplicação eles estão muito bem, eu trabalhei com eles daquele jeito do porquê eu tenho que contar quantidade de casas decimais. Como contar 1,2 x 1,4 que eu ando duas casas decimais, igual nós trabalhamos aqui que na verdade está multiplicando décimo com décimo e aí ficava centésimo. E eles pegaram legal a ideia da multiplicação. A da divisão também conseguiram, mas eu não entendo que a maioria dos alunos tem essa dificuldade na divisão seja com vírgula ou não. Na hora que eu falo em divisão parece que dá uma brecada. E aí eles ficam com isso na cabeça.

Como afirma Joana, os estudantes não mobilizaram a multiplicação conforme planejado. Consideramos a utilização da estratégia da multiplicação devido aos estudantes relatarem o estudo de números decimais no ano anterior, como quando realizaram a divisão com quociente decimal no problema dos irmãos que iriam comprar chocolate. Desse modo, elaboramos o item c da atividade com o objetivo que os alunos utilizassem essa estratégia, o que não ocorreu. Apesar disso, evidenciamos que Joana se mostrou satisfeita com os resultados obtidos ao longo da sequência didática, em especial na multiplicação, na qual utilizou elementos que foram estudados durante o estudo preliminar e a elaboração da sequência didática, como o trabalho com as propriedades que estão presentes nos algoritmos.

Além disso, presenciamos uma das características do trabalho docente quando ela relata a necessidade de considerar imprevistos durante o momento de experimentação. Por mais que tivéssemos planejado a sequência didática para a quantidade de aulas, há imprevistos que fogem do controle da professora, como aulas que não podem ser dadas, que a levam a fazer modificações na sequência didática, seja na aplicação de alguma atividade ou no tempo de resolução que os estudantes tiveram para resolver. Se pensarmos no desenvolvimento de uma Engenharia Didática, em uma perspectiva de pesquisa, alguns desses imprevistos podem ser contornados, como o acréscimo de outro encontro (PERRIN-GLORIAN, 2009). Entretanto, no caso da professora devido às restrições institucionais em que está inserida, o que lhe resta a fazer é adaptar as situações que haviam sido planejadas a partir dos conhecimentos que a professora constrói ao longo da sua formação e experiência.

Durante o momento da institucionalização das atividades, Joana mobilizou elementos da forma predicativa do conhecimento na resolução dos estudantes, justificando e apresentando propriedades das operações, diferentemente do que fazia quando *"eu só usava regra"*. Percebe-se um momento de reflexão da professora acerca de seus conhecimentos e escolhas didáticas, além de algumas mudanças. Ao trabalhar a divisão, a professora relata que fez uso da ideia do quadro valor lugar, em conjunto com a regularidade de multiplicação e divisão de números por uma potência de base 10: "*(usei a) ideia de equivalência: se multiplicar um número, tem que multiplicar o outro. Já tinham percebido a ideia de multiplicar por 10 acrescenta um 0, vezes 100 acrescenta-se dois 0"*.

No problema do costureiro que iria fazer as túnicas dos participantes de um coral, os estudantes realizaram a divisão da quantidade total de tecido pela quantidade usada em cada túnica. A professora observou que ao realizarem a divisão, após obter um valor do resto menor do que o divisor, os alunos continuaram a divisão considerando os valores decimais. Essa dificuldade está consonante ao que previmos *a priori*, sendo que a professora teve que questionar o que representava esse valor, questionando a existência até de participantes pela metade. Somente após esse momento de reflexão, os estudantes perceberam que para aquele problema, o quociente deveria ser um número natural pois representava a quantidade de pessoas que participavam do coral.

Como nos outros momentos de análise *a posteriori* e validação da sequência didática, a professora Joana reflete sobre as escolhas didáticas durante toda a sequência didática de números decimais que foram desenvolvidas com os estudantes, relatando:

> J: No geral comparando esse ano com os anos anteriores eu achei bem válido. O que é aquela ideia que você justifica o que você faz para o aluno, meio que perceber o que está acontecendo, não só apresenta um algoritmo. Então eu achei válido e achei válido inclusive para mim. Eu sabia dividir de jeito mecânico, era assim e pronto acabou. Anda duas casas, três casas, acrescenta zero. No geral achei válido primeiro para mim, o uso do material dourado para justificar e eu poder compreender, a ideia do quadro para um lugar eu achei perfeito aquilo. Porque vale para adição, subtração, ajuda na hora de multiplicar e dividir. O quadro valor lugar também (ajuda) até compreenderem a leitura do número. Porque ele ia 1,82, mas o que é isso? Então eles conseguiram vender a quantidade que vale esse número. Perceber a ideia da comparação de 0,5 e 0,05. Vale trabalhar desse jeito para eles perceberem e saberem o que está acontecendo.

No excerto apresentado, evidenciamos como o processo de formação modifica os conhecimentos de Joana ao longo dos encontros, oportunizando momentos de reflexão para a professora. É possível identificar que Joana relata elementos do conhecimento didático relacionado ao *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* quando privilegiava atividades que tinham um foco na aplicação de técnicas algorítmicas. Isso pode estar relacionado, como a professora relata, a aspectos de sua formação matemática, na qual mobilizava com predominância a forma operatória do conhecimento, em detrimento da predicativa.

Durante a formação proposta, até esse momento apresentado, evidenciamos que o meio constituído por nós e pela professora, com as situações demandadas de seu campo profissional, como a tarefa de ensinar números decimais aos seus alunos, oportunizaram situações que a desestabilizaram, levando-a a refletir sobre questões matemáticas e didáticas, conforme a professora relata: *"Então eu achei válido e achei válido inclusive para mim. Eu sabia dividir de jeito mecânico, era assim e pronto acabou".* No desenvolvimento do trabalho, percebemos que Joana passa a dar importância à aspectos predicativos dos conhecimentos, ressaltando as propriedades que estavam envolvidas, modificando suas escolhas didáticas, como no uso do quadro valor lugar com os estudantes.

Entretanto, considerando que um dos objetivos específicos que temos na nossa investigação é *analisar limites e potencialidades da utilização das etapas da Engenharia Didática como ação estruturante em um processo de formação continuada de professores de Matemática,* é necessário destacar uma visão da professora acerca do processo que está percorrendo, relacionando sua realidade profissional:

> J: Talvez um ponto negativo, mas talvez não seja da sequência em si, talvez seja mais do que a correria na sala de aula, é correr atrás do material, a escola não disponibilizar. Tive que pedir para minhas colegas que são da parte dos recursos porque a minha escola em si tem dois materiais dourados apenas. A professora que cuida do aluno autista que conseguiu mais dois para mim, para poder trabalhar tranquilo e foi a atividade que montou as Ilhas. Mas se eu não tivesse essa disponibilidade, eu tenho que pensar em uma maneira diferente e talvez não teria ficado tão legal quanto essa atividade ficou.
> R: É talvez teria que ter mostrado só para eles, se tivesse apenas 1 material dourado.
> J: Isso é. Como eles não teriam oportunidade de manipular? E a questão também do tempo deu uma atrasada no conteúdo que estava no referencial. Mas não é por culpa da sequência, que ela estava fechadinha pois determinamos o começo, meio e fim. O que interferiu foram esses acontecimentos que são imprevistos. […] Mas eu achei muito positivo, (vou continuar) trabalhando futuramente com o 6º ano, (vou) usar essas ideias. Conversei com a professora do 1º ao 5º, elas querem me chamar para ir aplicar na sala dela do 4º e 5º ano, que elas acharam interessante.
> R:E o que você mudaria se você pudesse? Qual atividade você sentiu falta o que tem que trabalhar mais?
> J: Eu trabalharia mais a parte da divisão. A adição e subtração eu talvez até diminuir um pouquinho se eu visse que os alunos estão bem, e focava mais na divisão. Porque na minha cabeça eu ainda tenho aquela questão de treinar. […] Sim, estão contribuindo sim (o processo de formação). O tanto que tá contribuindo por exemplo: […] no conteúdo do 8º e do 7º ano quando eu trabalho sistemas lineares, eu já estou pegando a ideia que a gente discute. Apesar que do 7º ano é uma outra abordagem que não vai tão a fundo, mas a maneira que eu comecei o conteúdo foi a mesma. Seja pensar no problema, de tentar propor para poder começar o conteúdo. Tá influenciando no meu jeito de agir, em possibilidades de trabalho.

Joana relata que apesar de estarmos pensando nas atividades já considerando o seu contexto de trabalho, há eventos não esperados que prejudicam o desenvolvimento. Assim, a partir da fala da professora podemos destacar a dificuldade encontrada com imprevistos que não podem ser remediados, como aulas perdidas e a possibilidade de falta de materiais didáticos, como no caso do material dourado quase impossibilitou a realização da atividade. Além disso, pensando nas questões institucionais que a docente está inserida, devido à realização da sequência elaborada, em conjunto com os eventos relatados, ela indica que está atrasada com o referencial curricular que deve ser cumprido, de maneira que terá que se readequar nos próximos conteúdos.

Apesar disso, na fala de Joana também é possível identificar algumas potencialidades no processo formativo, como as escolhas realizadas com outras turmas. No caso que ela descreve, iniciamos nos dois encontros anteriores (dias 25 de setembro e 02 de outubro) o trabalho com sistemas de equações do 1º grau para a turma do 8º ano. Assim, ela mobiliza alguns elementos já discutidos com a sua turma do 7º, após o estudo de equações do 1º grau.

Além disso, evidenciamos a mobilização de alguns elementos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), quando ela explicita a postura de pensar nos problemas, o que pode acontecer, maneiras de trabalhar o conteúdo, como a proposição de situações-problema e atividades exploratórias, deixando que os estudantes refletissem e desenvolvessem estratégias de resolução relacionadas aos *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias)* e *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação).* Por fim, destacamos que isso foi possível devido à postura da professora Joana, que se mostra aberta às discussões, explicitando suas dificuldades e buscando maneiras de superá-las. Essa característica da professora pode ser observada nas situações de interação tanto conosco, quanto com colegas de trabalho, como quando relata o compartilhamento das experiências vivenciadas com as professoras do 1º ao 5º ano que ensinam matemática.

.

4.2.3 Sistemas de equações do 1º grau

Dia 25 de setembro de 2018

No encontro do dia 25 de setembro começamos o estudo preliminar de sistemas de equações do 1º grau, escolhido por Joana para trabalhar na turma do 8º ano. Como nos encontros apresentados, iniciamos perguntando a professora como foi o seu trabalho com o tema nos anos anteriores. Joana relata que iniciou o estudo do tema por meio de situações que envolvam equações com 2 incógnitas, com o objetivo de os alunos compreenderem a diferença com o tema de equações do 1 º grau. Em um segundo momento, ela apresentava as técnicas de adição e substituição para a resolução dos sistemas, como quando relata: *"Então a soma de dois números dá 10, aí eles vão falando as possibilidades. [...] Por equação não dá para resolver. Então coloco essas atividades para eles irem pensando. Eu apresento para eles o método da adição e da substituição."*.

A partir do relato da docente, verificamos a sua preocupação no trabalho de técnicas de resolução com seus alunos, relacionada com o *Conhecimento em ação didático 1.1 (*$C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* privilegiando atividades de aplicação dessas técnicas como quando explicita que trabalha *"bastante primeiro com eles o método da adição".* Percebe-se novamente que apesar de propor inicialmente uma atividade exploratória de uma equação com duas incógnitas, a professora busca no desenvolvimento do estudo de sistemas de equações do 1º grau o trabalho com as técnicas de resolução, como a ênfase dada ao método da adição. Além disso, evidenciamos vestígios do conhecimento didático da professora relacionado ao *Conhecimento em ação didático 2.1 (*$C_{d2.1}$ *– os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor),* ao destacar que durante a elaboração das atividades que seriam propostas *"Geralmente eu já coloco uma equação fácil, com um termo positivo e um negativo para poder cancelar"*. No caso do *conhecimento em ação didático 2.1*, Joana busca facilitar a resolução dos estudantes no momento da elaboração das atividades, propondo situações que eles identifiquem e apliquem a técnica sem maiores dificuldades, condizente com a sua fala: "*O (método) da adição a dificuldade às vezes para fazer o cancelamento acontece porque não tá prontinho para cancelar".*

Durante o estudo preliminar, identificamos algumas possíveis dificuldades dos estudantes no estudo de sistemas de equações do 1º grau, como a modelagem das situações em linguagem materna para a linguagem matemática (LOCHHEAD; MESTRE, 1995 *apud*

ROCHA, 2010). Outra característica estudada no momento preliminar é a importância de os estudantes conseguirem verificar a validade de suas soluções para o sistema proposto, conforme indica nos Parâmetros Curriculares Nacional (1998). Nesse sentido, a professora Joana indica a realização desse procedimento com seus estudantes:

> J: Eu mostro para eles como fazer para verificar. Nos anos anteriores tanto no 7º quanto no 8º não cobrava essa verificação. Esse ano quando eu comecei a trabalhar com o 7º como era uma turma que me questiona muito a respeito disso e eram muitos alunos, então ensinei eles a verificarem e comecei a cobrar. Verificou que deu certo, não precisa vir aqui (na mesa do professor). Se não deu certo você (aluno) vem que nós vamos ver o que aconteceu. Então eles mesmo já criaram esse costume. Até na prova eles resolvem e escrevem do ladinho verificando. Eu vi que deu certo porque me aliviou porque ficar atendendo todos eu não estava dando conta e para eles mesmo que poderiam verificar se estava correto.

Percebe-se que a preocupação da professora com a aprendizagem de seus estudantes a leva a realizar escolhas didáticas que podem contribuir com o gerenciamento da aula e suas ações didáticas, como o caso em questão. Ao encontro do proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), Joana trabalha com seus estudantes a verificação da solução de um sistema de equações, a partir da substituição nas duas equações da solução encontrada. Ressaltamos que essa escolha da professora está relacionada a uma característica inerente ao seu campo profissional, onde a turma que ela relata contém uma quantidade grande de alunos, inviabilizando algumas ações em sala de aula. Desse modo, percebemos que devido à forma de conversação do ambiente que está inserida, um dos componentes presentes no campo profissional, a professora realiza a escolha de trabalhar a verificação das soluções com os estudantes, criando possibilidade de dar atenção a alguns alunos que apresentavam mais dificuldades (VINATIER, 2007; PASTRÉ; MAYEN; VERGNAUD, 2019).

Em relação às técnicas de resolução dos sistemas de equações do 1º grau, após abordarmos as técnicas de adição e substituição[48], que Joana relata trabalhar com os seus alunos, começamos o estudo de outros técnicas de resolução, como o método da comparação:

> R: Fora esses dois (métodos da adição e substituição) você conhece algum outro?
> J: Do escalonamento.
> R: E algum outro?
> J: Não que eu me lembre.
> R: Aqui (CHIARI, 2011) trouxe outras técnicas utilizadas no ensino fundamental.
> J: Esse exemplo aqui que ele traz da adição poderia ser feito pela substituição, porque já tá prontinho para substituir.
> R: (Técnica da) Comparação. Aquele método do chinês que isola o x de uma equação e isola o x da outra. Então se x = isso e outro x = isso. Então eu posso comparar.

[48] Exemplificamos o uso dessas técnicas durante a análise a priori de uma das atividades propostas.

No momento de estudo preliminar, Joana reflete sobre o método de resolução da comparação, na qual tem como objetivo isolar a mesma incógnita em cada equação e realizar a comparação das equações. Assim, dado o sistema de equações $\begin{cases} 2x + y = 9 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$, vamos isolar a incógnita y nas duas equações:

$$\begin{cases} y = 9 - 2x \\ y = 3x - 11 \end{cases}$$

Como temos duas igualdades com a incógnita y, podemos compará-las por meio da igualdade, encontrando o valor da incógnita x:

$$9 - 2x = 3x - 11$$

$$3x + 2x = 9 + 11$$

$$5x = 20$$

$$x = 4$$

Após encontrar o valor da incógnita x, substituímos o seu valor em uma das equações do sistema dado para encontrar o valor de y:

$$2.(4) + y = 9$$

$$8 + y = 9$$

$$y = 1$$

Ao refletirmos sobre outros métodos de resolução do sistema de equações de 1º grau, intencionamos pensar em possibilidades para o ensino do tema em sala de aula, de modo que a professora sinaliza a possibilidade do uso do método da comparação com seus alunos: *"Ah legal! Para os pequenininhos como exemplo é legal".* Na continuidade do estudo das técnicas de resolução, abordamos a técnica de resolução geométrica, quando a professora Joana relata a inserção dessa técnica no currículo de Matemática do 8º ano:

> J: Do ano passado para cá que no currículo passou a apresentar a ideia de plano cartesiano. De verdade, nunca resolvi com plano cartesiano, nunca parei nem para ver como que é. Eu não sei nem como que faria essa ideia do plano cartesiano. E no livro deles também não traz, então não parei para fazer com eles. Só da adição e substituição. […] Então, mas é isso que eu pensei também porque se fosse no 9º ano, beleza, porque eles veem o plano cartesiano antes de trabalhar com função. Agora no 8º ano, eles não veem nada de plano cartesiano. Então primeiro de tudo, você terá que apresentar o que é o plano cartesiano. Porque a ideia de par ordenado você fala quando vai resolver o sistema, mas daquela forma bem sucinta. Você não chega a mencionar um plano cartesiano. Mas eu acho que antes de resolver você tem que falar o que era o plano cartesiano para os alunos.

Na discussão sobre técnicas de resolução dos sistemas lineares, verificamos que Joana relata não conhecer o método geométrico, quando destaca nunca ter resolvido com o plano cartesiano. Nesse sentido, refletimos como estão relacionadas as escolhas de Joana com seus conhecimentos matemáticos pois, no caso do estudo de sistemas de equações do 1º grau, mesmo com a orientação do estudo do método geométrico na Base Nacional Comum Curricular (2018) e no referencial curricular da SED/MS, a professora privilegia o uso dos métodos da adição e substituição, técnicas que ela não tem dificuldades na utilização. Além disso, ao analisarmos o excerto apresentado, a professora indica alguns impeditivos do trabalho do método geométrico em sala de aula, relacionadas à organização curricular que deve seguir, como não ter trabalhado o plano cartesiano e a ideia de função com seus alunos.

Nesse contexto, com o objetivo de estudar a resolução dos sistemas de equações do 1º grau pelo método geométrico, propusemos a resolução do seguinte sistema: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ 3x - y = 7 \end{cases}$. Após apresentarmos o sistema de equações, iniciamos a discussão com Joana sobre a situação:

> J: Eu já ia pela adição.
> R: Por quê?
> J: Oposto, vai cancelar.
> R: E sem ser o método da adição e da substituição?
> J: Aí você me apertou. Eu ia pelo aquele da comparação, deixava o y só. Eu gostei daquele.
> R: Geometricamente?
> J: Não sei. Não sei nem começar (respondeu rapidamente).
> R: Tudo bem. Vamos pensar.
> J: Mas eu não sei nem começar, eu tô falando para você.
> R: Tudo bem. Vamos pensar juntos então.
> J: Eu nunca ouvi falar. Não, eu já ouvi falar, mas eu não sei fazer nada, não me lembro.

É possível perceber que diante da situação proposta, Joana apresenta conhecimentos que lhe permitam resolver a situação, como quando indica a utilização do método da adição devido às características do sistema apresentado, ao verificar que as incógnitas y têm os coeficientes com o mesmo valor absoluto e sinais opostos nas duas equações. Além disso, ela indica a possibilidade de uso do método da comparação, que havíamos acabado de trabalhar para a resolução das atividades. Ao ser questionada do método geométrico, Joana novamente ressalta a dificuldade na realização desse método, quando diz: “*Não sei. Não sei nem começar”.* Diante desse cenário, julgamos que nesse momento havia a necessidade de alguns questionamentos à Joana, tendo em vista que na situação que ela afirmava que não sabia nem começar a resolver a atividade proposta. Assim, iniciamos o debate da situação a partir de algumas questões à professora:

R: Então agora vamos pensar um pouco no método geométrico. O que mais a gente sabe dessa equação? Se eu for pensar separadamente nessas duas equações. Essas equações podem representar o quê?
J: Na geometria?
R: Geometricamente o que significa 2x + y = 10?
J: Não sei...
R: Como objeto da geometria, quem que é isso daqui?
J: Função?
R: Como eu posso escrever isso daqui como função?
J: y = 10 - 2x.
R: A outra? y = 3x - 7. Se fosse usar o método da comparação estava fácil porque o y está isolado nas duas. O que eu posso trabalhar com essas funções?
J: Você diz que deve achar o ponto que vai ser no y e no x?
R: Não entendi como assim?
J: Achar mesmo. Quando for 0 para x, 0 para y? (resolve) Se o x for 0 o y vai ser 10. Se o x for 5 então y vale 0.
(resolve para as duas)
R: Você fez isso. O que mais que você pode fazer? Qual a função?
J: Eu posso atribuir valor, jogando os valores.
R: Essa ideia de atribuir valores é o melhor jeito que eu tenho para representar uma função nessa situação?
J: Eu prefiro assim (encontrar a raiz da função).
R: Como consigo ter uma ideia mais geral da função? De que forma ela pode aparecer?
J: Representar uma função de outro jeito? F(x)?
R: Tudo bem, mas tem outro jeito que eu posso ir para sua função?
J: Não sei. Eu não vejo.

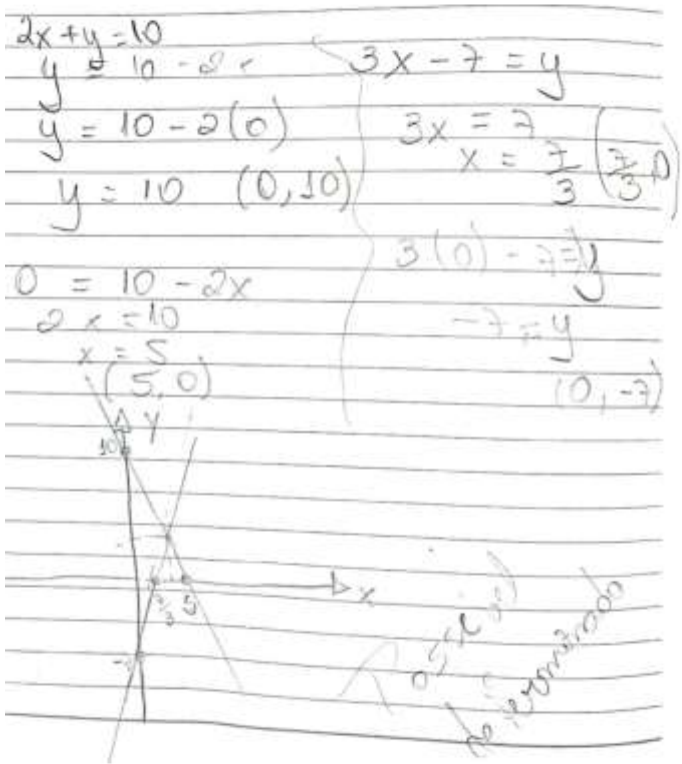
Iniciamos a discussão da atividade perguntando à professora sobre a possibilidade de trabalhar com as equações de maneira separadas, relacionando com objetos da Matemática do campo geométrico. Apesar de em um primeiro momento Joana não relacionar que $2x + y = 10$ e $3x - y = 7$ poderiam ser representadas como funções, onde as letras x e y assumiriam a ideia de variável, após alguns questionamentos ela considera essa situação. Ressaltamos que apesar de relacionar com a ideia de função, Joana mobiliza esses objetos matemáticos mobilizando um registro algébrico, como quando reescreve $y = 10 - 2x$, e passa a atribuir valores para x e y.

Ressaltamos que Joana mobiliza conhecimentos relacionados à ideia de função, como encontrar as raízes da função e a ideia de relação entre as variáveis. Apesar disso, ela realiza essas ações de modo empírico no que diz respeito a resolução geométrica do sistema de equações, pois se percebe que a professora não elabora uma estratégia em que esses procedimentos seriam necessários. Na continuidade dessa situação, perguntamos à Joana por qual motivo estava realizando esses procedimentos, sendo necessário relacionar com situações de suas aulas, do seguinte modo:

R: E você faz na sala? Para que que você faz isso de atribuir esses valores?
J: Para o gráfico.
R: Não é uma representação da função?
J: Uhum, mas antes de eu fazer o gráfico eu tenho que fazer isso (encontrar os pontos da função).

R: Aqui você tem dois pontos da reta e o gráfico que tem um ganho porque você tem uma coisa geral.
(depois de desenhar)
R: Então essa reta é de equação da 1 e está é a da 2. O que é solução do sistema linear?
J: É o que satisfaz as duas equações. Então vai ser esse ponto aqui né. […] Eu não tinha ideia que era assim não. E tem alguns exercícios que trata problemas de função que só traz o gráfico e pergunta do ponto que satisfaz as duas, por isso que eu lembrei que a resposta seria esse ponto em comum. Por que não traz no 9º ano, né? É assim então. Mas então Renan, fala para mim tem base?

Figura 18 - Resolução pelo método geométrico da professora Joana



Fonte: dados da pesquisa

Apresentamos esse evento por se tratar de um processo que Joana percorreu para a resolução do sistema de equações pelo método geométrico, que ela relatava que não sabia por onde começar. Após perceber a representação gráfica das funções, a professora realiza a construção dos gráficos, como apresentado no protocolo anterior, a partir dos pontos que tinha encontrado. Ao se deparar com os gráficos, ela considera de maneira correta que a solução do sistema seria o ponto de interseção das duas retas, validando sua afirmação a partir da ideia da solução do sistema de equações, no qual *"É o que satisfaz as duas equações".*

Percebe-se as características do processo formativo que propusemos ao analisar esse evento, pois consideramos que o momento de estudo preliminar do tema possibilitou Joana refletir sobre um novo método de resolução do sistema de equações. Cabe ressaltar que a professora apresentava alguns conhecimentos operatórios para a resolução da situação proposta, como quando indica a possibilidade do uso do método da adição para a resolução do sistema linear. Entretanto, ao nos depararmos com a indicação do estudo do método geométrico, indicados na Base Nacional Comum Curricular (2018) e no referencial curricular da SED/MS, percebe-se que Joana afirma não conhecer essa técnica de resolução. Por fim, ressaltamos que devido ao tempo que destinamos para o encontro não foi possível a realização de uma discussão mais aprofundada acerca das diferentes representações das funções e o ganho de cada representação.

Ao continuarmos o estudo preliminar do tema, nos deparamos com uma possível dificuldade dos estudantes em relação a solução de um sistema de equações do 1º grau. Kieran (1995 apud ROCHA, 2010) ressalta que os alunos podem ter dificuldades em interpretar que a expressão y = 3x – 4 possa ser a solução de um sistema linear. Essa dificuldade pode estar associada às escolhas didáticas que foram trabalhadas com esses estudantes, tendo em vista a quantidade de situações propostas em que a solução sempre tem valores numéricos. Após verificarmos essa possível dificuldade nos estudantes, iniciamos o trabalho com a classificação dos sistemas lineares, já que quando a solução de um sistema é y = 3x – 4 ele é classificado como um sistema possível indeterminado. Ao indagar a professora sobre as possíveis classificações, Joana apresentou a seguinte dificuldade:

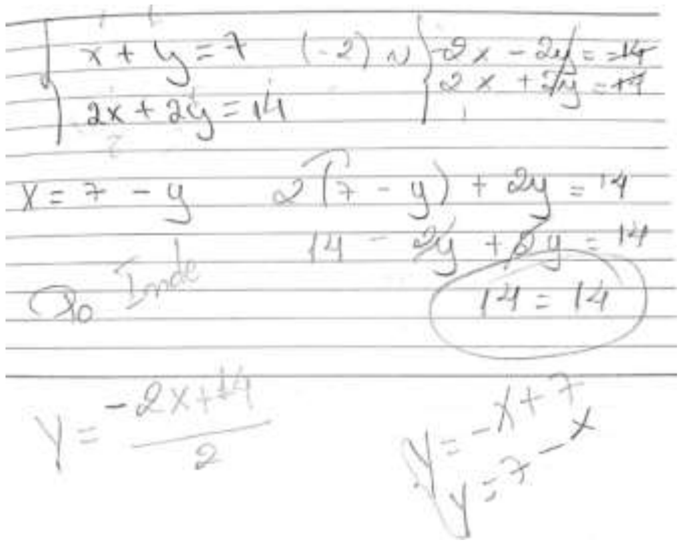
> R: Se eu for pensar no sistema ele tem algumas soluções. Possível determinado, possível indeterminado e impossível.
> J: Eu não me lembro.
> R: Se eu fosse pensar na resolução geométrica o que é cada tipo de sistema?
> J: Então, mas eu não me lembro o que é cada tipo de sistema. O impossível é que não tem uma solução que satisfaça.
> R: E o que significa isso na resolução geométrica?
> J: Não ia ter ponto em comum.
> R: E o que significa isso?
> J: Então, que as retas não iriam se interceptar.

Ao ser questionada sobre as soluções do sistema de equações, Joana relata que não se lembra desse tópico. Apesar disso, ao ser perguntada sobre o sistema impossível, ela relaciona corretamente a ideia de solução do sistema linear, destacando que nesse caso não haveria nenhuma solução que satisfaça as duas equações, de modo que na representação geométrica as retas não teriam pontos em comum. Entretanto, quando indagamos sobre o sistema possível indeterminado, houve o seguinte diálogo que apresentamos:

> R: E o possível indeterminado?
> J: E o que é isso?
> R: Aquele que fica x + 2y = tanto.
> J: Em função de outra letra.

R: Por exemplo esse sistema aqui $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + 2y = 14 \end{cases}$.
J: Resolver por função?
R: Pode ser. Tenta fazer pelo método algébrico esse aí.
J: Ai meu Deus.
(silêncio enquanto resolve)
R: Vai fazer por substituição, achei que iria fazer por adição.
J: É por substituição. Ixi vai sumir, 14 = 14. Não vai dar.
R: Essa resolução do sistema 2x2 pode aparecer para os meninos.
J: Então vou ter que fazer pelo outro método, o da adição.
R: Faz pelo outro. Vamos ver o que que dá.
J: Se eu multiplicar por -2... […] Ixi, sumiu tudo! Então não sei Renan qual é a resposta.
R: E aí, o sistema é 2x2. Dá para trabalhar com os alunos.
J: De um jeito não deu. Do outro também não.

Figura 19 - Resolução da professora Joana para o sistema possível indeterminado



Fonte: dados da pesquisa

É possível identificar nesse evento uma dificuldade de Joana diante de uma situação que envolvia um sistema de equação possível indeterminado. Analisando a situação e pautado no estudo preliminar que realizamos, consideramos que Joana apresenta vestígios de um conhecimento matemático que modelamos como *Teorema em ação – ao resolver um sistema de equações sua solução é um único valor numérico.* É importante destacar que esse conhecimento matemático apresenta um domínio de validade, pois nos sistemas possíveis determinados ele é verdadeiro, mas no sistema possível indeterminado e sistema impossível é falso.

