UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FÁBIO ROGÉRIO FARDIN

ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA JOVENS E ADULTOS

TRÊS LAGOAS - MS
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA JOVENS E ADULTOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edivaldo Romanini

TRÊS LAGOAS - MS
2021

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Pólo de Três Lagoas

ENSINO DA MATEMÁTICA FINANCEIRA PARA JOVENS E ADULTOS

por

Fábio Rogério Fardin

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Edivaldo Romanini

Prof. Dr. Edivaldo Romanini (Orientador)
UFMS/CPTL

Prof. Dr. José Antônio Menoni
UFMS/CPTL

Renato Cesar da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva
UFMS/CPTL

Setembro de 2021

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais, Alberto e Edna por sempre me apoiarem e me prover estudos.

Agradecimentos

Primeiramente à Deus, por tudo de bom que aconteceu em minha vida.

À minha esposa, Carla pelo apoio e paciência.

Ao meu orientador Prof. Dr. Edivaldo Romanini por me guiar, apoiar, incentivar a conclusão deste trabalho.

Aos meus professores do ProfMat: Osmar, Allan, Tomarozzi, Vitor, Fernando, Romanini, Renato.

"Um dia é preciso parar de sonhar, tirar os planos da gaveta e, de algum modo começar".

(Amyr Klink,[entre 2000 e 2019])

Resumo

Vivemos uma triste realidade no país, a saber, milhões de brasileiros têm seus nomes inscritos em órgãos de proteção ao crédito, como SCPC e SERASA. Isso não ocorre apenas porque estas pessoas são más pagadoras, mas sim pela falta de uma educação financeira quando estão entrando na idade adulta. Outro ponto que merece destaque diz respeito ao fato que, muitas vezes, por ignorar as armadilhas financeiras embutidas em operações de empréstimos, muitas pessoas ficam nas mãos de agentes emprestadores de crédito, sejam eles oficiais ou não. Outro agravante é o consumo inadequado, seja de bens ou serviços, sendo que o consumo sem necessidade prejudica o poder de compra.

Esse trabalho foi voltado para o ensino médio, buscando a melhora da educação dos jovens através da matemática financeira. Procuramos descrever casos reais na qual uma decisão errada pode prejudicar uma pessoa por um longo período de sua vida. Adicionalmente, destacamos neste trabalho exemplos práticos envolvidos em situações financeiras como: juros, tabelas de amortização, formas de pagamentos e principalmente a equivalência de capitais, que é como se comporta o dinheiro no decorrer do tempo.

Palavras-chave: Juros, taxa, financiamento, amortização, matemática financeira, tomada de decisões.

Abstract

We live in a sad reality in the country, namely, millions of Brazilians have their names registered in credit protection agencies, such as SCPC and SERASA. This is not just because these people are poor payers, but because they lack a financial education as they enter adulthood. Another point that must be highlighted concerns the fact that, many times, by ignoring the financial traps embedded in loan operations, many people are in the hands of credit lending agents, whether officials or not. Another aggravating factor is the inadequate consumption, whether of goods or services, and consumption without need harms purchasing power.

This work was aimed at high school, seeking to improve the education of young people through financial mathematics. We try to describe real cases in which a wrong decision can harm a person for a long period of life. Additionally, we highlight in this work practical examples involved in financial situations such as: interest, amortization tables, forms of payments and especially equivalence of capital, which is how money behaves over time.

Keywords: Interest, rate, financing, amortization, financial mathematics, decision-making.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Lista de Gráficos

Sumário

INTRODUÇÃO

História da Matemática Financeira

A origem do dinheiro

Conforme texto publicado no site da Casa da Moeda do Brasil em 2015 [16], o homem primitivo se abrigava em cavernas e se alimentava de frutos silvestres, ou do que conseguisse obter da caça e da pesca. Ao longo dos séculos, com o desenvolvimento de sua inteligência, a espécie humana passou a sentir a necessidade de maior conforto e a reparar o seu semelhante, como decorrência desta necessidade, surgiram as trocas e para que estas acontecessem, se fizeram necessárias as moedas de trocas.

As primeiras moedas, peças representando valores, geralmente em metal, surgiram na Lídia (atual Turquia), no século VII a. C.. As características que se desejava ressaltar eram transportadas para as peças através da pancada de um objeto pesado (martelo), em primitivos cunhos. Foi o surgimento da cunhagem a martelo, onde os signos monetários eram valorizados também pela nobreza dos metais empregados, como o ouro e a prata [16].

A necessidade de guardar as moedas em segurança deu surgimento aos bancos. Os negociantes de ouro e prata, por terem cofres e guardas a seu serviço, passaram a aceitar a responsabilidade de cuidar do dinheiro de seus clientes e a dar recibos escritos das quantias guardadas. Esses recibos (então conhecidos como “goldsmith´s notes”) passaram, com o tempo, a servir como meio de pagamento por seus possuidores, por serem mais seguros de portar do que o dinheiro vivo. Assim surgiram as primeiras cédulas de “papel moeda”, ou cédulas de banco, ao mesmo tempo em que a guarda dos valores em espécie dava origem a instituições bancárias.

Os primeiros bancos reconhecidos oficialmente surgiram, respectivamente, na Suécia, em 1656; na Inglaterra, em 1694; na França, em 1700 e no Brasil, em 1808 e a palavra “bank” veio da italiana “banco”, peça de madeira que os comerciantes de valores oriundos da Itália e estabelecidos em Londres usavam para operar seus negócios no mercado público londrino [16].

O surgimento de empréstimos de mercadorias

As antigas civilizações já se utilizavam da matemática para as atividades comerciais da época. Os sumérios emprestavam as sementes e pagavam com parte da colheita, sendo assim, uma forma de pagamento com juros, suprindo uma ausência de outro tipo de moeda de troca. Estes contratos eram escritos em tábuas como uma forma de notas promissórias [16].

Muitos anos depois, muitos livros sobre o assunto produzidos no século XVII foram redescobertos no período do Renascimento. A aritmética de Treviso foi considerado o primeiro registro impresso de matemática financeira em 1478, quando apresentou aplicações e práticas do escambo.

Pierro Borghi publicou em 1484 a “Aritmética Comercial”, na Itália, fundamental para o desenvolvimento da matemática financeira por tratar de questões relacionadas ao comércio da época. As 17 edições da publicação, a última em 1557, mostram a importância desse legado. Outro destaque da época foi Filippo Calandri, que desenvolveu uma forma aritmética reconhecida como a primeira com problemas ilustrados.

Com o desenvolvimento do comércio e a comercialização de ouro e prata, muitos países criaram suas próprias moedas. Porém, as diferentes moedas entre os países causou problemas comerciais que foram solucionados com o surgimento dos cambistas.

Os cambistas eram responsáveis pela troca e comercialização entre as diferentes moedas e com o tempo passaram a emprestar e guardar dinheiro. O termo “banco” das instituições financeiras atuais faz referência aos cambistas que ficavam em bancos de madeira.

A evolução da economia e, consequentemente, da matemática financeira, permitiu que muitas situações consideradas impossíveis de serem resolvidas, hoje podem ser solucionadas por meio de técnicas e ferramentas específicas.

A matemática financeira foi muito importante para o processo de desenvolvimento da economia. Atualmente, ela é utilizada tanto por empresas como por pessoas nas mais diversas situações.

Com o desejo de produtos e mercadorias e na falta de poder de compra em determinado momento, leva ao pagamento financiado.

A matemática financeira permite a escolha entre o pagamento à vista ou financiado, esta escolha é feita de acordo com o que é mais vantajoso para o comprador.

Nesse sentido, compreender os cálculos básicos da matemática e sua aplicabilidade pode facilitar a vida financeira em muitos aspectos, desde ações simples, como comprar um bem ou como avaliar o lucro de uma empresa.

A necessidade da educação financeira no ensino médio

Nosso objetivo com este trabalho é o ensino da educação financeira para jovens e adultos, no intuito que no futuro possam tomar decisões mais inteligentes, evitando principalmente, que sejam ludibriados por alguma instituição financeira; bem como não façam endividamentos desnecessários.

Os professores do ensino médio tem um papel importante, pois de acordo com a lei de Diretrizes e Bases da Educação [9] o professor tem autonomia para preparar com responsabilidade as aulas que serão ministradas. Segundo o guia curricular do ensino na rede estadual de São Paulo [2] este assunto é abordado desde o primeiro ano do ensino médio, na qual esta disciplina trabalha com tópicos como, por exemplo: progressões aritméticas e progressões geométricas, funções, juros. Sendo assim, acreditamos ser possível que o docente aborde tais assuntos interligando-os com situações financeiras do dia a dia, para isso deixamos em nosso trabalho, planos de aulas, exemplos e exercícios, trabalhos em mídias digitais, utilizando principalmente Excel.

Dentre outros pontos, um estímulo para escrever este trabalho foi a realidade brasileira, com 62 milhões de pessoas, com o nome negativado em órgãos de proteção ao crédito, segundo site Correio Brasiliense [8], no ano de 2018. Além disso, por trabalhar atualmente em uma instituição bancária, pudemos vivenciar algumas situações financeiras com alguns jovens, acreditando que através de uma educação financeira poderemos melhorar suas vidas. Um dia, em meu trabalho ocorreu um fato interessante. Um jovem de aproximadamente 20 anos de idade, tinha contraído uma dívida em seu cartão de crédito ao comprar um celular, algo em torno de R$ 3.500,00, o que para um jovem, com salário em torno de R$ 1.300,00, era um valor muito além do seu poder aquisitivo. O mesmo parcelou a dívida em dez vezes pela loja virtual, porém com os gastos mensais, relatado pelo jovem, como: energia, parcela de sua motocicleta, comida etc., estas parcelas ficaram altas. O jovem precisou pagar o chamado “valor mínimo do cartão”, o restante entra no chamado crédito rotativo, cerca de 9,8% de taxa ao mês. Quando não teve mais condições de pagar o cliente usou o “cheque especial”, que é um valor pré-liberado pelo Banco. Assim sua dívida só foi aumentando, até o momento em que o mesmo procurou nossa agência. Orientamos o jovem a fazer um parcelamento de dívida, que pode ser feito até em quarenta e oito vezes, a uma taxa de 2,9%, porém seu cartão e outras formas de crédito ficaram bloqueadas até o pagamento da última parcela. O mesmo fez a operação em menos vezes e assim conseguiu colocar sua vida em ordem. Acreditamos que, através do conhecimento de algumas situações financeiras, antes dos alunos completarem sua idade adulta, os mesmos possam evitar este tipo de situação, até melhor, mostrar a estes alunos a importância de poupar desde cedo.

Conforme informação do site Educa Mais Brasil [15], cerca de 46% dos jovens brasileiros, entre 25 a 29 anos, estão endividados. Na faixa de 18 a 24 anos, a porcentagem é de 19%. Se somados os dois grupos, 12,5 milhões de pessoas estão com as contas no vermelho, de acordo com dados revelados pela Confederação Nacional de Dirigentes Lojistas (CNDL) e do Serviço de Proteção ao Crédito (SPC Brasil).

O cartão de crédito é o principal vilão, representando 45% das dívidas entre os jovens. Compras no comércio, principalmente com cartões de lojas, correspondem a 30%. Já os débitos com telefonia celular aparecem no terceiro lugar, sendo 15% dos gastos. Educação, moradia, água e luz representam 10% dos fatores de endividamentos da juventude brasileira.

Ainda do site Educa Mais Brasil [15], “Cada semestre que passa na faculdade há um aumento nas mensalidades que gera um aperto financeiro maior. Esse é um dos principais fatores para minhas dívidas”, reclama a estudante do curso de Psicologia, Laís A., de 21 anos. Por não ter conseguido nenhum benefício estudantil (como financiamento, bolsa de estudos parciais ou integrais), a estudante, que recebe um salário mínimo trabalhando como auxiliar administrativa, conta que é cada vez mais complicado conciliar os custos pessoais com os educacionais. “O valor que eu recebo pelo meu trabalho não cobre todas as dívidas que eu tenho e isso acaba me complicando bastante”, afirma.

Em 2016, um mapeamento organizado também pela CNDL e SPC mostrou que três em cada 10 jovens brasileiros não fazem um controle financeiro. A economista-chefe do SPC Brasil, Marcela Kawauti, ressalta que os jovens precisam aprender a economizar. “Conseguir poupar pequenos valores já é melhor do que nada. Para isso, é preciso resistir ao consumo impulsivo e estar ciente que os efeitos positivos virão no longo prazo”, comenta Kawauti.

Nos gastos com Educação, por exemplo, os jovens estudantes podem buscar junto às instituições descontos nas mensalidades, ficar atento às regras do Fundo de Financiamento Estudantil (Fies) ou até mesmo se cadastrar em programas que oferecem bolsas de estudos [15].

Uma pesquisa feita por um aluno de Mestrado da UFMS, Campus Três Lagoas [10], realizada com alunos do primeiro ao terceiro ano do ensino médio, nas seguintes proporções: 27% do primeiro ano, 38,5% do segundo ano e 34,5% do terceiro ano (faixa etária entre 15 e 18 anos), nos mostrou dados importantes referentes a necessidade da educação financeira entre estes alunos:

- 75% dizem saber o que é educação financeira, 25% não;
- Apresentaram diversas definições para o tema, dentre elas “Gerir o seu dinheiro, evitar dívidas, saber investir, criar um perfil financeiro, saber pensar no que precisa no longo prazo e o que precisa no momento” e “Educação financeira ajuda você a entender melhor suas necessidades de compra, ajuda a administrar seu dinheiro, de forma que gaste apenas o necessário e saiba como usar”;

- Observamos que todos alunos julgaram importante o tema, conforme a pesquisa: 63,46% muito importante, 36,54% importante, 0% pouco importante e 0% desnecessária;
- Segundo os mesmos, o objetivo de ter uma educação financeira seria: 32,69% evitar gastos desnecessários, 30,77% aprender a investir, 1,92% garantir uma reserva financeira para a aposentadoria, 23,08% equilíbrio financeiro (gastar menos do que se ganha), 5,77% ficar rico e por fim 5,77% outros. Com isso notamos que poucos alunos se preocupam em garantir a aposentadoria;
- Menos da metade dos alunos têm alguma renumeração mensal, cerca de 7,69% trabalham ou estagiam, 19,23% recebem pensão, 19,23% recebem uma “mesada” e 53,85% não possuem renumeração;
- Uma pequena parte dos alunos conseguem economizar: apenas 34,62% economizam, 44,23% às vezes e 21,15% nunca economizam;
- A pesquisa fez ainda um levantamento dos gastos dos alunos: 35,58% alimentação, 2,88% não tem nenhum gasto, guardam integralmente, 6,73% ajudam a complementar a renda de casa, 11,54% vestuário: roupas e sapatos, 14,42% produtos eletrônicos, 14,42% atividades culturais, 9,62% viagens/passeios e 4,81% outros. Percebemos que, com os jovens envolvidos nesta pesquisa, os maiores gastos são com a alimentação;
- Apenas 34,62% notam um planejamento financeiro em suas casas.

Percebemos que, ou os alunos não se interessam pelo assunto, ou suas famílias precisam fazer melhor este planejamento.

Por fim, vale a pena destacar que, segundo Golveia [06], a matemática financeira é a área da matemática que estuda a equivalência de capitais no tempo, ou seja, como se comporta o valor do dinheiro no decorrer do tempo. Sendo uma área aplicada da Matemática, ela estuda diversas situações financeiras ligadas ao dia a dia das pessoas. Por esse motivo, conhecer suas aplicações é fundamental.

Dividimos nosso trabalho em quatro capítulos e finalizamos com as considerações finais, no primeiro capítulo abordamos alguns conceitos teóricos sobre progressões aritméticas e progressões geométricas, pré-requisitos para o estudo da matemática financeira.

No segundo capítulo foram abordados assuntos lecionados no primeiro ano do ensino médio como: juros simples e compostos, uso de PA e PG para cálculo de juros. Além destes, abordamos assuntos que não estão no guia curricular [2], mas que tem muita importância no ensino da matemática financeira para jovens e adultos, e podem ser introduzidos em aulas, como por exemplo: sistemas de amortizações, custo efetivo total, equivalência de capitais entre outros.

No terceiro capítulo apresentamos um exemplo de uma jovem que financiou seu primeiro imóvel e tinha muitas dúvidas, explicamos a diferença entre os sistemas de amortizações.

Por fim no quarto capítulo deixamos alguns planos de aulas, bem como exemplos de uso de planilhas de Excel para cálculo de juros e resolução de exercícios, fizemos algumas atividades ligadas a casos reais acontecidos em instituições bancárias.

Finalizamos o trabalho com as considerações finais em relação aos objetivos alcançados.

Começamos nosso trabalho com uma abordagem teórica sobre progressões.

Capítulo 1. Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas

Neste primeiro capítulo faremos uma abordagem teórica nos assuntos relacionados a progressões aritméticas e progressões geométricas, pois são pré-requisitos para o estudo da matemática financeira e são ferramentas muito utilizadas para resolução de problemas envolvendo juros.

1.1. Progressões Aritméticas

O embasamento teórico deste capítulo vem da referência [13] desta dissertação.

Uma Progressão Aritmética, conhecida como "PA", é uma sequência de números, na qual cada termo é gerado pela soma de uma constante, chamada de razão da PA, ao seu antecessor. Esta razão é obtida pela diferença entre um termo e o seu antecessor, por exemplo, o termo a_1 é obtido pela soma do termo a_0 com a razão da PA.

1.1.1 Termo Geral de uma PA

Em uma progressão aritmética $\left(a_{1,}, a_2, a_3, \dots\right)$, para avançar um termo, basta somar a razão, para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo, $(a_{13} = a_5 + 8r)$, pois, ao passar de a_5 para a_{13}, avançamos 8 termos, da mesma forma, $(a_{12} = a_7 + 5r)$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12}, e ainda, $a_4 = a_{17} - 13r$, pois retrocedemos 13 termos ao passar de a_{17} para a_4 e, de modo geral, $a_n = a_{n-1} + r$, pois, ao passar de a_1 para a_n , avançamos $n - 1$ termos [13].

Podemos calcular então o Termo Geral de uma PA chamado de a_n, da seguinte forma:

Sabemos que,

$a_1 = a_0 + r$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + r.$

Somando os termos desta igualdade temos,

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + (n).r$.=> $(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) - (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + a_n = a_0 + (n).r \Longmapsto \mathrm{a_n} = \mathrm{a_0} + (\mathrm{n}).\mathrm{r}$ (quando consideramos o termo inicial a_0).

Exemplo 1.1.1. Em uma progressão aritmética, o quinto termo vale 30 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o oitavo termo dessa progressão?

Solução: $a_{20} = a_5 + 15r$, pois ao passar do quinto termo para o vigésimo, avançamos 15 termos.

Logo, 50=30+15r e $r = \frac{4}{3}$. Analogamente, $a_8 = a_5 + 3r = 30 + 3.\frac{4}{3} = 34$, portanto o oitavo termo vale 34.

Exemplo 1.1.2. Qual é o centésimo primeiro termo de uma PA cujo primeiro termo é 107 e a razão é 6?

a) 507.

b) 607.

c) 701.

d) 707.

e) 807.

Solução: Temos que, pelo enunciado, o primeiro termo $a_1 = 107$ e razão $r = 6$, precisamos encontrar a_n , para $n = 100$.

Logo, $a_n = a_0 + (n).r$

Portanto, $a_{100} = a_0 + (100).r = 107 + (100).6 = 107 + 600 = 707$.

Concluímos assim, que o centésimo termo (a_{100}) equivale a 707, alternativa D.

Exemplo 1.1.3. O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos. Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã [13]?

Solução: Os anos de passagem do cometa foram 1986, 1910, 1834,... e formam uma progressão aritmética de razão -76 .

O termo de ordem n dessa progressão é $a_n = a_0 + (n).r$, ou também, $a_n = a_1 + (n-1).r$, isto é, $a_n = 1986 - 76(n-1) = 2062 - 76n$. Temos $a_n > 0$ quando $n < \frac{2062}{76} = 27{,}13\ldots$.

Portanto, os termos positivos dessa progressão são os 27 primeiros, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{27}$. Logo, ele nos visitou 27 vezes na era cristã e sua primeira passagem na era cristã foi no ano $a_{27} = 2062 - 76.27 = 10$.

Poderíamos também ter resolvido o problema aproveitando o fato dos termos dessa progressão serem inteiros. Em uma progressão aritmética de termos inteiros e razão não-nula, todos os termos dão o mesmo resto quando divididos pelo módulo da razão. Como 1986 dividido por 76 dá resto 10, todos os anos em que o cometa passou por aqui dão resto 10 quando divididos por 76.

A primeira visita ocorreu entre os anos 1 e 76, inclusive. Entre esses anos, o único que dividido por 76 dá resto 10 é o ano 10. Para descobrir a ordem desse termo, usamos $a_n = a_1 + (n-1).r$, isto é, $10 = 1986 - 76.(n-1)$. Daí, $n = \frac{2052}{76} = 27$.

1.1.2 Equidistância entre os termos de uma PA

Numa PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

De fato, seja a PA finita $(a_1,\ a_2\ ,\ a_3,\ \ldots\ ,\ a_{n-1},\ a_n)$, temos que:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_1 + 2r$

$\vdots$

$a_{n-2} = a_1 + (n-3)r$

$a_{n-1} = a_1 + (n-2)r$

$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_1 + a_n = a_1 + a_1 + (n-1)r = 2a_1 + (n-1)r$

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_1 + (n-2)r = 2a_1 + r + nr - 2r = a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$$

$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + a_1 + (n-3)r = 2a_1 + 2r + nr - 3r = a_1 + a_n = 2a_1 + (n-1)r$.

E assim por diante.

Exemplo 1.1.4. Seja a PA finita, (3,5,7,9,11,13,15,17), temos que:

$a_1 + a_8 = a_2 + a_7 = a_3 + a_6 = a_4 + a_5$

$3 + 17 = 5 + 15 = 7 + 13 = 9 + 11 = 20.$

Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, $a_n = a_1 + (n-1)r = r.n + (a_1 - r)$. Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão não for estacionária (constante), esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1 [13].

Por esse motivo, as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem.

Como em uma progressão aritmética $a_n = a_0 + n.r$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função afim $a(x) = a(0) + rx$.

Portanto, pensando em uma progressão aritmética como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n, o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

Em outras palavras, (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano que têm coordenadas $(1; a_1)$, $(2; a_2)$, $(3; a_3)$, etc. estão em linha reta [13].