Acreditamos que Joana mobilizou vestígios desse teorema em ação durante a resolução da atividade pois, ao resolver o sistema pelo método da substituição, quando se depara com a igualdade 14 = 14, ela considera que a sua resolução está incorreta. Assim, percebemos que Joana não pondera sobre a possibilidade de seus procedimentos estarem corretos, refletindo sobre a solução do sistema linear diante daquela situação. Como uma maneira de validar essa ideia (que a sua resolução estava incorreta), ela utiliza o método da adição na resolução do sistema linear, obtendo outra igualdade 0=0. Percebemos que essa situação propiciou em Joana um momento de desestabilização sobre a solução de um sistema linear, como quando relata: "*Ixi sumiu tudo. Então não sei Renan qual é a resposta. [...] De um jeito não deu. Do outro também não*". Nesse cenário, passamos a confrontar Joana sobre o que poderia ter ocasionado essa situação, da seguinte maneira:

> R: E o que significa isso?
> J: Possível indeterminado. Por que possível? É impossível.
> R: Olha a diferença desse $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 12 \end{cases}$. Tenta esse. Para a gente poder entender, o que que é cada tipo de sistema. E o que é um sistema linear.
> J: É um conjunto de equações...
> R: Mas o que isso quer dizer? Rsrsrs.
> J: Mas é Renan a definição tá lá escrito.
> R: Não, você tem razão. A definição é isso. O que é a solução?
> J: Aí ó de novo deu errado 10 = 12. Não existe isso. Esse primeiro seria possível indeterminado?
> R: Quais são as classificações desses (sistemas)?
> J: Esse primeiro é possível indeterminado. Mas por que é possível? E o segundo é impossível porque a resposta já tá na cara. Porque é impossível acontecer um trem desse.
> R: Tudo bem Joana, mas o que significa ser possível determinado, possível indeterminado e impossível?
> J: Impossível é que não existe nenhum número que satisfaça as duas equações ao mesmo tempo.
> R: E o que significa ser um problema possível indeterminado?
> J: Isso que não entra na minha cabeça. Você consegue resolver, porque a palavra possível. Dá para resolver, mas não dá para você determinar o valor? É isso?
> R: Depende.
> J: Pelas palavras.
> R: 14 = 14? 0 = 0?
> J: Sim. Tá certo, nenhum absurdo.
> R: O impossível você entende, né?
> J: No sistema você tem que encontrar o valor que satisfaça todas as equações simultaneamente. No impossível não tem nenhum número que resolva ao mesmo tempo essas duas equações. Já nessa aqui eu não vejo quem é esse número por conta do indeterminado?
> R: Depende.
> J: Não pode ser depende Renan. Na matemática não tem depende, ou é ou não é.
> R: Você consegue achar uma solução desse sistema para mim (no sistema possível indeterminado)?
> J: Aqui não.
> R: Consegue.
> J: Que número menino, se tivesse tinha aparecido aqui nas respostas.
> R: Fala para mim o número onde que x + y = 7.
> J: 4 e 3; 1 e 6.
> R: 4 e 3. Esse aqui é solução do sistema?
> J: (faz a conta) Dá certo. E por que não apareceu aqui (na resolução pelos métodos da adição e substituição)? Não gostei.
> R: É possível indeterminado.
> J: Só o 4 e o 3?
> R:Só eles? Acho engraçado quando você fala e fica com essa cara brava.

> J: 1 e o 6 dá também.
> R: Nas duas (equações)?
> J: Dá. Olha o tanto de número já. Por que que não deu na solução quando eu fiz a conta?
> R: O que é possível indeterminado?
> J: Você não consegue fazer a conta, mas você pode chutar os números?
> R: Não, rsrsrs. Fala para mim outras respostas.
> J: 10 e 4. Aí não dá.
> R: Mas 10 e o 4 não dá em nenhuma das duas.
> J: Ah é, tem que dar em uma! 5 e o 2. Deu também!
> R: 10 e o -3?
> J: Porque tem várias então, seria isso? É possível e indeterminado porque você não consegue falar uma única solução?
> R: Isso. O que é o sistema possível determinado?
> J: Uma única solução.
> R: Isso você consegue determinar a solução, ele é possível e você consegue determinar qual é a solução dele. E o que é um sistema possível indeterminado?
> J: Você consegue resolver, mas você não consegue falar o único valor que seja (a solução do sistema).
> R: Isso.
> J: E como você conseguiu pensar nesses exemplos aqui que dariam essas coisas?
> R: Vamos falar sobre isso geometricamente. Essa aqui é uma reta. E essa outra aqui?
> J: Não é uma reta.?
> R: É. Como posso escrever essa função?
> J: (isola o y da segunda). São opostas de valores? Ah, são iguais!
> R: São iguais. E se eu for desenhar um gráfico como que elas vão ficar?
> J: Uma em cima da outra.
> R: E quantos pontos que elas vão ter em comum.
> J: Todos os pontos são comuns.
> R: É o sistema possível indeterminado. E o impossível? Elas não vão se encontrar, então não vou ter ponto em comum. São paralelas. Aí você perguntou como que eu sabia? Na hora que eu peguei a primeira (equação) e multipliquei por um número de escalar (no sistema possível indeterminado). No do sistema impossível também fiz isso, só que para poder não ficar igual eu mudei esse último valor (termo independente), porque a inclinação continua a mesma, mas ela passa em outra posição.

Ao analisarmos o excerto supracitado, evidenciamos vestígios do *Teorema em ação - ao resolver um sistema de equações sua solução é um único valor numérico* por Joana diante da situação apresentada, tendo em vista que ela novamente considera necessário a obtenção de soluções com valores numéricos nos métodos que mobilizou. Nesse sentido, destacamos o momento no qual apresentamos um segundo sistema linear, classificado como impossível, a professora obtém a igualdade 10 = 12, expressando: "*Aí ó de novo deu errado 10 = 12. Não existe isso*". Além disso, durante algumas discussões sobre as soluções dos sistemas apresentados, em que Joana encontra a solução de x = 3 e y = 4 como solução do sistema possível indeterminado, a professora novamente ressalta: *"Que número menino, se tivesse, tinha aparecido aqui nas respostas [...] Dá certo. E por que não apareceu aqui (na resolução pelos métodos da adição e substituição)? Não gostei*".

No que diz respeito a situação proposta à Joana, percebe-se a potencialidade formativa durante o momento de análise preliminar de sistemas de equações. Durante esse momento de estudo a professora mobiliza o *Teorema em ação - ao resolver um sistema de equações sua solução é um único valor numérico* fora de seu domínio de validade, diante de um sistema de equações possível indeterminado e um sistema de equação impossível. Nesse contexto, pautada na perspectiva de aprendizagem que acreditamos, realizamos algumas questões à professora, de modo que ela pudesse refletir sobre a situação e a possibilidade de haver soluções diferentes das esperadas nos sistemas de equações propostos. Ao longo da discussão, Joana mobiliza diferentes estratégias de resolução, como os métodos da adição e substituição, algumas de ações empíricas como a tentativa numérica para encontrar a solução do sistema; até verificar a possibilidade de ter várias soluções em um sistema possível indeterminado. Assim, consideramos que processo que Joana percorreu a permitiu refletir sobre a situação, desestabilizando o teorema em ação matemático que apresentava, conseguindo conjecturar a classificação de cada tipo de sistema de equações.

Finalizamos o encontro de análise preliminar de sistemas de equações indagando Joana sobre possibilidades para o trabalho com os estudantes, como a classificação dos sistemas e a mobilização do método geométrico, que ela não trabalhou em anos anteriores:

> J: Não. E nem cobra no referencial. Lá só fala técnicas de resolução.
> R. Tudo bem, mas você pode trabalhar isso daqui não pode (classificação do sistema)?
> J: Não. Não tá escrito, não trabalho, rsrs.
> R: Rsrs, mas você tá trabalhando técnicas, não está? Você pode trabalhar a técnica colocando um problema desse tipo?
> J: Eu vou deixar o aluno doido trabalhando as técnicas.
> […]
> R: Então, esse tipo de coisa você não consegue trabalhar no ensino fundamental?
> J: É. Até conseguiria, mas me daria muita dor de cabeça.
> R: Por quê?
> J: Imagina é a primeira vez que eles estariam vendo sistemas. Você já tem que falar a ideia do sistema que não é tão trivial eles perceberem. Perceber uma equação já tem a dificuldade e imagina mais do que uma. Depois resolver. Tem mais do que um método que você precisa apresentar para os alunos. E ainda depois isso daqui (classificação do sistema).

Notamos nesse evento a influência do currículo diante das escolhas da professora para o trabalho com seus alunos. No caso do conteúdo de sistemas de equações do 1º grau, Joana se mostra preocupada com a resolução utilizando a ideia geométrica, pois esse método passou a fazer parte do que deveria ser trabalhado com os estudantes no 8º ano. Entretanto, como relatado durante o encontro, a professora acredita que devido à necessidade de utilizar ideias não vistas no 8º ano, como o plano cartesiano e função, o trabalho com o método geométrico ficaria inviável.

No que diz respeito a classificação, percebemos que a professora não trabalha com seus alunos devido à ausência explícita desse tópico no referencial curricular. Além disso, inferimos também que essa escolha de não trabalhar pode estar relacionada com a dificuldade que Joana apresentou sobre as classificações, pois considerando suas dificuldades a professora acredita que o trabalho com esse tópico em sala de aula poderia ser algo prejudicial para a aprendizagem dos seus estudantes, como quando explicita que vai *"deixar o aluno doido trabalhando as técnicas"*.

Dia 02 de outubro de 2018

Para o encontro do dia 02 de outubro, planejávamos a realização da análise *a posteriori* e validação da sequência didática de multiplicação e divisão de números decimais que tínhamos elaborado no encontro do dia 18 de setembro. Entretanto, no início do encontro a professora Joana relata uma situação que deveríamos considerar:

> J: Renan, na semana da eleição[49] eu não vou poder dar aula na segunda-feira porque hoje a justiça eleitoral pediu a escola. Então nós vamos perder uma aula já. Na verdade, eu vou perder na segunda e a sexta (anterior a eleição) que vai ficar fechada a escola. Eu fiquei brava. Na outra semana é feriado, já perco quinta, sexta e segunda (11 a 15 de outubro). Então terá turma que eu vou entrar nessa sexta de manhã e aí eu só vou ver eles daqui 15 dias.
> R: Esse 8º ano que a gente está fazendo as atividades?
> J: Sim. Sexta agora a tarde já não tem aula por causa da eleição.
> R: Então vamos ter que repensar tudo.
> J: Isso, eu tenho sete aulas só para gente fazer essa sequência. E depois a culpa é do professor. […] Pois é! Foge do professor em sala de aula. Vem as coisas de cima pedindo para fazer aula programada, que não adianta porque se o aluno fizer beleza, se não fizer…
> R: Joana, hoje a gente tinha falado que ia fazer a parte de posteriores decimais, mas você vai ter toda essa pausa e esses dias que a gente não vai poder trabalhar. O que você acha de hoje fazer a sequência (de sistemas de equações)? Porque você vai ter que trabalhar as atividades aqui (nesse período de aulas de aulas e adiamentos), senão não dá tempo.

Observamos no excerto uma característica que ocorre no contexto profissional da professora, no que diz respeito as aulas que estavam planejadas e impeditivos que fogem do controle da docente. Nesse caso, percebemos que Joana considerava uma quantidade de aulas no seu planejamento para a elaboração da sequência didática, mas foi avisada pela direção da escola que não poderia desenvolver as aulas na sexta e segunda-feira devido ao 1º turno das eleições presidenciais. Cabe ressaltar esse fato como uma restrição na qual Joana deve enfrentar no seu campo profissional pois devido ao calendário escolar, data da avaliação escolar,

[49] Refere-se a eleição presidenciais brasileira, cujo 1º turno ocorreu no dia 07 de outubro de 2018. Por conta da estrutura física, a escola que a professora trabalha é um polo de votação no município de Coxim.

cronograma curricular que deve seguir, a professora não consegue desenvolver as aulas planejadas em uma data posterior.

Em conformidade com o que salienta Perrin-Glorian (2009), no caso da nossa investigação que está inserida no campo profissional da professora, esse evento representa também uma restrição que tivemos que considerar quando propusemos algumas modificações no cronograma previsto. Diante desse cenário, iniciamos neste encontro o momento de elaboração e análise *a priori* da sequência didática de sistemas de equações do 1º grau, deixando o tínhamos previsto para o próximo encontro. Começamos o trabalho refletindo sobre a proposta apresentada por dois livros didáticos do 8º ano (BIANCHINI, 2015; DANTE, 2015), considerando a organização e as atividades proposta neles, do seguinte modo:

> R: O que você achou da organização didática dos livros?
> J: Eu acho que os dois livros mostram a ideia do sistema por meio de problema. Gosto mais da ideia do (livro do) Bianchini (2015) que é mais prático para montar (o sistema). Já o livro do Dante (2015) é mais abstrato, (faz) eles pensarem no começo. Posso utilizar para modelar aquele problema inicial[50], depois pode trabalhar algum desses aqui do (livro do) Dante. Depois apresentar o que é o sistema e por fim os exercícios, já mostrando os dois e resolvendo os dois métodos.
> R: Você vai falar da classificação dos sistemas?
> J: Olha se der tempo eu acho que dá para falar.

Identificamos vestígios do conhecimento didático relacionado ao *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias* ao analisarmos a proposta que a professora decide trabalhar com seus alunos, tendo em vista que para a elaboração da sequência didática ela privilegia a organização proposta na segunda obra (DANTE; 2015) pois *"(faz) eles pensarem no começo"*. Assim, a professora decide iniciar a sequência didática com uma atividade, apresentada a seguir, que trabalhamos no estudo preliminar quando explicita: "*eu achei interessante (utilizar algumas atividades exploratórias). É (uma) ideia que eu gostaria de usar com eles para começar"*.

Quadro 20 - Atividade inicial de sistemas de equações

Nessa atividade o desafio é encontrar dois números cuja soma é igual a 17. E se a diferença entre esses números for igual a 5, quais seriam esses números?

Fonte: dados da pesquisa

Escolhemos essa atividade para iniciar a sequência didática com o intuito de trabalhar a relação entre os dois números para obter a soma igual a 17. Nesse caso, a professora esperava

[50] O problema que Joana se refere foi apresentado adiante, pois foi 1ª atividade da sequência didática.

que os estudantes percebessem que há mais de uma opção de resposta na primeira parte do problema como 7 e 10, 8 e 9, entre outros. Com a segunda parte do problema, a professora acreditava que *"A partir do momento que eu entro com essa segunda (parte do problema), tem a restrição. Aí sim (para os alunos) perceberem que é só um par que pode satisfazer as duas (condições)"*. Como evidenciamos a viabilidade da estratégia da tentativa na resolução dessa atividade, seja aleatória ou com uma organização sistemática, adotamos como variável didática o valor do termo independente, em conformidade ao apresentado por Rocha (2010). Assim, propusemos uma segunda e terceira atividade em que colocamos alguns valores que levassem os estudantes perceberem a limitação da estratégia da tentativa, buscando outras estratégias como a modelagem da situação.

Após o trabalho inicial com as 3 atividades descritas, selecionamos 2 situações-problema de um dos livros didáticos que estávamos consultando (DANTE, 2015) para a composição da sequência didática, dos quais apresentamos o primeiro problema:

Quadro 21- Situação-problema de sistemas de equações do 1º grau

A soma das idades de Janaína e Marisa é 55 anos. A idade de Janaina mais o dobro da idade de Marisa resulta 85 anos. Qual a idade de cada uma?

Fonte: Dante (2015)

Esperávamos que a partir da proposição das atividades os alunos pudessem refletir sobre as questões e buscar estratégias de resolução mais elaboradas que a tentativa, como a realização da modelagem e alguns elementos do método da adição ou substituição. Após a realização desses dois problemas, Joana planejou a sistematização das técnicas de resolução da adição e substituição com os alunos, apresentando em um momento posterior um exercício que focava no trabalho com as técnicas.

Ao questionarmos se trabalharia com a ideia geométrica, a professora decidiu não privilegiar essa técnica de resolução, justificando: *"não. Porque eu não tenho tempo para trabalhar o plano cartesiano. E como eu sei que ele (plano cartesiano) vai vir no 9º ano também (retomo com eles)"*. Apesar de julgarmos importante o trabalho com o método geométrico, tendo em vista o ganho de trabalhar com diferentes representações, como indicado na Base Nacional Comum Curricular (2018), compreendemos a escolha da professora diante das condições de trabalho que está inserida. Devido às restrições impostas à professora, como dois feriados e a cessão da escola para a realização das eleições presidenciais, não seria possível desenvolver 8 aulas que estavam planejadas para o trabalho com sistemas de equações do 1º grau com essa turma de 8º ano, levando-a a refletir sobre a possibilidade de retomar essa ideia no próximo ano letivo no ensino de funções.

Para a continuidade da sequência didática, consideramos a proposição de algumas atividades que trabalhassem com a classificação de sistemas de equações do 1º grau. Joana destaca que nunca havia mencionado esse tópico com os estudantes, ficando restrita à utilização das técnicas da adição e substituição. Nesse momento, a professora relata uma dificuldade matemática sobre o tema: "*eu não sei como que vê quando que vai ser cada solução*". Em conformidade com o apresentado por Vergnaud (1996; 2009), percebemos a importância de considerar que a aprendizagem de um sujeito ocorre de maneira processual, pois apesar de trabalharmos a classificação dos sistemas de equações no encontro anterior, Joana ainda explicita novamente algumas dificuldades. Desse modo, retomamos a discussão sobre a classificação dos sistemas de equações, possibilitando que a professora supere essas dificuldades.

Em um primeiro momento, indagamos a professora sobre cada classificação, tendo a seguinte resposta: "*o determinado é quando tem uma única solução. O impossível é quando chega no absurdo. E o possível indeterminado é o que tem mais de uma solução*". Durante a discussão verificamos que, diferentemente do encontro anterior, Joana explicita alguns elementos da forma predicativa do conhecimento, relacionando características de cada classificação com as possíveis soluções de cada, como quando indica que *"o impossível que não tem solução. [...] não tem nenhum número que satisfaça as duas equações. [...] (o sistema possível indeterminado) infinitos números vão satisfazer o sistema [...] tem que ter várias soluções. [...] que as retas coincidem"*. Apesar disso, percebe-se que a dificuldade de Joana estava relacionada à identificação de cada tipo de sistema linear durante a elaboração de atividades aos estudantes, sem ter a necessidade de resolvê-lo, como tínhamos proposta a ela no encontro anterior.

Iniciamos a discussão solicitando que a professora elaborasse um sistema de equações do 1º grau que fosse possível e determinado, com ela propondo: *"um sistema que a soma de dois números seja 20 e a diferença dá -4"*. Ao modelarmos essa situação, verificamos que o sistema $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - y = -4 \end{cases}$ é possível e determinado, tendo x = 8 e y = 12 como solução. Após a proposição desse sistema, solicitamos que Joana elaborasse um que fosse classificado como impossível, do seguinte modo:

> R: Agora tenta fazer um impossível.
> J: O impossível é o que não tem solução. (tempo para pensar) Se dobrar?

> R: Tá, mas sim dobrar o quê?
> J: 40 (multiplicou a 1ª equação por 2).
> R: Agora resolve esse.
> J: Aí eu não vou mexer na 1ª (não usar a 1ª), x + y = 20.
> R: Esse sistema você acha que vai dar impossível?
> J: Se eu multiplicar por 2 e for fazer a ideia da soma vai cancelar. Não… não, porque aqui dá 4x. Vai dar certo também (sistema possível determinado).
> R: Então esse é possível determinado. E o impossível?
> (tempo pensando)
> R: Para ser impossível o que tem que acontecer?
> J: Um absurdo. Algo que não aconteça.
> R: Tudo bem, você está falando que é absurdo porque na hora que você resolve (chega no absurdo). Então você está falando uma parte técnica na resolução, que vai aparecer um absurdo. Mas o que significa ser um sistema impossível?
> J: Não ter solução.
> R: E o que significa não ter solução?
> J: Não tem nenhum par de números que satisfaçam as duas equações.

Apesar de mobilizar elementos da forma predicativa do conhecimento, verificamos que esses conhecimentos de Joana estão desestabilizados, tendo em vista que ela apresenta dificuldades em algumas propriedades acerca da classificação do sistema de equações. Ao solicitarmos que a docente elaborasse uma situação que tivesse a solução impossível, a professora substituiu a 1ª equação do sistema anterior pela equação 2x + 2y = 40, obtendo o seguinte sistema: $\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ x - y = -4 \end{cases}$, que é possível determinado. Se relacionarmos com a ideia geométrica para a identificação da classificação dos sistemas de equações, Joana poderia considerar que como o sistema possível determinado possui uma única solução, as retas que constituem o sistema seriam concorrentes. No caso do sistema possível indeterminado, que possui infinitas soluções, as retas seriam coincidentes (uma das retas pode ser obtida pela multiplicação da equação da outra reta por um número real diferente de 0). Por fim, o sistema impossível, que não há solução, não teria pontos em comum, com as retas sendo paralelas.

Na resolução de Joana, identificamos como a professora mobiliza a forma operatória do conhecimento durante a identificação do sistema linear, utilizando esses procedimentos para a validação da sua estratégia. Diante da situação proposta, a professora formula uma estratégia para a elaboração de um sistema de equações impossível, multiplicando uma equação por um número real e para validar a sua resposta mobiliza o método da adição como verificação, refutando sua resposta nesse caso. É possível observar que a professora não tinha esquemas prontos para a determinada situação. Dessa maneira, Joana apresenta vestígios da forma operatória do conhecimento, quando diz ser necessário a resolução e identificação do absurdo para a classificação do sistema impossível, indicando que nesse sistema ocorre "*um absurdo. Algo que não aconteça*". Diante desse cenário, questionamos Joana como seria um sistema possível indeterminado, levando-a a refletir sobre propriedades e relações relacionadas à classificação do sistema:

> R: Como eu posso montar um sistema que não satisfaça as duas equações? Deixa esse de lado, vamos para o possível indeterminado. O que é um sistema possível indeterminado?
> J: Infinitos números que vão satisfazer o problema.
> R: Vamos lembrar geometricamente o que era o possível indeterminado?
> J: As retas coincidiam. […] têm os pontos em comum. Mas como que eu vou pegar duas equações iguais? Se eu multiplicar? É isso que dá.
> R: Não sei? Será?
> J: Aí ela só vai deslocar?
> R: Não sei vamos tentar, $\begin{cases} 2x + 2y = 40 \\ x - y = -4 \end{cases}$.
>
> J: Vou multiplicar por aqui. Não deu diferente(classificação), ficou igual (sistema possível determinado).
> […]
> R: Beleza! Essas duas (retas) que você acabou de escrever são as mesmas?
>
> (a professora escreveu na forma de equação da reta: y = 20 – 2x; y = 4 + x)
>
> J: Mesma coisa. Não! Espera... São diferentes.
> R: Por isso que elas têm um ponto em comum. Você falou que para ser possível indeterminado como que elas têm que ser?
> J: Não sei. Elas têm que ser iguais. Minha cabeça já está doendo, já embaralhei.
> […]
> R: Para coincidirem essas retas têm que ser como?
> J: Iguais.
> R: E essas retas aqui são iguais?
> J: Não.
> R: Tudo bem, mas como que você criou essa reta aqui (2x + 2y = 40)?
> J: Só multipliquei
> R: Multiplicou qual reta?
> J: Essa primeira. Aí eu tenho que multiplicar a outra também?
> R: Se para o sistema ser possível indeterminado elas têm que ser iguais, quais retas você vai usar para poder fazer (o sistema)?
> J: Tem que ser a mesma?
> R: Você pode pegar outra reta diferente?
> J: Não! Então tem que ser a mesma reta. Ah, entendi! Eu vou pegar essa multiplicada e a mesma dela sem multiplicar.
> […]
> R: Então quando eu olho os sistemas 2x2, como que eu consigo identificar? Como tem que ser as duas equações?
> J: Iguais. Equivalentes.

Analisando o evento apresentado, evidenciamos que a situação proposta causou uma desestabilização nos conhecimentos de Joana, como quando diz *"Minha cabeça já está doendo, já embaralhei."*. Em um primeiro momento, percebemos que a professora explicita corretamente que um sistema possível indeterminado possui infinitas soluções, mas tem dificuldades na elaboração de um sistema que tenha essas condições, formulando a estratégia de substituir a 1ª equação (x + y = 20) pela equação que obteve ao multiplicar a 1ª equação por 2 (2x = 2y = 40), quando relata: *"Mas como que eu vou pegar duas equações iguais? Se eu* *multiplicar?”.* Novamente, para validar essa hipótese a professora utiliza o método da adição, o que não ocorre.

Destacamos que Joana mobiliza adequadamente conhecimentos relacionados a ideia de encontrar uma equação equivalente por meio da multiplicação, mas ao montar o sistema de equações ela utiliza apenas a nova equação em conjunto com segunda equação do sistema (x – y = - 4), formando um sistema possível determinado. Ao relacionarmos com a ideia da resolução geométrica, percebemos que a professora reflete sobre a escolha das equações que compõem o sistema, considerando que as elas devem ser equivalentes, explicitando: “*Então tem que ser a mesma reta. Ah, entendi! Eu vou pegar essa multiplicada e a mesma dela sem multiplicar”*. Após a conjectura de Joana sobre a formação de um sistema possível indeterminado, retomamos a discussão sobre o sistema impossível:

> R: E o sistema impossível?
> J: As retas não se encontram. Elas são paralelas.
> R: E o que que tem que acontecer para uma reta ser paralela a outra?
> J: Não lembro. Não sei.
> R: Tudo bem. Então o que determina o paralelismo de duas retas?
> J: Que elas não têm ponto em comum.
> R: Mas o que tem em comum quando duas retas são paralelas? Vamos pegar esses dois lápis, colocando na mesa (em uma representação de retas concorrentes caso prolongassem). Elas são paralelas?
> J: Não, se fosse prolongando-as se encontrariam.
> R: Como que eu sei que essas duas são paralelas, nessa posição (posição de paralelismo)?
> J: Não tem ponto em comum.
> R: Mas como que eu sei que não vai ter ponto em comum lá na frente? Se eu movimentar essa aqui um pouquinho, como que eu vou saber?
> J: Eu imagino prolongando.
> R: Mas como ter certeza que elas não têm ponto em comum, para serem paralelas?
> J: O coeficiente.
> R: Isso, o coeficiente determina a inclinação. O que não mexe com inclinação?
> J: O termo independente.
> R: Então o que que eu posso fazer para ter certeza que vão ser paralelas?
> J: Os coeficientes a e b iguais e o coeficiente independente diferente.
>
> (A professora monta outro sistema)
>
> J: x + 3y = 5. E aí na 2ª, 2x + 6y e aí eu ponho outro número.
> R: Isso aí. E não pode ser qual?
> J: Não pode ser 10.

Verificamos que após a validação da estratégia no caso anterior, Joana utiliza da representação geométrica para a elaboração do sistema impossível, ao relatar que *“As retas não se encontram. Elas são paralelas.”.* Dessa maneira, a professora explicita a relação entre o coeficiente angular e a inclinação da reta, que devem ser iguais para as retas serem paralelas, formulando a condição para a criação de um sistema impossível.

Ao analisarmos alguns eventos ocorridos no estudo preliminar e na elaboração da sequência didática, verificamos novamente a potencialidade da formação proposta para a professora. Durante o estudo preliminar, Joana havia explicitado uma dificuldade em relação à classificação do sistema linear, como na apresentação do *Teorema em ação - ao resolver um sistema de equações sua solução é um único valor numérico* fora do seu domínio de validade, além de não conhecer o método de resolução geométrico. Nesse contexto, propusemos algumas questões e situações que desestabilizaram a professora, como a proposição de sistemas de equações que tivessem diferentes classificações, levando-a a criar estratégias, elaborar hipóteses e tentar validá-las. Diante dessas situações, consideramos que Joana conseguiu refletir sobre as situações, identificando propriedades que estão relacionadas com o tema, como a ideia de coeficiente angular e coeficiente linear de uma função, contribuindo para a sua formação matemática e suas escolhas didáticas.

Ao retomarmos a elaboração da sequência didática, pautada nas discussões que realizamos, Joana decidiu trabalhar com seus estudantes a ideia de classificação dos sistemas lineares, nos levando a propor a seguinte atividade:

Quadro 22 - Atividade de classificação do sistema de equações do 1º grau

Resolva os seguintes sistemas $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

Fonte: Bianchini (2015)

Durante a elaboração dessa atividade, identificamos vestígios dos *Conhecimento em ação didático 2.1 (*$C_{d2.1}$ *– os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor)* e *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação)* mobilizados pela professora Joana. A proposição dessa atividade tinha como objetivo que os estudantes conjecturassem as possíveis classificações de um sistema de equações.

Diferentemente de suas escolhas em anos anteriores, a professora decide trabalhar a classificação dos sistemas de equações, escolhendo uma atividade em que seus alunos possam vivenciar um momento investigativo, conjecturando as possíveis classificações do sistema a partir dos métodos de resolução já trabalhados. Nesse sentido, Joana explicita a intenção de não intervir diretamente na resolução dos alunos, como quando apresentava um exemplo antes de -

propor da atividade aos estudantes, ficando no papel de mediadora em sala de aula, questionando-os, a partir de suas resoluções, sobre a ideia de solução do sistema linear.

Por fim, refletimos o quanto é indissociável os conhecimentos de Joana no exercício de sua atividade no campo profissional. No que diz respeito à classificação dos sistemas de equações, percebemos que o fato de a professora não trabalhar esse tópico com seus alunos poderia estar relacionado a uma dificuldade matemática que possuía. Durante os encontros foi possível que Joana retomasse o estudo de sistemas de equações, refletindo sobre suas dificuldades, como a classificação dos sistemas de equações e a resolução pelo método geométrico, possibilitando-a a proposição de algumas atividades que não trabalhava nos anos anteriores.

Atividades da sequência didática discutidas no dia 02 de outubro de 2018

1- Nessa atividade o desafio é encontrar dois números cuja soma é igual a 17. E se a diferença entre esses números for igual a 5, quais seriam esses números?

2- Encontre dois números cuja soma é igual a 20 e a diferença entre eles igual a 14.

3- Encontre dois números cuja soma é igual a 70 e a diferença entre eles igual a 28.

Estratégias de resolução para as atividades 1, 2 e 3:

Estratégia 1 – Tentativa

Uma estratégia com o caráter mais empírico é por meio da tentativa de atribuição de valores e verificação da validade. Assim, na atividade 1, os alunos podem testar, por exemplo: 10 e o 7, percebendo que é válido para o primeiro item e não é válido para o segundo. Destacamos que essa estratégia de tentativas pode ser realizada em diferentes níveis, com tentativas aleatórios ou a partir de uma organização sistemática, além do uso de outros recursos como uma tabela de dupla entrada. Nesse sentido, caso a tentativa seja realizada aleatoriamente, os alunos podem ter dificuldades em perceber que há mais possibilidades ainda não testadas.