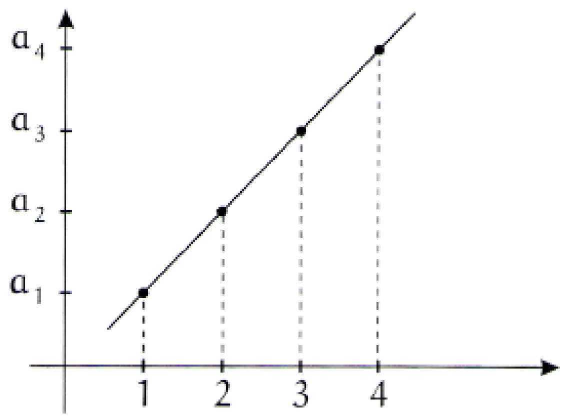

Gráfico 1. 1: Gráfico de uma PA

Fonte: Figura extraída da citação [13]

1.1.3 Soma dos Termos de uma PA

Baseado na ideia de Gauss, usada para calcular a soma $1 + 2 + ... + 100$, podemos calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer.

A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, ...)$ é $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$.

Consideremos S_n a soma dos n primeiros termos de uma PA de razão r , $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_n + a_2 + a_{n-1} + a_3 + a_{n-2} + ...$

$S_n = a_1 + a_n + a_1 + a_n + a_1 + a_n + ... + a_1 + a_n + a_1 + a_n = (a_1 + a_n)\dfrac{n}{2}$.

Portanto, para uma PA finita, com n termos:

$S_n = (a_1 + a_n)\dfrac{n}{2}$.

Exemplo 1.1.5. Qual a soma dos 200 primeiros números pares?

Solução: Sabemos que os números pares são 2, 4, 6 … e que eles formam uma PA de razão 2. Concluímos que $a_1 = 2$, e $n = 200$, pois queremos os 200 primeiros números pares.

Para utilizarmos a fórmula $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$, ainda precisamos descobrir o termo de índice "n":

$a_n = a_{200} = a_1 + (n - 1).r = 2 + (200 - 1).2 = 2 + (199.2) = 2 + 398 = 400$

Substituindo os valores na fórmula da soma dos termos da PA finita: $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$,

$S_{200} = (2 + 400).\dfrac{200}{2} = 402.100 = 40200.$

Conclusão: Assim a soma dos 200 primeiros números pares equivale a 40200.

Exemplo 1.1.6. (Questão retirada da primeira avaliação do ano de 2015 da matéria "Matemática Discreta" do curso de Mestrado Profissional PROFMAT). Mostrar que (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, existirem números reais A e B tais que $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = An^2 + Bn$, para todo n inteiro positivo.

Solução: Suponhamos que (a_n) seja uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1. Mostraremos então que existem números reais A e B tais que $S_n = An^2 + Bn$.

Sabemos que $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \left[\frac{(a_1+a_n)}{2}\right].n$, com $a_n = a_1 + (n-1).r$.

Logo, $S_n = \left[\frac{a_1 + a_1 + (n-1).r}{2}\right].n \Rightarrow S_n = \frac{r}{2}.n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right).n$.

Tomando $A = \frac{r}{2}$ e $B = a_1 - \frac{r}{2}$, temos que $S_n = An^2 + Bn$, como queríamos demonstrar.

Reciprocamente, suponhamos que $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = An^2 + Bn$. Notemos que $a_n = S_n - S_{n-1}$, para $n > 1$, e $a_1 = S_1$. Assim, $a_n = S_n - S_{n-1} = An^2 + Bn - [A(n-1)^2 + B(n-1)] = (2A)n - A + B = (A + B) + 2A(n-1)$.

Tomando $a_1 = A + B$ e $r = 2A$, temos que (a_n) é uma progressão aritmética de razão $2A$ e primeiro termo $A + B$.

Concluímos assim que (a_n) é uma progressão aritmética e sua soma é $S_n = An^2 + Bn$, para todo n inteiro positivo.

Exemplo 1.1.7. (Questão extraída da terceira avaliação de Matemática Discreta (MA12) do ano de 2012) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $S_n = 2n^2 - 15n$.

(a) Determinar o décimo termo da progressão.

(b) Encontrar o primeiro termo positivo da progressão.

Solução:

(a) O décimo termo é $S_{10} - S_9$, isto é,
$(2.10^2 - 15.10) - (2.9^2 - 15.9) = 23$.

(b) Queremos saber para quais valores de n o n-ésimo termo, isto é, a expressão $S_n - S_{n-1}$, é maior do que zero. Temos:
$(2n^2 - 15n) - \left(2(n-1)^2 - 15(n-1)\right) = 4n - 17$,
logo o primeiro termo positivo ocorre para o primeiro n tal que $4n - 17 > 0$, isto é, para $n = 5$.

Exemplo 1.1.8. (Questão retirada da primeira avaliação de Matemática Discreta (MA12) do ano de 2011) Considerar a sequência $(a_n), n \geq 1$, definida como indicado abaixo:

$a_1 = 1$

$a_2 = 2 + 3$

$a_3 = 4 + 5 + 6$

$a_4 = 7 + 8 + 9 + 10$

(a) O termo a_{10} é a soma de 10 inteiros consecutivos. Qual é o menor e qual é o maior desses inteiros?

(b) Calcular a_{10} .

(c) Fornecer uma expressão geral para o termo a_n.

Solução:

(a) O primeiro inteiro da soma que define a_n é igual ao número de inteiros utilizados nos termos $a_1, \ldots, a_{n-1}$, isto é, $1 + 2 + \ldots + n - 1$ mais um, isto é, é igual a $\frac{1}{2}(n-1)n + 1$. O último inteiro é esse número mais $n - 1$. Portanto, para $n = 10$, o primeiro inteiro é 46 e o último é 55.

(b) a_{10} é a soma de uma progressão aritmética de 10 termos, sendo o primeiro igual a 46 e o último igual a 55. Então:

$a_{10} = \frac{(46+55).10}{2} = 101.5 = 505$.

(c) No caso de a_n, temos a soma de uma progressão aritmética de n termos, sendo o primeiro igual a $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ e o último igual a $\frac{1}{2}n(n-1) + 1 + n - 1$, ou seja, $\frac{1}{2}n(n-1) + n$, como visto em (a). Então:

$a_n = \frac{\left[\frac{1}{2}n(n-1)+1\right]+\left[\frac{1}{2}n(n-1)+n\right]}{2} . n$

$a_n = \frac{(n-1).n^2 + (n+1).n}{2}$

$a_n = \frac{n^3-n^2+n^2+n}{2} = \frac{n^3+n}{2}$.

Portanto a expressão geral para o termo é: $a_n = \frac{n^3+n}{2}$.

Exemplo 1.1.9. (Questão extraída da terceira avaliação de Matemática Discreta (MA12) do ano de 2011) A sequência 0,3,7,10,14,17,21, … é formada a partir do número 0 somando alternadamente 3 ou 4 ao termo anterior, isto é: o primeiro termo é 0, o segundo é 3 a mais que o primeiro, o terceiro é 4 a mais que o segundo, o quarto é 3 a mais que o terceiro, o quinto é 4 a mais que o quarto e assim sucessivamente.

(a) Qual é o centésimo termo dessa sequência?

(b) Qual é a soma dos 100 primeiros termos dessa sequência?

(c) Algum termo desta sequência é igual a 2000? Por quê?

Solução:

(a) Chamemos de $a_1, a_2, a_3, \ldots$ os termos dessa sequência. A sequência dos termos com índices ímpares $a_1, a_3, a_5, \ldots$ é uma progressão aritmética com termo inicial 0 e passo (ou razão) 7. A sequência dos termos com índices pares $a_2, a_4, a_6, \ldots$ é uma progressão aritmética com termo inicial 3 e passo 7. O centésimo termo é o 50^0 da sequência dos pares. Então:

$A_{100} = 3 + (\ 50 - 1\ ).7 = 3 + 343 = 346.$

Portanto o centésimo termo desta sequência é 346.

(b) Há maneiras diferentes de se fazer isso. Podemos agrupar a soma assim: $(\ a_1 +\ a_{100}) + (\ a_2 +\ a_{99}) + (\ a_3 +\ a_{98}) +\ \ldots + (\ a_{50} +\ a_{51})$. Vejamos que de a_1 para a_2 há um acréscimo de 3 e de a_{99} para a_{100} também. Então os dois primeiros termos são iguais.

Do segundo para o terceiro há um aumento e um decréscimo de 4, logo o terceiro termo é igual ao segundo. E assim por diante. Então todos os termos entre parênteses são iguais ao primeiro, que vale $0\ +\ 346\ =\ 346$. Como são 50 termos, a soma dá $50\ \cdot\ 346\ =\ 17300$.

Outro jeito de fazer é somar separadamente as sequências com índices ímpares e pares. No segundo caso (pares), são 50 termos da progressão aritmética de razão 7 começando em 3 e terminando em 346. A soma dessa progressão dá:

$$\frac{(3 + 343).50}{2} = 25 \cdot 349 = 8725.$$

No primeiro caso (ímpares), são 50 termos, mas todos 3 unidades menores do que os termos da série par. Então a soma desses é 8725 subtraído de 50 · 3 = 150, isto é, dá 8575. Juntando as duas, ficamos com 17300.

Obs. Essa segunda soma também sairia da mesma forma como a outra, pois a PA tem primeiro termo igual a 0, último termo igual a 343, totalizando 50 termos, logo soma:

$$\frac{(0+343).50}{2} = 25 \cdot 343 = 8575.$$

(c) Observar primeiro que se n é ímpar então a_n é múltiplo de 7, e se n é par então $a_n - 3$ é múltiplo de 7 (de fato, valem as recíprocas, mas não precisaremos disso).

Como nem $2000 = 7.285 + 5$ nem $1997 = 7.285 + 2$ são múltiplos de 7, então 2000 não pode ser um a_n nem para n par nem para n ímpar.

Exemplo 1.1.10. O preço de um carro novo é R$ 60.000,00, sabemos que ele desvaloriza R$ 2.000,00 ao ano, qual será o valor do veículo com 5 anos de uso?

Solução: Podemos facilmente adaptar uma PA para solução deste exercício, consideremos então:

$a_0 = 60000$

$r = -2000$

Deveremos encontrar a_5, que seria o valor do carro após 5 anos de uso.

$a_n = a_5 = a_0 + (n)r$

$a_5 = 60000 + (5).(-2000)$=60000-10000=50000.

Assim concluímos que após 5 anos de uso o valor deste veículo será de R$ 50.000,00.

Exemplo 1.1.11. Um adolescente deseja comprar um computador e para isso começou a poupar, se ele começar com uma quantia de R$ 200,00 e mensalmente depositar R$ 50,00, quanto terá após 2 anos.

Solução: Podemos facilmente adaptar uma PA para solução deste exercício, consideremos então:

$a_0 = 200$

$r = 50$.

Deveremos encontrar a_{24}, pois em 2 anos teremos 24 depósitos.

$a_n = a_{24} = a_0 + (n)r$

$a_5 = 200 + (24).(50)$=200+1200=1400.

Assim, concluímos que após 2 anos o adolescente terá poupado R$ 1.400,00.

1.2. Progressões Geométricas

Uma progressão geométrica, conhecida como "PG" é uma sequência de números, na qual cada termo é gerado pela multiplicação do seu antecessor por uma constante, chamada de razão da PG. Por exemplo: o termo a_1 é obtido pela multiplicação do termo a_0 pela razão da PG [14].

As progressões geométricas podem ser comparadas com a ideia de juros compostos e taxa relativa de aumentos constantes, se considerarmos a_0 = CAPITAL, e a razão como 1 + i (taxa), termos que serão explicados no próximo capítulo.

1.2.1 Termo Geral de uma PG.

Chamamos de a_n o Termo Geral de uma PG que pode ser calculado da seguinte forma:

Sabemos que,

$a_1 = a_0.q$

$a_2 = a_1.q$

$a_3 = a_2.q$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1}.q.$

Multiplicando os termos desta igualdade temos,

$a_1.a_2.a_3. \ \dots \ .a_{n-1}.a_n = a_0.a_1.a_2.a_3. \ \dots \ .a_{n-1}.q^n \rightarrow$

$\frac{a_1.a_2.a_3.....a_{n-1}.a_n}{a_1.a_2.a_3.....a_{n-1}} = \frac{a_1.a_2.a_3.....a_{n-1}.a_0.q^n}{a_1.a_2.a_3.....a_{n-1}} \rightarrow a_n = a_0.q^n.$

Exemplo 1.2.1. O oitavo termo de uma PG é 256 e o quarto termo dessa mesma PG é 16. Calcular seu primeiro termo.

Solução:

$a_4 = a_1.q^3 = 16$

$a_8 = a_7.q = a_6.q^2 = a_5.q^3 = a_4.q^4 = 16.q^4 = 256 \Longrightarrow q^4 = \frac{256}{16} = 16 \rightarrow q = 2$.

Como $a_1.q^3 = 16 \rightarrow a_1.q^3 = 16 \rightarrow a_1 = \frac{16}{8} = 2$.

Logo o primeiro termo $a_1 = 2$.

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, para avançar um termo basta multiplicar pela razão, para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. Por exemplo, $a_{13} = a_5.q^8$, pois avançamos 8 termos ao passar de a_5 para a_{13} , $a_{12} = a_7.q^5$, pois avançamos 5 termos ao passar de a_7 para a_{12} ; $a_4 = a_{17}.q^{-13}$, pois ao passar de a_{17} para a_4 , retrocedemos 13 termos; de modo geral, $a_n = a_1.q^{n-1}$, pois, ao passar de a_1 para a_n , avançamos $(n - 1)$ termos. Em muitos casos é mais natural numerar os termos a partir de zero, nesse caso, $a_n = a_0.q^n$, pois avançamos n termos ao passar de a_0 para a_n [13].

Exemplo 1.2.2. Em uma progressão geométrica, o quinto termo vale 5 e o oitavo termo vale 135. Quanto vale o sétimo termo dessa progressão?

Solução: Temos $a_8 = a_5.q^3$, pois ao passar do quinto termo para o oitavo, avançamos 3 termos. Logo, $135 = 5.q^3 e\ q = 3$. Analogamente, $a_7 = a_5.q^2 = 5.3^2 = 45$.

Concluímos assim que o sétimo termo vale 45.

Exemplo 1.2.3. Como em uma progressão geométrica $a_n = a_0.q^n$, a função que associa a cada natural n o valor de a_n é simplesmente a restrição aos naturais da função exponencial $a(x) = a(0).q^x$. Portanto, pensando em uma progressão geométrica como uma função que associa a cada número natural n o valor a_n , o gráfico dessa função é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

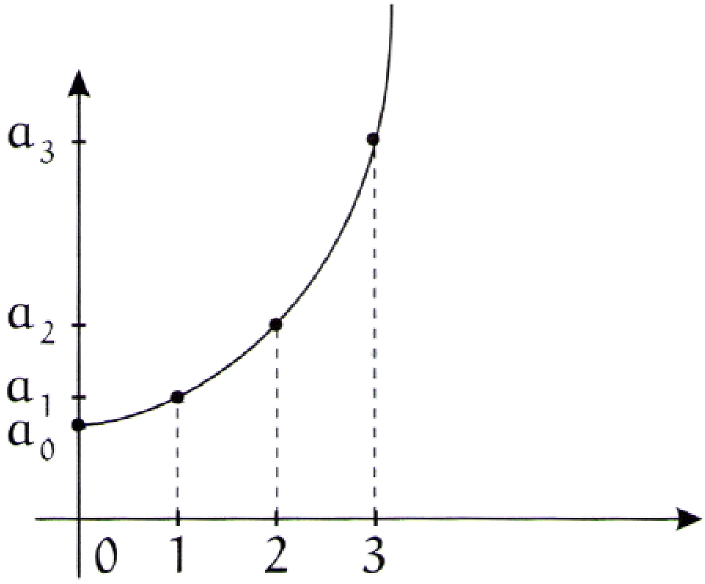

Gráfico 1. 2: Gráfico de uma PG

Fonte: figura extraída da citação [9]

Exemplo 1.2.4. Qual é a razão da progressão geométrica que obtemos inserindo 3 termos entre os números 30 e 480 [13]?

Solução: Temos $a_1 = 30$ e $a_5 = 480$. Como $a_5 = a_1.q^4$, $480 = 30.q^4$, $q^4 = 16$ e $q = \pm 2$.

Concluímos assim, que a razão vale 2 por ser uma PG crescente.

Exemplo 1.2.5 Aumentos sucessivos de 10% e 20% equivale a um único aumento de quanto [14]?

Solução: Consideremos $a_0 = x$, temos então:

$a_1 = a_0.q_1$, $q_1 = (1 + 10\%) = 1{,}1$

$a_1 = 1{,}1x$

$a_2 = a_1.q_2$, $q_2 = (1 + 20\%) = 1{,}2$

$a_2 = 1{,}1.x.1{,}2 = 1{,}32x.$

Se quisermos achar q_3 tal que $q_3 = \frac{a_2}{a_0}$,

$q_3 = \frac{1{,}32x}{x} = 1{,}32 = (1 + 32\%).$

Portanto o aumento único equivale a 32%.

Exemplo 1.2.6 O preço de certo produto aumentou, durante os quatro primeiros meses do ano, respectivamente 1%, 22%, 12% e 23%. Determinar [14]:

a) A taxa quadrimestral de aumento do preço do produto.

b) A taxa média de aumento mensal durante esse quadrimestre.

Solução: a)Temos os seguintes termos da PG:

$a_0 = x$

$a_1 = a_0.q_1 = x.1{,}01$

$a_2 = a_1.q_2 = 1{,}01x.1{,}22 = 1{,}2322x$

$a_3 = a_2.q_3 = 1{,}2322x.1{,}12 = 1{,}380064x$

$a_4 = a_3.q_4 = 1{,}380064x.1{,}23 = 1{,}6975x.$

Para encontrarmos a taxa quadrimestral faremos $\frac{a_4}{a_0} = q$

$q = \frac{1{,}6975x}{x} = 1{,}6975 = (1 + 0{,}6975).$

Concluímos que a taxa quadrimestral é 69,75%.

b) Temos que encontrar q, tal que, $a_4 = a_0.q^4$

$$q^4 = \frac{a_4}{a_0} = \frac{1{,}6975x}{x} = 1{,}6975$$

$q = \sqrt[4]{1{,}6975} = 1{,}1414 = 1 + 0{,}1414.$

Portanto a taxa média de aumento mensal é 14,14%.

1.2.2 Soma dos termos de uma PG

Consideremos S_n a soma dos n primeiros termos de uma PG de razão q ≠ 1,

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$

Multiplicando por q obtemos:

$S_n.q = a_1.q + a_2.q + a_3.q + \dots + a_{n-1}.q + a_n.q$

$S_n.q = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n.q$

Subtraindo essas duas igualdades temos:

$$S_n - S_n.q = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n) - (a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_n.q)$$

$S_n - S_n.q = a_1 - a_n.q = a_1 - a_1.q^n$

$$S_n.(1 - q) = a_1.(1 - q^n) \Longrightarrow S_n = a_1.\frac{(1 - q^n)}{(1-q)} \Longrightarrow S_n = a_1.\frac{(q^n - 1)}{(q-1)} = , q \neq 1 .$$

Exemplo 1.2.7. Determinar a soma dos doze primeiros elementos da progressão geométrica (2, 8, 32, 128, ...).

Solução: Temos que: $a_1 = 2$; $q = \frac{8}{2} = \frac{32}{8} = \frac{128}{32} = 4 \rightarrow q = 4; \; n = 12$;

Sabendo que: $S_n = a_1.\frac{(q^n - 1)}{(q-1)} \rightarrow S_n = \frac{2.(4^{12}-1)}{(4-1)} = 2.\frac{(16777216-1)}{3} =$ $2.\frac{16777215}{3} = 11184810.$

Concluímos assim que a soma dos doze primeiros termos desta progressão equivale a 11184810.

Exemplo 1.2.8. (Questão extraída da primeira avaliação de Matemática Discreta (MA12) do ano de 2013):

a) Para que valores de b existe uma progressão geométrica para a qual a soma dos n primeiros termos é igual a $3^{n+1} + b$, para todo n natural?

b) Quais são o primeiro termo e a razão dessa progressão?

Solução: A soma dos n primeiros termos da progressão geométrica de primeiro termo a_1 e razão q é $S_n = a_1.\frac{(1-q^n)}{1-q} = a_1.\frac{(q^n-1)}{(q-1)} = \frac{a_1.q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1}$.

Esta expressão deve ser idêntica a $3.3^n + b$. Devemos ter, portanto, $q = 3$ e $\frac{a_1}{q-1} = 3$. Daí, $a_1 = 6$ e o valor de b é $\frac{a_1}{q-1} = -3$.

Exemplo 1.2.9. Diz a lenda que o inventor do xadrez pediu como recompensa 1 grão de trigo pela primeira casa, 2 grãos pela segunda, 4 pela terceira e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada casa nova. Como o tabuleiro de xadrez tem 64 casas, o número de grãos pedidos pelo inventor do jogo é a soma dos 64 primeiros termos da progressão geométrica 1,2,4, … [13].

O valor dessa soma é: $S_n = a_1.\frac{(q^n-1)}{q-1} = 1.\frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1 =$ 18446744073709551615 .

1.2.3 Soma de infinitos termos de uma PG

Nas progressões geométricas em que $|\, q \,| < 1$, a soma dos n primeiros termos tem um limite finito quando $n \to \infty$. Como nesse caso $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 . \frac{1 - 0}{1 - q}$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Exemplo 1.2.10. O limite da soma $0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots$ quando o número de parcelas tende ao infinito é igual a $\frac{0{,}3}{1-0{,}1} = \frac{1}{3}$. O resultado é intuitivo, pois somando um número muito grande de termos da progressão encontraremos aproximadamente a dízima periódica $0{,}33333 = \frac{1}{3}$ [13].

Exemplo 1.2.11. (Questão extraída da primeira avaliação de Matemática Discreta (MA12) do ano de 2015)

(a) Os lados de um triângulo retângulo formam uma progressão geométrica crescente. Determinar a razão dessa progressão.

(b) Os lados de um triângulo estão em progressão geométrica. Entre que valores pode variar a razão?

Solução:

(a) Sejam a, aq e aq^2, com $q > 1$ os comprimentos dos lados do triângulo retângulo.

Solução: Então segue que $a^2 + (\, aq \,)^2 = (\, aq^2)^2$, ou seja, $1 + q^2 = q^4$.

Fazendo $t = q^2$ obtemos a equação $t^2 - t - 1 = 0$, cuja única solução positiva é $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e, portanto, $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

(b) Podemos supor que os comprimentos dos lados são a, aq e aq^2, com $q > 0$. Pelas condições de existência de um triângulo devemos ter:

$a < aq + aq^2$, $aq < a + aq^2$ e $aq^2 < a + aq$.

Dividindo todas as inequações por a e levando em conta que $q > 0$, temos que:

$-1 < q + q^2$ vale desde que $q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

$-q < 1 + q^2$ vale sempre; e

$-q^2 < 1 + q$ vale desde que $q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Portanto, os comprimentos dos lados de um triângulo são termos de uma progressão geométrica de razão q se, e somente se, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Neste capítulo foram analisadas as progressões: PA e PG. Estas sequências são ferramentas fundamentais para a resolução de problemas envolvidos com a Matemática Financeira. Foram apresentadas algumas atividades, em forma de exemplos, que estão relacionadas ao assunto.

Capítulo 2. Capital, juros e sistemas de amortização

Neste capítulo abordaremos assuntos utilizados na matemática financeira, como por exemplo: juros simples e compostos, faremos comparações entre eles, taxa e sistema de amortização que é um assunto relevante, principalmente quando precisamos fazer um financiamento de valor alto e em prazos longos, pois o valor final pago pode sofrer muita alteração.

O termo Capital (C), ou principal, é usado para o primeiro valor investido, também para o valor emprestado. A este valor emprestado é cobrado uma taxa de juros (i), o valor pago por tal empréstimo, em um determinado prazo (t), é chamado de Juros (J).

Assim, por exemplo, se o capital (C) emprestado for R$ 1.000,00, este emprestado por um mês, ou seja, o tempo $t = 1$, e a taxa (i), 1,0% ao mês, os juros (J) pagos no mês serão iguais a 1,0% sobre R$ 1.000,00, que equivale a $0{,}01 \times 1000$ e, portanto, igual a R$ 10,00. De modo geral, os juros no período são iguais ao produto do capital pela taxa, isto é: $J = C \cdot i$. O pagamento do empréstimo pago em uma única parcela, será ao final do prazo do empréstimo, o montante (M) R$ 1.010,00. De modo geral, teremos: $M = C + J$.

2.1 Juros simples

Quando os juros incidem apenas no valor principal, este que é o valor inicialmente emprestado ou aplicado, chamamos de regime de juros simples, e este juros pode ser calculado da seguinte forma: $J = P.i.t$; Sendo J = juros, P = principal (também pode ser chamado de capital (C)), i = taxa e t = prazo ou período de capitalização.

Exemplo 2.1.1. Uma pessoa aplicou o capital de R$ 1.000,00 a uma taxa de 2% ao mês durante 12 meses. Determinar os juros e o montante dessa aplicação.

Solução:

Capital (C) = R$ 1.000,00

Tempo (t) = 12 meses

Taxa (i) = 2% ao mês $= 2/100 = 0{,}02$

Usando a fórmula dos juros simples: $J = P.i.t \Longmapsto J = 1000.0{,}02.12 = 240$

Montante: $M = C + J = 1000 + 240 = 1240$

O valor dos juros da aplicação é de R$ 240,00 e o montante a ser resgatado é de R$ 1.240,00.

2.2 Juros compostos

Segundo Márcio de Menezes, juros compostos consiste em calcular o montante baseado no saldo do período anterior, diferentemente dos juros simples, onde os juros incidiam somente sobre o saldo original. Juros compostos incidem também sobre os juros acumulados [12]. Neste regime de juros, temos juros sobre juros, isso ocorre porque os juros não incidem apenas sobre o valor original, mas também sobre os juros que já estão acumulados.

Vamos considerar o mesmo capital de R$ 1.000,00, considerar agora que ele seja aplicado a um período de 10 meses a mesma taxa de 2% e assim, calcular o valor futuro da aplicação neste período:

Chamaremos aqui o valor futuro de "F" e seu índice indicará a quantidade de perídos aplicados. Temos que:

$F_1 = C.(1 + i) = R\$\ 1000{,}00.(1 + 0{,}02) = R\$\ 1020{,}00.$

Observemos que o valor presente é o valor futuro do período anterior. No período dois, temos:

$F_2 = F_1.(1 + i) = R\$1020{,}00.(1 + 0{,}02) = R\$1040{,}40.$

Da mesma forma, temos no período três:

$F_3 = F_2.(1 + i) = R\$1040{,}40.(1 + 0{,}02) = R\$1061{,}21.$

Agora, ao invés de continuarmos escrevendo esta equação para todos os períodos, vamos tentar generalizá-la:

$F_1 = C.(1 + i) = C.(1 + i)^1$

$F_2 = F_1.(1 + i) = C.(1 + i)^1.(1 + i) = C(1 + i)^2$

$F_3 = F_2.(1 + i) = C.(1 + i)^2.(1 + i) = C(1 + i)^3.$

Podemos ver que todos os membros são escritos como o produto do valor presente do investimento pelo fator de capitalização $(1 + i)$ elevado ao período. Dessa forma, podemos generalizar essa expressão escrevendo assim:

$F_n = C.(1 + i)^n.$

Agora que conseguimos generalizar a expressão, podemos responder quanto será o valor futuro após 10 meses:

$F_{10} = R\$1000,00.(1+0,02)^{10} = R\$1000,00.1,21899 = R\$1218,99$.

2.3 Comparando juros simples e compostos

Em algumas situações (prazos pequenos, juros de mora) são usados juros simples e não juros compostos [14]. No regime de juros simples, os juros em cada período são calculados sobre o principal e não sobre o montante da época anterior. Por exemplo, um principal igual a 100, a juros simples de 10% ao mês, evolui de acordo com a tabela a seguir:

n	0	1	2	3	4	$\cdots$
C_n	100	110	120	130	140	$\cdots$

Tabela 2. 1: Juros simples

Fonte: próprio autor

Não há dificuldade em calcular juros simples, pois a taxa incide sempre sobre o capital inicial. No nosso exemplo, os juros são sempre de 10% de 100, ou seja, 10.

É claro então que, $C_n = C_0 + n.i.C_0$, o que faz com que os valores de C_n formem uma progressão aritmética. Olhando para os gráficos de evolução de um mesmo valor principal C_0 a juros de taxa i, a juros simples e a juros compostos, observamos que o montante a juros compostos é superior ao montante a juros simples, exceto se o prazo for menor que 1. É por isso que juros simples são geralmente utilizados em cobranças de juros em prazos menores que a unidade contratada [14].

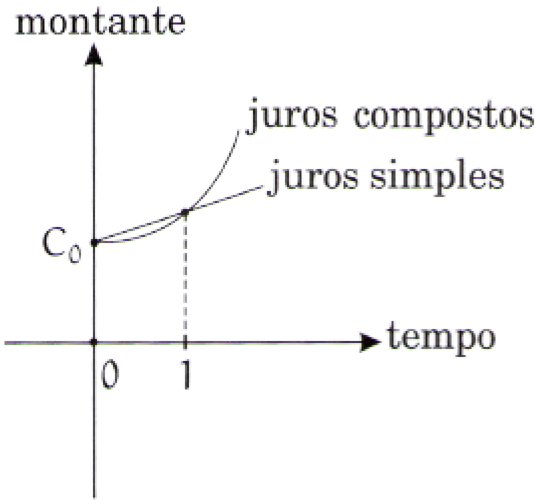

Gráfico 2. 1: Comparando juros

Fonte: Figura extraída do livro citado em [14]

Continuando com o mesmo exemplo que estávamos tratando, $C = R\$1.000{,}00$, vamos ressaltar o que ocorre com este capital quando consideramos juros simples e juros compostos, considerando a mesma taxa de 2% e um prazo de 10 meses.

JUROS SIMPLES			JUROS COMPOSTOS	
Período	juro	Valor Futuro	Juro	Valor Futuro
0	R$ 0,00	R$ 1.000,00	R$ 0,00	R$ 1.000,00
1	R$ 20,00	R$ 1.020,00	R$ 20,00	R$ 1.020,00
2	R$ 20,00	R$ 1.040,00	R$ 20,40	R$ 1.040,40
3	R$ 20,00	R$ 1.060,00	R$ 20,81	R$ 1.061,21
4	R$ 20,00	R$ 1.080,00	R$ 21,22	R$ 1.082,43
5	R$ 20,00	R$ 1.100,00	R$ 21,65	R$ 1.104,08
6	R$ 20,00	R$ 1.120,00	R$ 22,08	R$ 1.126,16
7	R$ 20,00	R$ 1.140,00	R$ 22,52	R$ 1.148,69
8	R$ 20,00	R$ 1.160,00	R$ 22,97	R$ 1.171,66
9	R$ 20,00	R$ 1.180,00	R$ 23,43	R$ 1.195,09
10	R$ 20,00	R$ 1.200,00	R$ 23,90	R$ 1.218,99

Tabela 2. 2: Comparando juros simples e composto

Fonte: próprio autor

2.4 Comparando uma PA e juros simples

Podemos fazer uma associação de operações envolvendo juros simples com uma sequência de números que formam uma progressão aritmética. Vamos considerar uma aplicação de valor inicial C, supondo que esta tenha um rendimento fixo por mês a uma taxa i, a cada mês o montante é acrescido de $i.C$ (chamamos de "J" juros), sendo assim teremos após o primeiro mês $M_1 = C + J$, no segundo mês $M_2 = C + 2J$ e assim por diante.

Temos assim uma P.A. na qual $a_0 = C$, $a_1 = M_1, a_2 = M_2, \ldots , a_n = M_n$ e a razão (r) da P.A. equivale a J .

Exemplo 2.4.1. João aplicou R$ 1.000,00 a juros simples de 5% ao mês.

a) Quanto João terá ao final de três meses?

b) Quanto João terá ao final de dez meses?

c) Quanto João terá ao final de t meses?

Resolvendo a)

Temos que: $C = R\$\,1.000{,}00$, $n = 3$, $J = 5\%.1000 = \frac{5}{100}.1000 = R\$\,50{,}00$.

Logo precisamos encontrar o valor de a_3.

$a_3 = C + 3J = R\$\,1.000{,}00 + 3 \times R\$50{,}00 = R\$\,1.150{,}00$.

Assim, ao final de três meses João terá R$ 1.150,00.

Resolvendo b)

Da mesma forma devemos encontrar a_{10} .

$a_{10} = C + 10J = R\$\,1.000{,}00 + 10 \times R\$\,50{,}00 = R\$\,1.500{,}00$.

Assim ao final de dez meses João terá R$ 1.500,00.

Resolvendo c)

Precisamos encontrar a_t.

$a_t = R\$\,1.000{,}00 + t \times R\$\,50{,}00$.

2.5 Comparando uma PG e juros compostos

De forma parecida com a analogia de PA com juros simples, podemos fazer uma associação de operações envolvendo juros compostos com uma sequência de números que formam uma progressão geométrica. Vamos considerar uma aplicação de valor inicial C, supondo que esta tenha um rendimento fixo por mês a uma taxa i, a cada mês o montante é multiplicado por $(1 + i)$, sendo assim teremos após o primeiro mês $M_1 = C.(1 + i)$, no segundo mês $M_2 = C.(1 + i)^2$, e assim por diante.

Temos assim uma PG na qual $a_0 = C, a_1 = M_1, a_2 = M_2, \dots, a_n = M_n$ e a razão (q) da PA equivale a $(1 + i)$.

Exemplo 2.5.1. Vamos usar o exemplo anterior, em que João aplicou R$ 1.000,00, porém agora a juros compostos de 5% ao mês.

a) Quanto João terá ao final de três meses?

b) Quanto João terá ao final de dez meses?

c) Quanto João terá ao final de t meses?

Resolvendo a)

Temos que: $C = a_0 = R\$\ 1.000{,}00$, $n = 3$, $q = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$.

Logo precisamos encontrar o valor de a_3.

$a_3 = C.(1{,}05)^3 = R\$\ 1.000{,}00 \times 1{,}05^3 = R\$\ 1.000{,}00 \times 1{,}157625 = R\$\ 1.157{,}63$.

Assim, ao final de três meses João terá R$ 1.157,63 aproximadamente.

Resolvendo b)

Da mesma forma, devemos encontrar a_{10}.

$a_{10} = C.(1{,}05)^{10} = R\$\ 1.000{,}00 \times 1{,}62895 = R\$\ 1.628{,}95$.

Assim ao final de dez meses João terá R$ 1.628,95.

Resolvendo c)

Precisamos encontrar a_t.

$a_t = R\$1.000{,}00 \times (1{,}05)^t$.

2.6 Séries uniformes

Um conjunto de quantias (chamadas usualmente de pagamentos ou termos), referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade (apesar do nome, nada tem a ver com ano), ou ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme [13].

OBSERVAÇÃO: (Fórmula Fundamental de Equivalência de Capitais): No item 2.8 definiremos a equivalência de capitais, mas antes vale a pena observar a ideia básica deste sistema, ou seja,

(i) Para obter o valor futuro, basta **multiplicar** o atual por $(1+i)^n$.

(ii) Para obter o valor atual, basta **dividir** o futuro por $(1+i)^n$.

Teorema 2.1 O valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$.

Demonstração:

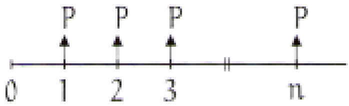

Figura 2. 1: Séries uniformes

Fonte: Figura extraída da citação [13]

O valor da série na época 0 é

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

que é a soma de n termos de uma progressão geométrica. Temos:

$$A = \frac{P}{1+i}.\frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\frac{1}{1+i}} = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Exemplo 2.6.1: Um bem, cujo preço é R$ 120,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, a primeira sendo paga um mês após a compra. Se os juros são de 8% ao mês, determinar o valor das prestações.

Solução: Um pequeno comentário: essas prestações são ditas postecipadas, pois a primeira prestação só é paga um tempo depois da compra.

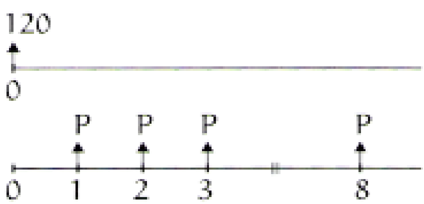

Figura 2. 2: Serie de oito prestações

Fonte: Figura extraída da citação [13]

Igualando os valores na época 0 (essa é a escolha natural da data de comparação: um tempo antes do primeiro termo da série), obtemos:

$$120 = P.\frac{1-(1+0{,}08)^{-8}}{0{,}08}$$
$$P = 120.\frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-8}} = 20{,}88.$$

Portanto as prestações são de R$ 20,88.

2.7 Compras de bens à vista ou a prazo

Em nosso cotidiano podemos nos deparar com diversas situações de compras de bens e suas formas de pagamento, resumidamente devemos nos questionar a respeito se devemos comprar parcelado e aplicar o dinheiro ou pagar à vista, comprar com entrada ou sem entrada. A seguir, vamos explicar melhor e exemplificar estas formas de pagamento.

Exemplo 2.7.1. Usando o sistema de juros compostos, uma pessoa aplica a quantia de R$ 5.000,00, a taxa de juros mensais de 2,5% durante 7 meses. Ao final do período da aplicação, ele retira a quantia de R$ 5.000,00 para a compra de uma televisão LCD numa oferta "relâmpago", que fora da promoção custa R$ 6.000,00. O restante do dinheiro é aplicado a uma nova taxa de juros de 1,5% ao mês durante 3 meses em regime de juros compostos. Analisando as operações financeiras ocorridas, seria melhor reaplicar todo dinheiro comprando a televisão fora da promoção ou a pessoa optou pela melhor opção?

Solução: Aplicação relativa ao capital de R$ 5.000,00 após sete meses:

$$ValorFuturo = F_7 = C.(1+i)^n = 5000.(1+0{,}025)^7 = 5000.(1{,}025)^7$$
$$= 5000.1{,}1887 = 5943{,}43.$$

Após sete meses teremos, aproximadamente, um montante de R$ 5.943,43.

Faremos uma retirada no valor de R$ 5.000,00 para a compra da TV na promoção, restando assim para reaplicação R$ 943,43.

Nova aplicação:

$$Montante = F_3 = C.(1+i)^n = 943{,}43.(1+0{,}015)^3 = 943{,}43.(1{,}015)^3$$
$$= 943{,}43.1{,}0457 = 986{,}52.$$

Observemos que a pessoa retirou a quantia de R$ 5.000,00 para a compra da televisão e o restante no valor de R$ 943,43, aplicou a uma nova taxa de juros e teve como montante final a quantia de R$ 986,52.

Verificaremos no caso dela reaplicar o montante gerado pela 1º aplicação no intuito de comprar a televisão fora da promoção:

$$Montante = F_{10} = F_7.(1+0{,}015)^3 = 5943{,}43.(1+0{,}015)^3 = 5943{,}43.(1{,}015)^3$$
$$= 5943{,}43.1{,}0457 = 6214{,}92.$$

Montante da reaplicação = R$ 6.214,92.

Dessa forma, podemos verificar que a pessoa agiu de forma correta, pois retirou o dinheiro para a compra à vista, aplicando o restante, que gerou um crédito de R$ 986,52. Caso ela optasse pela outra situação, teria um crédito menor no valor de R$ 214,92.

2.8 Equivalência de capitais

2.8.1 Data focal

Data focal ou data de avaliação, pode ser definida como qualquer data para qual se calculam os diferentes capitais de períodos diferentes.

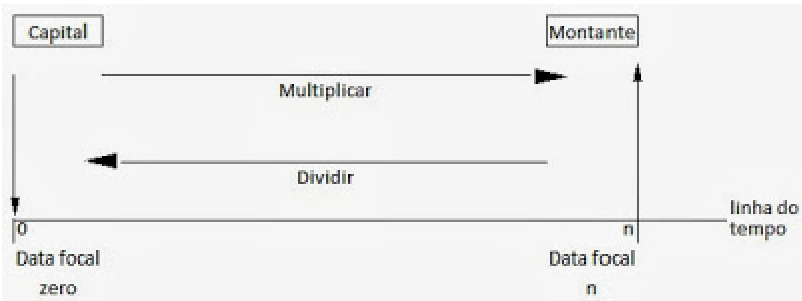

Figura 2. 3: Data focal

Fonte:< https://profes.com.br/milton.araujo/blog/pilulas-de-matematica-financeira-1>,acesso em 10 jan 2021

Se um capital está disponível antes da data focal, então devemos capitalizá-lo para que tenhamos o seu valor corrigido para a data de avaliação. Por outro lado, se um capital estará disponível em uma data posterior a data focal, então devemos descapitalizá-lo para que tenhamos seu valor corrigido para a data focal [3].

2.8.2 Valor presente de um conjunto de capitais

Valor presente de um conjunto de capitais corresponde à soma de os valores de um fluxo de caixa corrigidos para uma data focal, que é definida como a data presente. Desta forma, se todos os valores estarão disponíveis em diferentes datas futuras, o valor presente será obtido por meio da soma de todos os valores descapitalizados. Assim temos:

$$V_p = C_0 + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

$$V_p = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{(1+i)^k}$$

Considere V_p o valor presente e C_i os capitais.

Exemplo 2.8.1. Um investidor recebe uma oferta de investimento e resolve realizar dois depósitos de R$ 1.000,00, sendo o primeiro depósito depois de um mês, e o segundo, após cinco meses da oferta. Considerar uma taxa de juros compostos de 10% ao mês, e encontrar o capital equivalente aos dois depósitos realizados na data focal (2), ou seja, após dois meses da oferta de investimento.

Solução: Para realizar a equivalência de capitais no segundo mês, devemos capitalizar um período do primeiro depósito e descapitalizar três períodos do segundo depósito.

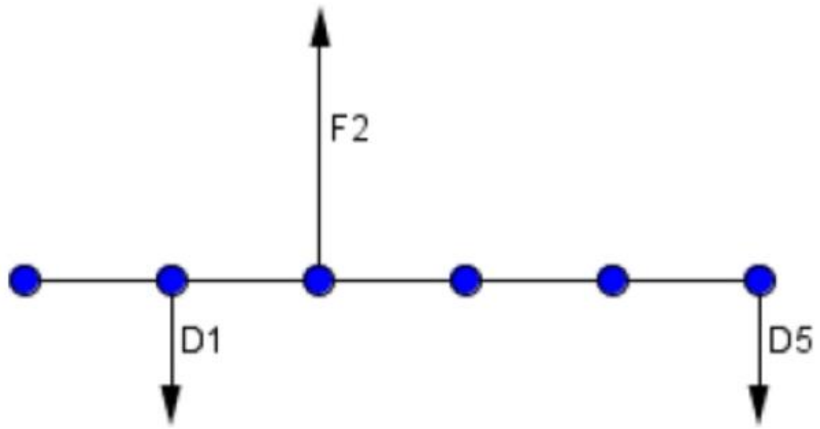

Figura 2. 4: Data focal

Fonte: Próprio Autor

D_1 na data focal (2):

$M = C.(\ 1 + i\ )^n \rightarrow\ VP_{D1} = 1000.(\ 1{,}10\ )^1 = 1100$

D_5 na data focal (2):

$$M = \frac{C}{(\ 1 + i\ )^n} \rightarrow\ VP_{D5} = \frac{1000}{1{,}10^3}\ = 751{,}31.$$

Valor presente na data focal (2):

$VP = VP_{D1} + VP_{D5} = 1100 + 751{,}31 = 1851{,}31.$

Assim, após dois meses, o capital equivalente aos dois depósitos é de R$ 1.851,31.

2.9 Taxa de juros equivalente

A partir do que foi estudado no item 2.2 (Juros Compostos) obtemos um importante resultado que é a **Fórmula das taxas equivalentes**. Se a taxa de juros relativamente a um determinado período é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que $1 + I = (1 + i\ )^n$ [14].

Exemplo 2.9.1. A taxa anual de juros equivalente a 4% ao mês é I tal que $1 + I = (1 + 0{,}4\ )^{12}$. Daí $I\ \cong\ 0{,}60\ =\ 60\%$ ao ano.

2.10 Custo Efetivo Total - CET

Segundo Lucas R. Duarte, o custo efetivo total foi incorporado no sistema financeiro brasileiro após a resolução CMN 3.517, de 2007 do Conselho Monetário Nacional do Banco Central. Desta forma, toda operação de crédito deve constar o valor CET envolvida [3].