Ressaltamos que apesar de possível realizar a estratégia de tentativa na atividade 3, esse problema foi escolhido com o intuito que os alunos reflitam sobre a viabilidade dessa estratégia e mobilizem uma estratégia mais eficiente, como a modelagem.

Estratégia 2 – Modelagem e resolução do sistema linear

A estratégia 2 consiste na modelagem da situação proposta de uma linguagem materna para uma linguagem matemática para um trabalho posterior. Os alunos ao lerem o problema proposto podem representá-lo por meio de duas equações, que constituem um sistema, por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

O processo de modelagem pode representar um momento de dificuldades para os alunos, em conformidade ao apresentado por Lochhead e Mestre (1995 apud ROCHA, 2010) e Barros, Fernandes e Araújo (2012) que afirmam a dificuldade da tradução da linguagem materna para a linguagem matemática. Em um segundo momento, os alunos podem mobilizar uma técnica de resolução do sistema de equações lineares, como o método da adição e o método da substituição.

Estratégia 2.1 – Método da adição

A técnica da adição pode ser realizada, como apresenta Bianchini (2015) do seguinte modo:

> - Multiplicar todos os termos das equações por um número conveniente, de modo que os novos coeficientes de uma das incógnitas sejam números opostos;
> - **adicionar** os primeiros membros e os segundos membros das novas equações, obtendo uma terceira equação com uma só incógnita;
> - resolver a terceira equação e substituir o valor obtido para sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita. (BIANCHINI, p, 207, grifo do autor).

Utilizando a técnica descrita, a resolução do sistema de equações modelado na atividade 1 é:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases} => \begin{cases} x + y = 17 \\ 2x = 22 \end{cases} => \begin{cases} x + y = 17 \\ x = 11 \end{cases} => \begin{cases} x + y = 17 \\ x = 11 \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} 11 + y = 17 \\ x = 11 \end{cases} => \begin{cases} y = 6 \\ x = 11 \end{cases}$$

Logo, a solução da atividade proposta são os números 11 e 6.

Estratégia 2.2 – Método da Substituição

O método da substituição é descrito por Bianchini (2015) da seguinte maneira:

> - isolar, no 1º membro de uma das equações, uma das incógnitas;
> - **substituir**, na outra equação, a incógnita isolada pela expressão do 2º membro, obtendo uma terceira equação com a outra incógnita apenas;
> - resolver a terceira equação e substituir o valor obtido para a sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita. (BIANCHINI, p. 206, grifo do autor)

Ao mobilizarem a técnica da substituição no problema proposto, os alunos podem resolver da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y = 17 \quad (1) \\ x - y = 5 \quad (2) \end{cases}$$

Isolando o x na equação (1), $x = 17 - y$, e ao substituir na equação (2) tem-se: $(17 - y\,) - y = 5$.

Ao resolver a nova equação, em função de y, obtém-se que $y = 6$. Por fim, como descrita no método da substituição, ao substitui o valor de y na equação (1), conclui-se que:

$$x + y = 17 \;=> x + 6 = 17 => \; x = 11$$

Portanto os valores que atendem a atividade proposta é 11 e 6.

Observação: Nesse momento os alunos podem apresentar dificuldades em procedimentos aritméticos e tratamentos algébricos ao longo da resolução dos métodos, que podem comprometer na resolução obtida, como a operação de números inteiros, substituição e multiplicação que contêm parênteses, resolução de uma equação do 1º grau, entre outras.

Dificuldade 1 – Compreender a ideia da solução do sistema de equações

Destacamos que os alunos podem apresentar soluções que satisfaçam a primeira equação e a segunda equação separadamente, tendo dificuldades de compreender que a solução do sistema de equações deve satisfazer todas as equações do sistema linear.

Deixamos claro, de antemão, que para os demais problemas da sequência didática de sistemas de equações elencamos novamente como possíveis estratégias a *tentativa (estratégia 1)* e a *modelagem e resolução do sistema linear (estratégia 2),* podendo ser pelo método da adição ou substituição. Como exibimos, de maneira detalhada essas estratégias anteriormente, para a composição desse texto apresentamos apenas as demais atividades apenas citamos as estratégias, sem descrevê-las novamente.

4- A soma das idades de Janaína e Marisa é 55 anos. A idade de Janaina mais o dobro da idade de Marisa resulta 85 anos. Qual a idade de cada uma?[51]

5- Quando Ricardo nasceu, seu pai tinha 23 anos. Hoje a soma das idades de Ricardo e de seu pai é 59. Qual a idade atual de cada um?[52]

6- Usando alguns dos métodos de resolução, resolva os sistemas abaixo e verifique a solução encontrada.[53]

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = y - 5 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 9 \\ y = x - 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ 5x - 2y = 29 \end{cases}$

7- Um pai tem 20 anos a mais do que o filho. Determine a idade de cada um, sabendo que daqui a 5 anos o pai terá o dobro da idade do filho.[54]

8- Veja o que diz Luís.[55]

[51] Fonte: Dante (2015)
[52] Fonte: Dante (2015)
[53] Fonte (adaptado): Bianchini (2015)
[54] Fonte: Bianchini (2015)
[55] Fonte: Bianchini (2015)

Figura 20 - Representação do problema 8 de sistemas de equações

Fonte: Bianchini (2015)

Descubra quantos jovens estavam reunidos.

9- Cristina retirou R$ 700,00 de um banco, em 10 notas, sendo algumas de R$ 100,00 e outras de R$ 50,00. Quantas notas de R$ 50,00 e de R$ 100,00 Cristina recebeu? [56]

Possíveis estratégias para a resolução das atividades 4 a 9:

Estratégia 1 – Tentativa

Estratégia 2 – Modelagem e resolução do sistema linear (pelo método da adição ou substituição)

10- Resolva os seguintes sistemas[57] $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

[56] Fonte: Bianchini (2015)
[57] Fonte: Bianchini (2015)

11- Resolva algebricamente os sistemas e, em seguida, classifique-os em determinado, indeterminado ou impossível[58].

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x = 2y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$

As atividades 10 e 11 têm como objetivo a compreensão das diferentes classificações de um sistema de equação linear. Nesse contexto, na atividade 10, sem apresentar a classificação em um momento anterior, solicita-se a resolução de 3 sistemas de equações com o intuito que os alunos se deparem com igualdades do tipo 0 = 8 ou 0 = 0. Nesse momento, a partir de questionamentos e discussões sobre o que é solução de um sistema de equações, que os alunos percebam que um sistema de equações pode ter infinitas soluções ou não ter solução.

Possíveis estratégias para a resolução das atividades 10 e 11:

Estratégia 1 – Tentativa

Estratégia 2 – Modelagem e resolução do sistema linear (pelo método da adição ou substituição)

Possíveis dificuldades para as atividades 10 e 11:

Dificuldade 1- Compreender a ideia de absurdo

Ao resolver o segundo sistema de equações, os alunos podem chegar a um absurdo do tipo 0 = 8 (caso utilizem o método da adição, multiplicando a segunda equação por -2). Nesse momento, é possível que os alunos acreditem que tenham realizado algum procedimento inadequado que causou essa igualdade falsa. Em conformidade ao apresentado por Chiari (2011), os alunos podem ter dificuldades em pensar que o sistema proposto não tem solução, pois o fato de a resposta ser "não tem resposta" constitui uma quebra de contrato, já que os alunos, geralmente, não estão acostumados a lidar com questões desse tipo" (CHIARI, 2011, p. 61).

Dificuldade 2 – Compreender a ideia da indeterminação

---

[58] Fonte (adaptado): Bianchini (2015)

Uma possível dificuldade é a ideia de indeterminação que o aluno se confronta ao resolver o terceiro sistema de equações. Rocha (2010) afirma que um valor desconhecido pode ser representado por uma expressão do tipo $x = -3y + 4$. Novamente percebemos a noção do contrato didático em jogo, no qual para o aluno, uma atividade sempre deve ter uma resposta numérica.

Dia 21 de novembro de 2018

O penúltimo encontro do trabalho em conjunto com a professora, no dia 21 de novembro, foi destinado para a análise *a posteriori* e validação das sequências didáticas de sistemas de equações do 1º grau, que apresentamos nesse momento, e de relações métricas na circunferência. Adotamos essa organização do cronograma, com a realização desse momento *a posteriori* distante do encontro que elaboramos a sequência didática (02 de outubro) devido a algumas características do campo profissional de Joana. Considerando o calendário escolar que a professora deveria seguir, o fato de estarmos chegando no final do ano letivo, que implicam com ações escolares necessárias como fechamento de notas, feriados em dias letivos, a realização do 1º e 2º turno[59] das eleições presidenciais e a coincidência de datas com o curso proposto pela Coordenadora Regional de Educação que a professora estava participando, decidimos antecipar o estudo preliminar e a elaboração da sequência didática de relações métricas na circunferência nos encontros anteriores a essa data, para ser possível que Joana desenvolvesse com seus alunos.

Começamos a análise *a posteriori* da sequência didática relembrando as 3 primeiras atividades propostas aos alunos, que tinham como um dos objetivos que eles percebessem a necessidade de a solução ser válida para os 2 casos (por exemplo: a soma de dois números é igual a 17 e a diferença é igual a 5). Ao retomarmos a primeira atividade, Joana relata que, conforme prevíamos na análise *a priori*, os estudantes "*realmente fizeram por tentativa. Não teve nenhum que fez por equação*". De acordo com a professora, os estudantes realizaram a tentativa, apresentando uma dificuldade inicial em perceber que os números tinham que atender simultaneamente a soma e a diferença. Diante dessa situação, Joana indicou que foi questionando seus alunos se as respostas que eles apresentavam eram válidas para o segundo caso, levando-os a perceber a necessidade de considerar as duas situações.

[59] O 2º turno das eleições presidenciais ocorreu no dia 28 de outubro de 2018. Pelo fato da cessão da escola que Joana trabalha para o Tribunal Regional Eleitoral, a professora não pôde dar aulas nos dias 26 e 29 de outubro.

Na resolução da 2ª e 3ª atividades que modificamos a variável didática do termo independente, consonante ao indicado por Rocha (2010), Joana verificou que em um primeiro momento os estudantes continuaram a apresentar a estratégia da tentativa, de maneira aleatória. Nesse momento, a professora indicou que questionou novamente seus alunos sobre a estratégia, do seguinte modo: *"se for aumentando os números será que a técnica por tentativa vai compensar?"*.

Observamos que Joana busca adotar uma postura de mediadora da situação com seus alunos, de modo que ela tentava realizar questionamentos que os levassem a mobilizar outras estratégias além da tentativa. Nesse sentido, identificamos vestígios do *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação)* na professora, pois ela não assume a responsabilidade imediata de apresentar a solução, como em outras situações, deixando a cargo dos alunos esse processo investigativo, como quando relata:

> J: Eu lembro também que eu fui aproveitando a ideia deles. Então eu fui colocando no quadro as opções que eles estavam falando, como um aluno falou 8,5 + 8,5 que dava 17. Porque eles estavam falando números diferentes, tanto para soma quanto para a diferença e eu fui registrando todos no quadro. Depois comentei que a gente tinha que ver nos dois casos. Achei legal esse 8,5 porque eu não mencionei que poderia ou não poderia ter número decimal ou negativo. E daqueles números que a eles falavam a gente foi fazendo um teste para ver qual que dá para 5 e eles perceberam que só existe um caso nessa atividade. Então eles entraram no próximo e depois no número maior, que eles já estavam cansados de ficar tentando, eu comentei com eles se nessa (atividade) se haveria uma outra maneira de fazer sem ser por tentativa, aí eles tentaram montar equação.

Percebe-se que durante o andamento da atividade, a partir de seu relato, Joana privilegiou os conhecimentos prévios dos estudantes, questionando e deixando que eles buscassem a solução com suas estratégias. Além disso, durante a institucionalização da atividade, a professora inicia a discussão com a turma a partir das estratégias realizadas pelos alunos, com a apresentação no quadro negro e a sistematização da solução. Outro momento que identificamos essa postura foi no momento em que indica que durante a modelagem da situação em que a soma de dois números é igual a 17, alguns alunos representavam x + x = 17. Diante dessa situação, Joana indaga os estudantes se os 2 números são iguais, permitindo que eles reflitam e modelem adequadamente a situação como x + y = 17.

Na continuidade da sequência didática, Joana decidiu antecipar a sistematização do método da adição com seus alunos, após a realização das 3 atividades iniciais. Ao indagarmos sobre essa modificação, a professora faz a seguinte indicação:

> R: Você acabou de falar que dessa vez você conseguiu estruturar melhor (a sequência didática ficou mais organizada). Mesmo assim você fez algumas modificações do que foi pensado, como no trabalho com os dois métodos juntos e você separou em alguns problemas diferentes. Queria entender esse processo. Por mais que gente tenha planejado aqui, por que lá na hora você precisou mudar? Como foi esse processo para você?
> J: Na hora com a turma você está interagindo e recebendo o retorno deles. Então eu vou percebendo o que vai sendo legal. Aqueles três problemas iniciais, o primeiro eles fizeram por tentativa e depois eu trabalhei a parte da modelagem. Quando a gente modela sempre ficava uma incógnita com sinal oposto então eu já fiz pela adição. Como eu vi que eles estavam indo bem ali eu preferi que dar continuidade e aprofundar. Falar como que pode usar a ideia de adição para outros casos, por isso que eu mudei porque vai que depois bagunça a cabeça deles, perco esse gancho que estava legal. Por isso que eu continuei o método da adição. Depois eu apresentei o método da substituição.

Analisando o exposto supracito podemos identificar uma das características da atividade docente no campo profissional, conforme indicam Pastré, Mayen e Vergnaud (2019). Verificamos a dinamicidade existente no trabalho da professora pois apesar de planejarmos como seria o desenvolvimento da sequência didática, Joana realiza algumas adaptações no decorrer da experimentação. Isso se deve ao fato da professora, em seu campo profissional, considerar algumas características relacionadas ao gerenciamento de atividades de curto prazo, como o desenvolvimento de uma atividade durante a aula. Nesse sentido, a professora decide antecipar o método da adição pautada nos conhecimentos apresentados e as interações com os alunos, julgando ser mais adequado para a aprendizagem deles.

Na continuidade da sequência didática, a professora retomou os problemas escolhidos do livro didático (DANTE, 2015) com o intuito de trabalhar o método da substituição com seus alunos. Após a sistematização do método da adição, Joana indica que, de modo geral, os estudantes mobilizaram a técnica da adição para a resolução, com exceção da resolução de um estudante em que relata: *"teve um aluno que tentou fazer por tentativa para chegar na resposta desse primeiro problema. Ele quase nunca faz e esse problema ele fez e foi me mostrar, que ele foi fazendo pela tentativa e encontrou a resposta". De* acordo com a professora, esse estudante mobilizou essa estratégia devido a algumas dificuldades matemáticas que possui, utilizando uma estratégia de caráter empírico para a resolução.

Apesar desse caso, Joana indica que durante a experimentação os seus alunos conseguiram resolver as situações propostas, relatando: *"(eles) conseguiram Renan, eu fiquei feliz porque eu achei que eles não iriam render tanto, mas conseguiram fazer bem".* No decorrer da apresentação das situações-problema, conforme previmos na análise *a priori*, os estudantes mobilizaram os métodos da adição e substituição para a resolução das atividades, percebendo a limitação da estratégia da tentativa, corroborando com a fala da professora que sinaliza que *"não surgiu nada de diferente [...] no geral, depois que foi sistematizado, eles só resolvem assim (modelando a situação). Não queriam mais ficar tentando, a sala mesmo viu que era mais viável resolver pelo sistema"*.

Após a realização de um exercício que visava o trabalho com as técnicas de resolução, Joana apresentou aos estudantes a atividade que elaboramos com o objetivo de os estudantes compreenderem a classificação do sistema.

Quadro 23 - Atividade de classificação do sistema de equações do 1º grau

Resolva os seguintes sistemas $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x+6y=10 \\ x+3y=-1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x+6y=8 \\ x+3y=4 \end{cases}$

Fonte: Bianchini (2015)

Ao contrário das escolhas nos anos anteriores, após o estudo sobre a classificação dos sistemas de equações, Joana decidiu trabalhar esse tópico com seus alunos por meio da atividade apresentada. Para o desenvolvimento da atividade, inicialmente a professora apresentou os sistemas de equações, para que os alunos resolvessem e, em um segundo momento, escreveu no quadro os nomes das classificações dos sistemas (possível determinado; possível indeterminado; impossível), solicitando que eles relacionassem cada sistema com uma classificação a partir de sua resolução. Quando indagamos a professora sobre o desenvolvimento da atividade, Joana realizou o seguinte relato:

> J: Eu coloquei pedi para eles resolverem e aí depois a gente foi para o quadro. No quadro eu coloquei o nome das três classificações e pedi para eles olharem e associarem cada um (sistema) com a classificação. O impossível de cara que eles perceberam que era um absurdo, mas que eles ficaram agoniados é que se um vai pelo método da adição e o outro vai pelo método da substituição pode ser que não chegassem no mesmo absurdo e eles não entendiam isso, que as respostas não estavam batendo. Então eu comentava com eles que não está errado, pois pode até ser diferente os valores numéricos, mas a classificação é a mesma. […] Então aqui eles ficavam incomodados que nas respostas não estavam sendo os mesmos números.
> R: Achar que sempre tem que ser igual. E o possível indeterminado?
> J: Então aí até comentei com eles que a gente conseguiu encontrar o resultado matemático verdadeiro, mas não consegue determinar uma única resposta que dá certo. […] E o possível determinado você consegue resolver e achar qual seria a resposta. Você lembra que eu falei para você que eu nunca passei isso para eles porque eu achava que eles não dariam conta? Foi a parte mais fácil! Depois que eles já sabiam resolver o sistema, fazer a classificação foi mais fácil para eles. Eles gostaram bastante, rapidinho eles entenderam. E eu sempre tive medo achando que seria uma coisa muito difícil.

Observamos na fala de Joana que, de modo geral, os estudantes conseguiram compreender a ideia relacionada a classificação dos sistemas de equações lineares, relacionando as respostas obtidas com as classificações apresentadas. Durante a análise *a posteriori*, nos deparamos com uma dificuldade apresentada pelos estudantes que não havíamos previsto no momento *a priori*, sobre chegar em igualdades absurdas diferentes. Isso nos leva a refletir novamente sobre as escolhas didáticas que apresentamos aos estudantes no decorrer do ensino básico, com a predominância de atividades que tenham apenas uma única solução, levando-os a acreditar que em todos as atividades matemáticas isso ocorre.

Ao analisarmos a fala de Joana, evidenciamos que durante a condução da atividade a professora mobilizou a forma predicativa do conhecimento com os estudantes, explicitando relações e justificativas sobre o tema, como a indicação de diferentes soluções no sistema possível indeterminado. Além disso, destacamos a importância do momento de estudo preliminar para formação de Joana, possibilitando um momento de desestabilização dos *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)* e *Conhecimento em ação didático 2.1 ($C_{d2.1}$ – os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor),* tendo em vista que não apresentava atividades desse tipo pois acreditava que os seus alunos não conseguiriam fazer, como quando explicita: *"Você lembra que eu falei para você que eu nunca passei isso para eles porque eu achava que eles não dariam conta?*". A partir das discussões dos encontros, a elaboração das atividades e durante a análise *a posteriori*, de acordo com sua fala, *"Foi a parte mais fácil! [...] Eles gostaram bastante, rapidinho eles entenderam. E eu sempre tive medo achando que seria uma coisa muito difícil"*, Joana reflete sobre a possibilidade de trabalhar com atividades que não fazia anteriormente por questão de insegurança, permitindo que os alunos percorram momentos de investigação.

Finalizamos o momento de análise *a posteriori* e validação da sequência didática de sistemas de equações, refletindo sobre as escolhas propostas aos alunos e o processo vivenciado em sala de aula pela professora. Quando indagamos Joana sobre o que achou do desenvolvimento do trabalho de sistemas, ela explicitou:

> J: Então, vou falar a verdade das três turmas que a gente trabalhou, 6º, 8º e do 9º ano[60] o que eu achei que foi o mais legal que eu vi mais resultado foi o 8º ano. Não sei também se foi a turma que eu consegui trabalhar e acompanhar mais tranquilo. [...] O legal é que a avaliação mensal tive muitas notas boas, eles saíram muito bem. Eu coloquei um problema e uma atividade para resolver aplicando o método mais conveniente, pedindo para eles classificar em sistema e a maioria se saiu muito bem. [...] Eu fiquei pensando: às vezes você acha que o aluno não vai conseguir e não vai ser capaz talvez por uma insegurança sua. Eu tinha uma insegurança de passar e depois que eu compreendi, vi que realmente não era esse bicho de sete cabeças, ficou mais

[60] Joana acrescenta o 9º ano pois no dia desse encontro ela já tinha trabalhado com os estudantes a sequência didática desenvolvemos sobre relações métricas na circunferência.

> fácil trabalhar com eles e eles tiraram de letra. Se eu mudaria alguma coisa? Não vejo a necessidade de mudar. E até para os próximos anos eu acho que não vai ter o problema de trabalhar por exemplo a classificação que era uma coisa que eu não fazia. Consegui trabalhar bastante com eles a ideia da modelagem, dos problemas e eles conseguiram resolver.

Novamente é possível identificar um momento de desestabilização da professora Joana sobre os conhecimentos que tinha *a priori*, que a levavam a acreditar que seus alunos não conseguiriam resolver as atividades propostas. Evidenciamos, conforme explicitado a professora, que algumas escolhas didáticas da professora relacionadas aos *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)* e *Conhecimento em ação didático 2.1 ($C_{d2.1}$ – os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor)* não estão relacionadas com a questão de comodismo, que ela pensa por um momento, mas a seus conhecimentos em ação. No caso de sistemas de equações do 1º grau, observamos que a dificuldade que Joana tinha em alguns tópicos e a predominância da forma operatória do conhecimento, a levavam a privilegiar o trabalho com as técnicas da adição e substituição com seus alunos.

Além disso, percebe-se também que Joana não abordava alguns tópicos no estudo dos sistemas de equações do 1º grau, como a classificação dos sistemas de equações e a resolução pelo método geométrico. Inferimos que essa escolha didática da professora novamente pode estar relacionada com seus conhecimentos matemáticos, pois foi possível evidenciar que ela não possuía esquemas prontos para essas situações, como relatou nos encontros. Após trabalharmos o tema durante os encontros e o desenvolvimento da atividade com os alunos, percebemos que Joana ressalta a continuidade do trabalho com os estudantes nos próximos anos, quando indica que "*até para os próximos anos eu acho que não vai ter o problema de trabalhar por exemplo a classificação que era uma coisa que eu não fazia*".

Por fim, Joana sinaliza uma possibilidade do uso da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) em sua atividade profissional quando fala que apesar de já utilizar algumas ideias da sequência que desenvolvemos em anos anteriores, *"não era tão organizado, pensando numa sequência toda"*. Dessa maneira, consideramos que a mobilização de alguns preceitos da Engenharia Didática, como o pensamento de estruturar uma sequência didática, elencando algumas dificuldades e estratégias possíveis de serem mobilizadas em sala de aula, podem contribuir para a organização da professora durante seu trabalho docente, como nos momentos de planejamento de aulas.

4.2.4 Relações métricas na circunferência

Dia 23 de outubro de 2018

No encontro do dia 23 de outubro iniciamos os estudos com o tema de relações métricas na circunferência, que foi desenvolvido com os alunos do 9º do ensino fundamental no mês de novembro. Após a professora Joana escolher o tema, solicitamos que ela realizasse a busca de materiais que discutiríamos durante esse encontro, mas para o tema específico ela encontrou dificuldades. Quando perguntamos à professora sobre como havia sido o processo de pesquisa, ela respondeu:

> J: (Encontrei) Nada! Primeiro eu coloquei dificuldades na aprendizagem de relações métricas na circunferência. Não apareceu nada. Depois pesquisei sobre relações métricas na circunferência não tinha nada. O que vinha era plano de aula, exercícios, mas pesquisa sobre dificuldades, nos Parâmetro (Curriculares Nacional) falando como trabalhar esse conteúdo, não tinha. Eu achei uma pesquisa de relações métricas no triângulo retângulo do nível médio, que fala sobre dificuldades de trigonometria no geral e da geometria., como nos Parâmetros (Curriculares Nacional).

Corroboramos com a fala de Joana no que se refere à procura de materiais para o estudo preliminar de relações métricas na circunferência. Durante a preparação para esse encontro, ao buscarmos pesquisas que subsidiariam as discussões com a professora, nos deparamos com materiais semelhantes ao encontrado por ela, com a predominância de planos de aulas e propostas de atividades. Nesse contexto, decidimos iniciar o estudo sobre as relações métricas na circunferência a partir das considerações sobre trigonometria nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) e a proposta apresentada em livros didáticos do 9º ano (DANTE, 2015; BIANCHINI, 2015).

Durante a leitura do documento oficial (BRASIL, 1998), identificamos a orientação de trabalhar a trigonometria de maneira contextualizada, como na obtenção de medidas inacessíveis, não focando de maneira excessiva em situações de cálculos algébricos e no uso de fórmulas trigonométricas. Diante dessa consideração, indagamos Joana sobre como trabalhava esse tema com seus alunos, ocasionando o seguinte relato:

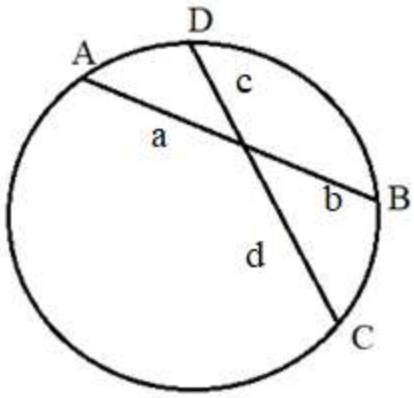
> J: Primeiro sempre busco um exemplo sobre circunferência, que a ideia do contorno, e o círculo que é região interna. Então eu trabalho para eles falando os exemplos conferência e do círculo.
> R: Essa parte de geometria, qual é a sua relação com ela? Você gosta, não gosta…
> J: Eu não sou muito fã não. Geometria e, principalmente, trigonometria porque eu não tive, eu não aprendi isso (durante seu ensino básico). Então é uma coisa que eu não me identifico tanto, eu paro mais, por exemplo: esse conteúdo só vejo quando eu estou

> dando aula, por isso que aqui no livro tem mais rabiscos, eu faço mais exercícios porque eu relembro mais quando eu estou dando aula.
> R: Você consegue saber de onde saíram as relações métricas na circunferência?
> J: Não. Na prova do mestrado do ano passado teve uma questão que envolvia as relações métricas na circunferência para realizar uma demonstração e não consegui.
> R: Vamos pensar nas relações então.
> J: Eu não me lembro.

Analisando o excerto apresentado, Joana explicita a dificuldade que possui em relação a trigonometria, como relatado no 1º encontro que realizamos. A professora atribui essa dificuldade ao fato de não ter estudado o tema durante a sua escolarização, tanto no ensino básico que foi suprimido, quanto na graduação devido ao excesso de conteúdos voltados para temas da Matemática do ensino superior. Ressaltamos nesse evento como Joana está aberta ao trabalho em conjunto, expondo suas fragilidades, sem receio de julgamentos, contribuindo para as discussões que realizamos ao longo da investigação. Além disso, é possível perceber a procura de Joana à momentos que contribuam para a sua formação profissional, tendo em vista a sua disponibilidade de participação na nossa investigação, de outros cursos que relata ter participado, além da tentativa de ingressar em um curso de mestrado para complementar sua formação.

A partir da fala da professora sobre suas dificuldades, recorremos ao livro didático para o início do estudo do tema, a partir da seguinte afirmação: “se duas cordas se cortam no interior de uma circunferência, o produto da medida dos dois segmentos de uma dela é igual ao produto da medida dos segmentos da outra” (BIANCHINI, 2015, p. 218), que representamos do seguinte modo:

Figura 21 - Representação do 1º caso de relações métricas na circunferência



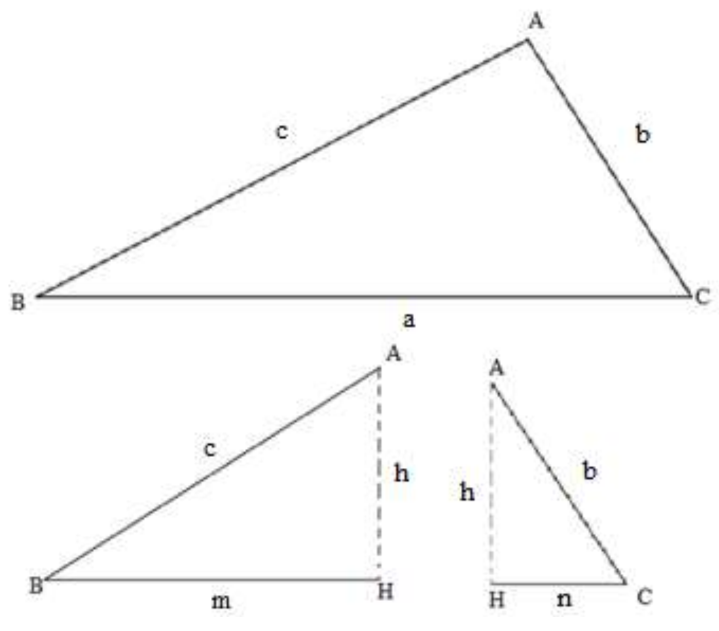
Fonte: dados da pesquisa

Observamos que as cordas se interceptam formando os segmentos de reta a e b, na primeira corda, e os segmentos c e d, na segunda corda. Dessa maneira, de acordo com o teorema lido, temos que $a\,.\,b = c\,.\,d$. Indagamos Joana sobre as justificativas que validam essa afirmação, que novamente ressaltou a dificuldade que possuía para realizar a demonstração do teorema. Percebendo a dificuldade de Joana na situação de demonstração do 1º caso das relações métricas na circunferência, decidimos retomar as relações métricas no triângulo retângulo com a professora, com o objetivo de refletirmos sobre as propriedades e justificativas que envolvem o tópico de relações métricas, do seguinte modo:

> R: Se fosse relações métricas do triângulo retângulo da onde sairia? Quais eram as relações métricas no triângulo retângulo? Vamos olhar aqui na internet. Se pensasse nessas relações, como a gente conseguiria demonstrar?
> J: Eu não sei essa parte de demonstrar.
> R: Eu nunca costumo lembrar de todas as fórmulas das relações métricas. Mas como é possível fazer sem guardar as fórmulas?
> J: Ainda bem que eu guardei todas as fórmulas. Graças a Deus eu sou muito boa para decorar fórmula, rsrsrs.