Segundo o Banco Central, CET é a taxa que corresponde a todos encargos e despesas incidentes nas operações de crédito e de arrendamento mercantil financeiro, contratadas ou ofertadas a pessoas físicas, microempresas ou empresas de pequeno porte.

Exemplo 2.10.1. Suponhamos que um cliente vá tomar um empréstimo de R$ 1.000,00, à taxa de 12% ao ano (ou 0,95% ao mês), e efetuará um único pagamento após 5 meses . Porém, como há o pagamento de duas taxas à vista (sem inclusão no valor do financiamento) uma taxa de cadastro de R$ 50,00 e IOF de R$ 10,00, as despesas incidentes são alteradas, fazendo com que o custo efetivo também seja alterado. Determinar:

a) O valor final de quitação após 5 meses;

Solução: $M = C.(\,1 + i\,)^n$

$$M = 1000.(\,1{,}0095\,)^5 = 1048{,}11$$

Logo o valor de quitação será R$ 1.048,11.

b) O custo efetivo total (CET);

Solução: Após 5 meses o devedor deverá pagar R$ 1.048,11, porém como há o pagamento de duas taxas à vista o valor emprestando (capital) será de R$ 940,00.

$$M = C.(\,1 + i\,)^n \Longrightarrow\ 1048{,}11 = 940.(\,1 + CET\,)^5$$

$$CET = \left(\frac{1048{,}11}{940}\right)^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$CET = 0{,}02201.$$

Logo, o valor CET é de 2,2% ao mês ou 29,86% ao ano.

2.11 Taxa real e taxa aparente

Quando trabalhamos com taxas de juros, uma componente importante desta taxa é a inflação do período de aplicação. Assim, qualquer taxa efetiva de juros na verdade é uma taxa aparente, pois parte da taxa é composta pela componente inflacionária e a outra parte seria a taxa real de juros [3].

Para calcular a taxa real de juros basta pegar o valor da taxa efetiva (ou aparente) e descontar (deflacionar) a inflação do período.

$$i_R = \left(\frac{1 + \ i_e}{1 + j} \ - 1 \right)$$

Sendo,

$i_R =$ taxa real

$i_e =$ taxa efetiva (aparente)

$j =$ taxa de inflação

Exemplo 2.11.1. Uma aplicação rendeu 26% em um período em que a taxa de inflação acumulada foi de 5%. Qual o valor da taxa real dessa aplicação?

Solução:

$i_R = \left(\frac{1 + \ i_e}{1 + j} \ - 1 \right) \rightarrow \ i_R = \left(\frac{1 + 0{,}26}{1 + 0{,}05} \ - 1 \right)$

$i_R = (\ 1{,}2 - 1\ ) = 0{,}2 = 20\%.$

Logo, a taxa real desta aplicação é 20% no período.

2.12 Sistemas de amortização

Vamos a algumas definições:

=> PRESTAÇÃO: É a soma da amortização acrescida dos juros.

=> AMORTIZAR: É saldar uma dívida de forma parcelada e de acordo com o sistema definido.

=> SITUAÇÃO DA DÍVIDA: É valor atualizado do saldo devedor em determinado momento.

Focaremos nosso estudo em três sistemas de amortização: Sistema de Amortização Constante (SAC), Sistema de Amortização Francês (PRICE) e Sistema de Amortização Americano (SAA).

2.12.1 Sistema de Amortização Constante (SAC)

Este sistema consiste em uma forma de amortização constante, ou seja, a cada prestação paga, é amortizada uma parte igual do valor do empréstimo desde o início do financiamento. Desta forma, as prestações se tornam decrescentes, já que os juros diminuem a cada prestação paga e o saldo devedor cai mais rapidamente do que em outros mecanismos [4].

O SAC é o sistema mais utilizado em financiamentos imobiliários.

Como o saldo é amortizado de forma igual em cada prestação, este sistema se torna uma melhor opção para quem tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente, porém demanda de um capital maior para iniciar o financiamento. Suas prestações e juros diminuem ao longo do tempo formando uma progressão aritmética.

Teorema 2.2 No SAC, sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos [13]:

$A_k = \frac{D_0}{n}$, $D_k = \frac{n-k}{n} . D_0$, $J_k = i. D_{k-1}$, $P_k = A_k + J_k$, em que A_k corresponde a amortização no tempo k, P_k corresponde ao valor da prestação no tempo k, D_0 o saldo devedor inicial, i a taxa de juro e n o número de prestações.

Demonstração: Se a dívida D_0 é amortizada em n quotas iguais, cada quota é igual a:

$A_k = \frac{D_0}{n}$.

O estado da dívida, após k amortizações é:

$D_k = D_0 - k.\frac{D_0}{n} = \frac{n-k}{n}.D_0$.

As duas últimas fórmulas são óbvias [13].

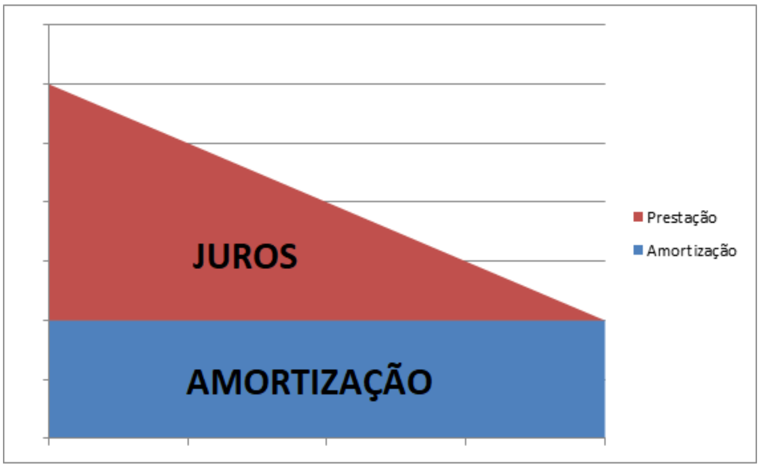

Gráfico 2. 2: Gráfico referente as prestações tabela SAC

Fonte: Próprio Autor

Exemplo 2.12.1. Uma dívida de 100 u.m., ou seja, 100 unidades monetárias é paga, com juros de 15% ao mês, em 5 meses, pelo SAC. Fazer a planilha de amortização.

Solução: Como as amortizações são iguais, cada amortização será de $\frac{1}{5}$ da dívida inicial. A planilha é portanto:

k	A_k	D_k	J_k	P_k
0	-	100	-	-
1	20	80	15	35
2	20	60	12	32
3	20	40	9	29
4	20	20	6	26
5	20	-	3	23

Tabela 2. 3: Tabela de amortização SAC

Fonte: próprio autor

Exemplo 2.12.2. Uma pessoa financia parte do valor de seu apartamento com um banco e recebe R$ 200.000,00 de empréstimo a serem pagos em 5 anos, com um regime de amortização pela tabela SAC, o valor a ser amortizado da dívida anualmente será fixo e pode ser calculado dividindo o valor total pelo prazo. Nesse caso, o valor anual a ser amortizado é de R$ 40.000,00 (R$ 200.000,00 divido por 5 anos). Dessa forma, os juros serão calculados anualmente sobre o valor do principal em aberto (valor ainda devido). Para uma taxa de juros de 10% a.a. temos (valores em milhares):

Sistema de Amortização Constante - SAC				
Principal R$200.000,00		Taxa de Juros (i) 10% ao ano		Saldo Devedor
Período	Juros	Amortização	Pagamento	
0	-	-	-	R$ 200.000,00
1	R$ 20.000,00	R$ 40.000,00	R$ 60.000,00	R$ 160.000,00
2	R$ 16.000,00	R$ 40.000,00	R$ 56.000,00	R$ 120.000,00
3	R$ 12.000,00	R$ 40.000,00	R$ 52.000,00	R$ 80.000,00
4	R$ 8.000,00	R$ 40.000,00	R$ 48.000,00	R$ 40.000,00
5	R$ 4.000,00	R$ 40.000,00	R$ 44.000,00	R$ 0,00
Total	R$ 60.000,00	R$ 200.000,00	R$ 260.000,00	-

Tabela 2. 4: Sistema de Amortização Constante (SAC)

Fonte: próprio autor

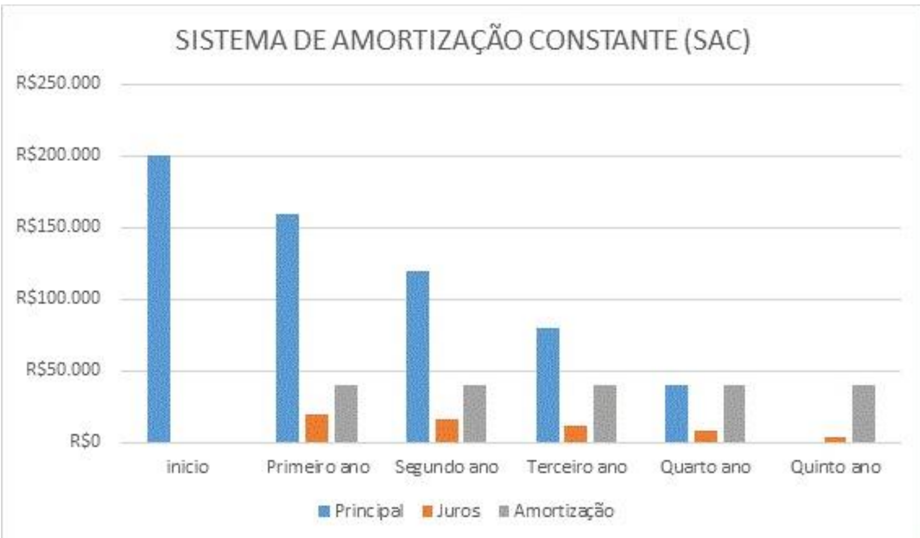

Gráfico 2. 3: Sistema de Amortização Constante (SAC)

Fonte: próprio autor

2.12.2 Sistema de Amortização Francês (PRICE)

Este sistema tem como principal característica manter suas prestações fixas, e as amortizações crescentes. Embora este tipo de amortização demande de um capital menor para iniciar o financiamento, não é considerado uma boa opção para quem tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente.

Teorema 2.3 O valor de cada amortização pode ser calculado através de uma progressão geométrica, conforme a expressão: $A_n = A_1.(1+i)^{n-1}$, sendo i a taxa de rendimento. As parcelas podem ser calculadas através da fórmula $Parcela = P.\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n-1}$, onde $Parcela$ equivale a prestação paga, mensal, anual, ou qualquer outra ordem temporal, e P equivale ao valor presente [13].

Demonstração: A primeira fórmula é o teorema 2.2 já demonstrado anteriormente.

Na segunda fórmula, observemos que D_k é a dívida que será liquidada, postecipadamente, por $n-k$ pagamentos sucessivos a P_k. Portanto, novamente pelo teorema 2.2, temos:

$$D_k = P_k.\frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}.$$

Substituindo o valor de P_k, obtemos a segunda fórmula.

As duas últimas fórmulas são óbvias [13].

Exemplo 2.12.3. Vamos analisar o mesmo exemplo na qual uma pessoa financia parte do valor de seu apartamento com um banco e recebe R$ 200.000,00 de empréstimo a serem pagos em 5 anos, porém agora com um regime de amortização pela tabela PRICE, ou seja, as prestações serão fixas, para uma taxa de juros de 10% a.a.. Assim temos (valores em milhares):

Vamos calcular o valor da prestação:

$$Parcela = \frac{P.(1+i)^n.i}{(1+i)^n-1} = 200000.\frac{(1+0{,}1)^5.0{,}1}{(1+0{,}1)^5-1} = 200000.\frac{1{,}61051.0{,}1}{1{,}61051-1}$$

$$= 200000.\frac{0{,}161051}{0{,}61051} = 200000.0{,}2638 = 52760.$$

Neste caso, teremos uma parcela anual no valor de R$ 52.760,00. Podemos calcular agora as amortizações e os juros:

Sistema de Amortização Francês - PRICE				
Principal R$200.000,00		Taxa de Juros (i) 10% ao ano		Saldo Devedor
Período	Juros	Amortização	Pagamento	
0	-	-	-	R$ 200.000,00
1	R$ 20.000,00	R$ 32.760,00	R$ 52.760,00	R$ 167.240,00
2	R$ 16.724,00	R$ 36.036,00	R$ 52.760,00	R$ 131.204,00
3	R$ 13.120,40	R$ 39.639,60	R$ 52.760,00	R$ 91.564,40
4	R$ 9.156,44	R$ 43.603,56	R$ 52.760,00	R$ 47.960,84
5	R$ 4.796,08	R$ 47.960,84	R$ 52.760,00	R$ 0,00
Total	R$ 63.796,92	R$ 200.000,00	R$ 263.800,00	-

Tabela 2. 5: Sistema de Amortização Francês (PRICE)

Fonte: próprio autor

2.12.3 Sistema de Amortização Americano (SAA)

O SAA tem como principal característica a incidência de juros simples sobre o valor original da dívida, podendo assim, o devedor quitar dívida quando desejar. É indicado quando o devedor prevê o recebimento de uma quantia suficiente para quitar a dívida.

O pagamento de juros pode ser perpétuo mesmo quando já se pagou o equivalente a dívida. A dívida pode ser paga parcialmente reduzindo o valor dos juros proporcionalmente [3].

O Sistema de Amortização Americano (SAA) possui duas variantes: Padrão, que a dívida é liquidada em parcelas periódicas chamadas de “cupons” e Bullet, que tem por característica a quitação dos juros apenas no vencimento do principal.

No Sistema Americano Padrão ocorre menos pagamento de juros que no Sistema Americano Bullet por conta da quitação dos juros em cada período, não sendo assim necessário sua incorporação no principal.

Exemplo 2.12.4. Uma pessoa financia parte do valor de seu apartamento com um banco e recebe R$ 200.000,00 de empréstimo a serem pagos em 5 anos a uma taxa de juros de 10% a.a., com um regime de amortização pela tabela SAA, vamos analisar as prestações na variante Padrão e Bullet:

2.12.3.1 Sistema Americano Padrão

Neste sistema, teríamos pagamentos anuais no valor de R$ 20.000,00 e um pagamento referente ao valor principal no final dos cinco anos de R$ 200.000,00.

Sistema de Amortização Americano - Padrão				
Principal R$200.000,00		Taxa de Juros (i) 10% ao ano		Saldo Devedor
Período	Juros	Amortizaç	Pagamento	
0	-	-	-	R$ 200.000,00
1	R$ 20.000,00	R$ 0,00	R$ 20.000,00	R$ 200.000,00
2	R$ 20.000,00	R$ 0,00	R$ 20.000,00	R$ 200.000,00
3	R$ 20.000,00	R$ 0,00	R$ 20.000,00	R$ 200.000,00
4	R$ 20.000,00	R$ 0,00	R$ 20.000,00	R$ 200.000,00
5	R$ 20.000,00	R$ 0,00	R$ 220.000,00	R$ 220.000,00
Total		R$ 0,00	R$ 300.000,00	-

Tabela 2. 6: Sistema de Amortização Americano – Padrão

Fonte: próprio autor

2.12.3.2 Sistema Americano Bullet

Neste sistema, teríamos um único pagamento no valor de R$ 322.102,00, na qual R$ 200.000,00 é o valor referente ao principal e R$ 122.102,00 são incidências de juros.

Sistema de Amortização Americano - BULLET				
Principal R$200.000,00		Taxa de Juros (i) 10% ao ano		Saldo Devedor
Período	Juros	Amortização	Pagamento	
0	-	-	-	R$ 200.000,00
1	R$ 20.000,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 220.000,00
2	R$ 22.000,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 242.000,00
3	R$ 24.200,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 266.200,00
4	R$ 26.620,00	R$ 0,00	R$ 0,00	R$ 292.820,00
5	R$ 29.282,00	R$ 0,00	R$ 322.102,00	R$ 322.102,00
Total		R$ 0,00	R$ 322.102,00	-

Tabela 2. 7: Sistema de Amortização Americano – Bullet

Fonte: Próprio autor

Neste capítulo estudamos capital, juros, sistemas de amortização, equivalência de capitais. Tais conceitos são relevantes para o estudo do comportamento do valor do dinheiro no decorrer do tempo.

Capítulo 3. A educação financeira no atendimento em uma instituição bancária

É de extrema importância abordar este assunto junto aos jovens brasileiros buscando uma melhor educação financeira, pois quando chegam na idade adulta, estes devem estar preparados para tomar decisões, para que não sejam forçados muitas vezes a adquirirem produtos financeiros desnecessários ou até mesmo mais caros, é muito importante que possam aprender a poupar desde cedo. Conforme comentado na introdução deste trabalho, hoje temos um número muito alto de inadimplentes, e precisamos mudar isso junto aos jovens.

Neste capítulo descreveremos um caso real na qual a escolha de uma cliente fez com que ela pagasse muito menos em um financiamento imobiliário.

Por trabalhar em uma instituição financeira, pudemos verificar algumas situações de alguns jovens, que por não terem conhecimento sobre matemática financeira tinham muitas dúvidas ao adquirir algum produto bancário, ocorrendo assim a aquisição de algo desnecessário ou até mesmo a compra errada de algum produto ou serviço, entre eles podemos citar o financiamento imobiliário, que pode ser feito em diversas linhas de financiamento e em diferentes tabelas de amortização, as principais usadas são a tabela PRICE e SAC. A decisão certa é muito importante, pois são financiamentos contratados em até 35 anos, ou seja, um jovem de 20 anos de idade vai continuar pagando muitas vezes até seus 55 anos de idade. A seguir faremos uma análise mais crítica sobre esta linha de aquisição de imóveis.

Vamos analisar o caso de uma cliente, K.C.S., que comprou um imóvel no valor de R$ 115.000,00. A mesma pagou, como entrada, o valor de R$ 23.000,00. Financiou R$ 92.000,00 num prazo de trinta e cinco anos (420 meses) a uma taxa anual de 6,69%. Vale a pena destacar que, na linha de financiamento “PF - SFH” com funding SBPE, que é uma linha de crédito destinada à compra de imóveis ou terrenos, oferecida por várias instituições financeiras, tanto públicas quanto privadas e essa modalidade possui uma categoria de crédito em que os bancos recebem recursos pela poupança, ambas as tabelas de amortização possuem a mesma taxa.

Ressaltamos que nesses contratos outras coisas são cobradas, como por exemplo, seguro por danos físicos e morte ou invalidez permanente e taxa de administração, o que faz a taxa anual ser diferente da taxa efetiva anual.

Detalharemos a seguir as duas propostas.

3.1 Tabela de amortização SAC

Aquisição PF - SFH		
Valor do Imóvel	R$ 115.000,00	
(-) Entrada	R$ 23.000,00	
(+) Outras despesas	R$ 0,00	
(=) Financiamento	R$ 92.000,00	
Parcelas		
Prazo (meses)	420	
Sistema de Amortização	SAC	
Primeira parcela	R$ 739,96	
Última parcela	R$ 223,46	
Ver todas as parcelas		
Juros		
Taxa de juros efetiva	6,690 % a.a.	
Taxa de juros nominal	6,493 % a.a.	
Taxa Referencial - TR	0 % a.m.	
CET - Custo Efetivo Total	7,79 % a.a.	Detalhar
CESH - Custo Efetivo Seg. Hab	5,9398 % a.a.	

Figura 3. 1: Detalhamento financiamento imobiliário - Tabela SAC

Fonte: Próprio autor

Valor do imóvel: R$ 115.000,00.

Entrada: R$ 23.000,00.

Valor financiado: R$ 92.000,00.

Prazo: 420 meses.

Valor da parcela 01: R$ 739,96.

Valor da parcela 60: R$ 689,20.

Valor da parcela 120: R$ 620,97.

Valor da parcela 180: R$ 557,69.

Valor da parcela 240: R$ 508,00.

Valor da parcela 300: R$ 447,31.

Valor da parcela 360: R$ 348,20.

Valor da parcela 420: R$ 223,46.

Valor total pago: R$ 220.543,46.

A seguir o detalhamento das parcelas:

Nº	Prestação	Capital	Juros	Seguro MIP	Seguro DFI	Saldo Devedor
1	R$ 739,96	R$ 219,04	R$ 490,98	R$ 20,97	R$ 8,97	R$ 91.780,96
60	R$ 689,20	R$ 219,04	R$ 436,11	R$ 25,08	R$ 8,97	R$ 78.857,60
120	R$ 620,97	R$ 219,04	R$ 363,63	R$ 29,33	R$ 8,97	R$ 65.715,20
180	R$ 557,69	R$ 219,04	R$ 290,35	R$ 39,33	R$ 8,97	R$ 52.572,80
240	R$ 508,00	R$ 219,04	R$ 218,67	R$ 61,32	R$ 8,97	R$ 39.430,40
300	R$ 447,31	R$ 219,04	R$ 146,19	R$ 73,11	R$ 8,97	R$ 26.288,00
360	R$ 348,29	R$ 219,04	R$ 73,71	R$ 46,57	R$ 8,97	R$ 13.145,60
420	R$ 223,46	R$ 222,24	R$ 1,22	0	0	0

Tabela 3. 1: Detalhamento das parcelas – SAC

Fonte: próprio autor

A seguir detalhamento do Custo Efetivo Total:

Detalhes - CET

Componentes do Fluxo da Operação no Ato da Contratação		
a) Valor total devido no ato da contratação (b+c)	R$ 93.230,64	100,00 %
b) Valor liberado ao cliente e vendedor	R$ 92.000,00	98,68 %
c) Despesas vinculadas a concessão de crédito (c1+c2+cn)	R$ 1.230,64	1,32 %
c1) IOF (sobre seguros)	R$ 0,70	0,00 %
c2) MIP	R$ 20,97	0,02 %
c3) DFI	R$ 8,97	0,01 %
c4) Avaliacão do Bem Recebido em Gar	R$ 1.200,00	1,29 %

Figura 3. 2: Detalhamento do custo efetivo total (CET) tabela SAC

Fonte: Próprio Autor

3.2 Tabela de amortização PRICE

Aquisição PF - SFH		
Valor do Imóvel	R$ 115.000,00	
(-) Entrada	R$ 23.000,00	
(+) Outras despesas	R$ 0,00	
(=) Financiamento	R$ 92.000,00	
Parcelas		
Prazo (meses)	420	
Sistema de Amortização	PRICE	
Primeira parcela	R$ 585,36	
Última parcela	R$ 554,15	
Ver todas as parcelas		
Juros		
Taxa de juros efetiva	6,690 % a.a.	
Taxa de juros nominal	6,493 % a.a.	
Taxa Referencial - TR	0 % a.m.	
CET - Custo Efetivo Total	7,87 % a.a.	Detalhar

Figura 3. 3: Detalhamento financiamento imobiliário - Tabela PRICE

Fonte: Próprio Autor

Valor do imóvel: R$ 115.000,00.