Semelhante ao relatado nas relações métricas na circunferência, Joana indica ter dificuldades na demonstração das relações métricas no triângulo retângulo. Para possibilitar as discussões sobre o tema, apresentamos a professora uma representação com 3 triângulos sendo o triângulo ABC retângulo (com a medida do ângulo $\hat{A}$ igual a 90º), como na figura a seguir, para que a professora buscasse identificar as relações que justificassem as relações métricas no triângulo retângulo:

Figura 22- Representação dos triângulos apresentados para a professora



Fonte: dados da pesquisa

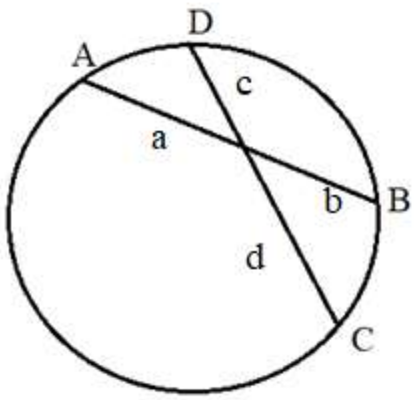
R: Olha só eu tenho esse triângulo grande e dois triângulos decompostos. E aí?
J: Vai usar a semelhança? Eu não gosto de demonstrar Renan.
R: Vamos pensar juntos. Esses triângulos são semelhantes?
(pensa durante 1 minuto)
J: Eu só consigo ver uma coisa em comum que é um lado (formado pelo segmento AB) e um ângulo alfa (ângulo $\hat{B}$). Nesse outro aqui eu vou ter esse outro lado (lado AC) e o ângulo beta (ângulo $\hat{C}$). Eu só vejo isso de igual. Eu posso considerar isso daqui: lado-ângulo-ângulo oposto? Por que tem 90º e lá também 90º.
R: Como você tem certeza que esses ângulos aqui ($B\hat{H}A$ e $C\hat{H}A$) dos triângulos menores são 90º?
J: Porque é o ângulo da altura relativa à hipotenusa.
R: Perfeito.
J: E aí, seria semelhante?
R: Quem seria esse ângulo aqui ($B\hat{H}A$)?
J: O grau dele a gente não vai saber falar?
R: Sim. Mas e o nome dele?
J: Rsrsrsrs, dá uma dica aí.
R: Dica é ótimo. Você tá falando que esse ângulo é um ângulo alfa e esse outro é o 90°. Quem que é esse outro($H\hat{A}B$)?
J: Você quer saber se ele é agudo ou obtuso, é isso?
R: Não.
J: Tá. Eu sei que a soma é 180 º, eu tenho esse alfa e eu tenho de 90º.
R: Você consegue afirmar que esses três triângulos são semelhantes?
J: Então eu só consigo ver um lado em comum e um ângulo. E esse ângulo oposto eu posso considerar?
R: Lado-ângulo-ângulo oposto é um caso de semelhança?
J: É.
R: E esse segundo maior é semelhante ao grande?
J:Pensando desse jeito sim.
R:Se eles são semelhantes, o que que eu posso concluir?
J: Que os lados são proporcionais.
R: Qual que é a definição de semelhança?
J: Que tem lados proporcionais.
R:Só isso?
J: Os ângulos são congruentes.
R: Vamos olhar nos livros.
J: Minha cabeça tá doendo. Aí viu, lados proporcionais e os ângulos correspondentes congruentes.
R: Então vamos olhar os triângulos.
J: Então esses ângulos vão ser iguais... Se eles são semelhantes e tá falando dos ângulos, esses ângulos têm que ser iguais?
R: É.
J: Então esse ângulo é o beta também. E o outro é o alfa.
R: Pensando nisso, o que que eu posso concluir dessas relações?
J: $\frac{c}{m} = \frac{a}{c}$ .Ah! Por isso então que $c^2 = a \,.\, m$.
R: Qual outra relação tem aí?
J: $\frac{b}{h} = \frac{a}{c}$, pode? Essa também: $a \,.\, h = b \,.\, c$.

No excerto apresentado, observamos que em um primeiro momento Joana apresenta um procedimento de caráter empírico, tentando identificar os elementos (lados e ângulos dos triângulos apresentados), para então formular a possibilidade de os triângulos serem semelhantes, como quando indica: *"Vai usar a semelhança?"*. Quando questionamos a professora se os triângulos seriam realmente semelhantes, percebe-se que a professora tem dificuldades de identificar algum dos casos possíveis, elencando um ângulo congruente e um lado comum nos dois triângulos. Cabe ressaltar que durante a reflexão, a professora apresenta algumas relações adequadas, como a identificação do ângulo $B\widehat{H}A$, que mede 90º por ser formado a partir da altura relativa à hipotenusa do triangulo ABC.

Apesar disso, identificamos algumas dificuldades da professora na mobilização da ideia de semelhança, como ao indicar a igualdade do lado formado pelo segmento AB (lado c) nos 2 triângulos semelhantes (triângulo ABC e ABH). Observa-se que nesse caso, o lado c do triângulo ABC é correspondente ao lado BH (nomeado de lado m). Além disso, a professora tem dificuldades na identificação do caso de semelhança de triângulo, quando questiona: *"Eu posso considerar isso daqui: lado-ângulo-ângulo oposto?"*. Ressaltamos que o caso de semelhança indicado por Joana (lado-ângulo-ângulo oposto) é um caso de congruência de triângulos, consequência do caso ângulo-lado-ângulo, mas no caso de semelhança de triângulos é verdadeiro devido ao caso de semelhança ângulo-ângulo. Dessa maneira, após Joana concluir que os triângulos são semelhantes, percebemos que ela realiza as relações de maneira adequada, como a correspondência dos lados c (do triângulo ABC) e lado m (do triângulo ABH) e ao obter a relação $c^2 = a \, . \, m$ valida a estratégia de utilizar a ideia de semelhança de triângulos.

Após essa reflexão sobre as propriedades presentes nas relações métricas no triângulo retângulo, retomamos a discussão sobre o 1º caso das relações métricas na circunferência que havíamos visto no livro didático, a partir da representação:

Figura 23 - Representação do 1º caso de relações métricas na circunferência

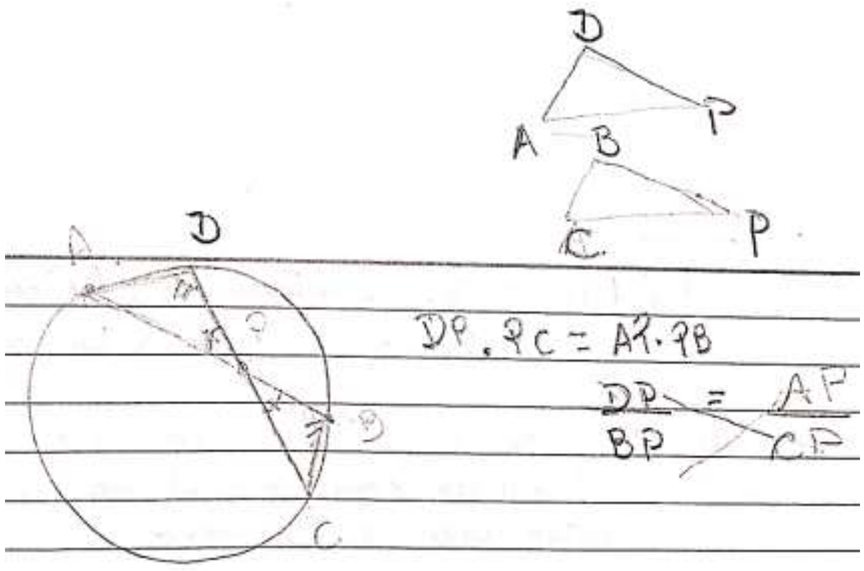


Fonte: dados da pesquisa

Em um primeiro momento, após nomear como P, o ponto de interseção das cordas AB e CD, a professora sinaliza a intenção de utilizar a ideia de semelhança de triângulos APD e BPC, como nas relações métricas no triângulo retângulo, apesar de indicar: *"Vai ser né* *(triângulos semelhantes)!?, mas eu não consigo ver.* A professora relata a dificuldade de verificar o caso de semelhança entre os triângulos, pois só conseguia identificar a congruência dos ângulos $A\hat{P}D$ e $B\hat{P}C$, pela propriedade dos ângulos opostos pelo vértice serem congruentes. Nesse momento, a docente retomou a leitura do livro didático (BIANCHINI, 2015) em busca de alguma propriedade que a ajudasse, verificando a propriedade que a medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do ângulo central correspondente. Assim, após realizarmos a discussão que apresentamos, Joana realiza a seguinte resolução:

> A. Então esse daqui o ($C\hat{B}A$) é a metade do ângulo central o $C\hat{O}A$.
> R: Então que ângulos que eu posso pensar agora?
> J: Não vejo isso aqui, não. […]
> R: Se você passar no ângulo $C\hat{B}A$, você consegue ver um arco?
> J: Esse (arco AC).
> R: E o ângulo $C\hat{D}A$, o que você pode me falar?
> J: É metade desse central aqui $C\hat{O}A$.
> R: Então e o $C\hat{B}A$?
> J: Também é metade. Então são iguais.
> R:Isso porque tá enxergando a mesma abertura.
> J: Então o outro também vai ser. […] semelhantes pelo caso AA (ângulo-ângulo).
> R. E agora o que pode ser feito?
> J: Ver os segmentos proporcionais. Vamos ver se vai dar mesmo...
> R: Vamos ver então!

Figura 24 - Resolução de Joana para 1º caso de ralações métricas na circunferência



Fonte: dados da pesquisa

Observa-se, nos diálogos e no protocolo da resolução, que Joana mobiliza adequadamente a propriedade de congruência dos ângulos opostos pelo vértice e a propriedade do ângulo inscrito na circunferência, identificando que os triângulos APD e BPC são semelhantes pelo caso ângulo-ângulo (AA). Dessa maneira, após relacionar os lados correspondentes e realizar a multiplicação entre as razões identificadas, a professora conclui a validade do 1º caso das relações métricas na circunferência, realizando, de maneira análoga, a demonstração para os outros dois casos.

Concluímos a análise desse encontro destacando a potencialidade de um dos momentos presente na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) para a constituição de momento de formação continuada para professores. Nesse encontro, tínhamos o intuito de realizar o estudo preliminar de relações métricas na circunferência, para a elaboração da sequência didática que seria desenvolvida no encontro posterior. Durante o processo, percebemos que Joana apresentava dificuldades nos conhecimentos relacionados à demonstração dos casos de relações métricas da circunferência, tanto na forma operatória do conhecimento, quanto na forma predicativa, como quando relatou que não conseguiu resolver uma questão na prova de seleção que realizou.

Propusemos para a professora algumas situações que a levaram a refletir sobre as justificativas das relações métricas no triângulo retângulo e, posteriormente, as relações métricas na circunferência. Dessa maneira, Joana considera a possibilidade de utilizar o conceito de semelhança de triângulos para demonstrar as relações métricas, identificando o caso de semelhança envolvido na situação, sendo possível conjecturar as relações métricas que estávamos estudando. Novamente destacamos que esse processo só foi possível devido a postura de Joana no decorrer da investigação, na qual se mostra aberta a apresentar suas dificuldades e participa das discussões em busca de responder as questões que são postas.

Por fim, em diversos momentos do encontro, percebemos que apesar de iniciarmos o trabalho com o foco nas relações métricas na circunferência, houve a possibilidade de aprofundarmos a discussão em outros tópicos da geometria, como a ideia de semelhança e congruência de triângulos, a partir das dúvidas da professora. No nosso caso, optamos por não nos aprofundar em outros tópicos que emergiram nas discussões devido ao tempo disponível para o encontro com Joana, já que ela teria que sair mais cedo para a participação do curso proposto pela Coordenadoria Regional de Educação. Ao analisarmos essa situação nos deparamos com uma característica do campo profissional do professor que, em conformidade ao que ressalta Gatti e Barreto (2009), o professor é obrigado a destinar de momentos além de sua jornada de trabalho para a realização de cursos de formação, como o período noturno ou finais de semana, dificultando a realização de ações que visem a sua formação continuada.

Dia 06 de novembro de 2018

Semelhante ao que realizamos com os outros conteúdos, no início do encontro do dia 06 de novembro, que realizamos a elaboração e a análise *a priori* da sequência didática de relações métricas na circunferência, começamos as discussões considerando a quantidade de aulas disponíveis com a turma do 9º ano para o estudo do tema. Joana começou o encontro mostrando uma preocupação para o trabalho com a turma devido à seguinte situação:

> J: Eu tenho uma péssima notícia. Ainda bem que não conseguimos achar muita coisa. Eu tenho duas aulas na quarta-feira e uma na segunda e uma na sexta-feira (com a turma do 9º ano). A escola definiu que dia 14 (quarta-feira) vai fazer um churrasco para os atletas dos jogos escolares e nos dias 12 e 13 (segunda e terça-feira) a escola fará uma interclasse, então não terá aula. Eu não posso dar matéria para não prejudicar os alunos. […] Dia 15 (quinta-feira) não tem aula que é feriado (e a emenda o dia 16). […] Então nós temos apenas 4 aulas. E ela (direção) não faz para a escola toda (o churrasco), mas para os atletas que foram nos jogos, ela e os professores de Educação Física. […] Esse ano foi o pior para dar aula. Toda vez tem alguma coisa. Esse 4º bimestre se eu for dar 20 aulas é muito, poque sempre tem alguma coisa.
> R: O que você sentiu nessa parte de pesquisar?
> J: Eu fiquei uma tarde (inteira). Eu achei que tinha encontrado muita coisa, mas depois olhando o material tinha um que era bem voltado com o uso do GeoGebra[61], então já não dá. […] Agora a gente está sem Projetec[62], antes tinha uma tabela (de datas) para levar os alunos (na sala de tecnologia). Agora está sem a responsável lá. […] Só encontrei um (planejamento) que fazia a construção da circunferência, usando o compasso.
> R: Mas o que você achou da parte de pesquisar?
> J: Eu não achei proveitoso, porque não achei muita coisa. Se fosse outro conteúdo, talvez fosse bom. Eu tinha intenção de fazer algo diferente, mas não achei.

Observamos no excerto apresentado algumas restrições (CHEVALLARD, 2009) que nos foram impostas para o desenvolvimento das atividades, relacionadas a quantidade de aulas disponíveis. De acordo com o currículo escolar da Secretaria Estadual de Educação (SED/MS), no período de 2 semanas que estávamos considerando para desenvolver a sequência didática, Joana teria um total de 8 aulas de Matemática com a turma do 9º ano, sendo 4 aulas de 50 minutos em cada semana (com 2 aulas na quarta-feira e 1 aula na segunda e 1 aula na sexta-feira). Apesar disso, é informado à professora que nesse período haveriam alguns eventos na escola que impossibilitariam a realização dessas aulas, como a atividade de interclasses e uma atividade para os alunos participantes dos jogos escolares. Além disso, a professora também

[61] O GeoGebra é um *software* livre que é possível trabalhar tópicos de Matemática de maneira dinâmica, como geometria, álgebra e cálculo.

[62] A Projetec é a professora responsável pelo Laboratório de Tecnologia da unidade escolar, que desenvolve projetos por meio dessas tecnologias, além de dar suporte aos professores regentes de sala de aula para a preparação e acompanhamento das atividades.

deve considerar que nesse período teria a presença de um feriado nacional, no dia 15 de novembro (Proclamação da República), que impossibilitava a aplicação das aulas previstas.

Outra restrição indicada por Joana é a utilização de recursos presentes na escola, como o laboratório de informática para o desenvolvimento das aulas. De acordo com a professora, durante a pesquisa de possibilidades de trabalho com seus alunos, ela encontrou propostas de ensino que utilizavam o *software* GeoGebra, mas devido à falta da Projetec, a professora sinaliza a dificuldade da realização de aulas no laboratório de informática, seja para a preparação prévia ou no gerenciamento no momento da aula.

Em conformidade com Perrin-Glorian (2009) e Chevallard (2009), diante da escolha de realizarmos o trabalho em conjunto com a professora inserido no seu campo profissional, foi necessário considerarmos as restrições que são impostas pela Instituição escolar ao trabalho de Joana para o desenvolvimento da sequência didática que elaboramos nos encontros. Consideramos esse evento como uma restrição imposta à professora, pois apesar de buscarmos condições para o desenvolvimento da sequência didática, com tempo hábil para discussões com os estudantes, devido à necessidade de seguir o referência curricular, a data da avaliação bimestral (21 de novembro) e fechamento de notas, percebemos que só seria possível desenvolver a sequência didática em 4 aulas, sendo 2 aulas no dia 07 de novembro (quarta-feira), 1 aula no dia 09 de novembro (sexta-feira) e 1 aula no dia 19 de novembro (segunda-feira). Dessa maneira, cabe ressaltar como essas situações influenciam no trabalho da professora, sendo que, nesse caso foi possível planejar as atividades que seriam desenvolvidas tendo ciência dessas condições, mas há situações que ocorrem após o planejamento, cabendo a professora realizar adaptações para o desenvolvimento do trabalho.

Considerando o cenário que estávamos inseridos, começamos a elaboração das atividades que seriam desenvolvidas com a turma do 9º ano de Joana. Inicialmente, identificamos na professora vestígios do *Conhecimento em ação didático 1.2 ($C_{d1.2}$ – para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias)* pois a professora sinaliza a intenção de propor atividades que desafiassem seus estudantes, propiciando momentos de discussão e reflexão, como quando ressalta que gostaria de *"levar atividades que desafiem eles"*. Durante a discussão de possíveis atividades, começamos a discussão de uma proposta de ensino com o uso da régua e compasso. Essa proposta estava dividida em 3 momentos, na qual os inicialmente os estudantes deveriam utilizar régua e compasso para construir circunferências e cordas que intersectassem entre si. Em um segundo momento, os alunos utilizariam a régua para fazer a medição entre os segmentos de retas formados pelas cordas, para então, encontrar a proporcionalidade existente. A partir da leitura da atividade, realizamos o seguinte diálogo:

> J: Só tem como fazer por compasso? Porque como nós só temos três dias de aulas… eles nunca mexeram com compasso. Não pode usar alguma coisa redonda para fazer o decalque e as réguas para as cordas?
> R: Pode. Mas para que a gente vai fazer isso? Qual é o objetivo?
> J: Não tem sentido fazer só por fazer. Aquele planejamento fez isso no começo. Então manda construir e depois medir os segmentos e identificar uma proporcionalidade.
> R: O que você acha desse tipo de atividade?
> J: Até a parte de medir é tranquilo, agora identificar essa proporcionalidade eu teria que falar. Eles teriam que montar as razões e ver que são proporcionais. Já sabem quando montam na razão. Mas montar a proporção eu acho que eles teriam dificuldade.
> R: Eu achei muito diretiva essa atividade.
> J: Muito comando, né!

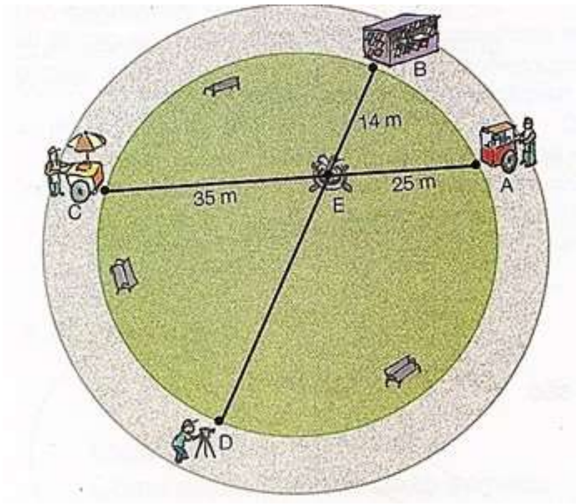
É possível observar que ao analisarmos a atividade proposta no plano de ensino, Joana também considera que a atividade em questão inviável para o trabalho com seus alunos, pois além de pouco tempo disponível para o trabalho com materiais de construção geométrica, concorda com o fato da atividade apresentar muitos “comandos” aos alunos. Ressaltamos a diferença de postura da professora do que apresentava nos encontros iniciais, pois mesmo quando comentávamos sobre a característica de realizar algumas atividades diretivas, Joana achava adequada a realização dessas em sala de aula, como na atividade de multiplicação de fração com o papel quadriculado.

Além disso, percebe-se no excerto uma fala de Joana relacionada ao *Conhecimento em ação didático 2.1 (*$C_{d2.1}$ *– os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor)* quando explicita: *“Até a parte de medir é tranquilo, agora identificar essa proporcionalidade eu teria que falar”*. É compreensível que Joana mobilize elementos desse conhecimento em ação didático durante as situações vivenciadas no processo de formação pois estavam arraigados à prática da professora, sendo necessária um processo de reflexão diante de uma diversidade de situações para a desestabilização total desses conhecimentos (VERGNAUD, 2009).

Apesar disso, durante a elaboração da sequência didática de relações métricas na circunferência, Joana problematiza a necessidade de ter que ajudar os estudantes durante a resolução dos problemas, pensando em atividades que coloquem os estudantes em uma situação ativa na construção do conhecimento. Assim, com o objetivo de os alunos descobrirem a relação de proporcionalidade existente nas relações métricas na circunferência, consideramos iniciar a sequência didática com uma situação-problema, apresentada a seguir, que seria necessário a mobilização das relações métricas na circunferência.

Quadro 24 - Problema de relações métricas na circunferência

Numa praça circular há os seguintes prestadores de serviço:



- o pipoqueiro, que fica no ponto A, a 25 m da fonte de água (ponto E);
- o jornaleiro, que fica no ponto B, a 14m da fonte de água;
- o sorveteiro, que fica no ponto C, a 35 m da fonte de água.

Qual é à distância do fotógrafo, que está no ponto D, até a fonte de água?

Fonte: Questão do concurso público da prefeitura municipal de Campo Maior – Pi (2012).

Nessa situação problema são apresentados 4 trabalhadores dispostos em uma praça circular, sendo que é informado a distância de 3 deles da fonte de água que há na praça. Para descobrir a distância que o fotógrafo está da fonte, é possível a utilização do 1º caso de relações métricas na circunferência, onde o produto da distância do fotógrafo até a fonte pela distância do jornaleiro à fonte é igual ao produto da distância do pipoqueiro e do sorveteiro até a fonte. Assim, temos que:

$$x \,.\, 14 = 35 \,.\, 25$$

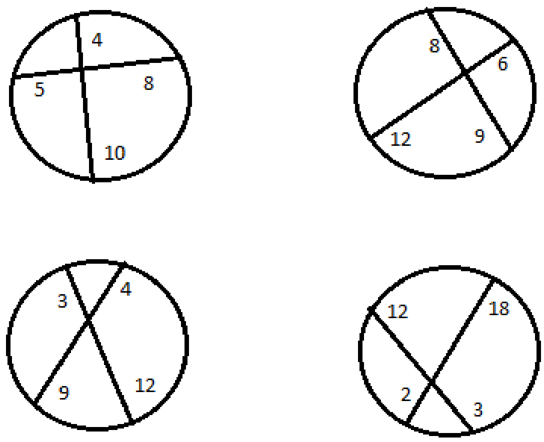
$$14x = 875$$

$$x = 62{,}5$$

Ao utilizarem o 1º caso de relação métrica na circunferência, os alunos encontrariam a distância de 62,5 metros. Apesar de achar interessante a atividade, a professor Joana indica que caso iniciássemos o trabalho com essa atividade, os alunos poderiam ter dificuldades na resolução: *“Eu acho que eles não vão ter nem ideia. Colocar do nada esse problema, eles vão colocar uma letra desconhecida, e aí?”*. Nesse sentido, refletimos sobre o desenvolvimento da seguinte atividade para iniciar o trabalho:

Quadro 25- Atividade de conjectura do 1º caso de relações métricas na circunferência

Observando as circunferências a seguir, o que há em comum em todos os casos?



Fonte: dados da pesquisa

A elaboração dessa atividade teve como objetivo que os alunos conjecturassem o 1º caso de relações métricas da circunferência por meio da investigação, sendo que disponibilizadas 4 situações com uma circunferência e duas cordas, com as medidas dos segmentos, solicitando que os alunos identificassem o que há de comum em todos os casos. Assim, esperávamos que os estudantes percebessem que o produto das medidas dos segmentos de uma corda é igual ao produto das medidas de segmentos da outra corda. Para a resolução dessa atividade, os estudantes poderiam pensar em um primeiro momento o uso de outras operações, como a adição e subtração, que seriam refutadas diante dos casos apresentados, até considerarem a ideia do produto das medidas dos segmentos das cordas. Dessa maneira, após considerarmos a proposição dessa atividade, a professora indica a seguinte organização da sequência didática:

> J: Eu gostei mais dessa ideia de colocar várias circunferências com os números que formassem a proporção e eles tentarem perceber e descrever o que eles entenderam. […] Talvez depois de ter feito a primeira atividade e percebido essa relação de proporcionalidade, aí esse seria legal (passar a situação-problema da praça).
> R: Ah, legal! Boa ideia! Então se passarmos a primeira atividade só de perceber o que têm em comum e depois esse problema.
> J: Isso! Dá para passar tudo isso antes de formalizar.

Percebe-se nas escolhas didáticas de Joana vestígios dos *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-*

problema e atividades exploratórias) e *Conhecimento em ação didático 2.2 ($C_{d2.2}$ – é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação)*, pois ao analisarmos a organização da sequência didática, a professora privilegia atividades com um caráter investigativo, que os estudantes têm que buscar regularidades, elaborar hipóteses e validá-las. Além disso, ela ressalta a intenção de disponibilizar um momento que os alunos pudessem conjecturar as relações existentes, quando fala que *"queria deixá-los fazendo, e aí eles vão na minha mesa (mostrar as relações)"*, diferentemente dos momentos que apresentava uma técnica de resolução ou exemplo anterior ao trabalho dos alunos.

Após organizarmos o início do trabalho com as atividades apresentadas, para a finalização do 1º dia de aula, propusemos um exercício que visava o trabalho com a técnica de resolução que envolviam o 1º caso de relações métricas na circunferência, além de uma situação-problema com um contexto matemático que solicitava a área de um triângulo inscrito na circunferência.

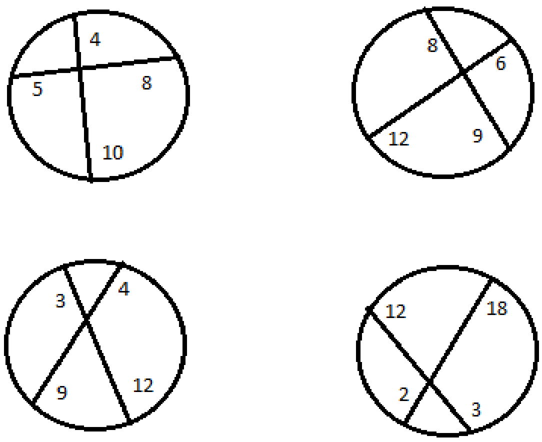
Finalizamos o encontro do dia 06 de novembro com a elaboração das atividades que seriam desenvolvidas nos outros dois dias de aula. Considerando que em cada dia a professora teria apenas 1 aula de 50 minutos, decidimos propor uma atividade que os alunos buscassem conjecturar o 2º caso de relações métricas, de modo análogo à primeira atividade da aula anterior, seguido de um exercício de trabalho com a técnica e um problema relacionado ao caso, que apresentamos com a sequência didática completa. Por fim, para última aula, diante da necessidade ressaltada pela professora de um tempo para a correção das atividades propostas e fechamento do conteúdo para a aplicação da avaliação bimestral, na última aula decidimos apresentar aos alunos o 3º caso de relações métricas na circunferência, seguido de uma atividade que envolvesse essa situação.

Finalizamos o encontro com uma fala de Joana que representa sua postura como professora, seja durante os encontros conosco, ou no cotidiano de sua prática. Quando finalizamos a elaboração da sequência didática, ao questionarmos o que a professora esperava que ocorresse em sala de aula, a professora expressa: *"Espero assim: que eles vão ter mais participação do que os das outras turmas, [...] porque eu fico muito chateada quando você pensa, mas eles não estão nem aí".* Observamos na fala de Joana um desabafo com algumas situações que se enfrenta em sua aula, como a falta de interesse de alguns alunos. Nesse sentido, apesar de se deparar com situações que lhe chateava, como em uma aula que levou materiais como régua, tesoura para a construção de figuras planas e alguns alunos não quiseram fazer a atividade, Joana continua com sua postura de buscar atividades que podem propiciar a aprendizagem dos seus alunos.

Atividades da sequência didática discutidas no dia 06 de novembro de 2018

1- Observando as circunferências a seguir, o que há em comum em todos os casos?

Figura 25 - Representação do problema 1 de relações métricas na circunferência



Fonte: dados da pesquisa

Estratégia 1 – Regularidade do Produto

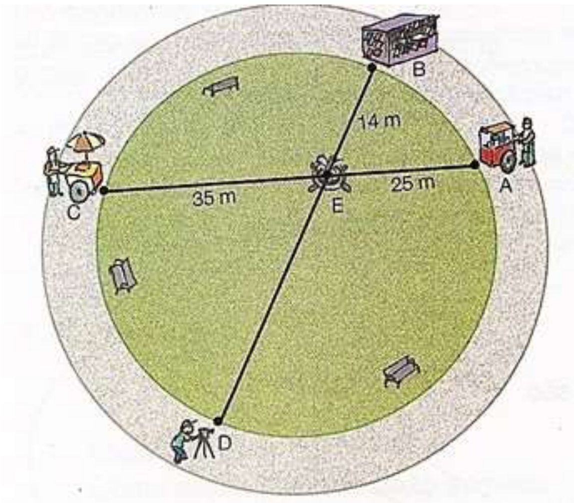
Essa estratégia consiste na percepção da regularidade do produto das medidas dos segmentos de reta formado pelas cordas da circunferência. No primeiro item, percebe-se que $5\ x\ 8 = 40$ é igual a $4\ x\ 10 = 40$, então verifica-se nos demais itens que o produto das medidas dos segmentos de reta de uma corda é igual ao produto das medidas dos segmentos de reta da outra corda. Uma dificuldade inicial e a tentativa de encontrar outras regularidade por meio de outras operações como a adição ou subtração.

Dificuldade 1 – Percepção de regularidades

Ao se deparar com as 4 situações propostas, os alunos podem ter dificuldades em perceber uma regularidade na situação, tentando realizar operações de maneira aleatória.

2- Numa praça circular há os seguintes prestadores de serviço:[63]

Figura 26 - Representação do problema 2 de relações métricas na circunferência



- o pipoqueiro, que fica no ponto A, a 25 m da fonte de água (ponto E);
- o jornaleiro, que fica no ponto B, a 14m da fonte de água;
- o sorveteiro, que fica no ponto C, a 35 m da fonte de água.

Qual é à distância do fotógrafo, que está no ponto D, até a fonte de água?

Estratégias 1 - Atribuir valor numérico

Uma estratégia, com um nível empírico, é a tentativa de atribuir um valor numérico a partir da figura apresentada. Dessa maneira, ao observar a figura e as distâncias dadas, os alunos podem apresentar uma distância do fotógrafo até a fonte, comparando a distância de outras pessoas até a fonte.