Entrada: R$ 23.000,00.

Valor financiado: R$ 92.000,00.

Prazo: 420 meses.

Valor da parcela 01: R$ 585,36.

Valor da parcela 60: R$ 592,36.

Valor da parcela 120: R$ 601,10.

Valor da parcela 180: R$ 620,12.

Valor da parcela 240: R$ 663,56.

Valor da parcela 300: R$ 700,44.

Valor da parcela 360: R$ 664,95.

Valor da parcela 420: R$ 554,15.

Valor total pago: R$ 270.152,37.

A seguir detalhamento das parcelas:

Nº	Prestação	Capital	Juros	Seguro MIP	Seguro DFI	Saldo Devedor
1	R$ 585,36	R$ 57,58	R$ 497,81	R$ 21,00	R$ 8,97	R$ 91.942,42
60	R$ 592,33	R$ 79,17	R$ 476,23	R$ 27,96	R$ 8,97	R$ 87.931,24
120	R$ 601,10	R$ 109,44	R$ 445,96	R$ 36,73	R$ 8,97	R$ 82.306,82
180	R$ 620,12	R$ 151,28	R$ 404,11	R$ 55,76	R$ 8,97	R$ 74.531,86
240	R$ 663,56	R$ 209,13	R$ 346,27	R$ 99,19	R$ 8,97	R$ 63.784,15
300	R$ 700,44	R$ 289,09	R$ 266,31	R$ 136,07	R$ 8,97	R$ 48.926,99
360	R$ 664,95	R$ 399,62	R$ 155,78	R$ 100,58	R$ 8,97	R$ 28.389,23
420	R$ 554,15	R$ 551,17	R$ 2,98	0	0	0

Tabela 3. 2: Detalhamento das parcelas – PRICE

Fonte: próprio autor

A seguir detalhamento do Custo Efetivo Total:

Detalhes - CET

Componentes do Fluxo da Operação no Ato da Contratação		
a) Valor total devido no ato da contratação (b+c)	R$ 93.230,67	100,00 %
b) Valor liberado ao cliente e vendedor	R$ 92.000,00	98,68 %
c) Despesas vinculadas a concessão de crédito (c1+c2+cn)	R$ 1.230,67	1,32 %
c1) IOF (sobre seguros)	R$ 0,70	0,00 %
c2) MIP	R$ 21,00	0,02 %
c3) DFI	R$ 8,97	0,01 %
c4) Avaliação do Bem Recebido em Gar	R$ 1.200,00	1,29 %

Figura 3. 4: Detalhamento do custo efetivo total (CET) tabela PRICE

Fonte: Próprio autor

3.3 PRICE x SAC

Fazendo uma simples análise, conseguimos orientar este cliente em relação aos benefícios da tabela SAC em relação a PRICE, pois vemos uma diferença gigantesca no valor final pago de R$ 49.608,91, além disso, por volta da parcela de número 120, o valor mensal pago se iguala.

Graficamente temos:

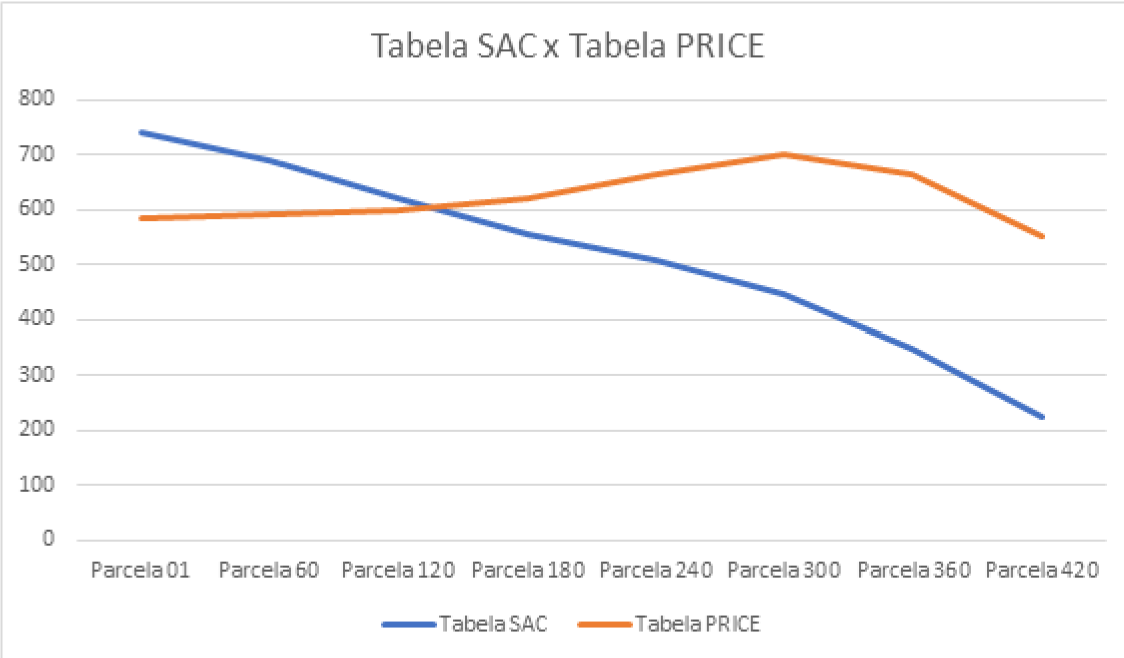

Gráfico 3. 1: Fin. Imob. Tabela SAC x PRICE

Fonte: próprio autor

A área abaixo das linhas do gráfico nos dá o valor pago, facilmente podemos visualizar as vantagens da tabela SAC.

Esta cliente, também tinha uma dúvida, após um determinado tempo, caso a mesma desejasse usar cerca de R$ 10.000,00 para amortizar a dívida, o que aconteceria em ambos sistemas de amortizações. A seguir os cálculos.

Na tabela SAC temos um cálculo simples, pois temos amortizações constantes no valor de R$ 219,04, com este valor poderíamos quitar aproximadamente 45,6 parcelas já pela tabela PRICE poderíamos quitar aproximadamente 20 parcelas, conforme cálculo informado pela empresa financeira, ilustrado na tabela a seguir:

Nº	Prestação	Capital	Juros	Seguro MIP	Seguro DFI	Prestação Líquida	saldo devedor
399	R$ 635,27	R$ 493,23	R$ 62,17	R$ 70,90	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 10.939,48
400	R$ 632,07	R$ 495,90	R$ 59,50	R$ 67,70	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 10.443,27
401	R$ 628,86	R$ 498,58	R$ 56,82	R$ 64,49	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 9.944,37
402	R$ 625,63	R$ 501,28	R$ 54,12	R$ 61,26	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 9.442,77
403	R$ 622,38	R$ 503,99	R$ 51,41	R$ 58,01	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 8.938,46
404	R$ 619,11	R$ 506,72	R$ 48,68	R$ 54,74	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 8.431,43
405	R$ 615,83	R$ 509,46	R$ 45,94	R$ 51,46	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 7.921,64
406	R$ 612,52	R$ 512,22	R$ 43,18	R$ 48,15	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 7.409,10
407	R$ 609,20	R$ 514,99	R$ 40,41	R$ 44,83	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 6.893,79
408	R$ 605,85	R$ 517,77	R$ 37,62	R$ 41,49	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 6.375,70
409	R$ 602,51	R$ 520,58	R$ 34,82	R$ 38,14	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 5.854,80
410	R$ 599,12	R$ 523,39	R$ 32,00	R$ 34,76	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 5.331,08
411	R$ 595,73	R$ 526,22	R$ 29,17	R$ 31,37	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 4.804,54
412	R$ 592,32	R$ 529,07	R$ 26,32	R$ 27,96	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 4.275,14
413	R$ 588,89	R$ 531,93	R$ 23,46	R$ 24,53	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 3.742,88
414	R$ 585,44	R$ 534,81	R$ 20,58	R$ 21,08	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 3.207,74
415	R$ 581,98	R$ 537,71	R$ 17,69	R$ 17,61	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 2.669,70
416	R$ 578,50	R$ 540,62	R$ 14,78	R$ 14,13	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 2.128,74
417	R$ 574,98	R$ 543,54	R$ 11,85	R$ 10,62	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 1.584,87
418	R$ 571,46	R$ 546,48	R$ 8,91	R$ 7,10	R$ 8,97	R$ 555,39	R$ 1.038,06
419	R$ 567,92	R$ 549,44	R$ 5,96	R$ 3,55	R$ 8,97	R$ 555,40	R$ 488,27
420	R$ 554,15	R$ 551,17	R$ 2,98	0	0	R$ 554,15	-R$ 63,24

Tabela 3. 3: Cálculo saldo devedor

Fonte: próprio autor

Podemos verificar pelo cálculo que com R$ 9.944,37 conseguiríamos quitar as parcelas de 401 à 420.

Neste capítulo fizemos um estudo de um caso real que aconteceu em uma agência bancária, em que uma cliente estava em dúvida a respeito de qual sistema de amortização usar. Com o nosso conhecimento adquirido na matéria MA12, Matemática Discreta, do curso de Mestrado Profissional campus Três Lagoas, pudemos orientar esta cliente a respeito da melhor maneira de qual produto contratar. Explicamos a ela, como fizemos nesta dissertação, os sistemas de amortização SAC e PRICE, com suas respectivas vantagens e/ou desvantagens. A mesma optou pelo sistema SAC devido o valor pago no final do financiamento ser menor, amortizações antecipadas serem mais vantajosas e a parcela ainda ir diminuindo gradualmente ao longo do tempo. As instituições bancárias preferem este sistema, pois partem da premissa que se o cliente consegue pagar as primeiras parcelas que são maiores, os mesmos conseguem pagar as próximas que vão diminuindo, evitando assim a inadimplência. Porém muitas vezes, o sistema PRICE é usado para que o cliente possa financiar um valor maior, pois os bancos aprovam financiamentos que comprometam apenas trinta por cento da renda.

Outros sistemas de amortizações são usados também em outras linhas de financiamentos, como o sistema de amortização americano Padrão. Tal sistema é utilizado nos anos iniciais do FIES (Fundo de Financiamento Estudantil), um programa criado pelo Ministério da Educação (MEC) que oferece financiamento estudantil aos estudantes de cursos de graduação de instituições privadas cadastrados no sistema. O objetivo é facilitar o acesso de jovens de baixa renda à educação superior. Já o sistema de amortização americano Bullet, o mesmo é utilizado em alguns financiamentos rurais.

No próximo capítulos deixamos alguns planos de aulas com diversas atividades abordando o tema matemática financeira.

Capítulo 4. Planos de aulas e atividades voltadas para o ensino

Como este trabalho foi escrito durante os anos de 2020 e 2021, anos marcados pela grave pandemia, deixamos alguns planos de aulas e atividades, sobre PA, PG e matemática financeira, para que este assunto seja abordado juntamente com alunos do ensino médio em um futuro próximo.

4.1 Plano de aula sobre sequências e PA

4.1.1 Objetivos

- Fazer com que os alunos conheçam os conceitos de sequência numérica e progressão aritmética;
- Trabalhar com progressões aritméticas.

4.1.2 Conteúdos

- Sequência Numérica;
- Progressão Aritmética.

4.1.3 Etapas e atividades

Para estas atividades utilizaremos computadores com o programa Excel instalado, sala com retroprojetor, calculadora que pode ser usada para conferir resultados; além de lousa, caneta ou giz.

Como forma de avaliar o aluno, poderemos verificar a aprendizagem através da correção das atividades propostas.

4.1.3.1 Primeira etapa

1ª Etapa: Sequências Numéricas

Trabalhar com os alunos os conceitos de sequências numéricas, que servirão de base para o conteúdo de Progressão Aritmética. Sequência é um conjunto na qual seus elementos estão dispostos em determinada ordem. Trabalharemos aqui com sequências numéricas, ou seja, seus elementos são números. Observemos os exemplos de sequências numéricas:

- 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... – sequência de números naturais;
- 0, 2, 4, 6, 8, 10, ... – sequência de números naturais pares;
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... – sequência de números primos.

O conteúdo de sequências numéricas é uma oportunidade para trabalhar junto aos alunos a capacidade de identificar lógicas e padrões. Apresentar algumas sequências e colocar como desafio a tarefa de descobrir qual é o elemento seguinte.

Seguem alguns exemplos que podem inicialmente serem resolvidos em conjunto com a turma:

- 11, 17, 23, 29,35,... (somar 6 unidades de um termo para outro);
- 3, 12, 48, 192, 768,... (multiplicar por 4 de um termo para outro);
- 28, 25, 21, 16,... (subtrair 3, no próximo termo 4, no próximo termo 5 e assim por diante).

Em seguida, fazer uma sequência de exercícios para que os estudantes resolvam em duplas. A atividade é a mesma, deverão descobrir qual o elemento seguinte de cada sequência numérica. Seguem algumas possibilidades:

1. 18, 25, 32, 39 (somar 7 a cada termo);
2. 22, 26, 31, 37 (somar 4 no primeiro termo, no segundo 5, no terceiro 6 e assim sucessivamente);
3. 40, 36, 32, 28 (subtrair 4 a cada termo);
4. 40,35,31,28 (subtrair 5 no primeiro termo, 4 no segundo, 3 no terceiro e assim sucessivamente);
5. 15, 10, 5, 0, -5 (subtrair 5 a cada termo).

Realizar uma outra atividade, solicitando a cada dupla criar duas sequências numéricas. Este tipo de atividade contribui para que alunos utilizem o raciocínio para criar novas lógicas. Após terem terminado, discutir as respostas encontradas. Comentar, como curiosidade, sobre a sequência de Fibonacci. Cada elemento dela é formado pela soma dos dois elementos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Por estar relacionado com diversos fenômenos da natureza, obras de arte e outros conteúdos matemáticos, possui grande importância na Matemática.

4.1.3.2 Segunda etapa: Progressão Aritmética – Cálculo de um termo qualquer

Nesta etapa, os alunos irão conhecer o conceito de Progressão Aritmética (PA), que é uma sequência numérica na qual a diferença de elementos (ou termos) consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença é chamada de razão da progressão aritmética. Observemos os exemplos que seguem:

a) (5, 8, 11,14,17,20) A razão desta PA é 3 e ela possui 6 termos. Pelo fato da razão ser positiva, dizemos que é uma progressão crescente.

b) (12, 6, 0, -6, ...) A razão desta PA é -6 e as reticências ao fim indicam que é uma progressão de infinitos termos. Pelo fato da razão ser negativa, dizemos que é uma progressão decrescente.

Passados os conceitos iniciais, é interessante seguir o conteúdo a partir de problemas práticos.

O exercício a seguir foi feito a partir de uma questão do ENEM de 2011:

1) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33.000 passagens; em fevereiro, 34.500; em março, 36.000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes. Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

No exemplo, notamos que o número de passagens vendidas aumenta na forma de PA. De um mês para o outro aumenta em 1500 passagens. O primeiro mês vendeu 33.000; para encontrar a quantidade do segundo mês somamos 1.500; para encontrar a quantidade de passagens vendidas no terceiro mês somamos 1.500 novamente, e assim por diante. A partir desse raciocínio podemos entender a fórmula geral para encontrar um termo qualquer de uma PA.

Para encontrar um termo qualquer a_n, basta somar ao valor do primeiro termo a_1 o valor r da razão n – 1 vezes: $a_n = a_1 + (n - 1).r$.

Voltando ao exemplo, temos que o primeiro termo desta PA, $a_1 = 33000$, a razão $r = 1500$ e o número de termo $n = 7$ e procuramos o sétimo termo a_7 , que equivale numericamente a quantidade de passagens vendidas em julho.

Usaremos assim a fórmula do termo geral da PA, $a_n = a_1 + (n - 1).r$.

$a_7 = a_1 + (n - 1).r = 33000 + (7 - 1).1500$

$a_7 = 33000 + 6.1500$

$a_7 = 33000 + 9000 = 42000.$

Portanto, em julho, foram vendidas 42 mil passagens.

Acreditamos que nesta etapa, vale a pena recomendar alguns exercícios para fixação e contextualização do assunto. Seguem algumas possibilidades:

Exercício 01. (Enem) O gráfico, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção. Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a:

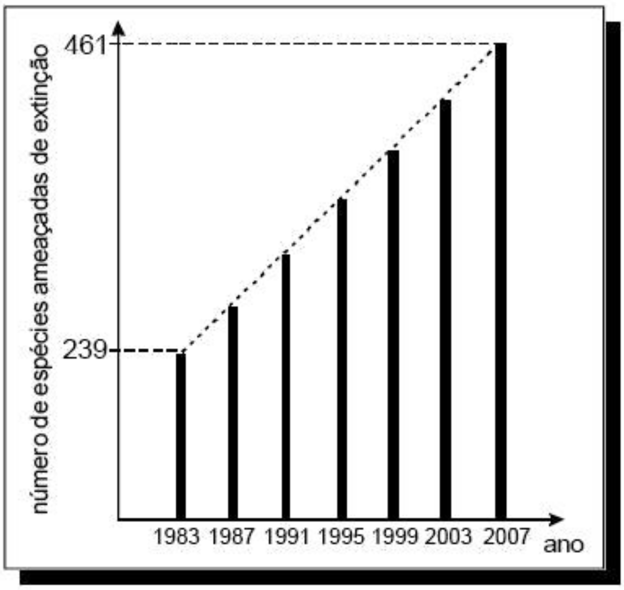

Figura 4. 1: Questão Enem 2011

Fonte: < http://portal.inep.gov.br/provas-e-gabaritos > acesso em 10 jan 2021

a) 465.

b) 493.

c) 498.

d) 538.

e) 699.

Exercício 02. Qual é o centésimo primeiro termo de uma PA cujo primeiro termo é 107 e a razão é 6?

a) 507.

b) 607.

c) 701.

d) 707.

e) 807.

Exercício 03. Camila, para praticar algum exercício físico, deu 7 voltas na praça na segunda-feira. Na terça, deu 13 voltas e na quarta deu 17 voltas. Se ela continuar aumentando o número de voltas no mesmo ritmo, quantas voltas dará no domingo?

4.1.3.3 Terceira etapa: progressão aritmética – soma dos termos

Para atrair a atenção dos alunos para este assunto, podemos contar um pouco da vida de Gauss. Johann Carl Friedrich Gauss é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos [1], tendo contribuído em diversas áreas desta e de outras Ciências. Quando tinha dez anos, na escola, um professor passou um desafio para os alunos: deveriam encontrar a soma de todos os números de 1 à 100. O professor ficou muito surpreso, pois Gauss encontrou o resultado muito rapidamente, que é 5050. Ele encontrou a resposta de forma rápida porque percebeu que se somasse o primeiro com o último número (1+100); o segundo com o penúltimo (2+99); o terceiro com o antepenúltimo (3+98); sempre encontra o mesmo valor, no caso 101. Com isso, multiplicamos 101 pela metade da quantidade de termos, nesse caso 50, assim, 101x50 = 5050 [1]. Esta é a base do raciocínio da fórmula que usamos para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA.

A soma S dos n primeiros termos de uma PA é a soma do primeiro termo com o último, multiplicada pela metade do número de termos: $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$.

Seguem algumas possibilidades de exercícios para que os alunos pratiquem:

Exercício 04. Qual a soma dos 200 primeiros números pares?

a) 40200.

b) 80400.

c) 60300.

d) 50500.

e) 70700.

Exercício 05. (PUC/RJ – 2009) Temos uma progressão aritmética de 20 termos onde o primeiro termo é igual a 5. A soma de todos os termos dessa progressão aritmética é 480. O décimo termo é igual a:

a) 20.

b) 21.

c) 22.

d) 23.

e) 24.

4.1.3.4 Quarta etapa: ensinar os alunos o cálculo dos termos de uma PA e suas somas através de Excel

Primeiro Passo: criar uma planilha com os campos a serem digitados, e os campos a serem calculados.

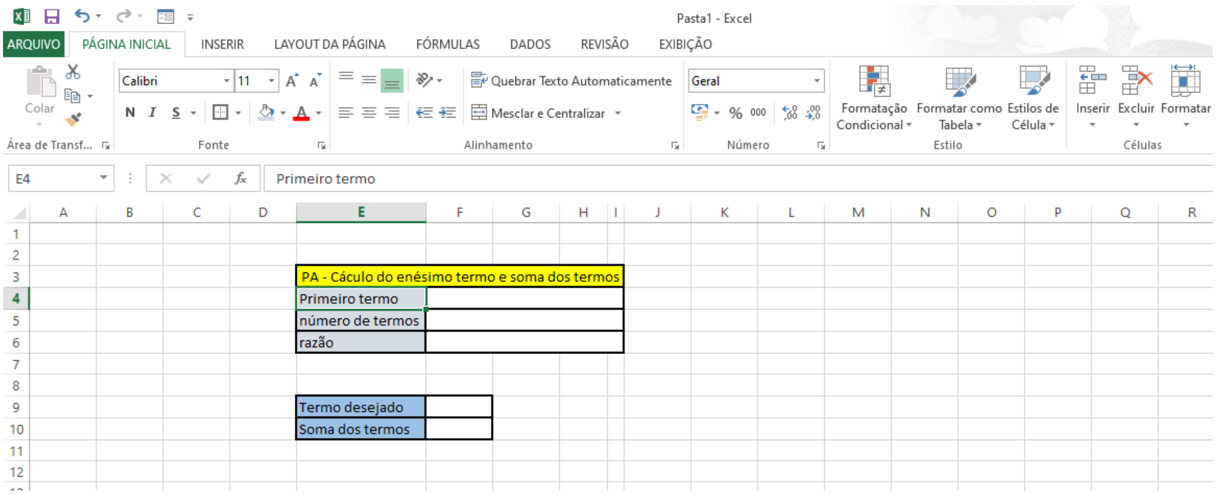

Figura 4. 2: Cálculo enésimo termo da PA usando Excel – passo 1

Fonte: Próprio autor

Segundo Passo: Clicar no campo escolhido para o enésimo termo a_n, dar início a criação da fórmula, $a_n = a_1 + (n-1).r$. Na barra de descrição da fórmula, colocar o símbolo "=" e clicar no campo escolhido para o termo a_1.

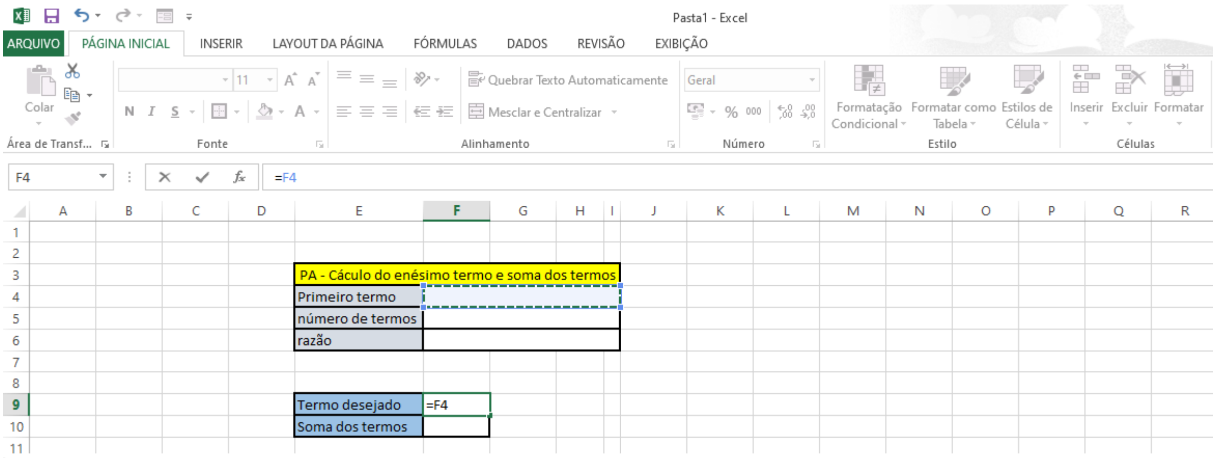

Figura 4. 3: Cálculo enésimo termo da PA usando Excel – passo 2

Fonte: Próprio autor

Terceiro Passo: Abrir parênteses e clicar no campo escolhido para o número de termos e deste subtrair "1", para obtermos $(n-1)$.

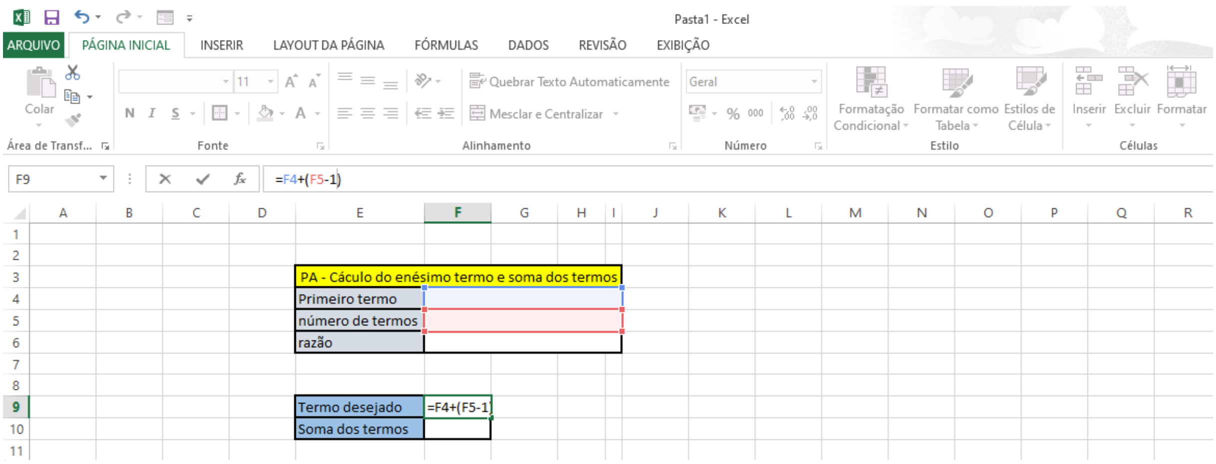

Figura 4. 4: Cálculo enésimo termo da PA usando Excel – passo 3

Fonte: Próprio autor

Quarto Passo: Escrever o símbolo “*” (multiplicação) e clicar no campo escolhido para razão r.

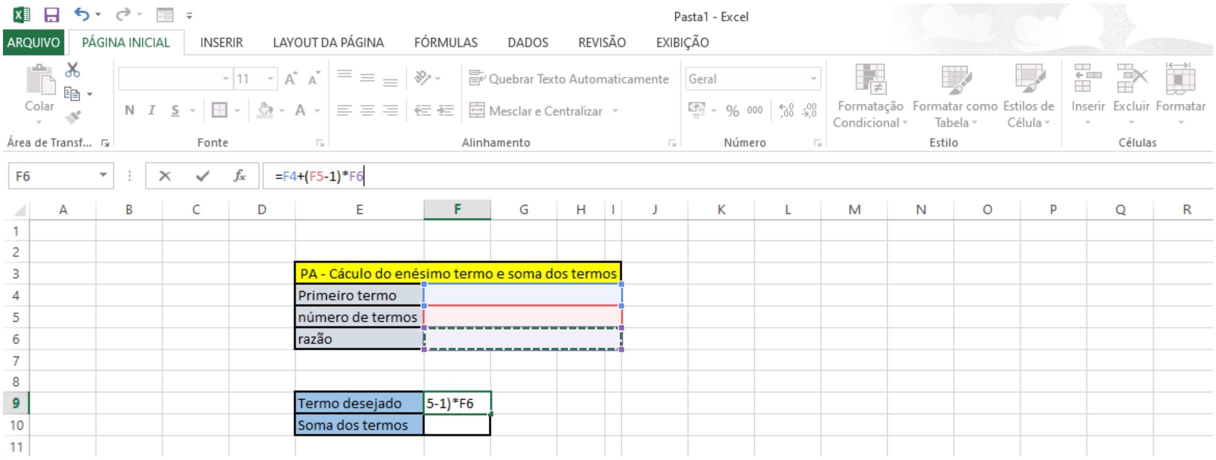

Figura 4. 5: Cálculo enésimo termo da PA usando Excel – passo 4

Fonte: Próprio autor

Quinto Passo: Clicar em “enter”, assim teremos a fórmula pronta para cálculo do enésimo termo da PA.

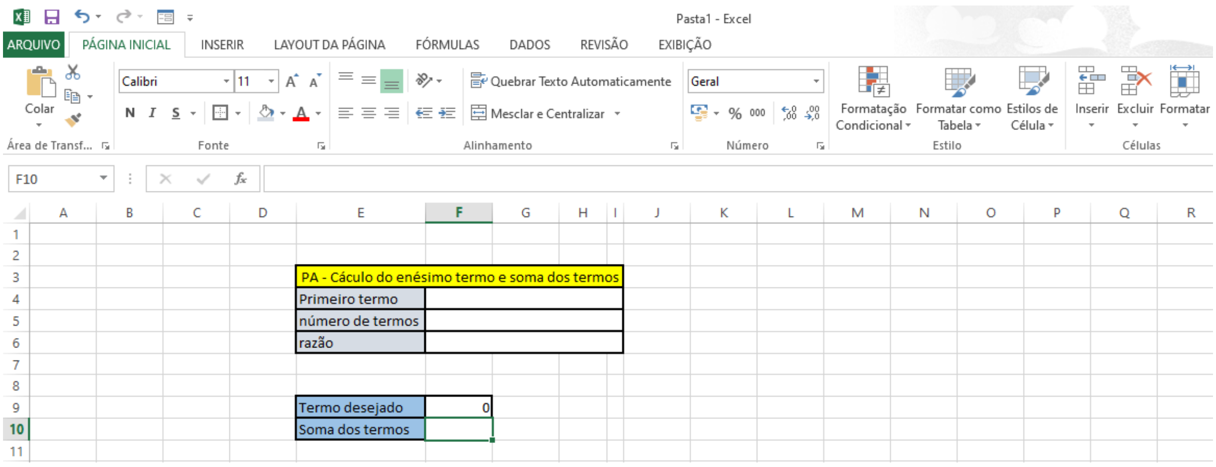

Figura 4. 6: Cálculo enésimo termo da PA usando Excel – passo 5

Fonte: Próprio autor

Sexto Passo: A partir desta passagem, criaremos a fórmula para cálculo da soma dos “n” termos da PA, $S_n = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}$. Clicar no campo escolhido para esta soma, e na barra de descrição da fórmula, digitar “=”, abrir parênteses e clicar no campo escolhido para o primeiro termo a_1 .

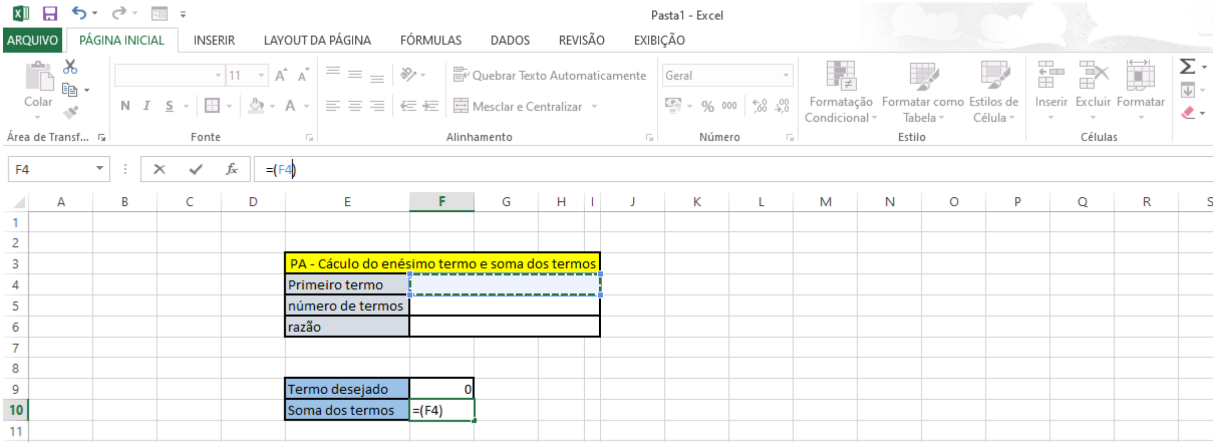

Figura 4. 7: Cálculo da soma dos termos da PA usando Excel – passo 6

Fonte: Próprio autor

Sétimo Passo: Clicar no campo escolhido para o enésimo termo a_n.

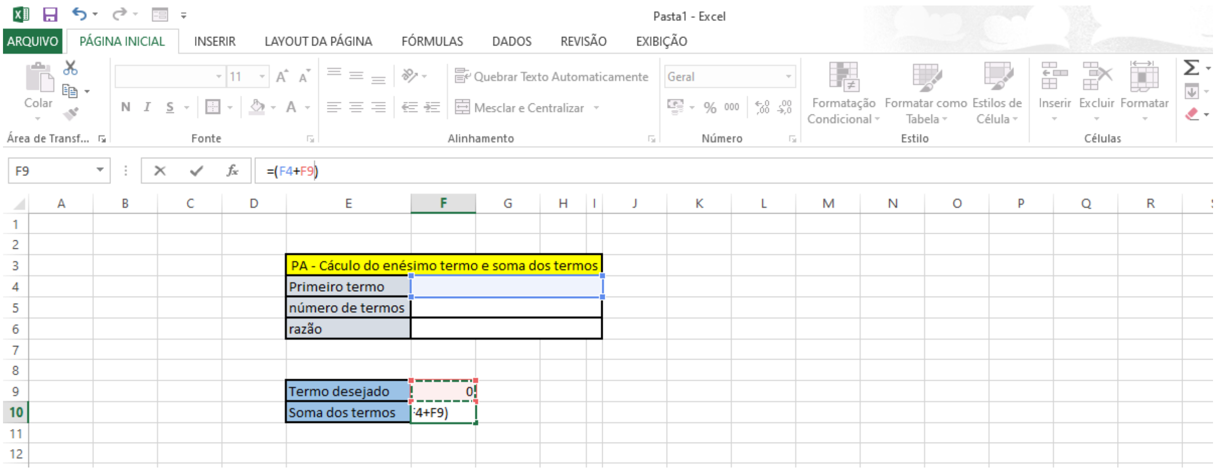

Figura 4. 8: Cálculo da soma dos termos da PA usando Excel – passo 7

Fonte: Próprio autor

Oitavo Passo: Escrever o símbolo da multiplicação “*” abrir parênteses.

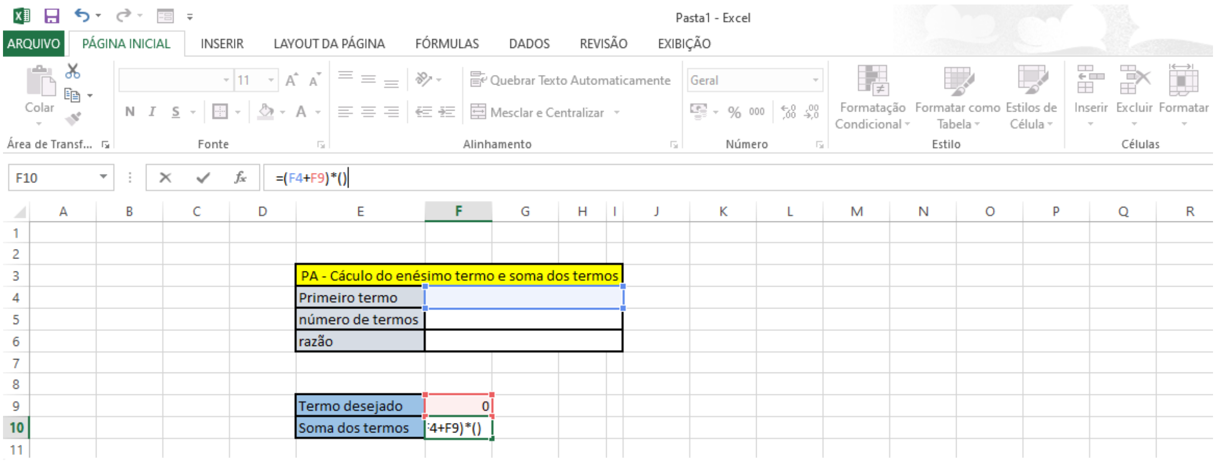

Figura 4. 9: Cálculo da soma dos termos da PA usando Excel – passo 8

Fonte: Próprio autor

Nono Passo: Clicar no campo escolhido para o número de termos n e escrever o símbolo da divisão “/” e escrever 2.

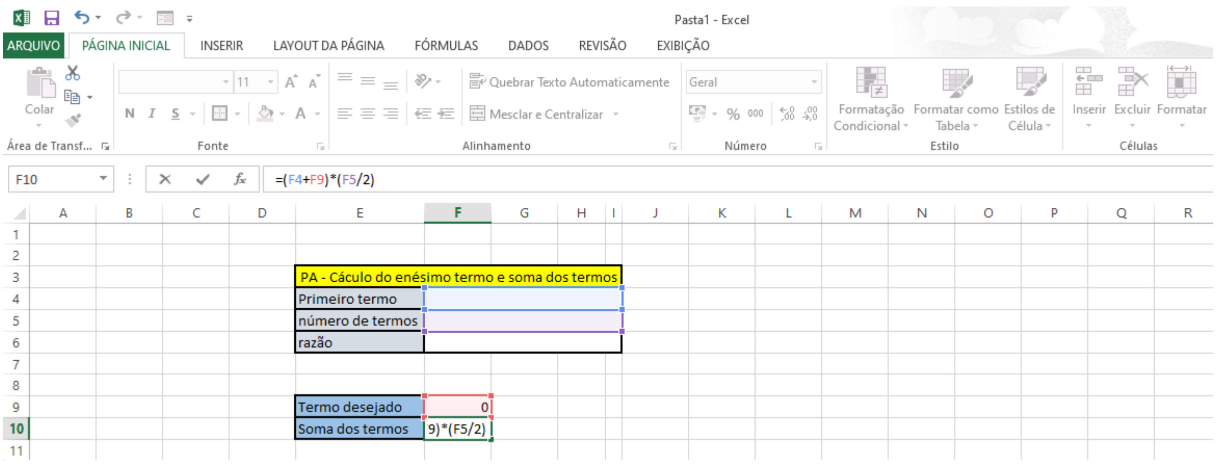

Figura 4. 10: Cálculo da soma dos termos da PA usando Excel – passo 9

Fonte: Próprio autor

Exemplo 4.1.1. Calcular, com o uso do Excel, o trigésimo termo de uma PA, a soma de todos os termos, sabendo que a razão equivale a 4, e o primeiro termo equivale a 2.

Primeiro Passo: Digitar o valor equivalente ao primeiro termo no campo correspondente.

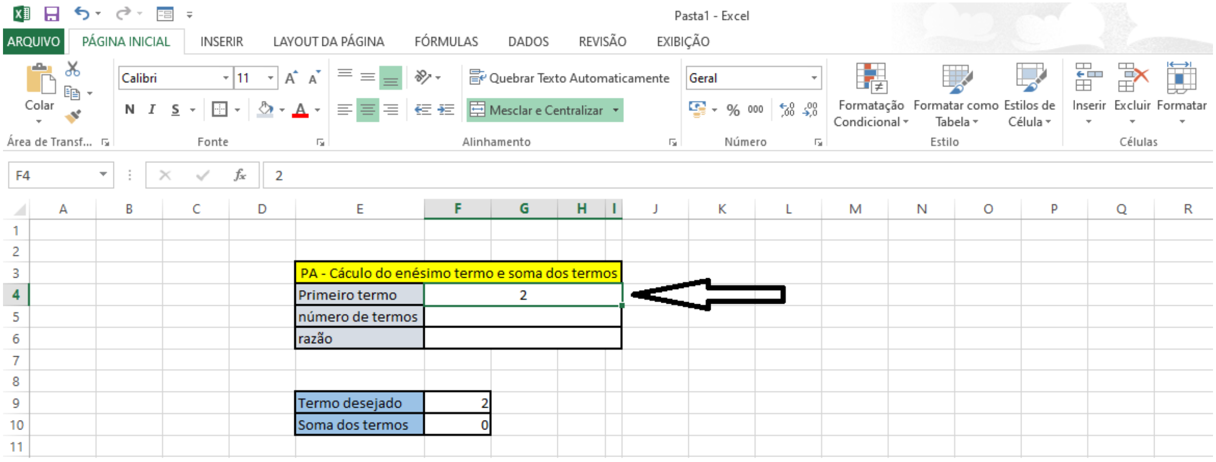

Figura 4. 11: Exemplo de PA – passo 1

Fonte: Próprio autor

Segundo Passo: Digitar 30, que é o número de termos, no campo escolhido.

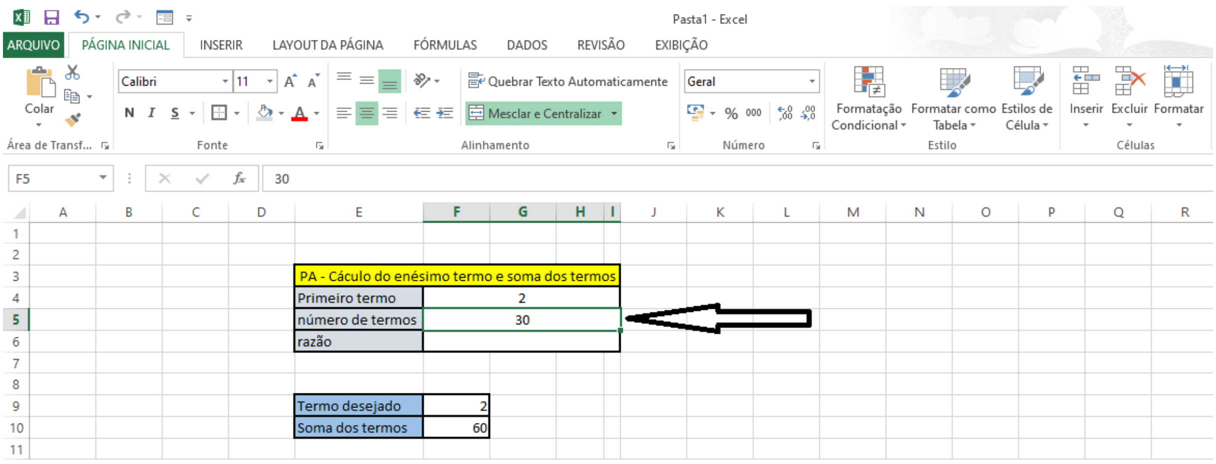

Figura 4. 12: Exemplo de PA – passo 2

Fonte: Próprio autor

Terceiro Passo: Digitar o número equivalente a razão no campo escolhido, clicar em “enter”, assim teremos a soma e o termo desejado.

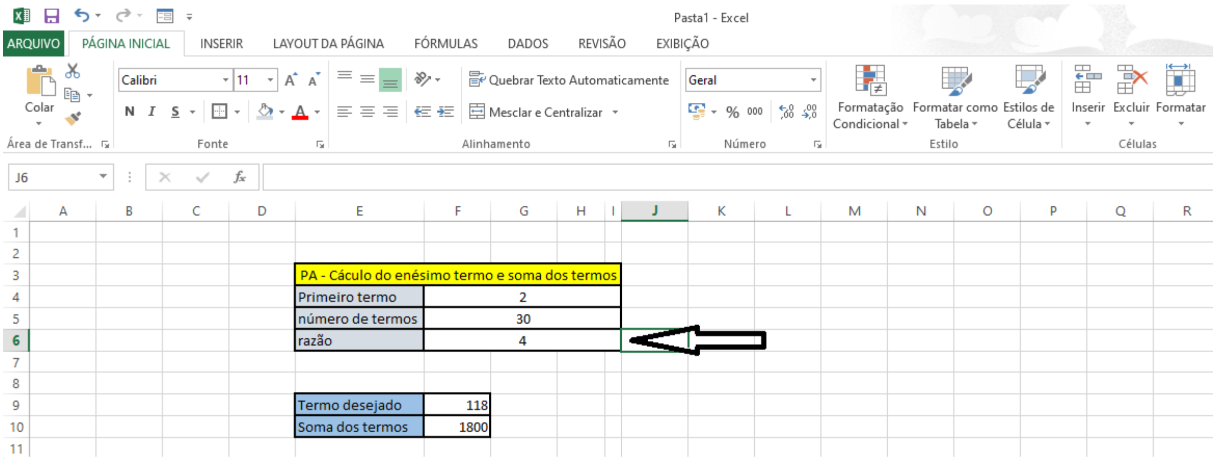

Figura 4. 13: Exemplo de PA – passo 3

Fonte: Próprio autor

4.2 Plano de aula sobre PG

4.2.1 Objetivos

- Fazer com que os alunos conheçam os conceitos de sequência numérica e progressão geométrica;
- Trabalhar com progressões geométricas.