Estratégia 2 – Tentativa do valor numérico - Regularidade do produto

A partir da regularidade da atividade anterior, os alunos podem atribuir um valor numérico na distância procurada, com o objetivo de verificar a regularidade do produto das medidas dos segmentos. Assim, tenta-se um número multiplicado por 14 que dê o mesmo produto de $35 \cdot 25$. Cabe ressaltar que, por se tratar de um número decimal, os alunos podem ter dificuldades para encontrar o valor numérico que atenda a situação, que é 62,5 metros.

[63] Questão do concurso público da prefeitura municipal de Campo Maior – Pi (2012). Disponível em: <https://arquivos.qconcursos.com/prova/arquivo_prova/57663/ima-2012-prefeitura-de-campo-maior-pi-professor-classe-b-matematica-prova.pdf>. Acesso em 02 de abril de 2020.

Estratégia 3 – Modelagem da equação do 1º Grau

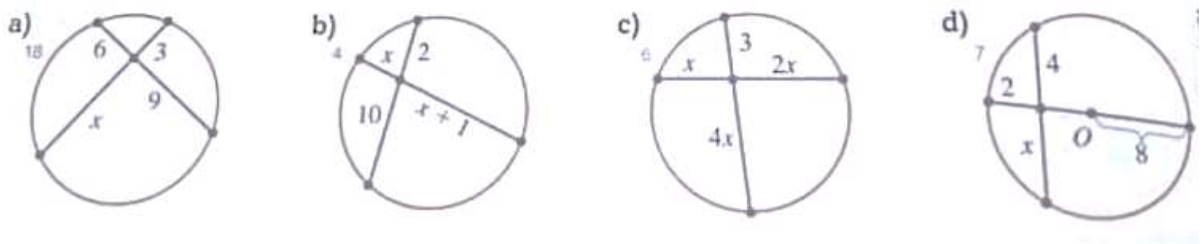
Uma estratégia que pode ser mobilizada pelos alunos é a modelagem de uma equação do 1º grau, mobilizando a regularidade dos produtos das medidas dos segmentos de reta formado pelas cordas da circunferência, por exemplo: $x \,.\, 14 = 25 \,.\, 35$. Ao resolver a equação, percebe-se que a distância do fotógrafo até a fonte é 62,5 metros. Durante a resolução da equação, os alunos podem ter dificuldades em procedimentos de resolução, como a modelagem da situação ou no momento de isolar a incógnita.

Dificuldade 1 – Soma das medidas

Para a resolução, uma dificuldade possível é a tentativa da operação de adição para encontrar a distância desconhecida. Desse modo, ao somar $25 + 35 = 60$, procura-se um número que somado aos 14 metros que dê o mesmo valor, que nesse caso seria 46 metros.

3- Calcule o valor de x em cada uma das figuras abaixo

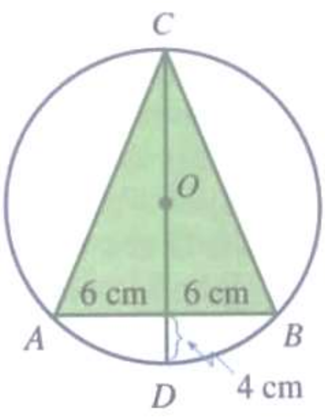
Figura 27 - Representação do problema 3 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

4- Determine a área do triângulo ABC abaixo.

Figura 28 - Representação do problema 4 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

Estratégias para as atividades 3 e 4:

Estratégia 1 - Valor numérico - Regularidade do produto

A primeira estratégia, semelhante à descrita anteriormente, os alunos atribuem valores numéricos para a incógnita x, buscando verificar a regularidade do produto das medidas dos segmentos de cada corda. Por exemplo, no item a da atividade 3, atribui-se valores até colocar o valor de x = 12.

Estratégia 2 – Modelagem da equação do 1º Grau

Para a resolução das atividades, os estudantes podem mobilizar o que foi trabalhado no 1º caso das relações métricas na circunferência para a modelagem das situações apresentadas. Exemplificamos essa estratégia com a resolução do item a da atividade 3, em que em um primeiro momento é possível modelar a equação $x\,.\,3 = 6\,.\,9$ e, posteriormente, ao resolver a equação modelada, os alunos encontram a resposta de x = 18.

Dificuldade item d, da atividade 3 – Diferenciação do centro da circunferência

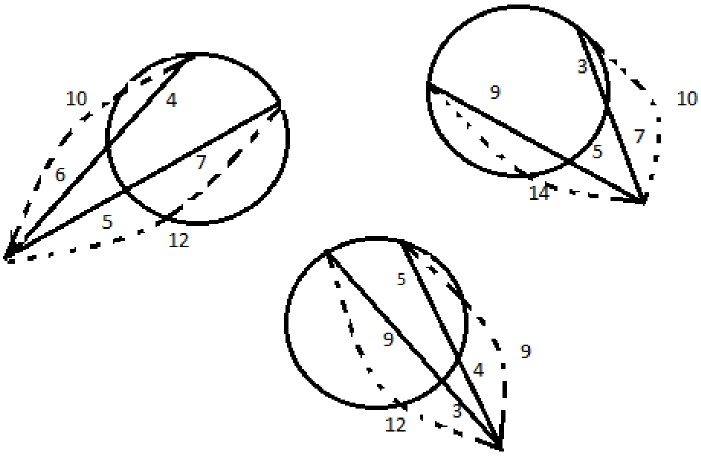
No item d, uma possível dificuldade se deve ao fato de apresentar o centro da circunferência na atividade, dividindo a corda (diâmetro) em 3 segmentos distintos. Assim, os alunos podem realizar produtos equivocados, como a multiplicação das medidas dos 3 segmentos ($2\ x\ 6\ x\ 8 = 96$) ou o produto dos raios $8\ x\ 8 = 64$.

Dificuldade da atividade 4 – Dificuldade com o cálculo da área do triângulo

Em específico na atividade 4, após mobilizar algumas das estratégias destacadas, os alunos mobilizam a fórmula da área do triângulo para obter o valor do item solicitado. ´Ressaltamos que por estar contextualizado com a atividade de áreas, há a possibilidade de os alunos terem dificuldades na interpretação do problema (como perceber o ponto de interseção das cordas) e na mobilização da fórmula da área do triângulo.

5- Observando as circunferências a seguir, qual é a regularidades presente em todos os casos:

Figura 29 - Representação do problema 5 de relações métricas na circunferência



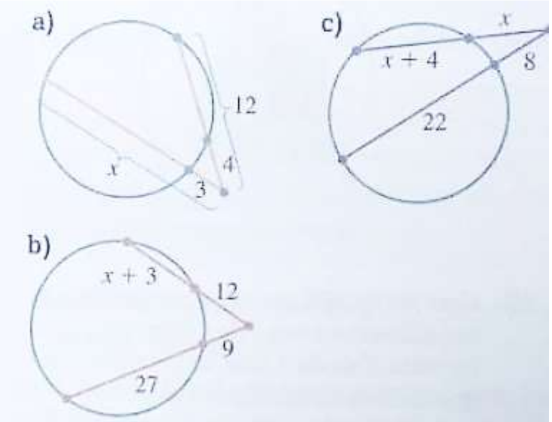
Fonte: dados da pesquisa

Estratégia 1 – Regularidade do Produto

Essa estratégia consiste na percepção da regularidade do produto da medida do segmento secante a circunferência pelo segmento externo a circunferência. Essa estratégia pode se iniciar a partir de multiplicações dos valores dados, buscando encontrar uma regularidade. Desse modo, deve-se atentar que devido ao caso anterior, os alunos podem tentar multiplicar os segmentos de reta do segmento secante, multiplicando o segmento externo e a corda da circunferência: $6\ x\ 4 = 24$. Ao realizar os produtos dos valores dados, no item a os alunos percebem a regularidade multiplicando $10\ x\ 6 = 60$ e verificam a igualdade no produto $12\ x\ 5 = 60$.

6- Calcule o valor de x nas figuras a seguir.

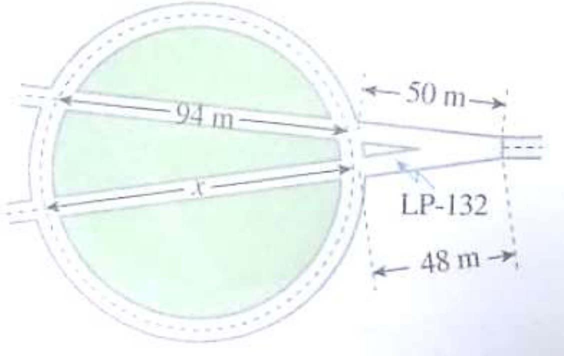
Figura 30 - Representação do problema 6 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

7- O canteiro circular de uma rotatória é cortado por duas estradas, como mostra a figura a seguir. O comprimento da parte da estrada LP-132 que corta o canteiro está indicado por x. Calcule o valor de x.

Figura 31 - Representação do problema 7 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

Estratégia para as atividades 6 e 7:

Estratégias 1 - Atribuir valor numérico

É possível durante a resolução das atividades propostas que os estudantes atribuam um valor numérico à medida desconhecida, por meio da observação das figuras dadas. Percebe-se que essa estratégia, com o caráter empírico, pode ocasionar erros nas resoluções dos estudantes, tendo em vista que a atribuição dos valores numéricos pode ser feita a partir de estimativas.

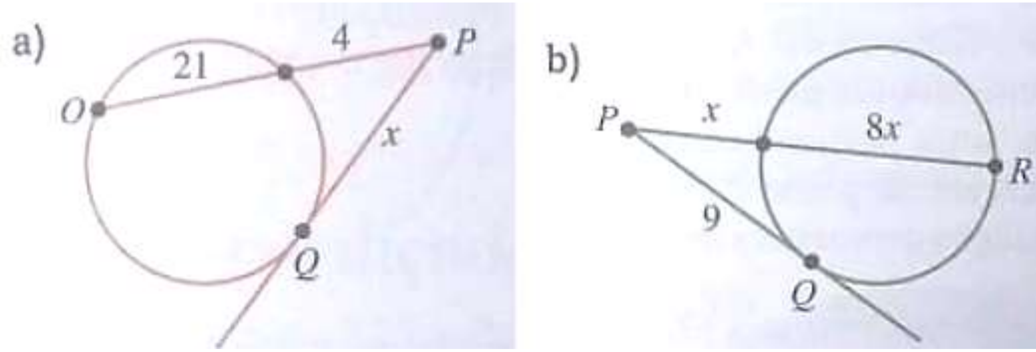
Estratégia 2 – Valor numérico - Regularidade do produto

Na resolução das atividades propostas, os estudantes podem mobilizar a regularidade trabalhada na atividade 5, que envolve o produto da medida do segmento secante a circunferência pelo segmento externo a circunferência. Desse modo, na atividade 6, item a, os alunos podem obter no produto de um dos segmentos secantes pelo segmento externo o valor de 48, sendo necessário que o a medida do outro segmento secante seja 13 unidades de comprimento. Como o segmento externo a circunferência mede 3 unidades de comprimento, o valor da medida desconhecida equivale a 13 unidades de comprimento.

Na atividade 7, ao mobilizar essa estratégia, semelhante à descrita anteriormente, os alunos podem ter dificuldades em modelar adequadamente o segmento secante que tem o valor desconhecido, como $(x + 48). 48 = 144 . 50$, podendo modelar $x . 48 = 144 . 50$.

8- Calcule o valor de x nas figuras a seguir, sendo $\overline{PQ}$ tangente à circunferência.

Figura 32- Representação do problema 8 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

Estratégia 1 - Valor numérico - Regularidade do produto

Para a resolução da atividade 8, os estudantes podem mobilizar a relação métrica da circunferência em que o quadrado da medida do segmento tangente é igual à multiplicação da medida do segmento secante pela medida de sua parte externa. Dessa maneira, no item a, como o produto do segmento secante pelo segmento externo é 100 $(25 \,.\, 4)$, percebe-se que o valor desconhecido equivale a 10 unidades de comprimento, pois $10^2 = 100$.

Estratégia 2 – Modelagem da equação do 1º Grau

Novamente, pautada na relação descrita anteriormente, os estudantes modelam a seguinte equação para o item a: $25 \,.\, 4 = x^2$. Resolvendo a equação, os alunos verificam que o valor da medida desconhecida é 10 unidades de comprimento. Cabe ressaltar que uma possível dificuldade durante a resolução é que ao resolverem a equação do 2º grau modelada, após encontrarem os valores x =10 e x = -10, os estudantes não desconsiderem o valor negativo para a resposta da atividade, já que representa a medida de um segmento.

Dia 21 de novembro de 2018

Na primeira parte do encontro do dia 21 de novembro, realizamos a análise *a posteriori* e a validação da sequência didática de sistemas de equações do 1º grau, que apresentamos anteriormente. Após finalizarmos o trabalho com o tema anterior, iniciamos a análise das atividades que foram desenvolvidas de relações métricas na circunferência.

> R: Então desse conteúdo (sistemas de equações) acabou. Vamos para o outro. Estou sentindo você tão triste...
> J: Porque não foi o que a gente imaginava né.
> R: Tudo bem, mas isso acontece.
> J: É uma turma meio complicada de manter atenção deles para resolver, pois eles não têm muito foco. O que a gente pensou a princípio era passar as quatro circunferências e eles perceberem a regularidade. Estavam naquele corpo mole, eu tinha dois tempos: o terceiro e o quarto. Aí até falei para se juntarem em grupos e a turma que conseguisse fazer eu daria um refrigerante no recreio.
> R: Rsrsrs, comprar um refrigerante é boa.
> J: Para você ver né, tive que gastar meu lindo dinheiro… até os meninos brincaram que não estavam acreditando. Tem um aluno que vai até reprovar, ele tem muita dificuldade […] e esse aluno conseguiu ver a relação da multiplicação. Quando ele me chamou, outra aluna lá no fundo da sala, que é ótima, também me chamou, mas eu preferi ir nele para poder motivar e ver o que ele fez. Aí ele mostrou para o primeiro item e eu questionei e perguntei se valeria para os outros casos, aí ele animou. Depois eu fui na aluna e ela tinha feito bonitinho, aí eu dei um chocolate para ela. Até os meninos ficaram brincando com ele que ele tinha acertado. Depois disso a gente fez o outro probleminha (da praça) e eu gostei que eles participaram, que fizeram. Na primeira aula fluiu bonitinho. Depois disso…

A partir da fala de Joana, observamos que no momento que a professora apresentou a atividade para os alunos conjecturarem o 1º caso das relações métricas na circunferência, eles não se envolveram conforme esperávamos. Nesse momento, ressaltamos novamente a preocupação da professora com a aprendizagem de seus alunos, tendo em vista que diante dessa situação, Joana poderia ter modificado o andamento das atividades apresentando o resultado e solicitado que os alunos apenas aplicassem as técnicas de resolução nas demais atividades. Dessa maneira, percebemos vestígios do *Conhecimento em ação didático 1.2 ($C_{d1.2}$ – para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias)* pois mesmo diante dessas adversidades, a professora considera que a atividade proposta é importante no processo de aprendizagem dos seus estudantes, utilizando até um fator externo, como uma premiação, para que eles pudessem entrar em jogo e buscar a regularidade da atividade.

Percebemos que quando tentaram resolver a atividade, os estudantes conseguiram conjecturar a relação de maneira adequada. Joana ressalta a resolução de um estudante que possuía dificuldades que percebe, de maneira correta, a relação de igualdade da multiplicação entre as medidas dos segmentos formados nas cordas. Ao analisarmos a 2ª atividade da sequência didática, da distância desconhecida do fotógrafo até a fonte da praça, a professora indica que em um primeiro momento os alunos apresentaram a seguinte dificuldade: *eles não conseguiram ver o outro número, que tá faltando, que tinha eles que multiplicar. E aí eles questionavam e eu falava isso que eu queria saber qual é o número que tá faltando”*. Conforme prevíamos no momento *a priori*, durante a resolução das atividades os estudantes tentaram utilizar a relação conjecturada na atividade anterior, mas tiveram dificuldades na modelagem da situação, devido ao valor desconhecido.

Durante a resolução, Joana relata que teve uma postura mais questionadora, relacionada ao *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação)*, sem tentar apresentar a resposta aos estudantes, como quanto explicita que *"ia comentando com eles: a gente não conhece o valor desconhecido. Como que eu posso representar?".* Consideramos que a professora apresenta uma intenção ter uma postura questionadora, que possibilita que seus alunos perpassem por momentos de investigação, como na situação descrita por ela. Além disso, é compreensível que durante sua prática Joana apresente momentos relacionados a um ensino tecnicista, pois em conformidade com Vergnaud (1996; 2009), a ação do sujeito está relacionada aos seus conhecimentos, sendo necessário que a professora vivencie uma diversidade de situações que lhe permita desestabilizar um conhecimento e construir um novo.

Durante o momento da análise *a posteriori* e validação da sequência didática, verificamos que de modo geral, os estudantes conseguiram resolver as atividades propostas sobre o 1º caso de relações métricas na circunferência. Conforme prevíamos, eles conjecturaram a relação de maneira correta, utilizando-a para a resolução das outras atividades, como no problema da praça. Joana também destacou que durante a resolução desse problema, apenas um estudante realizou a estratégia da tentativa do valor numérico, verificando a validade da distância por meio da regularidade encontrada na atividade anterior. Continuando a análise das atividades, perguntamos a Joana como havia sido as duas aulas que restavam, ocasionando o seguinte diálogo:

> J: Até essa aula foi tudo beleza. Mas o que acontece que na sexta-feira eles têm a 3ª aula comigo. Sexta-feira faltaram muitos alunos na aula, que era onde eu iria passar a segunda parte e era para colocar para eles irem pensando. E aí quando eu entrei na sala e vi um pingo de aluno, eu fiquei muito chateada, desanimada e eu não passei.
> R: Por quê?
> J: Porque eu pensei que ia ter um trabalho dobrado, que se eu fizesse naquela hora, quando a sala estivesse com todos os alunos eu teria que refazer e não poderia ser do mesmo jeito porque eu teria que passar as fórmulas, já que não teria tempo mais. Então eu preferi já fazer as relações com eles: a segunda e a terceira. Na outra semana teve a interclasses e eu não dei aula. Na quarta-feira foi o churrasco e teve 15 faltas e eu vim voltar a dar essa aula ontem (segunda-feira) depois de 15 dias. E a prova deles é quarta.
> R: E a aula de ontem o que você fez?
> J: Eu tive que retomar e fazer no quadro uns exemplos dos outros casos porque a prova é quarta eu só tive uma aula. E aí eu fico chateada por eles mesmos que não puderam ver. Essa turma é boa. Fiquei frustrada de ter escolhido eles e não poder trabalhar. Frustração com a turma, frustração do tempo, com tudo, geral...
> R: Eu entendo. Mas a gente, na sala de aula, tá sujeito a isso.

> J: Esse ano todas as minhas turmas vão sair com alguma coisa a menos, porque eu não tive tempo. Muitos dias sem aula. Esse ano teve a copa do mundo também, que em dia de jogo (não tinha aula). Então foi um ano chato de se trabalhar e o pessoal quer resultado. Mas como consegue dessa maneira? Se for olhar no grupo da escola, comentaram que tal dia iria continuar um projeto, aí a professora mandou que tinha agendado a prova mais de 1 mês e a direção falou: professora, se adeque!
> […]
> R: Que tristeza você está…

Analisando o excerto apresentado, observamos novamente uma característica importante do campo profissional do professor influenciando a prática de Joana. Apesar de considerarmos algumas impossibilidades desse período de aulas para a elaboração da sequência didática, como a interclasses e o churrasco para os alunos, observamos que a professora relata outros eventos que não estavam previstos. Diante da situação com poucos alunos em sala de aula, Joana decide não realizar a atividade prevista, pois relata: *"que ia ter um trabalho dobrado, que se eu fizesse agora, quando a sala estivesse com todos os alunos eu teria que refazer e não poderia ser do mesmo jeito porque eu teria que passar as fórmulas, já que não teria tempo mais",* apresentando o 2º e 3º caso das relações métricas na circunferência para poucos alunos presentes. Compreendemos a escolha de Joana frente a essa situação, tendo em vista que a impossibilidade de realizar as aulas conforme planejado, levando-a a realizar adaptações no momento da aula sem um tempo prévio para planejar.

Apesar disso, observamos novamente a preocupação de Joana com seus alunos, pois apesar de não ter culpa nos eventos descritos, a professora apresenta uma chateação por não poder desenvolver as atividades com seus eles, relatando uma sensação de impotência e frustração, quando comenta estar "*frustrada de ter escolhido eles e não poder trabalhar. Frustração com a turma, frustração do tempo, com tudo, geral...".* Por fim, esse evento nos leva a refletir sobre as condições vivenciadas pelo professor diante da realidade do seu campo profissional. Em concordância com o apresentado por Pastré, Mayen, Vergnaud (2019) e Perrin-Glorian (2009), durante a realização de seu trabalho, além da necessidade de considerar atividades de curto prazo, como o gerenciamento de uma aula, e longo prazo, como o cumprimento do currículo escolar, o professor também se depara com situações inesperadas, que representam restrições para seu trabalho, sendo necessário procurar alternativas para contorná-las.

4.2.5 Considerações da professora Joana

No dia 27 de novembro de 2018, realizamos o fechamento do curso de extensão proposto à professora Joana, em que desenvolvemos a nossa investigação do processo de formação continuada pautada nas etapas da Engenharia Didática. Para o andamento do encontro, propusemos uma conversa sobre os processos vivenciados, com a professora relatando suas considerações, possibilidades e dificuldades enfrentadas no decorrer dos encontros.

Joana inicia a conversa refletindo sobre a participação do curso de extensão, que para ela tinha o objetivo de pensar em possibilidades para o ensino de seus alunos: *"tudo que me falarem que pode ser bom (para a aprendizagem dos alunos) eu vou tentar aplicar dentro da sala de aula. Eu nunca vou me privar. Eu gosto disso, de tentar, ver se vai dar certo. Se falar que o aluno tem condição, eu sou aberta a qualquer coisa nova, porque eu acho que dá para sair coisas dos alunos"*. Observamos que um dos motivos que conseguimos desenvolver a investigação, com momentos de discussão e reflexão para ambos, se deve a essa postura relatada por ela, que se mostrava aberta a novas experiências, atividades e situações durante o trabalho em conjunto. Percebemos o envolvimento de Joana no exercício de sua profissão, abdicando de momentos pessoais, além da sua carga horária, para a participação de cursos e projetos que possam contribuir para sua formação, pois de acordo com a professora: "*Eu gosto da minha profissão e eu tento fazer o meu melhor como professora"*.

Em relação aos momentos que percorremos no curso de extensão, quando questionamos a professora sobre o que ela poderia destacar, positivamente ou negativamente, Joana apresenta a seguinte reflexão:

> J: Eu nunca comecei um conteúdo pensando em parar para estudar a parte histórica e nos livros trazem a parte histórica da fração. Mas é uma coisa que eu como professora não me atentava. Então eu acho que foi uma coisa que saiu do que eu estava habituada, na zona de conforto, olhar dessa maneira um conteúdo, o modo de se trabalhar. Estava muito mais na parte do exercício, de já mostrar a regra. Por exemplo: multiplicação de fração é numerador com numerador e denominador com denominador. E aí eu não sabia o porquê, mas era isso que eles iriam fazer. Então eu ficava muito na parte técnica, eu até trabalhava alguns problemas, mas a título de aplicar a técnica, porque primeiro viam a parte técnica de como executar e depois que os alunos treinavam, aí que iam resolver alguns problemas sobre isso. Eu não tinha esse olhar do porquê que o procedimento é dessa maneira, de buscar outros materiais. […] Não era todos os conteúdos que eu parava para pesquisar e estudar, para ver se dava para começar com problema ou começar com uma outra atividade, como o da circunferência que não foi um problema, mas foi uma busca de regularidade. Eu nunca tinha começado desse modo, isso daí me ajudou a ver que tem outras maneiras começar um conteúdo, que às vezes não é um problema direto e eu nunca tinha analisado dessa forma. Eu sempre tinha a ideia de tentar começar com problema e aí resolução. Os alunos falavam e eu

> começava a resolver com eles. Eu percebi que isso (que realizamos) é muito viável, muita coisa que eu não fazia ideia.

Analisando o excerto supracitado, verificamos a reflexão de Joana sobre seus conhecimentos e suas escolhas didáticas que foram mobilizados no decorrer da investigação. Evidenciamos que a professora explicita que suas escolhas didáticas estavam associadas às características da perspectiva empirista (BECKER, 2001), com o foco em um trabalho tecnicista, relacionadas ao *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução),* como quando indica que *"ficava muito na parte técnica, eu até trabalhava alguns problemas, mas a título de aplicar a técnica".* Assim, por mais que ela buscasse começar um novo conteúdo por meio de uma situação-problema, seu foco estava na apresentação da técnica de resolução para os estudantes, como no estudo de frações. É possível que essa escolha didática de Joana ocorra devido à predominância da forma operatória do conhecimento apresentada por Joana no decorrer dos encontros, em detrimento da forma predicativa, pois de acordo com a professora: *"eu não sabia o porquê, mas era isso que eles iriam fazer. [...] Eu não tinha esse olhar do porquê que o procedimento é dessa maneira".* Essa fala de Joana é condizente com o que vivenciamos nos estudos preliminares dos temas escolhidos, pois observamos que a professora conseguia, de forma geral, resolver as atividades discutidas por meio de procedimentos e algoritmos, relacionados a forma operatória do conhecimento. Entretanto, ao ser questionada sobre as justificativas e relações que permitiam tais procedimentos, presente na forma predicativa, a docente apresentava dificuldades em explicitar.

Nesse contexto, durante os encontros propusemos algumas situações que pudessem levar a professora a refletir e conjecturar as justificativas relacionadas aos procedimentos realizados. Desse modo, observamos que durante as discussões, Joana compreendeu algumas propriedades relacionadas aos procedimentos, como a transformação no Sistema de Numeração Decimal, incorporando-as em suas escolhas didáticas, sendo trabalhadas com seus alunos.

Além disso, observa-se na fala da professora outras potencialidades realizadas no decorrer do trabalho em conjunto, com a reflexão de novas possibilidades de trabalho, indo além da utilização de situações-problema para a apresentação de técnicas de resolução. Relacionado ao *Conhecimento em ação didático 1.2 ($C_{d1.2}$ – para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias),* Joana indica que não tinha pensado em realizar atividades de conjecturas, como nas atividades iniciais de relações métricas da circunferência e de números decimais, que os estudantes tinham que conjecturar as regularidades do 1º caso de relações métricas na circunferência e as relações entre as casas decimais, respectivamente. Assim, a professora destacou que essas reflexões contribuíram não somente para as aulas dos temas estudados, mas indicou o uso em outros momentos: *"Não é uma coisa isolada uma da outra, tem relações e eu não tinha essa noção"*.

Ao questionarmos Joana sobre o que não realizamos e que poderia ser trabalhado nas sequências didáticas de frações e números decimais, a professora expõe a restrição referente ao tempo de aula disponível. Em relação a essa dificuldade exposta, ao relembrarmos o trabalho com as relações métricas na circunferência, a professora faz o seguinte relato:

> J: Foi a maior decepção, que você viu na minha cara quando eu cheguei. Eu esperava que seria complicado trabalhar por conta da turma, mas eu não esperava que fosse ser tão complicado assim e não foi por conta da turma em si. É por causa de como funciona uma escola mesmo […] e avisam sem antecedência.
> R: É, você falou que foi uma baita de uma frustração. Achou que ia ser pela turma e não foi.
> J: Foi o que a gente falou aquele dia: no 1º dia de aula, que consegui desenvolver, foi bem legal, eles conseguiram resolver, achar a relação métrica e resolver o problema. Mas aí nos outros (dias) eu não consegui nem aplicar, por causa da quantidade de faltas e só fui ter aula duas semanas depois por causa dos feriados. Não foi uma coisa que a gente pensou errado, que não funcionou, mas foi a frustração de não conseguir nem desenvolver uma coisa que a gente planejou.

É possível observar na fala de Joana novamente o sentimento de frustração por não ter sido possível desenvolver a sequência didática como planejamos. Conforme apresentamos na análise *a posteriori* da sequência didática de relações métricas na circunferência, verificamos na fala da docente algumas restrições impostas a ela no decorrer de suas aulas, por exemplo: a impossibilidade de dar as aulas devido aos dias não letivos e eventos escolares, além de situações inesperadas como alta quantidade de faltas dos alunos. Esses eventos descritos pela professora representam uma restrição que devemos ter ciência quando trabalhamos inseridos no campo profissional do professor, não sendo possível contorná-los (PERRIN-GLORIAN, 2009; CHEVALLARD, 2009).

Apesar dessas dificuldades, verificamos outra potencialidade no trabalho de formação continuada com a professora, quando Joana explicita os encontros que desenvolvemos com o tema de sistemas de equações do 1º grau:

> J: Eu tinha bloqueio tremendo do sistema. Foi o que eu mais gostei, tanto da formação, quanto do trabalho com a turma. Por ser uma coisa que eu não sabia.
> R: A parte de classificação?
> J: Isso. Sempre passava tudo meio prontinho e nunca fui de deixá-los livres para escolher o jeito que eles queriam fazer. Eu acho que eu meio que limitava o meu aluno. Eu achava que ele não dava conta, então eu não passava. E dessa vez não, pois isso foi uma surpresa para mim! Que o aluno, se você permitir, é capaz! E eu não tinha isso, eu tentava facilitar ao máximo. E não era nem por comodismo, eu achava que ele não ia conseguir, entendeu. Eu limitava meu aluno no geral. Por exemplo: no exercício quando era para usar o método da adição eu já deixava prontinho para ele

> só cancelar e no método da substituição eu já deixava aí prontinho só para substituir. E aí você viu na prova que eu não fiz isso e deixei eles livres para eles escolherem. Um aluno fez de um jeito, outro aluno do outro e eles foram bem. Então eu gostei porque deu um resultado legal, deu ver que eles são capazes de fazer.
> R: Você falou que gostou muito da parte de sistemas lineares, que foi aquele choque quando você viu 0 = 0.
> J: Então, e a mesma reação que eu tive, eles tiveram também. Mas eu acho que pelo fato de eles já tem trabalhado um pouco antes as resoluções (pelo método da adição e substituição), eles conseguiram resolver. Foi mais ou menos parecido com o que você fez comigo e eu fiz com eles. E também teve aquela parte de criar o sistema, porque eu nunca imaginei que você sabia fazer de cabeça um sistema de cada tipo. Pensava: meu Deus Renan, como que você sabe que vai ter essa classificação? […] Eu gosto (de sistemas de equações) porque dá para fazer bastante problema e abrange bastante coisa de Matemática.

Evidenciamos uma reflexão de Joana sobre suas escolhas didáticas, relacionadas ao *Conhecimento em ação didático 2.1 (*$C_{d2.1}$ *– os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor),* quando a professora indica que algumas de suas escolhas se devem ao fato de acreditar que o seu aluno *"não dava conta",* levando-a a apresentar uma atividade facilitada. Foi possível verificar essa característica durante a resolução dos sistemas de equações pelos métodos da adição e substituição, ou não quando não abordava algum tópico com os estudantes, por exemplo: a classificação dos sistemas de equações lineares. Destacamos que essas escolhas da professora não estavam relacionadas com a ideia de comodismo, como ela pensou, mas sim a um conhecimento didáticos que possuía, no caso o *Conhecimento em ação didático 2.1.*

Nesse contexto, percebemos como a organização dos encontros a partir dos momentos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), como os estudos preliminares e a elaboração e análise *a priori* das sequências didáticas, possibilitou que Joana perpassasse por situações que pudessem refletir sobre os conhecimentos que possuía, além de considerar a proposição de novas situações aos seus alunos. Durante a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação, verificamos que a professora se viu diante de situações que desestabilizaram, indicando: *"E dessa vez não, pois isso foi uma surpresa para mim!"*. Assim, percebe-se que no decorrer dos encontros Joana apresentou um novo conhecimento didático, que nomeamos como *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação),* com a proposição de novas atividades que permitissem que seus alunos investigassem, elaborassem estratégias de resolução e conjecturassem relações envolvidas nas atividades.

Por fim, finalizamos o encontro indagando Joana sobre suas considerações do trabalho realizado, solicitando que ela nos falasse sobre suas considerações, possibilidades e dificuldades de incorporar alguns momentos em sua prática:

> R: Vamos falar agora de modo geral do curso, que era usar as etapas da Engenharia Didática. O que você acha que foi bom para você? O que você vai levar e o que você não vai levar? O que você acha que não funciona? E para sala de aula?
> J: Primeiro não tem uma coisa que eu posso falar que eu não gostei. Eu acho tudo que a gente viu, eu posso tentar aplicar. O que não seria viável para aplicar é a questão do tempo. Eu, como professora com 40 horas, dando 32 aulas em sala, não tenho tempo hábil para ficar olhando (como na análise preliminar). Então não seria viável na minha situação, como professora no ensino básico regular. Mas é interessante a proposta, que auxilia e ajuda muito. […] Voltando para as coisas que você me perguntou: não vou dizer que eu vou aplicar sempre isso, talvez pela questão do tempo. Vejo muita coerência nisso, de na hora trabalhar um conteúdo fazer um estudo, quais exercícios que vou trabalhar, de que maneira que vou começar, o porquê que eu vou começar assim. Eu acho que estava muito mecânico o que eu fazia. Mas qual é objetivo, o que eu pretendo para começar com o problema. Talvez eu não consigo aplicar certinho todos os passos, mas algumas etapas vão fazer parte do meu planejamento, como professora.

Em conformidade com o que apresenta Gatti e Barreto (2009), Joana afirma que devido ao fato de ter a jornada oficial de trabalho de 40 horas aulas na semana, sendo 32 horas em sala de aula, a realização dos momentos que perpassamos nos encontros em todos os seus conteúdos é inviável. Corroboramos com a visão da professora pois, se considerarmos a realização das sequências didáticas com o rigor presente na Engenharia Didática, é necessária uma demanda de tempo inexistente para a realização do estudo preliminar, elaboração da sequência e a análise *a priori* de todas as atividades que seriam propostas e a análise *a posteriori* e validação de todas as sequências.

Apesar disso, ao encontro do apresentado por Bittar (2017, p. 107), a professora Joana indica que a possibilidade de ter uma postura semelhante ao adotada na análise *a priori* das sequências didáticas, pois *"você vê um problema e fazer esse movimento de pensar como os alunos resolveriam, isso facilita também. Dentro da sala de aula, saber como que vai sair de certas situações"*. Por fim, a professora também indica possibilidades de uso de alguns preceitos estudados durante o trabalho em conjunto, como a reflexão sobre suas escolhas iniciais, os objetivos que pretende atingir para a planejamento das suas aulas, integrando em sua prática durante seus planejamentos.

CAPÍTULO V - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nossa investigação teve início a partir das reflexões acerca de possibilidades de processo de formação continuada para professores de Matemática, considerando a importância desses momentos no trabalho do professor. Ao iniciarmos o trabalho sobre o tema, evidenciamos que esses momentos de formação representam um espaço importante para a reflexão e aprendizagem do professor, apesar de haver algumas críticas sobre essas ações (IMBERNÓN, 2010; BRASIL, 1999; PERRENOUD *et al.*, 2002). Aos analisarmos algumas pesquisas sobre a temática, evidenciamos que há restrições sobre a elaboração e desenvolvimentos de momentos de formação continuada, quando não levam em consideração a realidade do professor, suas demandas, o foco demasiado em aspectos teóricos, entre outras questões.

Diante desse cenário, passamos a refletir sobre um processo de formação continuada que considerasse as condições dos professores, suas necessidades e os colocassem em um papel central no desenvolvimento da ação (NÓVOA, 1992; IMBERNÓN, 2010). Nesse contexto, a partir das concepções teóricas que acreditamos, propusemos uma formação continuada com uma professora de Matemática pautada nas etapas da Engenharia Didática, intencionando a constituição de um espaço para a reflexão que poderia contribuir para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos e didáticos da docente.

Para o desenvolvimento da investigação, tivemos como objetivo geral *analisar conhecimentos de uma professora de Matemática que participou de um processo de formação continuada pautado nas etapas da Engenharia Didática*. Os objetivos específicos da pesquisa foram os seguintes:

- Analisar conhecimentos matemáticos de uma professora de Matemática;
- Analisar conhecimentos didáticos de uma professora de Matemática;
- Analisar limites e potencialidades da utilização das etapas da Engenharia Didática como ação estruturante em um processo de formação continuada de professores de Matemática.

No desenvolvimento da pesquisa utilizamos como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD; 1996; 2009), em especial as ideias de conhecimentos operatórios e predicativos do sujeito e conhecimentos em ação. Em concordância ao que foi apresentado por Vergnaud (2009), consideramos que a aprendizagem de um sujeito ocorre a partir da adaptação da diversidade de situações vivenciadas, de modo que propusemos um processo formativo no qual, durante o trabalho em conjunto, elaboramos, desenvolvemos e analisamos sequências didáticas percorrendo as etapas da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996).

Na constituição do processo formativo, intencionamos um espaço de discussão que possibilitasse à docente a desestabilização, reflexão e construção de conhecimentos que estão relacionados a seu trabalho docente, sejam conhecimentos matemáticos ou didáticos. Além disso, buscamos assumir um papel de mediador das situações, com a proposição de algumas questões que possibilitassem a professora pensar sobre o trabalho coletivo que estávamos desenvolvendo.

Durante o processo de formação, perpassamos por uma variedade de situações que estão presentes no campo profissional da professora, como a preparação de aulas, elaboração de atividades, a experimentação em sala de aula, análise das atividades propostas, entre outras situações. Essa variedade de situações que percorremos ao realizarmos a análise preliminar, elaboração e análise *a priori* da sequência didática, experimentação e análise *a posteriori* e validação da sequência didática, presente na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), possibilitou que a professora refletisse sobre seus conhecimentos matemáticos e didáticos, construindo novos. Para análise dos conhecimentos da docente nos pautamos na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996; 2009), como as ideias de conhecimentos operatórios e predicativos e conhecimentos em ação (matemáticos e didáticos), tendo em vista que os conhecimentos do sujeito são a base da conceitualização na sua atividade, e ao longo do processo formativo são mobilizados nas ações da docente.

Diante desse cenário, propusemos um curso de extensão intitulado "*Uma proposta de estudos de temas matemáticos com professores que ensinam matemática no município de Coxim*", cadastrado e desenvolvido no Instituto Federal de Mato Grosso do Sul – Campus Coxim (IFMS), que por questões de contingência da pesquisa foi desenvolvido com uma professora de Matemática, que lecionava nas turmas de 6º ao 9º ano, que chamamos de Joana. O curso de extensão foi desenvolvido em 14 encontros semanais, no segundo semestre do ano de 2018, com a duração média de 1h30min. Ao longo do processo consideramos as características do campo profissional da professora, que apresentava as demandas que sentia necessidade para a discussão e desenvolvimento das atividades, sendo que foram escolhidos os temas de frações, números decimais, sistemas de equações do 1º grau e relações métricas na circunferência. Desse modo, durante o processo, a professora teria um papel de protagonismo na elaboração, desenvolvimento, aplicação e análise das atividades, possibilitando a reflexão sobre as situações vivenciadas.

Durante os primeiros encontros, evidenciamos que Joana mostra uma preocupação com a aprendizagem de seus alunos, levando em consideração diversos elementos, como as condições que vivem fora de sala de aula. Nesse sentido, percebemos o quão importante é para Joana a aprendizagem dos seus alunos, levando-a a buscar condições que contribuam com seu trabalho, como a participação de diversas formações. Ao ser questionada sobre sua formação inicial, a professora relata que sente dificuldades em conceitos presentes na matemática do ensino básico, devido à característica conteudista da sua graduação que focava, demasiadamente, em disciplinas com conceitos matemáticos do ensino superior, como cálculo, álgebra e análise real.

O conteúdo de frações foi escolhido para o trabalho dos primeiros encontros. Durante a realização das discussões, percebemos que Joana apresentava vestígios de um conhecimento didático no qual acreditava que os estudantes deveriam trabalhar técnicas e algoritmos para conseguir aprender Matemática. Desse modo, modelamos esse conhecimento didático por meio do *Conhecimento em ação didático 1.1 ($C_{d1.1}$ – para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução).* Isso se via presente quando a professora descrevia as escolhas didáticas que realizava no ensino de frações em anos anteriores, além das escolhas de atividades para a composição da sequência didática.

Outro conhecimento possível de identificar na docente, que modelamos como *Conhecimento em ação didático 2.1 ($C_{d2.1}$ – os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor),* está relacionado a postura que ela tinha diante de atividades exploratórias e situações-problema. Diante dessas atividades, Joana acreditava que seus estudantes não conseguiriam resolver sozinhos, levando-a resolver um exemplo semelhante com os alunos, apresentando as técnicas necessárias. Esses conhecimentos podem ser presenciados no decorrer da 1ª sequência didática que desenvolvemos, quando a docente decidiu apresentar as técnicas de resolução da multiplicação de frações por meio da ideia geométrica. Além disso, ao propor algumas situações-problema aos alunos, Joana seleciona um exemplo semelhante, resolvendo-o no quadro em conjunto com eles.

Destacamos que algumas dessas escolhas não estavam condizentes com as perspectivas de aprendizagem que temos, de modo que durante as discussões questionamos essas escolhas. Entretanto, julgamos que seria incoerente de nossa parte se "obrigássemos" Joana a modificar essas escolhas, pois estas são oriundas de conhecimentos que a constituem. Nesse sentido, pautado nas nossas escolhas teóricas (BROUSSEAU, 2008; VERGNAUD, 2009; PASTRÉ; MAYEN, VERGNAUD, 2019), Joana quem é responsável pela atividade de ensino em seu campo profissional, cabendo a docente as escolhas para a realização dessa ação. Além disso, acreditamos que um sujeito não aprende a partir da imposição de novos conhecimentos, mas sim a partir da reflexão de situações que lhe causem desestabilizações. Dessa maneira, conforme esperávamos, ao longo do processo formativo houve situações e discussões que levaram a professora a refletir sobre esses conhecimentos.

No decorrer dos encontros, Joana pôde refletir sobre seus conhecimentos didáticos, como na análise *a posteriori* de frações, que verificou que seus alunos sentiam dificuldades em resolver algumas situações-problemas, podendo estar relacionadas a algumas de suas escolhas. Outro momento que possibilitou essas reflexões foi o estudo preliminar dos temas, que permitiam que a professora refletisse sobre as dificuldades dos estudantes e possibilidades de ensino.

Assim, evidenciamos que a professora começou a mobilizar elementos de outros conhecimentos didáticos que modelamos como *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias)* e *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação).* Esses conhecimentos didáticos de Joana foram possíveis de serem identificados em diversos momentos da formação, como na elaboração da sequência didática de números decimais, sistemas de equações do 1º grau e relações métricas na circunferência. Nesse sentido, percebe-se essa característica na sequência didática de relações métricas na circunferência que Joana iniciou o trabalho a partir de atividades exploratórias, deixando que os estudantes discutissem e conjecturassem as relações existentes. Além disso, ao analisarmos a sequência didática de números decimais e de sistemas de equações do 1º grau, é possível verificar que não houve uma ênfase demasiada no trabalho de técnicas e algoritmos matemáticos, como ocorreu na sequência didática de frações.

Em relação aos conhecimentos matemáticos, observamos que a professora Joana manifesta um forte caráter da forma operatória do conhecimento durante os encontros, diferentemente da forma predicativa. Diante das situações de estudos nos momentos preliminares, em diversos momentos a professora resolve sem maiores dificuldades as atividades consideradas, mobilizando as técnicas e algoritmos que estão relacionados com a situação, como nas operações com números decimais. Essas ações estão relacionadas à forma operatória do conhecimento, tendo em vista que essa forma pauta a conduta do sujeito na ação, representando o *know-how* do sujeito. Entretanto, ao ser questionada sobre algumas propriedades, relações e justificativas que estavam envolvidas nas situações, componentes da forma predicativa do conhecimento, Joana apresentava dificuldades não conseguindo explicá-las.

Novamente elencamos uma potencialidade do processo de formação proposto pois durante os momentos percorridos, como as análises preliminares e na elaboração da sequência didática, foi possível que a professora se deparasse com questionamentos que lhe desestabilizasse, como quando questionada sobre as justificativas dos procedimentos realizados.

Desse modo, durante os encontros Joana pôde pensar sobre as questões que emergiam nas discussões, refletindo sobre os conceitos matemáticos que estavam sendo estudados. Assim, houve momentos de reflexões, aprendizagens, diálogos acerca dos conhecimentos matemáticos e a (re)organização de alguns esquemas. Esses momentos são importantes no processo de formação do professor, pois são os conhecimentos na forma predicativa que permitem a explicitação e a sistematização de um saber em uma determinada comunidade, no caso da professora, suas turmas (VERGNAUD, 2002).

Um resultado que evidenciamos no decorrer da pesquisa foi o quão conectados estavam os conhecimentos matemáticos e didáticos da professora, sendo possível perceber em diversos momentos que as escolhas didáticas de Joana estavam intimamente relacionadas com seus conhecimentos matemáticos. Devido à forte manifestação da forma operatória do conhecimento, em detrimento da forma predicativa, Joana priorizada situações que envolviam técnicas de resolução com seus estudantes, como no trabalho de fração, relacionadas ao *Conhecimento em ação didático 1.1 (*$C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)*. Percebemos essa característica também nos momentos em que Joana indicava não trabalhar as conversões das casas decimais e a classificação dos sistemas de equações do 1º grau, temas que ela apresentava dificuldades na compreensão das propriedades envolvidas.

No decorrer dos encontros, com a reflexão da professora acerca das propriedades e relações dos temas estudados, percebeu-se que Joana realizou escolhas didáticas diferentes das que relatava fazer anteriormente. Desse modo, é possível verificar que as sequências didáticas de números decimais, sistemas de equações do 1º grau e relações métricas na circunferência continham situações que possibilitam a exploração e investigação dos estudantes, relacionadas ao *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias)*. Além disso, Joana contemplou tópicos que antes não trabalha com os estudantes, devido à sua dificuldade, como classificação dos sistemas de equações do 1º grau

No que diz respeito aos limites da Engenharia Didática no processo de formação, verificamos que algumas das condições e restrições (CHEVALLARD, 2010) impactam no trabalho realizado. Inicialmente percebemos que a necessidade de considerar o currículo que Joana é obrigada a seguir e a quantidade de aulas disponíveis, influenciaram desde a estruturação dos encontros até a elaboração da sequência didática. Nesse contexto, houve momentos nos quais tivemos que iniciar o trabalho com outro tema sem terminar com o anterior, devido à necessidade de desenvolver a sequência didática em determinado período. Também ressaltamos que por mais que tivéssemos planejado a sequência didática para a quantidade de aulas disponíveis, houve imprevistos que impediram o desenvolvimento conforme o planejado, como no caso da sequência didática de relações métricas na circunferência. Nessas situações, Joana relata a necessidade de encurtar o momento de resolução dos alunos para poder cumprir o currículo.

A professora explicita que devido a sua demanda de trabalho, conforme apresentado por Gatti e Barreto (2009), a realização de todas as etapas da Engenharia Didática em todas as suas aulas seria inviável, devido ao rigor necessário nos estudos preliminares, elaboração e análise *a priori*, análise *a posteriori* e validação da sequência didática. Concordamos com Joana quando indica a impossibilidade de utilizar a Engenharia Didática em todas as suas aulas. Entretanto, ressaltamos que durante o trabalho Joana relata a utilização de preceitos da Engenharia Didática em outras turmas, como em algumas pesquisas sobre o ensino e, em especial, pensar (de modo geral) o que poderia ocorrer em sala de aula com as atividades que seriam desenvolvidas, característica da análise *a priori*. Dessa maneira, esse evento representa uma importante possibilidade de uso da Engenharia Didática no contexto profissional da professora, contribuindo para suas escolhas e reflexões

Em relação às etapas da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) como ação estruturante em um processo de formação continuada, verificamos potencialidades no processo de reflexão da professora. Durante *as análises preliminares* foi possível que a docente se deparasse com questões que a fizeram pensar sobre os temas matemáticos estudados, buscando compreender suas relações e propriedades. Dessa maneira, percebeu-se que Joana perpassou por momentos que possibilitaram sua reflexão acerca dos procedimentos que realizava, conjecturando e compreendendo as propriedades envolvidas nos temas estudados. Essa etapa também propiciou que considerasse dificuldades dos estudantes, buscando compreender suas possíveis causas, além de possibilidades para o ensino, como o uso do material dourado no ensino de números decimais. Assim, verificou-se que a importância da etapa da análise preliminar, que subsidiou o desenvolvimento de um quadro teórico-didático dos temas estudados e nos orientou no decorrer das demais fases da Engenharia Didática.

Embasada no que foi estudado na etapa anterior, na *elaboração da sequência didática e análise a priori* a professora pôde repensar algumas escolhas didáticas que realizava nos anos anteriores, elaborando atividades e pensando em possibilidades que poderiam acontecer durante suas aulas. Conforme relatado por Joana, apesar de planejar suas aulas anteriormente, essa fase da Engenharia Didática, permitiu que a professora elaborasse a sequência didática de maneira estruturada, considerando possibilidades que poderiam ocorrer em sala de aula, possíveis dificuldades dos seus estudantes e como superá-las. Assim, conforme explicitado por Joana, essa postura a ajudou *na experimentação,* diante das produções e questionamentos dos alunos, onde foi necessária a realização de algumas intervenções que levassem os estudantes a repensar sobre as atividades propostas.

Por fim, na etapa de *análise a posteriori e validação* das sequências, Joana podia refletir sobre as produções dos estudantes e as escolhas realizadas durante a elaboração da sequência didática. Nessa última etapa da ED, foi possível que a professora verificasse dificuldades de seus alunos, como na resolução de situações-problema, passando a privilegiar situações que contribuíssem para a superação dessa dificuldade.

Percebe-se também que nessa fase Joana se pôs a pensar e questionar seus conhecimentos, como o *Conhecimento em ação didático 1.1 (*$C_{d1.1}$ *– para resolver atividades de Matemática é necessário saber previamente técnicas de resolução)* e *Conhecimento em ação didático 2.1 (*$C_{d2.1}$ *– os alunos só resolvem atividades exploratórias ou problemas com a ajuda do professor),* possibilitando a organização de novos conhecimentos, por exemplo: o *Conhecimento em ação didático 1.2 (*$C_{d1.2}$ *– para aprendizagem matemática é importante trabalhar com situações-problema e atividades exploratórias)* e *Conhecimento em ação didático 2.2 (*$C_{d2.2}$ *– é possível que os alunos consigam resolver atividades exploratórias ou problemas a partir de um momento de investigação).* Além disso, nessa fase a professora pôde validar algumas de suas escolhas didáticas como o trabalho com a classificação dos sistemas de equações do 1º grau e o estudo dos números decimais sem a ênfase nas técnicas algorítmicas, tendo em vista que os seus alunos conseguiram compreender esses temas.

Finalizamos esse texto refletindo sobre a atividade de formação continuada que propusemos no trabalho com Joana, sendo que julgamos necessário novas investigações que versem sobre o tema de formação continuada de professores. Acreditamos que uma possibilidade de formação continuada envolvendo a Engenharia Didática seja a realização do trabalho com um grupo de professores, o que não foi possível na nossa investigação. Desse modo, esse espaço formativo pode possibilitar o compartilhamento de experiências de suas realidades profissionais, além da reflexão sobre conhecimentos matemáticos e didáticos pelos professores mobilizados no seu campo profissional.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Keyla Ribeiro de. **Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.** 2016. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2016.

ANDRÉ, Marli. Formação de professores: a constituição de um campo de estudos. In: **Educação**, Porto Alegre, v. 33, n. 3, p. 174-181, 2010

ANDRÉ, Marli; SIMÕES, Regina. H. S.; CARVALHO, Janete. M.; BRZEZINSKI, Iria. **Estado da arte da formação de professores no Brasil. Educação e Sociedade**, ano XX, n. 68, p. 301-309, dez. 1999.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BARROS, Paula Maria; FERNANDES, José António; ARAÚJO, Cláudia Mendes. Raciocínios desenvolvidos na verificação das soluções de sistemas de equações lineares. **In: XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática,** Lisboa,2012.

BECKER, Fernando. **Educação e construção do conhecimento**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

BESSOT, Annie. Importance de la notion de situation em Didactique des Mathématiques. In: **Perspectiva da Educação Matemática.** Campo Grande, v. 7, número temático, p. 406 – 423, 2014.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática: ensino fundamental. - volume 1**, 8. Ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BITTAR, Marilena. Contribuições da Teoria das Situações Didáticas e da Engenharia Didática para Discutir o Ensino de Matemática. In. TELES, Rosinalda Aurora de Melo; Borba, Rute Elisabete de Souza Rosa; MONTEIRO, Carlos Eduardo Ferreira (Orgs.) **Investigações em Didática da Matemática**. Vol. 2, Editora UFPE, Recife, 2017, p. 101-132

BITTAR, Marilena.; FREITAS, José Luiz Magalhães. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2. ed. Campo Grande: UFMS, 2005.

BRASIL, Ministério da Educação: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Referencias para a formação de Professores**. Brasília: MEC/SEF, 1999.

_______. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Introduction à l'ingénierie didactique**, 2013. Disponível em: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-%C3%A0-ling%C3%A9nierie-didactique3.pdf Acesso em 4 maio de 2018

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, Guy; CENTENO, Julia. Rôle de la memóire didactique de l'enseignant. **In: Recherches en Didactique des Mathématiques.** Grenoble, v. 11, nº 23, p. 167-210, 1991.

CHALMERS, Alan F. **O que é ciência afinal?** Tradução: Raul Filker. Editora Brasiliense, 1993.

CHEVALLARD, Yves. Conceitos fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 115-154.

_______. Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD? **In: Congreso Internacional sobre la TAD**. Sant Hilari Sacalm, 2010.

_______. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder; Questionnement et éléments de réponses à partir de la TAD. Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009.pdf. Acesso em 13 de maio de 2020.

CHIARI, Aparecida Santana. **A utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do Ensino Médio.** 2011. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

CUNHA, Micheline Rizcallah Kanaan da; MAGINA, Sandra Maria Pinto. A medida e o número decimal: um estudo sobre a elaboração de conceito em crianças do nível fundamental. **In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.** Recife, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris: matemática: ensino funtamental 2.** 2. Ed. São Paulo: Ática, 2015.

DAVIS, Claudia Leme Ferreira; NUNES, Marina Muniz Rossa; ALMEIDA, Patrícia C. Albieri de; SILVA, Ana Paula Ferreira da; SOUZA, Juliana Cedro de. Formação Continuada de professores em alguns estados e municípios do Brasil. In: **Cadernos de pesquisa.** São Paulo, v.41, nº.144, p. 826- 849, set/dez 2011

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In.: n: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica**. 1 ed. São Paulo: PAPIRUS, 2003. p. 11- 33.

EBSERH. **Concurso Empresa Brasileira de Serviços Hospitalares**. AOCP Concursos Públicos, 2015.

ESTEVES, Anelisa Kisielewski; SOUZA, Neusa Maria Marques de. Números decimais na Sala de aula: os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica**. In: Revista Eletrônica de Educação**. v.6, n. 1, p. 188 – 205, 2012.

FIORENTINI, Dário; NACARATO, Adair Mendes; FERREIRA, Ana Cristina; LOPES, Celi Spasandin; FREITAS, Maria Teresa M.; MISKULIN, Rosana G. S. Formação de professores que ensinam Matemática: um balanço de 25 anos da pesquisa brasileira. **In. Educação em Revista.** n. 36, p 137-160, 2002.

GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **In: Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35- 48, 2001.

GATTI, Bernadete Angelina. Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década. **In: Revista Brasileira de Educação.** v. 13 n. 37 jan./abr. 2008

GATTI, Bernadete Angelina (coord.); BARRETO, Elba Siqueira de Sá. **Professores do Brasil: impasses e desafios.** Brasília: UNESCO, 2009.

GIRALDO, Victor. Formação de professores de Matemática: para uma abordagem problematizada. In.: **Ciência e Cultura**. São Paulo, vol. 70, nº.1, p. 37- 48, jan./mar. 2018.

GUIMARÃES, SHEILA DENIZE. **A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º ano de ensino fundamental.** 2009. 261 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação continuada de professores**. Porto Alegre: ArtMed, 2010

JUCÁ, Rosineide Sousa; SÁ, Pedro Franco de. Um estudo de erros nas operações com os números decimais. **In: 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Fortaleza,2012.

LABORDE, Colette. Towards theoretical foundations of mathematics education. **In. ZDM Mathematics Education,** v. 39, p 137-144, 2007.

LIMA, Renan Gustavo Araújo de. **Problemas de combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática.** 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

MARGOLINAS, Claire; DRIJVERS, Paul. Didactical engineering in France; na insider’s and na outsider’s view on its foundations, its practice and its impact. **In: ZDM Mathematics Education,** p. 893 – 903, 2015.

MATO GROSSO DO SUL, Secretaria de Estado de Educação. **Currículo de referência de Mato Grosso do Sul:** educação infantil e ensino fundamental. DAHER, Hélio Queiroz;

FRANÇA, Kalícia de Brito; CABRAL, Manuelina Martins da Silva Arantes (orgs.). Campo Grande: SED, 2019.

Melo, Maria Sônia L. de; MONTENEGRO, Grácia M. M.; SANTOS, Luciana S. dos; MORAIS, Maria das Dores; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. Bingo dos números racionais. In.: GITIRANA, Verônica; TELES, Rosinalda; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; CASTRO, Airton Temistocles de; CAMPOS, Iolanda; LIMA, Paulo Figueiredo; BELLEMAIN, Franck (Orgs.). **Jogos com Sucata na Educação Matemática: Projeto Rede.** Recife: NEMAT: Ed. Universitária UFPE, 2013, p. 103-147.

MONTEIRO, Alexandre Branco; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Dificuldades na aprendizagem de frações: reflexões a partir de uma experiência utilizando testes adaptativos. **In: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.** v. 7, n. 2, p. 103 – 135, 2014.

NÓVOA, Antonio. Formação de Professores e Profissão Docente, In: NÓVOA, A. (coord). **Os Professores e a sua Formação**. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

OLIVEIRA, Jéssika Naves de. Dificuldades na aprendizagem dos números racionais: confrontando dois níveis de escolaridade. **In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática**, São Paulo, 2016.

PASTRÉ, Pierre. A análise do trabalho em didática profissional. **In: Revista brasileira Estudos pedagógicos**. Brasília, v. 98, n. 250, p. 624-637, set./dez. 2017

PASTRÉ, Pierre; MAYEN, Patrick; VERGNAUD, Gérard. A didática profissional. In: GRUBER, Crislaine; ALLAIN, Olivier; WOLLINGER, Paulo (orgs.). **Didática profissional: princípios e referências para a Educação Profissional.** Florianópolis: Publicações do IFSC, p. 11 – 87, 2019.

PEREIRA, Onésimo Rodrigues. **Uma sequência didática para o ensino de adição de frações.** 2011. 183 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal do Tocantins, Arrais, 2017.

PERRENOUD, Phelippe; THURLER, Monica Gather; MACEDO, Lino de; MACHADO, Nilson José; ALESSANDRINI, Cristina. **As competências para ensinar no século XXI: a formação dos professores e o desafio da avaliação.** Porto Alegre: Artmed Editora, 2002.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. **In Margolinas et all.(org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – ClermontFerrand (PUY-de-Dôme).** Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne; BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar. L'Ingenierie didactique entre recherche et ressource pour l'enseignement et la formation des maitres. **In.: I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**. Bonito, 2016.

POWELL, Arthur. B.; FRANCISCO, John M.; MAHER, Carolyn A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes. Tradução: OLIMPO JUNIOR, Antonio. **In: BOLEMA**. Rio

Claro, SP: UNESP, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Ano 17 nº 21, p. 81-140, 2004.

RIBEIRO, Carlos Miguel. Abordagem aos números decimais e suas operações: a importância de uma eficaz navegação entre representações. **In: Educação e Pesquisa**. São Paulo: v. 37, n. 2, p. 407 – 422, 2011.

ROCHA, Florisvaldo de Oliveira. **Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental: método da substituição.** 2010. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SILVA, Adriana Costa Santos da; PINHEIRO, Taianá Silva; MAGINA, Sandra. Reflexões de uma professora do ensino fundamental sobre uma atividade multiplicativa no âmbito de uma formação continuada baseada na espiral RePaRe. **In: Educação Matemática em Revista.** v. 22, p. 89 – 97, 2017.

SILVA, Camila de Oliveira. **Um estudo sobre a noção de limite de progressões geométricas infinitas com alunos do Ensino Médio.** 2011. 183 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard. Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. **In: Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM.** Montreal, 2002.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. (Orgs). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. p.13-35.

VERGNAUD, Gérard. Représentation et activité: deux concepts étroitement associés. **In: Recherches en Education.** n. 4, 2007.

VINATIER, Isabelle. Champs Conceptuels, champs professionnels.**In: Acivité Humaine et conceptualisation: questions à Gérard VERGNAUD**. Presses Universitaires du Midi, Toulouse, p. 487 -496, 2007.