4.2.2 Etapas e atividades

Para estas atividades utilizaremos computadores com o programa Excel instalado, sala com retroprojetor, calculadora que pode ser usada para conferir resultados; além de lousa, caneta ou giz.

Como forma de avaliar o aluno, poderemos verificar a aprendizagem através da correção das atividades propostas.

Primeira etapa: progressão geométrica.

Explicar aos alunos o que é uma progressão geométrica com exemplos do cotidiano, ou exemplos práticos aos alunos como, por exemplo, a multiplicação de uma bactéria, que a cada determinada unidade de tempo dobra sua quantidade, assim teremos inicialmente uma bactéria, depois duas, depois quatro, e assim, uma PG de razão 2.

Segunda etapa: progressão geométrica – cálculo de um termo qualquer.

Nesta etapa, os alunos irão conhecer o conceito de progressão geométrica (PG), que é uma sequência numérica na qual, a divisão do termo atual pelo anterior é sempre a mesma. Essa constante é chamada de razão da progressão geométrica. Observemos os exemplos que seguem:

a) (5, 10, 20, 40,80) A razão desta PG é 2 e ela possui 5 termos. Pelo fato da razão ser maior que 1, dizemos que é uma progressão crescente.

b) (48, 24, 12, 6, ...) A razão desta PG é 0,5 e as reticências ao fim indicam que é uma progressão de infinitos termos. Pelo fato da razão ser menor que 1, dizemos que é uma progressão decrescente.

Passados os conceitos iniciais, é interessante seguir o conteúdo a partir de problemas práticos, seguem algumas possibilidades:

Exercício 01. (UFMG) Uma criação de coelhos foi iniciada há exatamente um ano e, durante esse período, o número de coelhos duplicou a cada quatro meses. Hoje, parte dessa criação deverá ser vendida para se ficar com a quantidade inicial de coelhos. Para que isso ocorra, a porcentagem da população atual dessa criação de coelhos a ser vendida é:

a) 75%.

b) 80%.

c) 83,33%.

d) 87,5%.

Exercício 02. (UFPE) Suponhamos que o preço de um automóvel se desvaloriza 10% ao ano nos seus 5 primeiros anos de uso. Se este automóvel novo custou R$ 10.000,00, qual será o seu valor em reais após os 5 anos de uso?

a) 5.550,00.

b) 5.804,00.

c) 6.204,30.

d) 5.904,90.

e) 5.745,20.

Exercício 03. A sequência seguinte é uma progressão geométrica, observemos: (2, 6, 18, 54...). Determinar o 8º termo dessa progressão.

Terceira etapa: progressão geométrica – soma dos termos.

Fazer uma breve demonstração da fórmula da soma dos termos da PG e aplicar algumas atividades de fixação, a seguir temos algumas possibilidades:

Exercício 04. Determinar a soma dos oito primeiros termos da PG: (1, 2, 4...).

Exercício 05. Uma fábrica de chocolates inaugurada em 2010 produziu 1000 ovos de páscoa nesse mesmo ano. Considerando que sua produção aumentou em 50% a cada ano, em 2015, o dono da fábrica poderá dizer que em toda a história da fábrica foram produzidos quantos ovos?

Exercício 06. (PM PE – IAUPE). Uma fábrica inaugurou sua produção com 4 itens. Sabendo que a quantidade de itens produzidos pela fábrica em cada ano consecutivo obedece a uma progressão geométrica e que, no quinto ano, foram produzidos 324 itens, qual a soma total de itens fabricados nesses cinco primeiros anos?

A) 434.

B) 844.

C) 448.

D) 848.

E) 484.

Quarta etapa: Ensinar os alunos a calcular termos de uma PG e suas somas através do Excel.

Primeiro Passo: criar uma planilha com os campos a serem digitados, e os campos a serem calculados.

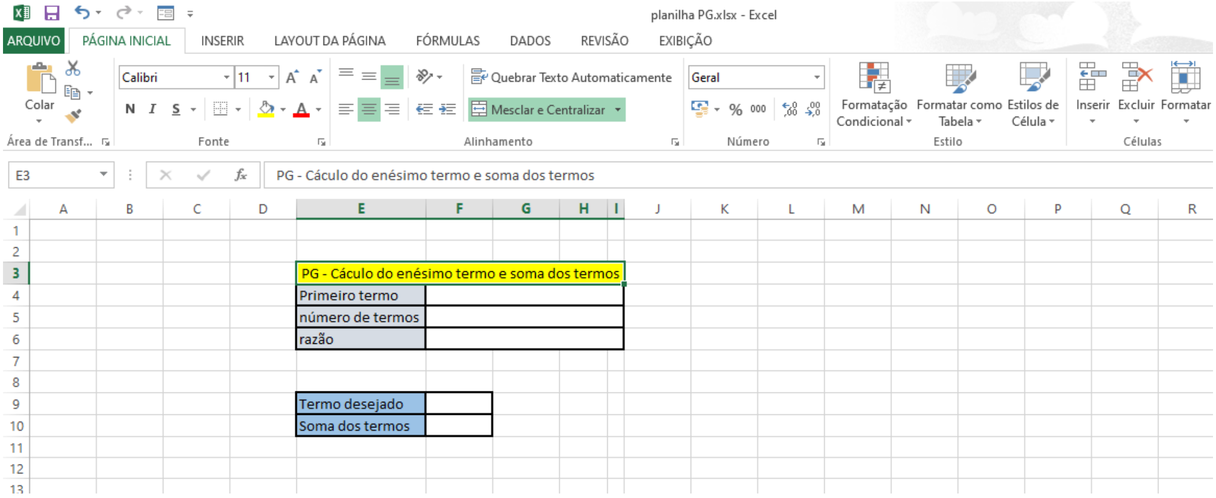

Figura 4. 14: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 1

Fonte: Próprio autor

Segundo Passo: Clicar no campo escolhido para o enésimo termo a_n, dar início a criação da fórmula, $a_n = a_1 . q^{n-1}$. Na barra de descrição da fórmula, colocar o símbolo "=".

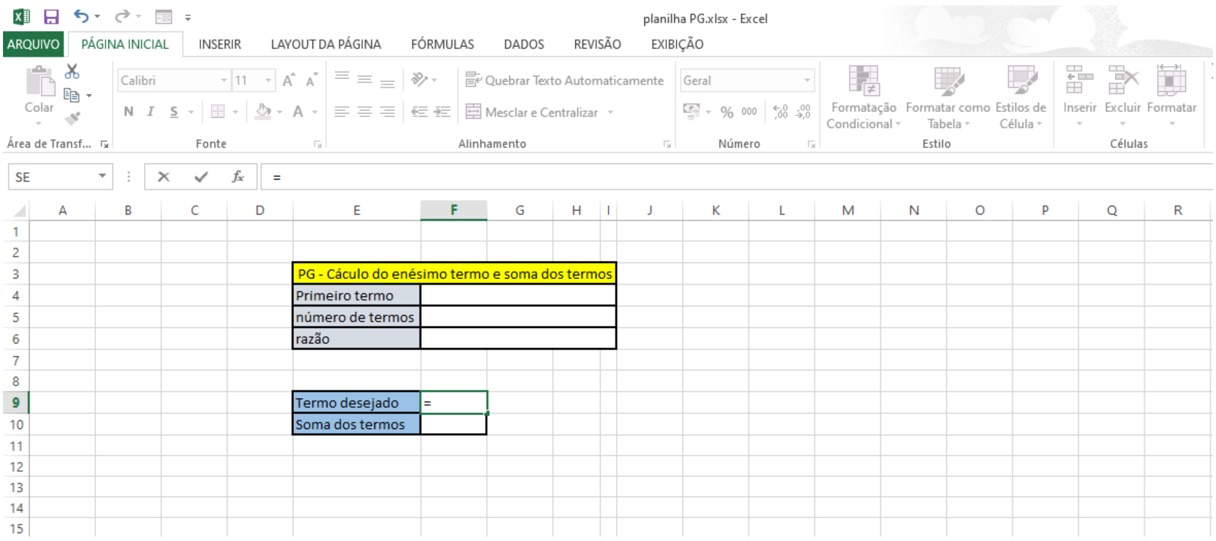

Figura 4. 15: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 2

Fonte: Próprio autor

Terceiro Passo: Clicar no campo escolhido para o primeiro termo, escrever o símbolo da multiplicação "*".

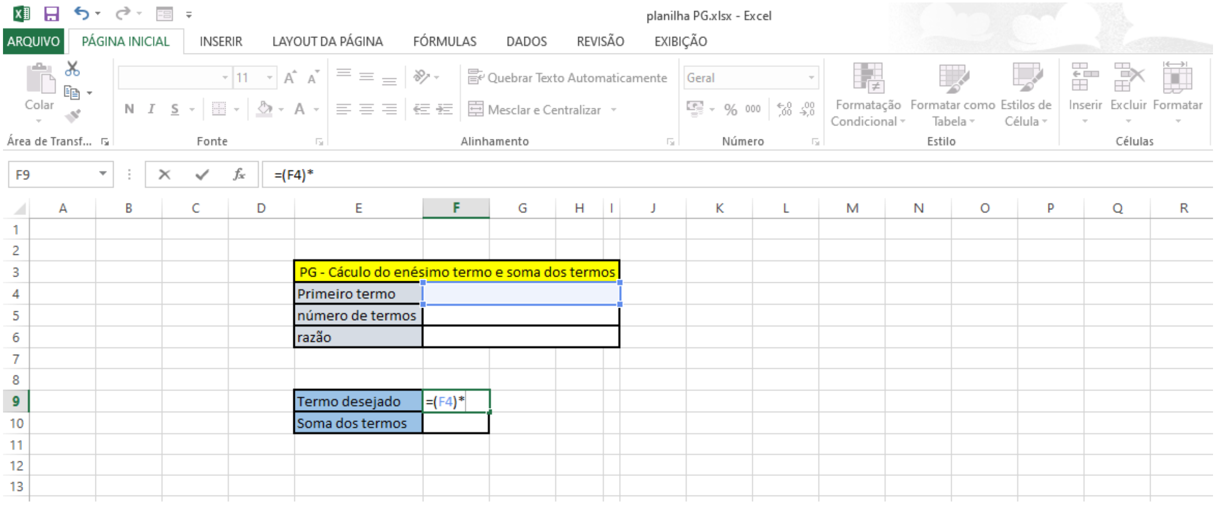

Figura 4. 16: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 3

Fonte: Próprio autor

Quarto Passo: Clicar no campo escolhido para razão q, escrever o símbolo de potência “^”.

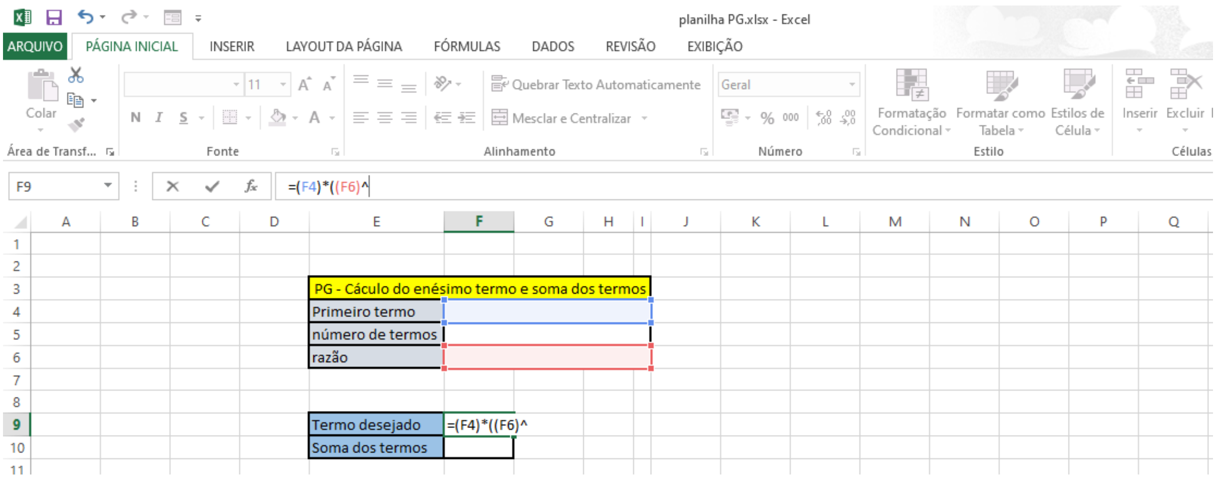

Figura 4. 17: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 4

Fonte: Próprio autor

Quinto Passo: Clicar no campo escolhido para o número de termos e subtrair 1, para criarmos o termo (q-1). Concluímos assim a fórmula para calcular o enésimo termo da PG.

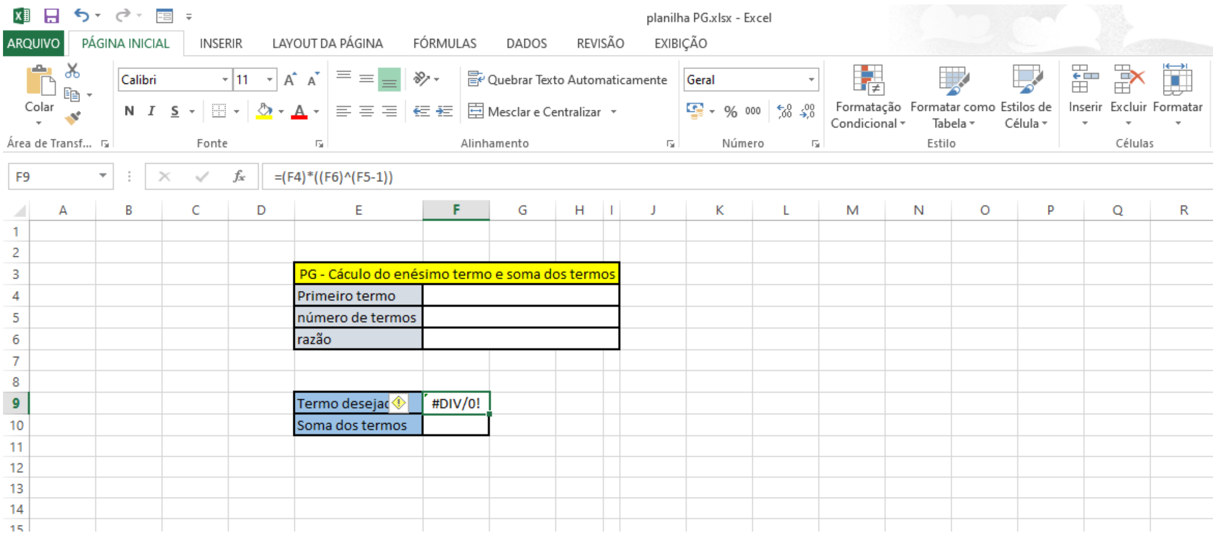

Figura 4. 18: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 5

Fonte: Próprio autor

Sexto Passo: A partir desta passagem criaremos a fórmula para cálculo da soma dos “n” termos da PG, $S_n = \frac{a_1.(q^n-1)}{(q-1)}$. Clicar no campo escolhido para esta soma, e na barra de descrição da fórmula, digitar “=”.

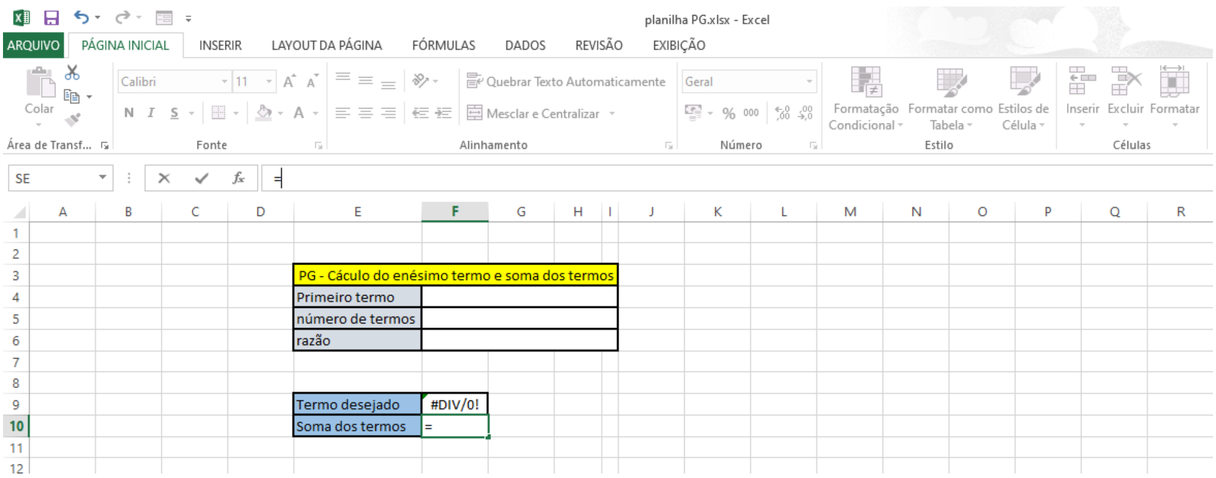

Figura 4. 19: Cálculo da soma dos termos da PG usando Excel – passo 6

Fonte: Próprio autor

Sétimo Passo: Clicar no campo escolhido para o primeiro termo a_1.

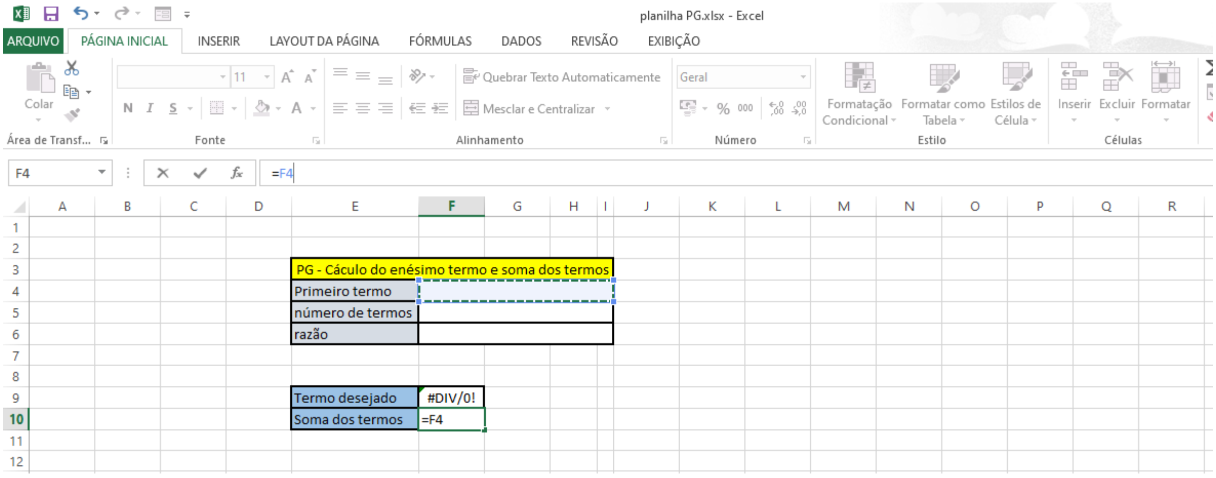

Figura 4. 20: Cálculo da soma dos termos da PG usando Excel – passo 7

Fonte: Próprio autor

Oitavo Passo: Escrever o símbolo da multiplicação “*”, em seguida vamos criar o divisor e o dividendo.

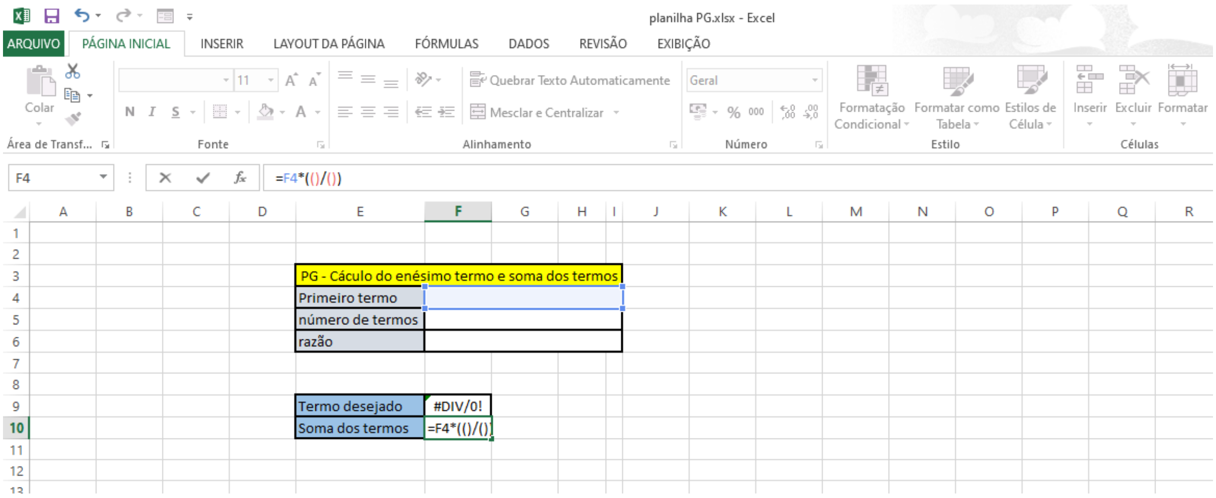

Figura 4. 21: Cálculo da soma dos termos da PG usando Excel – passo 8

Fonte: Próprio autor

Nono Passo: Clicar no campo escolhido para a razão da PG e colocar como potência o campo escolhido para o número de termos.