WOZNIAK, Floriane. **Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique. domain_other.** Université Claude Bernard - Lyon I, 2005

APÊNDICE

Sequência didática de frações

1- Utilizando o papel quadriculado, resolva as multiplicações de frações:

a- 2/3 x 4/6

b- 3/4 x 2/3

c- 1/5 x 1/2

Estratégia 1: Algoritmo da multiplicação

Elencamos o uso do algoritmo da multiplicação como uma possível estratégia de ser mobilizada pelos estudantes nessa atividade, devido às escolhas didáticas da professora que já trabalhou com seus alunos a multiplicação por meio do algoritmo. Dessa maneira, é possível que mesmo propondo a atividade por meio do papel quadriculado a estratégia do algoritmo seja mobilizada durante a resolução, seja para obter a resposta ou para validá-la. Assim, no item a, os alunos podem recorrer ao seguinte procedimento:

$$\frac{2}{3}\, x\, \frac{4}{6} = \frac{8}{18}$$

Estratégia 2: Utilizar o material quadriculado

Conforme o apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacional (BRASIL, 1997) um dos significados da multiplicação está associado à configuração retangular. Nesse sentido e, tendo em vista que a professora apresentou essa estratégia no início do trabalho, os alunos podem utilizar o papel quadriculado para realizar as operações de multiplicação. Por exemplo:

Dificuldade 1- Representação figural da fração

Uma possível dificuldade inicial na resolução da atividade pode estar na representação figural das frações dadas, ocasionando resoluções incorretas devido à representação de uma fração diferente da fração dada.

Dificuldade 2- Dividir apenas a parte pintada ao representar a segunda fração.

Essa dificuldade está relacionada à ideia de distratores na representação figural da fração. A ideia de distrator pode ocorrer se o aluno não realizar as divisões em toda a área da figura, dividindo apenas a parte pintada da primeira figura. Assim, o inteiro é apresentado com divisões de partes que não são iguais, podendo ocasionar uma dificuldade, caso os alunos não percebam que devem fazer novas subdivisões até que as partes divididas sejam iguais.

Dificuldade 3- Compreensão do significado da multiplicação (inverter a ordem das frações - $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$)

Uma dificuldade na resolução é a compreensão da multiplicação, onde $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ representa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$. Apesar de resolverem $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ e obterem o mesmo resultado, elencamos essa dificuldade devido à compreensão da propriedade comutativa da multiplicação.

2- Em seu caderno, calcule cada produto abaixo, simplificando quando possível. (BIANCHINI, 2015)

a) $\frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6}$
b) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{3}$
c) $3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3}$
d) $2\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{5}$
e) $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{3}{7}$
f) $\frac{4}{5} \cdot 0 \cdot \frac{5}{4}$
g) $\frac{6}{15} \cdot \frac{5}{2}$
h) $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7}$

Estratégia 1- Uso dos algoritmos da multiplicação

É possível realizar a operação de multiplicação de maneira direta, multiplicando os numeradores das frações entre si e os denominadores de maneira semelhante. Logo, uma possível multiplicação seria:

$$\frac{9}{20} \cdot \frac{5}{6} = \frac{45}{120}$$

Estratégia 2- Utilização do método geométrico

Para a multiplicação de fração, os alunos podem recorrer ao método geométrico que trabalharam na aula anterior com o uso do papel quadriculado.

Dificuldade 1: Simplificação da fração

Uma dificuldade elencada pela professora é a percepção da simplificação da fração, quando possível. De acordo com suas experiências em sala de aula, a professora relata que, por vezes, os alunos não conseguem verificar a possibilidade de simplificar. Essa dificuldade está condizente à apresentada por Monteiro e Groenwald (2014) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que os alunos têm dificuldades na compreensão que uma mesma fração pode ser escrita de diferentes maneiras.

3- Efetue as divisões indicadas, simplificando quando possível. (BIANCHINI, 2015)

a) $\frac{5}{8} : \frac{7}{6}$

b) $\frac{9}{5} : \frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{8} : \frac{1}{2}$

d) $3\frac{1}{2} : 7$

e) $2 : 3\frac{1}{2}$

f) $0 : 3\frac{1}{9}$

Estratégia 1: Algoritmo da divisão de fração

Nessa estratégia o aluno pode mobilizar a estratégia do algoritmo usual da multiplicação de fração na qual mantém a primeira fração e multiplica pelo inverso da segunda fração.

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} \rightarrow \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{30}{48}$$

Ao mobilizar a estratégia 1, uma dificuldade que pode acontecer é a inversão da primeira fração ao invés da segunda. Tal procedimento resultará em uma divisão diferente da solicitada, por exemplo o item a:

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} \rightarrow \frac{8}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{48}{30}$$

Estratégia 2- Multiplicação cruzada

Novamente nessa estratégia o aluno mobiliza um procedimento, já visto anteriormente como dito pela professora, de realizar a multiplicação cruzada dos membros da fração. Assim, multiplica-se o numerador da primeira fração pelo denominador da segunda fração e o resultado será o numerador da fração resultante. Posteriormente, multiplica-se o denominador da primeira fração pelo denominador da segunda fração, resultando no denominador da resposta.

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} = \frac{30}{48}$$

Ressalta-se que os alunos podem inverter os resultados encontrados, colocando o primeiro valor descrito como o denominador e o segundo como o numerador da fração resultante, sendo uma segunda dificuldade possível, como:

$$\frac{5}{8} : \frac{7}{6} = \frac{48}{30}$$

Dificuldade 1- Inverter a operação na divisão de fração;

Ao realizar a inversão da fração, os alunos podem ter dificuldades em compreender a troca da operação de divisão para a multiplicação, não compreendendo que dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo seu inverso.

Dificuldade 2: Realizar a divisão entre os numeradores e entre os denominadores

Essa dificuldade está relacionada à tentativa de realizar a operação de divisão de maneira direta, dividindo os numeradores das frações entre si e os denominadores de maneira semelhante. Logo, uma possível divisão poderia ser:

$$\frac{9}{8} : \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Exemplo 1: Osvaldo resolveu repartir um sítio. Ele ficou com $\frac{1}{3}$ das terras e dividiu a outra parte entre seus quatro filhos. Represente com uma fração a parte do sítio que cada filho de Osvaldo recebeu? (BIANCHINI, 2015)

Durante a elaboração da sequência didática, Joana decidiu resolver alguns problemas na lousa para, posteriormente, propor algumas situações-problema aos estudantes. Desse modo, não elencamos possíveis estratégias e dificuldades que poderiam ser manifestadas na resolução do problema em sala de aula pois ele foi resolvido como exemplo pela professora.

Para a resolução da atividade em sala de aula, Joana descreve a intenção de no primeiro momento realizar a subtração utilizando por meio da estratégia do MMC.

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}$$

Em um segundo momento, para realizar a partilha da quantidade restante pelos 4 filhos, Joana indica a utilização do algoritmo da divisão, do seguinte modo:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{12}$$

Assim, após realizar a divisão e obter a fração $\frac{2}{12}$, a professora sinaliza a realização da simplificação da fração, obtendo como resposta a fração $\frac{1}{6}$.

4- Para realizar um trabalho, dividiu-se um fio de cobre em 3 partes iguais. Cada uma dessas partes foi dividida ao meio, finalmente, cada uma dessas partes foi dividida em 4 partes iguais. Qual é a fração que cada uma dessas partes menores representa? (BIANCHINI, 2015)

5- Comprei um tablet. Dei de entrada $\frac{2}{5}$ do valor e dividi o restante em 6 prestações iguais. Represente com uma fração a parte do valor do tablet que deverei pagar em cada prestação. (BIANCHINI, 2015)

Estratégias para os problemas 4 e 5

Estratégia 1: Uso do algoritmo de divisão de fração.

Essa estratégia está relacionada ao uso do algoritmo da divisão de fração, podendo ser qualquer um dos dois procedimentos descritos anteriormente.

Dificuldade 1- Modelagem do problema

Para a resolução do problema, os alunos podem apresentar uma dificuldade na modelagem do problema, como a interpretação ou a transposição da linguagem materna para uma linguagem matemática, para posteriormente, aplicar o algoritmo da divisão

Exemplo 2: Juliana passará 3/5 de suas férias na praia e o restante em casa. Sabendo que Juliana possui no total 45 dias de férias, quantos dias ela passará em casa? (EBSERH, 2015)

Para a resolução com os alunos, Joana indica a realização da resolução encontrando, em um primeiro momento a fração que representa o restante das férias de Juliana, por meio da subtração das frações:

$$\frac{1}{1} - \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{5} - \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{2}{5}$$

Em um segundo momento, Joana observa que para a continuidade da resolução do problema é necessário encontrar a quantidade equivalente a fração $\frac{2}{5}$, utilizando o seguinte procedimento:

$$\frac{2}{5}\ de\ 45 => \frac{2}{5} \cdot \frac{45}{1} => \frac{90}{5} => 18$$

6- Para encher 2/3 de uma piscina são necessários 6000 litros de água. Qual a capacidade dessa piscina? (PEREIRA, 2017)

7- Roberto e Marina juntaram dinheiro para comprar um videogame. Roberto pagou por 5/8 do preço e Marina contribuiu com R$ 45,00. Quanto custou o videogame? (EBSERH, 2015)

Estratégia 1 – Representação na forma figural

Para a resolução dos problemas 6 e 7, os alunos podem utilizar de uma representação figural do todo para encontrar a fração correspondente à parte que está faltando. Dessa maneira, no problema 6, a representação é dividida em 3 partes iguais e verifica que cada parte equivale a 3000 L, portanto a capacidade total da piscina é de 9000 L.

Estratégia 2- Encontrar a quantidade restante

Inicialmente é possível encontrar a fração restante do inteiro por meio de uma operação de subtração. Assim, no problema 7, os alunos verificam que Marina contribuiu com $\frac{3}{8}$ do videogame que equivale a R$ 45,00. Em um segundo momento, é necessário verificar quanto vale $\frac{1}{8}$ do valor do videogame, realizando uma divisão ou por meio da representação figural, obtendo o valor de R$15,00. Por fim, como cada parte vale R$15,00 e foi dividido em 8 partes iguais, o valor do videogame é de R$ 120,00.

Dificuldade 1- Encontrar a fração do restante;

Em ambos os problemas, uma dificuldade inicial pode ser na tentativa de encontrar o valor restante, seja pelo uso indevido de uma operação aritmética ou uma representação figural incorreta.

8- Ana e Bianca recebem, por mês, a mesma quantia em dinheiro. Ana gasta 3/4 do que ganha e Bianca, 3/5. Quem gasta mais? (PEREIRA, 2017)

Estratégias 1- Encontrar duas frações equivalentes de mesmo denominador

Nessa estratégia os alunos buscam duas frações equivalentes às frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{5}$ que possuam o mesmo denominador. Para isso, é possível que os alunos percorram essa estratégia por meio de 3 procedimentos:

- Utilização do algoritmo para encontrar o Mínimo Múltiplo Comum e encontrar a fração equivalente por meio da "regra" (para encontrar o novo numerador divide o valor do MMC pelo denominador e o resultado multiplica pelo numerador);
- Operações de multiplicação de um mesmo número no numerador e denominador da fração até encontrar um denominador comum;
- Encontrar o denominador comum por meio de uma sequência de múltiplos e posteriormente encontrar as frações equivalentes.:

Estratégia 2- Representação figural

Os alunos representam as duas frações por meio de figuras e encontram as frações correspondentes para depois compará-las. É importante ressaltar que para a validade dessa estratégia é necessário que os inteiros sejam iguais e as divisões sejam feitas em partes iguais, para poder compará-las. Por isso, uma possível dificuldade é o uso de inteiros com tamanhos diferentes e as divisões das partes não sejam iguais, o que ocasionaria uma comparação indevida.

Dificuldade 1: Comparar os números naturais

Uma dificuldade presente no estudo de frações é a comparação das partes das frações (BRASIL, 1998; OLIVEIRA, 2016). Nesse contexto, os alunos podem concluir que como os numeradores das duas frações são iguais e o denominador da fração $\frac{3}{5}$ é maior que da fração $\frac{3}{4}$, então a fração $\frac{3}{5}$ é a maior fração. Para superar essa dificuldade, a professora pode recorrer a ideia de frações equivalentes para comparar as frações ou ao uso de uma representação figural.

Sequência didática de números decimais

1- Após apresentar a unidade, o décimo, o centésimo e o milésimo correspondente no material dourado. Responda: [64]

a- Quantos décimos tem em 2 unidades?
b- Quantos centésimos tem em 2 unidades?
c- Quantos milésimos tem em 2 unidades?
d- Quantos centésimos tem em 5 décimos?
e- Quantos milésimos tem em 5 décimos?
f- Quantos centésimos tem em 3 unidades e 4 décimos?
g- Como eu posso representar 35 décimos com o material dourado? E se eu tiver que utilizar a menor quantidade de peças possível?

Estratégia 1- Manipulação do Material Dourado

A partir da apresentação de que o cubo grande é chamado de unidade, a placa de décimo, a barra de centésimo e o cubo pequeno de milésimo, os alunos manipulam o material dourado verificando a quantidade correspondente a cada item. Por exemplo, no item a, é possível realizar a contagem e verificar que 10 placas correspondem a uma unidade, então em duas unidades têm 20 décimos.

Estratégia 2- Percepção de regularidades

Após um manuseio inicial do material dourado, é possível que os alunos percebam a regularidade existente entre a unidade, décimo, centésimo e milésimo e realize a multiplicação para encontrar a solução.

Dificuldade 1- Relacionar as peças ao valor estabelecido

Uma dificuldade inicial está em relacionar as peças do material dourado com os valores estabelecidos (unidade, décimo, centésimo e milésimo), podendo levar em composições e decomposições equivocadas.

2- Que fração eu posso representar o décimo (placa), o centésimo (barra) e o milésimo (cubo pequeno) em relação a unidade (cubo grande)?

Estratégia 1 – Ideia de Fração

[64] Fonte (adaptado): Andrade (2016)

Conforme solicitado na atividade, nessa estratégia os alunos mobilizam o significado parte-todo de fração para buscar a representação adequada para cada peça. Assim, por meio de regularidades percebidas na atividade anterior, ou pela manipulação do material dourado, obtém-se a fração relacionada a cada peça. Por exemplo: a placa representa $\frac{1}{10}$ do cubo que representa a unidade.

3- Como é possível representar a $3\frac{1}{2}$ sem utilizar frações? E $\frac{1}{4}$?

Estratégia 1 – Representação Figural

Uma estratégia de nível mais empírico é o uso de representações figurais para representar a função. Essa estratégia advém da trajetória dos alunos, pois no estudo de funções é usual esse tipo de representação. Além disso, é possível que os alunos representem por meio de desenhos relacionando com as peças do material dourado, por terem trabalhado nas atividades anteriores com esse recurso.

Estratégia 2 – Representação com números decimais

Para essa estratégia, os alunos podem mobilizar a ideia de número decimal para a representação das frações solicitadas, tendo em vista que esse tipo de representação numérica é mobilizado no cotidiano do aluno.

Dificuldade 1 - Associação da fração com o número decimal

Por se tratar do início do estudo formal dos números decimais, conforme destaca Esteves e Souza (2012), os alunos podem ter dificuldades na associação da fração com o número decimal correspondente, interpretando-os como dois objetos matemáticos distintos.

4- Quatro irmãos querem comprar um chocolate que custa 5 reais. Se eles forem dar a mesma quantia, com quanto que cada irmão deve contribuir?

Estratégia 1- Fração

Para a resolução da situação proposta, pode-se mobilizar a representação fracionária, contemplando o significado de divisão, para a resolução da atividade. Dessa maneira, como os R$5,00 devem ser divididos em 4 partes iguais, cada irmão contribui com $\frac{5}{4}$. Entretanto, ao utilizar essa ideia, uma dificuldade a se observar é o uso da $\frac{4}{5}$ devido ao trabalho usual da relação parte todo em que o numerador é menor que o denominador.

Estratégia 2 – Relação com o sistema monetário

Por se tratar de um problema que envolve o sistema monetário, os alunos podem resolvê-lo como se estivessem na situação, por meio de uma decomposição e divisão dos valores em 4 partes iguais. Então, percebe-se que se cada irmão contribuir com R$ 1,00, eles terão R$ 4,00 e para completar o R$ 1,00 que falta cada irmão contribui com mais R$0,25, totalizando R$1,25.

Estratégia 3 – Algoritmo da divisão

Nessa estratégia, mobiliza-se o algoritmo da divisão para encontrar o valor que cada irmão deve contribuir, realizando 5:4. Por se tratar de um problema inicial que pode ser resolvido pela divisão, os alunos podem ter dificuldades na continuidade do algoritmo quando a divisão apresentar o resto 1.

5- Juca disse que 4,876 é maior que 4,89 porque tem mais algarismos. Ele está certo? Justifique sua resposta.

Estratégia 1 - Comparação das casas decimais

Essa primeira estratégia é a comparação dos números por meio de cada casa decimal. Assim, como os valores das unidades e dos décimos são iguais, percebe-se que o 4,89 é maior que o 4,876 pois na casa do centésimo o 9 é maior que o 7.

Estratégia 2 – Comparar o número da parte decimal

Incialmente, iguala-se a quantidade de casas decimais nos dois números e se comparam a parte decimal para verificar qual é maior. Assim, percebe-se que o 4,89 é maior que 4,876 pois ao comparar 890 é maior que 876. Entretanto, uma dificuldade que pode ocorrer nessa estratégia é fazer a comparação sem considerar o sistema posicional e comparar 89 e 876, concluindo que 4,876 é o maior (BRASIL, 1998).

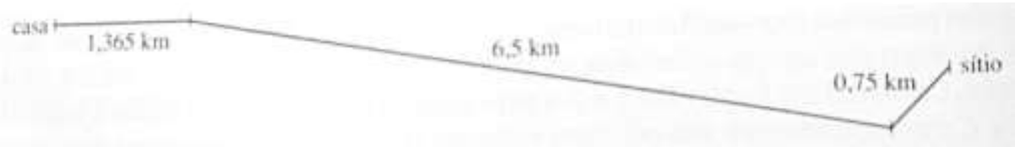
Dificuldade 1 - Tamanho da escrita numérica

Em conformidade ao apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) o tamanho da escrita numérica pode ser um indicativo, no caso dos números naturais, para comparação entre dois números. Caso utilizada essa estratégia, os alunos podem indicar que o número 4,876 é maior que o número 4,89 poia há mais casas decimais.

Observação: em ambas as estratégias é possível mobilizar o recurso do quadro valor lugar para fazer a comparação.

6- Laércio fez um esquema do percurso entre a casa onde mora e o sítio dele. Observe esse esquema. Nele, as distâncias são indicadas em quilômetro.

Figura 33 - Representação do problema 6 de números decimais



Fonte: Bianchini (2015)

Calcule, em quilômetro, a distância da casa de Laércio até a entrada do sítio dele.[65]

Estratégia 1 - Soma de fração

Conforme indica Ribeiro (2011) uma importante estratégia no ensino dos números racionais é o uso de diferentes representações. Nesse sentido, pode-se transformar os valores apresentados em frações e realizar a soma das frações encontradas. Ao trabalhar com frações é possível que os alunos apresentem dificuldades na soma de frações, em especial com denominadores diferentes.

Estratégia 2 - Algoritmo da adição dos decimais

Para a resolução dessa estratégia, mobiliza-se o algoritmo da soma de números decimais, considerando o sistema posicional para a montagem do algoritmo. Entretanto, de acordo com Jucá e Sá (2012) devido à memorização de regras e desconhecimento do sistema posicional decimal, os alunos podem montar de maneira indevida o algoritmo da adição.

7- Observe a situação a seguir:

[65] Fonte: Bianchini (2015)

Figura 34 - Representação do problema 7 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

c) Qual é o valor de troco que Marcos irá receber?
d) Qual o valor total que Marcos irá obter após receber o troco?[66]

8- Calcule: [67]

a- 0,075 + 0,325
b- 0,725 + 0,275
c- 1,6 + 4
d- 3,716 + 8,634
e- 7,7 – 4,7
f- 16,05 – 8,8
g- 26,44 – 25,4
h- 168,6 – 90,16

Estratégias para as atividades 7 e 8:

Estratégia 1- Algoritmo da subtração (e adição)

De maneira análoga à apresentada para a atividade 6, durante a resolução das atividades os estudantes podem utilizar os algoritmos da subtração e da adição. Dessa maneira, na atividade 7, no item a, os alunos descobrem que o troco que Marcos receberá será R$ 1,25. Já no item b, ao somar o troco com a quantidade que Marcos indica ter, os alunos concluem que ele ficará com o total de R$ 21,75.

[66] Fonte: Bianchini (2015)

[67] Fonte: Bianchini (2015)

Dificuldade 1 – Representação decimal do número inteiro

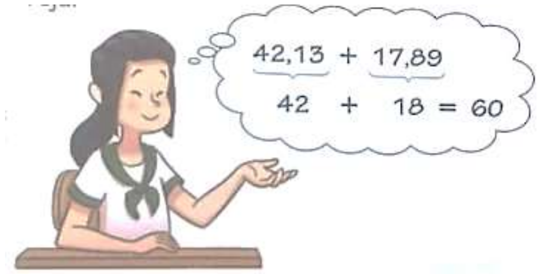
Devido à dificuldade de relacionar os números naturais com os números decimais (ESTEVES; SOUZA, 2012), ao mobilizarem a estratégia do algoritmo da adição e subtração, realizando 20 – 18,75, os alunos podem ter dificuldades em posicionar corretamente os algarismos, respeitando o Sistema de Numeração Decimal.

Estratégia 2 – Técnica do Completamento

Uma possibilidade de realizar essas atividades é por meio da técnica do completamento, por exemplo: na atividade 7, após considerar o valor da compra, refletem qual o valor que falta para totalizar R$ 20,00, que foram usados para o pagamento. Assim, com R$ 0,25 completa R$19,00 e para atingir o valor total, falta apenas R$ 1,00, totalizando R$ 1,25 no valor que Marcos recebeu de troco.

9- Débora quer calcular mentalmente o valor aproximado de 42,13 + 17,89. Para isso, ela arredondou cada parcela para a casa das unidades mais próximas e, em seguida, efetuou o cálculo. Veja.

Figura 35- Representação do problema 9 de números decimais



Fonte: Bianchini (2015)

Calcule mentalmente o resultado aproximado de cada item.[68]

a) 2,86 + 4,95

b) 11,24 + 5,67

c) 9,11 + 31,74

d) 12,12 - 6,43

e) 32,77 – 9,64

f) 53,42 – 10,38

[68] Fonte: Bianchini (2015)

Estratégia 1 - Realizar o arredondamento e o cálculo mental

Conforme apresentado no exemplo da atividade, os alunos podem realizar um arredondamento inicial e depois mobilizar a técnica do cálculo mental. Destacamos que apesar de exemplificado na atividade, os alunos podem encontrar dificuldades no cálculo mental caso decidam realizar primeiro a operação para depois realizar o arredondamento. Conforme apresentado por Guimarães (2009), no trabalho inicial com cálculo mental os alunos podem encontrar dificuldades na organização e elaboração de estratégias de resolução, como a tentativa de reproduzir o algoritmo mentalmente.

Estratégia 2 – Algoritmo da adição (subtração)

Apesar da atividade solicitar o cálculo mental, é possível que os alunos mobilizem o algoritmo da adição (subtração) durante a resolução da atividade proposta.

10- Ganhei da minha avó R$ 100,00 na sexta-feira. No sábado, comprei uma camiseta de R$ 37,50 e uma bermuda de R$ 36,25. Além disso, tomou um lanche de R$ 7,75. Quanto sobrou da quantia que ganhei?[69]

Estratégia 1 – Composição dos gastos

Inicialmente os alunos podem realizar a soma de todos os gastos realizados e, em um segundo momento, verificar quanto resta do dinheiro que ganhou da avó. Para isso, eles podem recorrer às estratégias já cotadas como o cálculo mental, o uso dos algoritmos e a técnica do completamento.

Estratégia 2 – Subtração sucessivas

Diferentemente da estratégia anterior, é possível que os alunos resolvam o problema seguindo uma ordem cronológica dos eventos descritos, realizando a subtração de cada gasto a partir do valor que tem no momento.

11- Preciso comprar uma borracha, uma lapiseira e uma caneta. Qual desses objetos eu consigo comprar se eu tenho apenas R$2,60?[70]

---

[69] Fonte: Bianchini (2015)
[70] Fonte: Bianchini (2015)

Figura 36 - Representação do problema 11 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Para esse problema que tem como objetivo a comparação dos números na forma decimal, elencamos como possíveis estratégias:

Estratégia 1 - Comparação das casas decimais

Uma primeira estratégia é a comparação dos números decimais a partir de cada casa decimal. Desse modo, após compararem a parte inteira de todos os números decimais, que são iguais, os estudantes percebem que é possível comprarem a caneta ou a borracha, já que possuem a primeira casa decimal menor que a primeira casa decimal referente ao valor que tinham para comprar os produtos (R$ 2,60).

Estratégia 2 – Comparar o número da parte decimal

Nessa estratégia, compara-se a parte decimal dos números envolvidos no problema, verificando que não é possível comprar apenas a lapiseira, já que sua parte decimal (0,99) é maior que a parte decimal do valor que se tem para comprar os produtos (0,60).

12- Veja essa oferta:

Figura 37 - Representação do problema 12 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Para as pessoas que compraram esses óculos de sol hoje, quanto economizariam em relação ao preço de ontem?[71]

Estratégia 1 – Algoritmo da subtração

Os estudantes podem mobilizar o algoritmo da subtração para encontrar a diferença do preço dos óculos. Desse modo, ao armar a subtração 112,70 – 97,40, os alunos obtêm o valor de R$ 15,30.

Estratégia 2 – Técnica do completamento

Por meio da técnica do completamento, é possível que os alunos reflitam que partindo dos R$97,00 seria necessário R$15,00 para obterem R$112,00. Dessa maneira, faltariam apenas R$ 0,30 para atingir o valor da roupa no dia anterior de R$ 112,70, descobrindo a variação de R$ 15,30 no valor do produto de um dia para o outro.

Estratégia 3 – Cálculo mental

Após terem trabalhados com a técnica de cálculo mental na atividade 9, pode ser que os estudantes utilizem essa estratégia para a resolução da atividade 12. Assim, os estudantes podem verificar a diferença na parte inteira (real) e a parte decimal (centavos), obtendo R$ 15,30.

13- Realize a multiplicação e divisão usando a calculadora:[72]

[71] Fonte: Bianchini (2015)
[72] Fonte: Bianchini (2015)

a- 3,18 x 10
b- 3,18 x 100
c- 3,18 x 1000
d- 10 x 9,5
e- 100 x 0,0075
f- 10.000 x 0,0456
g- 54,6 : 10
h- 54,6 : 100
i- 214,3 : 100
j- 214,3 : 1.000
k- 35 : 10
l- 35 : 100

Estratégias: Uso da calculadora

Essa atividade tem como objetivo a percepção da regularidade das multiplicações e divisões por uma potência de base 10. Assim, os alunos utilizam a calculadora para obter as respostas das operações solicitadas, registrando-as no caderno.

14- Sem o uso da calculadora, qual é o produto de 3,459 x 100? Por que é esse valor?

15- Sem o uso da calculadora qual é o quociente de 35,46 : 10? Por que é esse valor?

Descrevemos as estratégias e dificuldades das atividades 14 e 15:

Estratégia 1 – Percepção de regularidade

Após realizar a atividade anterior, é possível que os alunos percebam a regularidade existente no comportamento da posição da vírgula após as operações de multiplicação e divisão por uma potência de base 10. Desse modo, pautado nessa regularidade, verifica-se que a resposta da atividade 14 é 3459 e da atividade 15 é 3,546.

Estratégia 2 – Algoritmo da multiplicação (divisão)

Ao analisar o Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul, observamos que no 5º ano é realizado um estudo com os números racionais na forma decimal, contemplando as operações aritméticas (MATO GROSSO DO SUL, 2019). Nesse contexto, os alunos podem mobilizar o algoritmo da multiplicação para resolver o 14 e o algoritmo da divisão para a atividade 15.

Dificuldade 1 – Compreensão dos algoritmos da multiplicação e divisão

Pesquisas relacionadas com o ensino e aprendizagem de números decimais identificaram que uma das dificuldades presentes no tema é o uso de técnicas algorítmicas em detrimento da compreensão do sistema de numeração decimal (ESTEVES; SOUZA, 2012; CUNHA, MAGINA, 2004). Ao mobilizar o algoritmo da multiplicação os alunos podem ter dificuldades na sua compreensão, podendo recorrer à regra da adição e subtração (colocando vírgula embaixo de vírgula). Já no algoritmo da divisão, é possível que não compreendam a ideia de igualar a quantidade de casas decimais e depois retirar as vírgulas.

16- Karla foi ao mercado comprar tomate que estava custando R$2,20 o quilo. Sabendo disso, responda:

a- Se Karla comprar 2kg, qual valor ela irá pagar?

b- Se comprar 1,5kg, qual valor ela irá pagar?

c- E se comprar 1,7 kg?

Estratégias 1 – Soma

Uma primeira estratégia, com o nível mais empírico é a soma sucessiva do valor do quilograma do tomate, como no item a: 2,20 + 2,20 = 4,40.

Estratégia 2 – Decomposição e soma

Essa estratégia consiste na decomposição do valor do quilograma para quantidades parciais solicitadas. Assim, sabe-se que o quilograma do tomate custa R$2,20, então 0,5 kg custa R$ 1,10, totalizando R$ 3,30 o valor de 1,5 kg de tomate.

Estratégia 3 – Operação de Multiplicação

Nessa estratégia, que pode ser mobilizada nos três itens dessa atividade, o aluno mobiliza a operação de multiplicação para encontrar o valor pago na compra do produto. Dessa maneira, pode-se recorrer ao algoritmo da multiplicação tendo como parcelas o valor do quilograma do tomate pela quantidade comprada.

17- Efetue cada uma das multiplicações abaixo.

a- 2,7 x 3,9

b- 5,75 x 7

c- 0,45 x 0,82

d- 24 x 3,14

e- 4,5 x 7,6

f- 0,125 x 48

Estratégia 1- Algoritmo da multiplicação

Para a resolução da atividade 17, é possível a utilização do algoritmo da multiplicação em todos os itens. Por exemplo, na resolução do item a, após montar a multiplicação de 2,7 x 3,9, obtém como resultado 10,53.

Dificuldade 1 – Compreensão dos algoritmos da multiplicação

De maneira análoga a apresentada na análise *a priori* das atividades 14 e 15, os estudantes podem apresentar dificuldades na utilização do algoritmo da multiplicação, em conformidade ao apresentado em pesquisas sobre o tema (ESTEVES; SOUZA, 2012; CUNHA, MAGINA, 2004).

Estratégia 2 – Conversão e uso da representação fracionária

Para o uso da estratégia 2, os alunos realizam a conversão dos valores decimais para frações e realizam a multiplicação de fração, seguindo a ideia de multiplicação dos numeradores e a multiplicação dos denominadores.

18- Sandra comprou em uma loja 10 metros de fita dourada e pagou R$ 0,85 cada metro. Em outra loja, ela comprou 8,20 m de por R$ 1,10 cada metro. Em qual das lojas Sandra gastou mais dinheiro? Quanto foi a diferença?[73]

Para encontrar o valor gasto na primeira loja, os alunos podem utilizar das seguintes estratégias:

Estratégia 1 – Soma sucessiva

Apesar de ser trabalhosa, uma possível estratégia é o uso da soma de 10 parcelas de R$ 0,85, obtendo R$ 8,50.

Estratégia 2 – Percepção de regularidade

[73] Fonte (adaptado): Bianchini (2015)

Após perceber que o valor gasto na primeira loja é possível de ser encontrado a partir da multiplicação de R$ 0,85 por 10, utiliza-se a regularidade trabalhada na atividade 14. Assim, por se tratar de uma multiplicação por 10, o valor gasto será de R$ 8,50.

Além disso, há a possibilidade de encontrar os valores gastos por meio da terceira estratégia:

Estratégia 3 – Uso da multiplicação

Nesse momento, cabe ressaltar que o uso da multiplicação pode ser feito utilizando a forma decimal ou a forma fracionária, como descrita anteriormente. Em um segundo momento, realiza-se a comparação dos valores encontrados para verificar em qual loja Sandra gastou mais. Por fim, para encontrar a diferença gasta, os alunos podem utilizar o algoritmo da subtração ou a técnica do completamento.

19- Resolva[74].

Figura 38 - Representação do problema 12 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Estratégia 1- Algoritmo da divisão

Para encontrar o valor pago por cada chiclete, utiliza-se o algoritmo da divisão, dividindo $15 \div 20$, obtendo como resultado o valor de R$ 0,75.

Estratégia 2 – Decomposição

Na estratégia 2, realiza-se a decomposição a partir do valor descrito, verificando que 10 chicletes custam R$ 7,50. Posteriormente, pode-se realizar a divisão do valor de 7,50 por 10,

[74] Fonte: Bianchini (2015)

por meio do algoritmo ou da regularidade já trabalhada anteriormente, encontrando o valor unitário do chiclete de R$ 0,75.

20- Paula encheu o tanque de combustível do carro e anotou em um bloquinho de papel o número 12.349, que correspondia, no hodômetro (marcador de quilometragem) do painel do carro, aos quilômetros rodados. Após alguns dias, ela retornou ao posto e voltou a encher o tanque do carro. Verificou que a bomba de etanol indicava 48 litros e que o número mostrado no hodômetro de seu carro era 12.805.[75]

Figura 39 - Representação do problema 20 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

a- Quanto Paula pagou pelos 48 litros de combustível, sabendo que, nesse dia, o etanol custava R$ 2,395 o litro naquele posto?

b- Quantos quilômetros o carro de Paula faz com 1 litro de etanol?

Após encontrar a distância percorrida a partir dos valores apresentados no problema (seja por meio do algoritmo da subtração ou por completamento), os estudantes têm a possibilidade de utilizar as seguintes estratégias:

Estratégia 1 – Uso dos algoritmos da multiplicação e divisão

Para o item a, pode-se mobilizar o algoritmo da multiplicação para encontrar os valores gastos, multiplicando 48 x 2,395 = 114,96, e encontrando o valor de R$ 114,96. Já no item b,

[75] Fonte: Bianchini (2015)

após encontrar a distância percorrida a partir dos valores apresentados no problema (seja por meio do algoritmo da subtração ou por completamento), mobiliza-se o algoritmo da divisão realizando 456 : 48 = 9,5, verificando que o carro fez 9,5 km/l.

Estratégia 2 - Conversão e uso da representação fracionária

Como explicitado na estratégia anterior, é possível realizar a multiplicação e a divisão, para resolver os itens a e b, respectivamente. Para isso, os estudantes podem mobilizar uma representação fracionária durante a resolução, por exemplo: no item a, é possível converter 2,395 em $\frac{2395}{1000}$ e 48 em $\frac{48}{1}$ para realizar a multiplicação das frações. Assim, $\frac{48}{1} . \frac{2395}{1000} = \frac{114960}{1000}$ e, convertendo novamente para a forma decimal, obtém-se 114,96.

21- Uma costureira usou 2 metros e 75 centímetros de cetim para cada túnica dos participantes de um coral.[76]

Figura 40 - Representação do problema 21 de números decimais

Fonte: Bianchini (2015)

Quantos participantes há nesse coral? Quanto sobrou de tecido?

Estratégia 1- Algoritmo da divisão

Inicialmente, utiliza-se do algoritmo da divisão de 50 : 2,75 para encontrar a quantidade de túnicas confeccionadas. Destacamos que como a quantidades de túnicas confeccionadas

[76] Fonte: Bianchini (2015)

pertencem ao conjunto dos números naturais, uma dificuldade pode ser no uso do algoritmo após o resto ser menor que o divisor, obtendo um quociente não natural.

Estratégia 2 - Tentativa e estimativa

Nessa estratégia é possível estimar a quantidade de participantes e verificar se a quantidade de túnicas produzidas são a maior possível a partir da quantidade de tecidos. Assim, ao considerar 15 participantes, por exemplo, percebe-se que ainda sobra tecido para fazer mais túnicas, até encontrar uma quantidade (18 participantes) que não há mais tecido suficiente.

Estratégia 3 – Conversão e uso da representação fracionária

Com o intuito de realizar a divisão da quantidade total de tecidos pela quantidade utilizada para a produção de cada túnica, após realizar a conversão para a representação fracionária, os estudantes podem realizar a divisão do seguinte modo:

$$\frac{50}{1} : \frac{275}{100} => \frac{50}{1} \cdot \frac{100}{275} => \frac{5000}{275}$$

Ao obterem a fração $\frac{5000}{275}$, é possível que os alunos realizem a simplificação da fração $(\frac{200}{11})$ e, posteriormente, após converterem para a representação decimal de 18,181818…, concluem que é possível produzir 18 túnicas.

22- Calcule os quocientes.[77]

a- 25,46 : 6,7

b- 1,6632 : 0,924

c- 124,976 : 8,56

d- 0,09 : 0,36

e- 203,82 : 15,8

f- 93,4656 : 9,736

[77] Fonte: Bianchini (2015)

De maneira análoga ao apresentado na atividade 21, para a resolução da atividade 22, os estudantes podem mobilizar as *estratégias do algoritmo da divisão (Estratégia 1)* e a *conversão e uso da representação fracionária (Estratégia 2).*

Sequências didática de sistemas de equações do 1º grau

1- Nessa atividade o desafio é encontrar dois números cuja soma é igual a 17. E se a diferença entre esses números for igual a 5, quais seriam esses números?

2- Encontre dois números cuja soma é igual a 20 e a diferença entre eles igual a 14.

3- Encontre dois números cuja soma é igual a 70 e a diferença entre eles igual a 28.

Estratégias de resolução para as atividades 1, 2 e 3:

Estratégia 1 – Tentativa

Uma estratégia com o caráter mais empírico é por meio da tentativa de atribuição de valores e verificação da validade. Assim, na atividade 1, os alunos podem testar, por exemplo: 10 e o 7, percebendo que é válido para o primeiro item e não é válido para o segundo. Essa estratégia de tentativas pode ser realizada em diferentes níveis, com tentativas aleatórios ou a partir de uma organização sistemática, além do uso de outros recursos como uma tabela de dupla entrada. Nesse sentido, caso a tentativa seja realizada aleatoriamente, os alunos podem ter dificuldades em perceber que há mais possibilidades ainda não testadas.

Ressaltamos que apesar de possível realizar a estratégia de tentativa na atividade 3, esse problema foi escolhido com o intuito que os alunos reflitam sobre a viabilidade dessa estratégia e mobilizem uma estratégia mais eficiente, como a modelagem.

Estratégia 2 – Modelagem e resolução do sistema linear

A estratégia 2 consiste na modelagem da situação proposta de uma linguagem materna para uma linguagem matemática para um trabalho posterior. Os alunos ao lerem o problema proposto podem representá-lo por meio de duas equações, que constituem um sistema, por exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

O processo de modelagem pode representar um momento de dificuldades para os alunos, em conformidade ao apresentado por Lochhead e Mestre (1995 apud ROCHA, 2010) e Barros, Fernandes e Araújo (2012) que indicam a dificuldade da tradução da linguagem materna para a linguagem matemática. Em um segundo momento, os alunos podem mobilizar uma técnica de resolução do sistema de equações lineares, como o método da adição e o método da substituição.

Estratégia 2.1 – Método da adição

A técnica da adição pode ser realizada, como apresenta Bianchini (2015) do seguinte modo:

- Multiplicar todos os termos das equações por um número conveniente, de modo que os novos coeficientes de uma das incógnitas sejam números opostos;
- **adicionar** os primeiros membros e os segundos membros das novas equações, obtendo uma terceira equação com uma só incógnita;
- resolver a terceira equação e substituir o valor obtido para sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita. (BIANCHINI, p, 207, grifo do autor).

Utilizando a técnica descrita, a resolução do sistema de equações modelado na atividade 1 é:

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases} => \begin{cases} x + y = 17 \\ 2x = 22 \end{cases} => \begin{cases} x + y = 17 \\ x = 11 \end{cases} => \begin{cases} x + y = 17 \\ x = 11 \end{cases} =>$$

$$\begin{cases} 11 + y = 17 \\ x = 11 \end{cases} => \begin{cases} y = 6 \\ x = 11 \end{cases}$$

Logo, a solução da atividade proposta são os números 11 e 6.

Estratégia 2.2 – Método da Substituição

O método da substituição é descrito por Bianchini (2015) da seguinte maneira:

- isolar, no 1º membro de uma das equações, uma das incógnitas;
- **substituir**, na outra equação, a incógnita isolada pela expressão do 2º membro, obtendo uma terceira equação com a outra incógnita apenas;

- resolver a terceira equação e substituir o valor obtido para a sua incógnita, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita. (BIANCHINI, p. 206, grifo do autor)

Ao mobilizarem a técnica da substituição no problema proposto, os alunos podem resolver da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x + y = 17 \quad (1) \\ x - y = 5 \quad\ (2) \end{cases}$$

Isolando o x na equação (1), $x = 17 - y$, e ao substituir na equação (2) tem-se: $(17 - y\ ) - y = 5$.

Ao resolver a nova equação, em função de y, obtém-se que $y = 6$. Por fim, como descrita no método da substituição, ao substitui o valor de y na equação (1), conclui-se que:

$$x + y = 17 \ => x + 6 = 17 => \ x = 11$$

Portanto os valores que atendem a atividade proposta é 11 e 6.

Observação: Nesse momento os alunos podem apresentar dificuldades em procedimentos aritméticos e tratamentos algébricos ao longo da resolução dos métodos, que podem comprometer na resolução obtida, como a operação de números inteiros, substituição e multiplicação que contêm parênteses, resolução de uma equação do 1º grau, entre outras.

Dificuldade 1 – Compreender a ideia da solução do sistema de equações

Os alunos podem apresentar soluções que satisfaçam a primeira equação e a segunda equação separadamente, tendo dificuldades de compreender que a solução do sistema de equações deve satisfazer todas as equações do sistema linear.

Deixamos claro, de antemão, que para os demais problemas da sequência didática de sistemas de equações elencamos novamente como possíveis estratégias a *tentativa (estratégia 1)* e a *modelagem e resolução do sistema linear (estratégia 2)*, podendo ser pelo método da adição ou substituição. Como exibimos, de maneira detalhada essas estratégias anteriormente, para a composição desse texto apresentamos apenas as demais atividades apenas citamos as estratégias, sem descrevê-las novamente.

4- A soma das idades de Janaína e Marisa é 55 anos. A idade de Janaina mais o dobro da idade de Marisa resulta 85 anos. Qual a idade de cada uma?[78]

5- Quando Ricardo nasceu, seu pai tinha 23 anos. Hoje a soma das idades de Ricardo e de seu pai é 59. Qual a idade atual de cada um?[79]

6- Usando alguns dos métodos de resolução, resolva os sistemas abaixo e verifique a solução encontrada.[80]

a) a) $\begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 9 \\ y = x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = y - 5 \\ y = 2x + 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 4x + y = 7 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ 5x - 2y = 29 \end{cases}$

7- Um pai tem 20 anos a mais do que o filho. Determine a idade de cada um, sabendo que daqui a 5 anos o pai terá o dobro da idade do filho.[81]

---

[78] Fonte: Dante (2015)
[79] Fonte: Dante (2015)
[80] Fonte (adaptado): Bianchini (2015)
[81] Fonte: Bianchini (2015)

8- Veja o que diz Luís.[82]

Figura 41 - Representação do problema 8 de sistemas de equações

Fonte: Bianchini (2015)

Descubra quantos jovens estavam reunidos.

9- Cristina retirou R$ 700,00 de um banco, em 10 notas, sendo algumas de R$ 100,00 e outras de R$ 50,00. Quantas notas de R$ 50,00 e de R$ 100,00 Cristina recebeu? [83]

Possíveis estratégias para a resolução das atividades 4 a 9:

Estratégia 1 – Tentativa

Estratégia 2 – Modelagem e resolução do sistema linear (pelo método da adição ou substituição)

[82] Fonte: Bianchini (2015)
[83] Fonte: Bianchini (2015)

10- Resolva os seguintes sistemas[84] $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$; $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$ e

$\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

11- Resolva algebricamente os sistemas e, em seguida, classifique-os em determinado, indeterminado ou impossível[85].

a. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x = 2y = -4 \end{cases}$

f. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$

As atividades 10 e 11 têm como objetivo a compreensão das diferentes classificações de um sistema de equação linear. Nesse contexto, na atividade 10, sem apresentar a classificação em um momento anterior, solicita-se a resolução de 3 sistemas de equações com o intuito que os alunos se deparem com igualdades do tipo 0 = 8 ou 0 = 0. Nesse momento, a partir de questionamentos e discussões sobre o que é solução de um sistema de equações, que os alunos percebam que um sistema de equações pode ter infinitas soluções ou não ter solução.

Possíveis estratégias para a resolução das atividades 10 e 11:

Estratégia 1 – Tentativa

Estratégia 2 – Modelagem e resolução do sistema linear (pelo método da adição ou substituição)

Possíveis dificuldades para as atividades 10 e 11:

Dificuldade 1- Compreender a ideia de absurdo

Ao resolver o segundo sistema de equações, os alunos podem chegar a um absurdo do tipo 0 = 8 (caso utilizem o método da adição, multiplicando a segunda equação por -2). Nesse momento, é possível que os alunos acreditem que tenham realizado algum procedimento inadequado que causou essa igualdade falsa. Em conformidade ao apresentado por Chiari (2011), os alunos podem ter dificuldades em pensar que o sistema proposto não tem solução,

[84] Fonte: Bianchini (2015)
[85] Fonte (adaptado): Bianchini (2015)

pois o fato de a resposta ser “não tem resposta” constitui uma quebra de contrato, já que os alunos, geralmente, não estão acostumados a lidar com questões desse tipo” (CHIARI, 2011, p. 61).

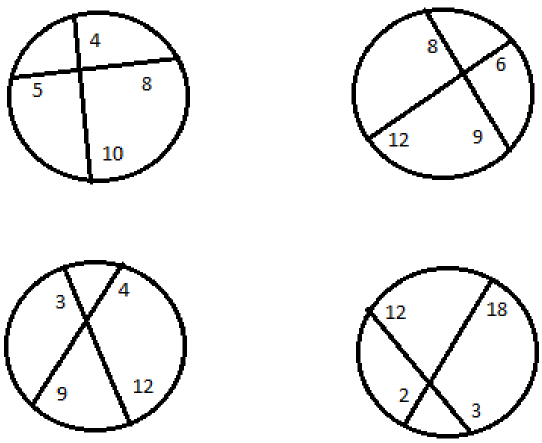
Dificuldade 2 – Compreender a ideia da indeterminação

Uma possível dificuldade é a ideia de indeterminação que o aluno se confronta ao resolver o terceiro sistema de equações. Rocha (2010) destaca que um valor desconhecido pode ser representado por uma expressão do tipo $x = -3y + 4$. Novamente percebemos a noção do contrato didático em jogo, no qual para o aluno, uma atividade sempre deve ter uma resposta numérica.

Sequência didática de relações métricas na circunferência

1- Observando as circunferências a seguir, o que há em comum em todos os casos?

Figura 42 - Representação do problema 1 de relações métricas na circunferência



Fonte: dados da pesquisa

Estratégia 1 – Regularidade do Produto

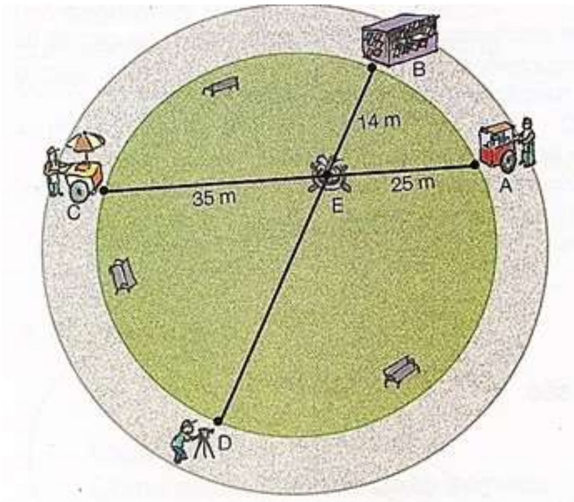
Essa estratégia consiste na percepção da regularidade do produto das medidas dos segmentos de reta formado pelas cordas da circunferência. No primeiro item, percebe-se que $5\ x\ 8 = 40$ é igual a $4\ x\ 10 = 40$, então verifica-se nos demais itens que o produto das medidas dos segmentos de reta de uma corda é igual ao produto das medidas dos segmentos de reta da outra corda. Uma dificuldade inicial e a tentativa de encontrar outras regularidade por meio de outras operações como a adição ou subtração.

Dificuldade 1 – Percepção de regularidades

Ao se deparar com as 4 situações propostas, os alunos podem ter dificuldades em perceber uma regularidade na situação, tentando realizar operações de maneira aleatória.

2- Numa praça circular há os seguintes prestadores de serviço:[86]

Figura 43 - Representação do problema 2 de relações métricas na circunferência



- o pipoqueiro, que fica no ponto A, a 25 m da fonte de água (ponto E);
- o jornaleiro, que fica no ponto B, a 14m da fonte de água;
- o sorveteiro, que fica no ponto C, a 35 m da fonte de água.

Qual é à distância do fotógrafo, que está no ponto D, até a fonte de água?

Estratégias 1 - Atribuir valor numérico

Uma estratégia, com um nível empírico, é a tentativa de atribuir um valor numérico a partir da figura apresentada. Dessa maneira, ao observar a figura e as distâncias dadas, os alunos podem apresentar uma distância do fotógrafo até a fonte, comparando a distância de outras pessoas até a fonte.

Estratégia 2 – Tentativa do valor numérico - Regularidade do produto

[86] Questão do concurso público da prefeitura municipal de Campo Maior – Pi (2012). Disponível em: <https://arquivos.qconcursos.com/prova/arquivo_prova/57663/ima-2012-prefeitura-de-campo-maior-pi-professor-classe-b-matematica-prova.pdf>. Acesso em 02 de abril de 2020.

A partir da regularidade da atividade anterior, os alunos podem atribuir um valor numérico na distância procurada, com o objetivo de verificar a regularidade do produto das medidas dos segmentos. Assim, tenta-se um número multiplicado por 14 que dê o mesmo produto de $35 \,.\, 25$. Cabe ressaltar que, por se tratar de um número decimal, os alunos podem ter dificuldades para encontrar o valor numérico que atenda a situação, que é 62,5 metros.

Estratégia 3 – Modelagem da equação do 1º Grau

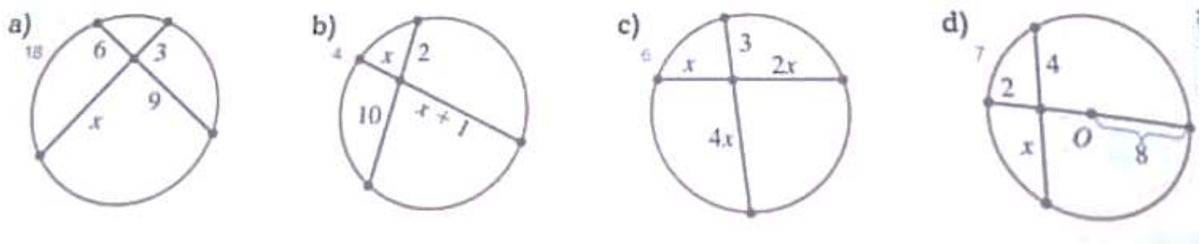
Uma estratégia que pode ser mobilizada pelos alunos é a modelagem de uma equação do 1º grau, mobilizando a regularidade dos produtos das medidas dos segmentos de reta formado pelas cordas da circunferência, por exemplo: $x \,.\, 14 = 25 \,.\, 35$. Ao resolver a equação, percebe-se que a distância do fotógrafo até a fonte é 62,5 metros. Durante a resolução da equação, os alunos podem ter dificuldades em procedimentos de resolução, como a modelagem da situação ou no momento de isolar a incógnita.

Dificuldade 1 – Soma das medidas

Para a resolução, uma dificuldade possível é a tentativa da operação de adição para encontrar a distância desconhecida. Desse modo, ao somar $25 + 35 = 60$, procura-se um número que somado aos 14 metros que dê o mesmo valor, que nesse caso seria 46 metros.

3- Calcule o valor de x em cada uma das figuras abaixo

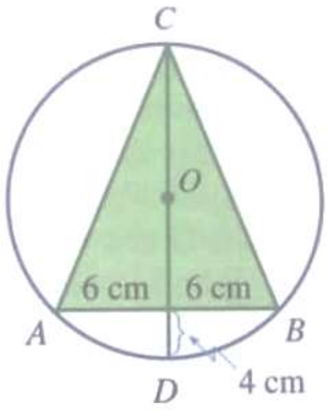
Figura 44 - Representação do problema 3 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

4- Determine a área do triângulo ABC abaixo.

Figura 45 - Representação do problema 4 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

Estratégias para as atividades 3 e 4:

Estratégia 1 - Valor numérico - Regularidade do produto

A primeira estratégia, semelhante à descrita anteriormente, os alunos atribuem valores numéricos para a incógnita x, buscando verificar a regularidade do produto das medidas dos segmentos de cada corda. Por exemplo, no item a da atividade 3, atribui-se valores até colocar o valor de x = 12.

Estratégia 2 – Modelagem da equação do 1º Grau

Para a resolução das atividades, os estudantes podem mobilizar o que foi trabalhado no 1º caso das relações métricas na circunferência para a modelagem das situações apresentadas. Exemplificamos essa estratégia com a resolução do item a da atividade 3, em que em um primeiro momento é possível modelar a equação $x\,.\,3 = 6\,.\,9$ e, posteriormente, ao resolver a equação modelada, os alunos encontram a resposta de x = 18.

Dificuldade item d, da atividade 3 – Diferenciação do centro da circunferência

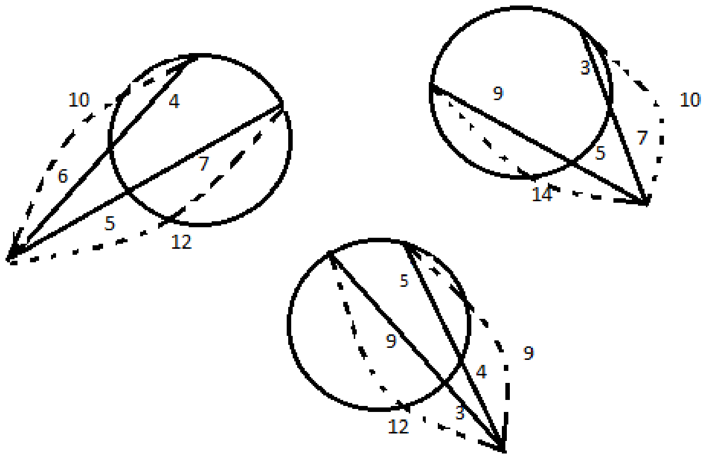
No item d, uma possível dificuldade se deve ao fato de apresentar o centro da circunferência na atividade, dividindo a corda (diâmetro) em 3 segmentos distintos. Assim, os alunos podem realizar produtos equivocados, como a multiplicação das medidas dos 3 segmentos ($2\ x\ 6\ x\ 8 = 96$) ou o produto dos raios $8\ x\ 8 = 64$.

Dificuldade da atividade 4 – Dificuldade com o cálculo da área do triângulo

Em específico na atividade 4, após mobilizar algumas das estratégias destacadas, os alunos mobilizam a fórmula da área do triângulo para obter o valor do item solicitado. ´Ressaltamos que por estar contextualizado com a atividade de áreas, há a possibilidade de os alunos terem dificuldades na interpretação do problema (como perceber o ponto de interseção das cordas) e na mobilização da fórmula da área do triângulo.

5- Observando as circunferências a seguir, qual é a regularidades presente em todos os casos:

Figura 46 - Representação do problema 5 de relações métricas na circunferência



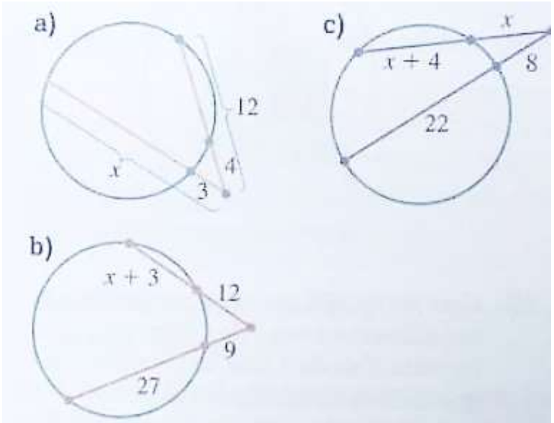
Fonte: dados da pesquisa

Estratégia 1 – Regularidade do Produto

Essa estratégia consiste na percepção da regularidade do produto da medida do segmento secante a circunferência pelo segmento externo a circunferência. Essa estratégia pode se iniciar a partir de multiplicações dos valores dados, buscando encontrar uma regularidade. Desse modo, deve-se atentar que devido ao caso anterior, os alunos podem tentar multiplicar os segmentos de reta do segmento secante, multiplicando o segmento externo e a corda da circunferência: $6\ x\ 4 = 24$. Ao realizar os produtos dos valores dados, no item a os alunos percebem a regularidade multiplicando $10\ x\ 6 = 60$ e verificam a igualdade no produto $12\ x\ 5 = 60$.

6- Calcule o valor de x nas figuras a seguir.

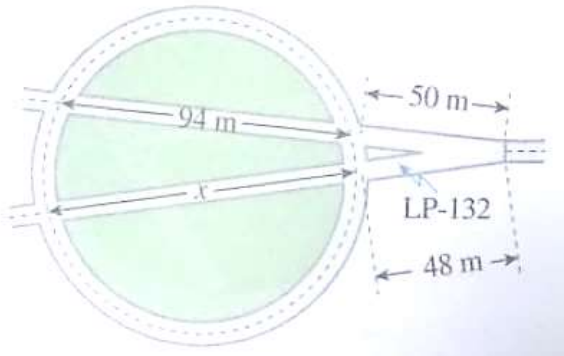
Figura 47 - Representação do problema 6 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

7- O canteiro circular de uma rotatória é cortado por duas estradas, como mostra a figura a seguir. O comprimento da parte da estrada LP-132 que corta o canteiro está indicado por x. Calcule o valor de x.

Figura 48 - Representação do problema 7 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

Estratégia para as atividades 6 e 7:

Estratégias 1 - Atribuir valor numérico

É possível durante a resolução das atividades propostas que os estudantes atribuam um valor numérico à medida desconhecida, por meio da observação das figuras dadas. Percebe-se que essa estratégia, com o caráter empírico, pode ocasionar erros nas resoluções dos estudantes, tendo em vista que a atribuição dos valores numéricos pode ser feita a partir de estimativas.

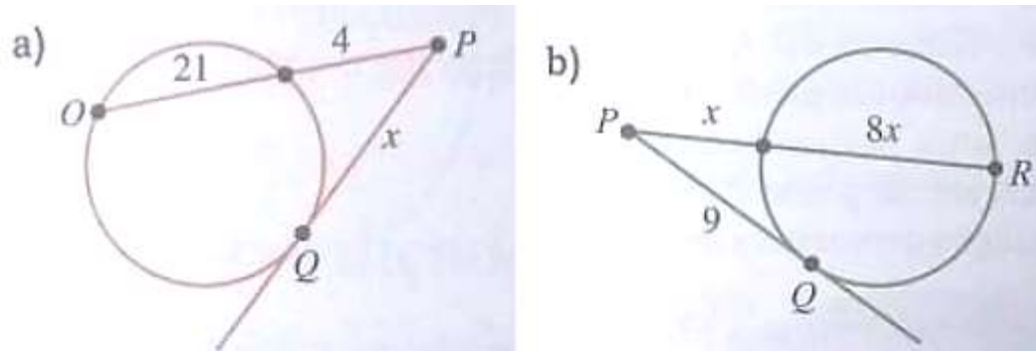
Estratégia 2 – Valor numérico - Regularidade do produto

Na resolução das atividades propostas, os estudantes podem mobilizar a regularidade trabalhada na atividade 5, que envolve o produto da medida do segmento secante a circunferência pelo segmento externo a circunferência. Desse modo, na atividade 6, item a, os alunos podem obter no produto de um dos segmentos secantes pelo segmento externo o valor de 48, sendo necessário que o a medida do outro segmento secante seja 13 unidades de comprimento. Como o segmento externo a circunferência mede 3 unidades de comprimento, o valor da medida desconhecida equivale a 13 unidades de comprimento.

Na atividade 7, ao mobilizar essa estratégia, semelhante à descrita anteriormente, os alunos podem ter dificuldades em modelar adequadamente o segmento secante que tem o valor desconhecido, como $(x + 48).48 = 144 \,.\, 50$, podendo modelar $x \,.\, 48 = 144 \,.\, 50$.

8- Calcule o valor de x nas figuras a seguir, sendo $\overline{PQ}$ tangente à circunferência.

Figura 49- Representação do problema 8 de relações métricas na circunferência



Fonte: Bianchini (2015)

Estratégia 1 - Valor numérico - Regularidade do produto

Para a resolução da atividade 8, os estudantes podem mobilizar a relação métrica da circunferência em que o quadrado da medida do segmento tangente é igual à multiplicação da medida do segmento secante pela medida de sua parte externa. Dessa maneira, no item a, como o produto do segmento secante pelo segmento externo é 100 $(25 \,.\, 4)$, percebe-se que o valor desconhecido equivale a 10 unidades de comprimento, pois $10^2 = 100$.

Estratégia 2 – Modelagem da equação do 1º Grau

Novamente, pautada na relação descrita anteriormente, os estudantes modelam a seguinte equação para o item a: $25 \,.\, 4 = x^2$. Resolvendo a equação, os alunos verificam que o valor da medida desconhecida é 10 unidades de comprimento. Cabe ressaltar que uma possível dificuldade durante a resolução é que ao resolverem a equação do 2º grau modelada, após encontrarem os valores x =10 e x = -10, os estudantes não desconsiderem o valor negativo para a resposta da atividade, já que representa a medida de um segmento.