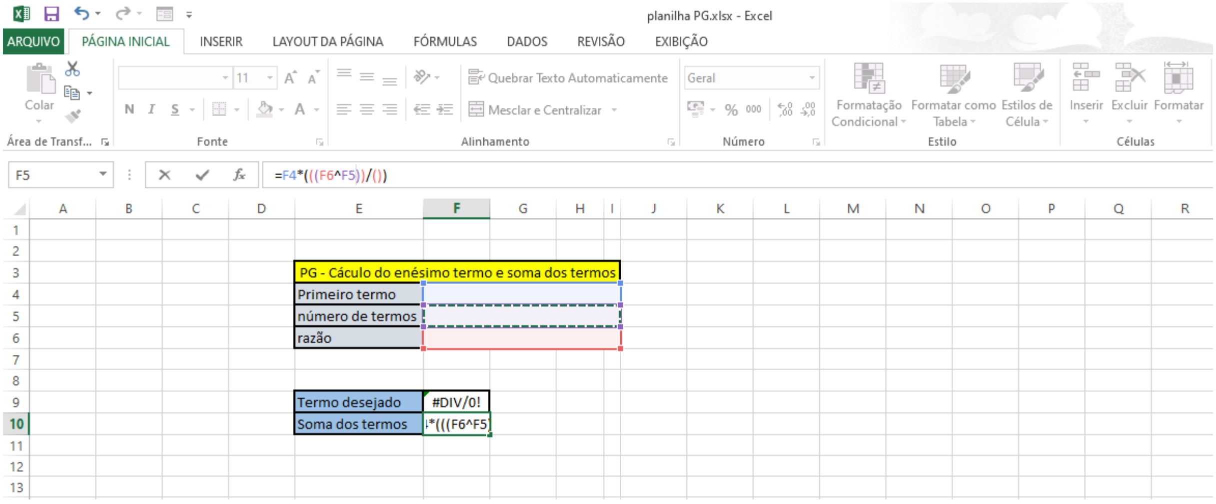

Figura 4. 22: Cálculo da soma dos termos da PG usando Excel – passo 9

Fonte: Próprio autor

Décimo Passo: subtrair 1, do dividendo.

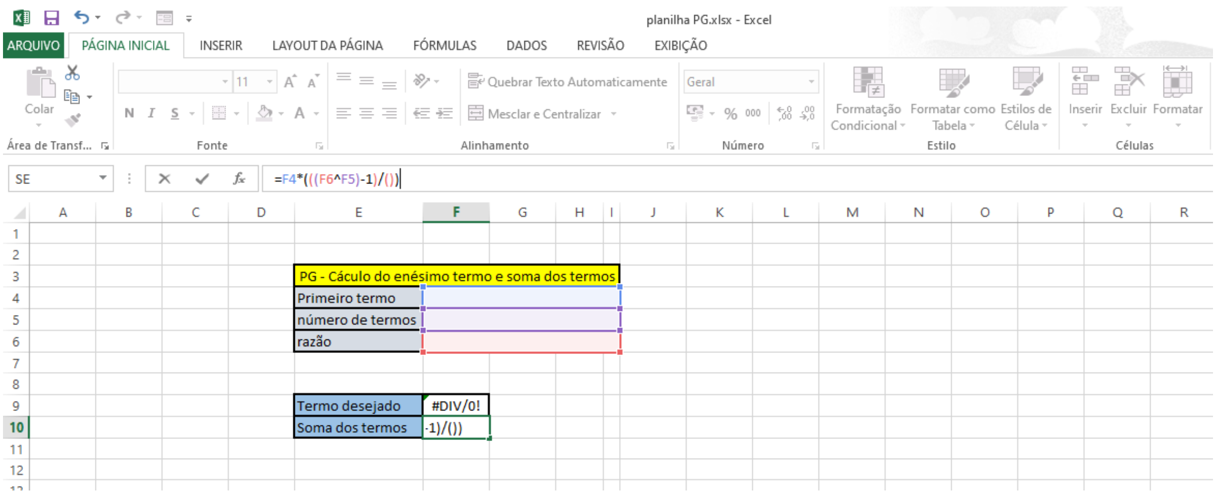

Figura 4. 23: Cálculo da soma dos termos da PG usando Excel – passo 10

Fonte: Próprio autor

Décimo primeiro Passo: Preencher o campo do divisor, clicando no campo da razão e subtraindo 1. Clicar em “enter”, assim teremos a fórmula desejada.

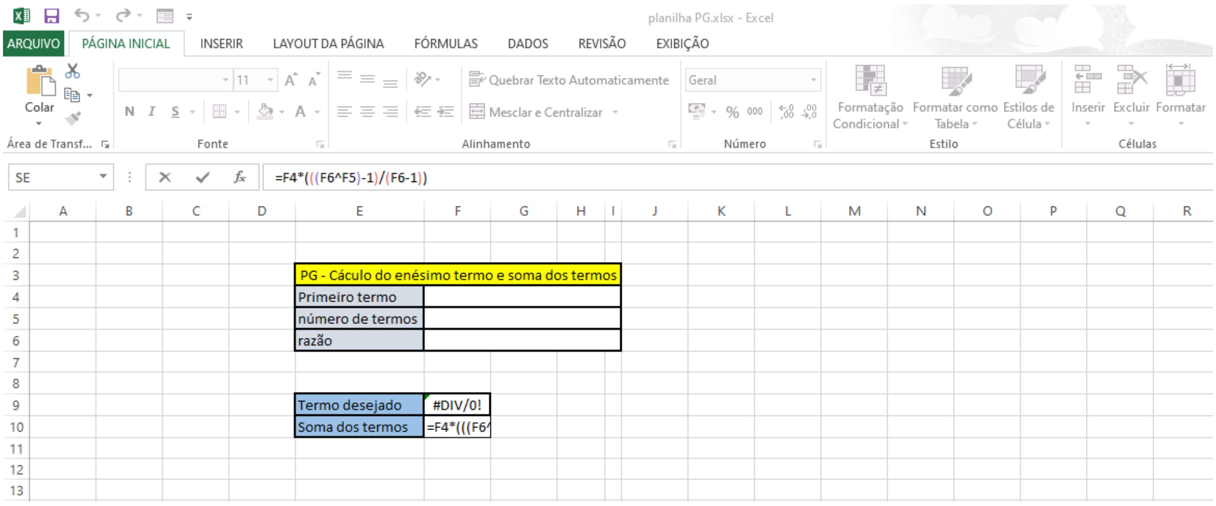

Figura 4. 24: Cálculo da soma dos termos da PG usando Excel – passo 11

Fonte: Próprio autor

Exemplo 4.1.2. Encontrar o sétimo termo, a somas destes sete termos de uma PG com o uso da planilha do Excel, sabendo que o primeiro termo equivale a 3 e sua razão 2.

Primeiro Passo: Digitar o valor equivalente ao primeiro termo no campo correspondente.

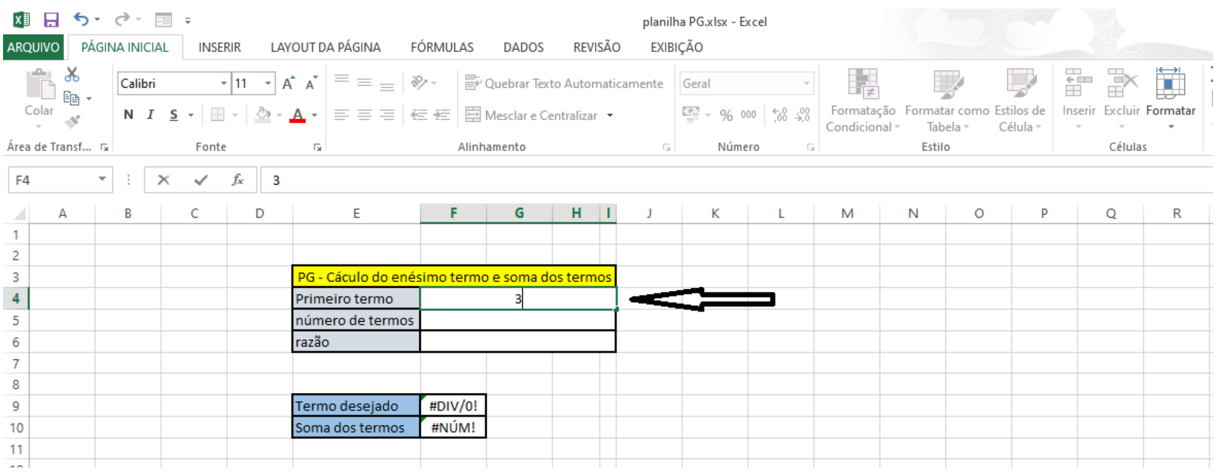

Figura 4. 25: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 1

Fonte: Próprio autor

Segundo Passo: digitar o valor equivalente a razão no campo correspondente.

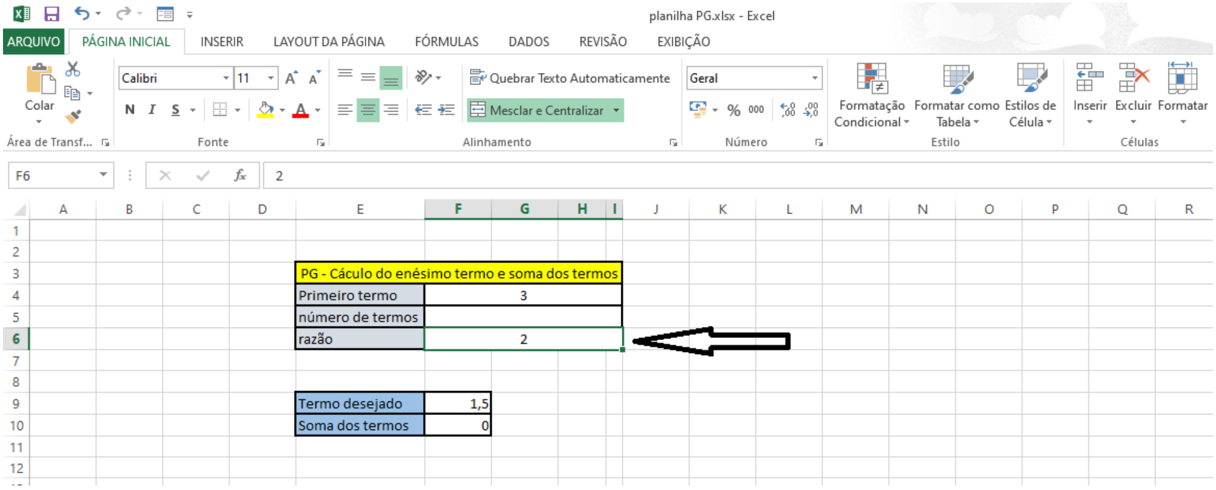

Figura 4. 26: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 2

Fonte: Próprio autor

Terceiro Passo: digitar o valor equivalente ao número de termos no campo correspondente, clicar em “enter”, assim teremos as informações que precisamos.

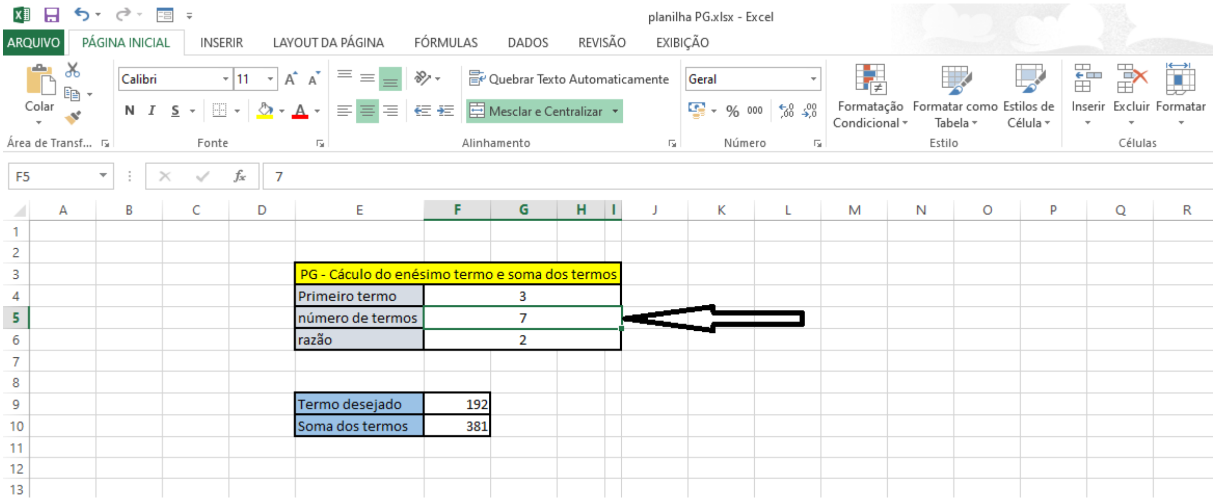

Figura 4. 27: Cálculo enésimo termo da PG usando Excel – passo 3

Fonte: Próprio autor

4.3 Plano de aula sobre Matemática Financeira

- Tema: Matemática Financeira;
- Objetivo: Ensinar o cálculo de juros simples e compostos e a criação destas fórmulas no Excel. Fazer com que o aluno consiga entender diferentes métodos de pagamentos, suas vantagens e desvantagens.

4.3.1 Dados da aula

O que o aluno poderá aprender com esta aula:

Relacionar juros compostos com sequências numéricas;

Interpretar Progressões Geométricas buscando construir o conceito de Juros Compostos;

Calcular Juros Compostos.

Notação decimal.

Juros simples.

Progressão geométrica.

Reconhecimento de taxas.

Períodos de aplicação.

4.3.2 Duração das atividades

Duração das atividades 6 aulas de 50 minutos cada.

4.3.3 Conhecimentos prévios trabalhados pelo professor com o aluno

Frações e Porcentagem.

Notação decimal.

Progressão aritmética.

Progressão Geométrica.

Reconhecimento de taxas.

Períodos de aplicação.

Juros simples.

Juros compostos.

4.3.4 Estratégias e recursos da aula

Para estas atividades utilizaremos computadores com o programa Excel instalado, sala com retroprojetor, calculadora que pode ser usada para conferir resultados; além de lousa, caneta ou giz.

Faremos atividades focadas em mostrar a importância das tomada de decisões quando contratamos alguns produtos bancários, a importância em poupar valores desde cedo e, além disso, o que o consumo desnecessário pode ocasionar na vida destes jovens.

Através destas aulas estes alunos poderão verificar como algumas decisões corretas podem diminuir muito os gastos, mesmo que seja um novo parcelamento desde que mais barato. A seguir, veremos o caso em que um jovem fez uma compra muito além do seu poder aquisitivo. Sem nenhuma instrução, poderia ficar um longo tempo com sua vida financeira desarrumada, com seu nome em órgãos de proteção ao crédito, realidade de muitas pessoas no Brasil.

4.3.5 Atividades

4.3.5.1 Atividade 1

Fazer uma atividade na qual o aluno possa questionar em relação ao método de pagamento, à vista ou a prazo.

Exercício 01. Uma mercadoria no valor de R$ 850,00 é vendida na forma de pagamento à vista. Caso o cliente deseje comprar a mercadoria em 4 prestações, a loja aplicará sobre o valor do produto uma taxa de juros de 12%. Dessa forma, a mercadoria passa a custar R$ 952,00 que, dividida em quatro vezes, proporciona parcelas de R$ 238,00 mensais. Verificar a situação caso o cliente deseje aplicar o dinheiro em uma conta poupança a juros mensais de 2% ao mês, realizando retiradas mensais para quitar as prestações.

Caso o cliente não procure uma aplicação para compensar o valor dos juros, ele desembolsará a quantia de R$ 102,00.

Mas, aplicando o dinheiro, ele diminui esse valor gerado pela taxa de juros da compra a prazo, desembolsando o valor de R$ 60,88. Dessa forma, ele realiza uma economia de R$ 41,12.

Exercício 02. (FUC-MT) Um lojista, na tentativa de iludir sua freguesia, deu aumento de 25% nas suas mercadorias e depois anunciou 20% de desconto. Podemos concluir que:

a) a mercadoria subiu 5%.

b) a mercadoria diminuiu 5%.

c) aumento em média 2,5%.

d) diminuiu em média 2,5%.

e) a mercadoria manteve o preço.

Se aumentarmos em 25% o preço de uma mercadoria que custa R$ 100,00, seu novo valor será de R$ 125,00.

Se aplicarmos um desconto de 20% sobre R$ 125,00, a mercadoria volta a custar R$ 100,00.

25% de 100 = 25

100 + 25 = R$ 125,00

20% de 125,00 = 25

125 – 25 R$ 100,00.

Dessa forma, concluímos que o comerciante está iludindo os clientes com um desconto irreal. Essa prática é muito realizada por comerciantes em geral, pois dessa forma, eles conquistam o interesse do consumidor e mantém sua faixa de lucro líquido sem alterar a receita da empresa.

Portanto, a resposta é o item (e).

4.3.5.2 Atividade 2

Fazer uma atividade destacando a importância de poupar dinheiro desde cedo.

Exercício 03. Um aluno do primeiro ano do ensino médio, com 15 anos de idade, resolve guardar uma quantia de R$ 100,00 todo mês, pretende poupar este valor até os 18 anos quando pretende comprar uma motocicleta, sendo assim, hipoteticamente, qual o valor que este aluno terá guardado, se ele depositar este valor mensalmente na poupança com um rendimento de 0,5% ao mês? (Supor o prazo de 3 anos completos).

No primeiro mês teremos o valor inicial de R$ 100,00.

No segundo mês, teremos o valor do primeiro mês, reajustado, mais a aplicação de R$ 100,00:

(100.1,005) +100=100,50+100=200,50.

No terceiro, teremos o valor do segundo mês reajustado adicionado a aplicação mensal de R$ 100,00:

(200,50.1,005) +100=201,50+100=301,50.

Calculamos assim até o trigésimo sexto mês:

Quarto mês:

(301,50.1,005) +100=303+100=403,00.

Quinto mês:

(403.1,005) +100=405,02+100=505,02.

Sexto mês:

(505,02.1,005) +100=507,55+100=607,55.

Sétimo mês:

(607,55.1,005) +100=610,59+100=710,59.

Oitavo mês:

(710,59.1,005) +100=714,14+100=814,14.

Nono mês:

(814,14.1,005) +100=818,21+100=918,21.

Décimo mês:

(918,21.1,005) +100=922,80+100=1022,80.

Décimo primeiro mês:

(1022,80.1,005) +100=1027,92+100=1127,92.

Décimo segundo mês:

(1127,92.1,005) +100=1133,56+100=1233,56.

Décimo terceiro mês:

(1233,56.1,005) +100=1239,73+100=1339,73.

Décimo quarto mês:

(1339,73.1,005) +100=1346,42+100=1446,42.

Décimo quinto mês:

(1446,42.1,005) +100=1453,66+100=1553,66.

Décimo sexto mês:

(1553,66.1,005) +100=1561,42+100=1661,42.

Décimo sétimo mês:

(1661,42.1,005) +100=1669,73+100=1769,73.

Décimo oitavo mês:

(1769,73.1,005) +100=1778,58+100=1878,58.

Décimo nono mês:

(1878,58.1,005) +100=1887,97+100=1987,97.

Vigésimo mês:

(1987,97.1,005) +100=1997,91+100=2097,91.

Vigésimo primeiro mês:

(2097,91.1,005) +100=2108,40+100=2208,40.

Vigésimo segundo mês:

(2208,40.1,005) +100=2219,44+100=2319,44.

Vigésimo terceiro mês:

(2319,44.1,005) +100=2331,04+100=2431,04.

Vigésimo quarto mês:

(2431,04.1,005) +100=2443,20+100=2543,20.

Vigésimo quinto mês:

(2543,20.1,005) +100=2555,91+100=2655,91.

Vigésimo sexto mês:

(2655,91.1,005) +100=2669,19+100=2769,19.

Vigésimo sétimo mês:

(2769,19.1,005) +100=2783,04+100=2883,04.

Vigésimo oitavo mês:

(2883,04.1,005) +100=2897,45+100=2997,45.

Vigésimo nono mês:

(2997,45.1,005) +100=3012,44+100=3112,44.

Trigésimo mês:

(3112,44.1,005) +100=3128,00+100=3228,00.

Trigésimo primeiro mês:

(3228,00.1,005) +100=3244,14+100=3344,14.

Trigésimo segundo mês:

(3344,14.1,005) +100=3360,86+100=3460,86.

Trigésimo terceiro mês:

(3460,86.1,005) +100=3478,17+100=3578,17.

Trigésimo quarto mês:

(3578,17.1,005) +100=3596,06+100=3696,06.

Trigésimo quinto mês:

(3696,06.1,005) +100=3714,54+100=3814,54.

Trigésimo sexto mês:

(3814,54.1,005) +100=3833,61+100=3933,61.

Portanto este aluno terá poupado o valor de aproximadamente R$ 3.933,61.

Outro modo de resolução: Embora este método ainda seja usado por algumas pessoas, existem ferramentas mais práticas para resolução destes tipos de problemas, que além de diminuir o cálculo para poucas linhas, abrangem a possibilidade de alterar valores e prazos. Para isso devemos fazer uma pequena manipulação da fórmula do Teorema 2.1, página 43 e obter a equação:

$F = \frac{P((1+i)^n - 1)}{i}$.

Dessa forma, para o exercício 03 temos, $F = \frac{100\left((1+0{,}005)^{36} - 1\right)}{0{,}005} = 3933{,}61$.

Logo $F = 3933{,}61$.

Devemos frisar aqui a importância de poupar desde jovem, aqui neste exemplo, o aluno conseguiu guardar 36 parcelas de R$ 100,00 e ainda obteve R$ 333,61 de rendimentos.

Exercício 04. Considerando o exemplo anterior, suponhamos que o aluno resolva não comprar a motocicleta e resolva deixar este dinheiro na poupança. Calcular o valor que ele terá quando for aposentar (suponhamos 47 anos para a aposentadoria).

Como o valor futuro é calculado pela fórmula: $F_n = C.(1 + i\,)^n$, temos:

Capital $C = 3933{,}61$

$i = 0{,}5\% = 0{,}005$

$n = 47.12 = 564$

Logo, o valor futuro $F_{564} = 3933{,}61.(1 + 0{,}005\,)^{564} = 65531{,}50$.

Assim, com um pequeno valor poupado dos 15 aos 18 anos, o aluno terá uma reserva de aproximadamente R$ 65.531,50.

4.3.5.3 Atividade 3

Fazer uma atividade focada no uso do Excel para cálculo de juros simples e juros compostos. Esta atividade consiste em criar uma planilha no Excel na qual podemos realizar de forma simples o cálculo de um determinado valor futuro.

Primeiro Passo: Criar os campos a serem preenchidos posteriormente.

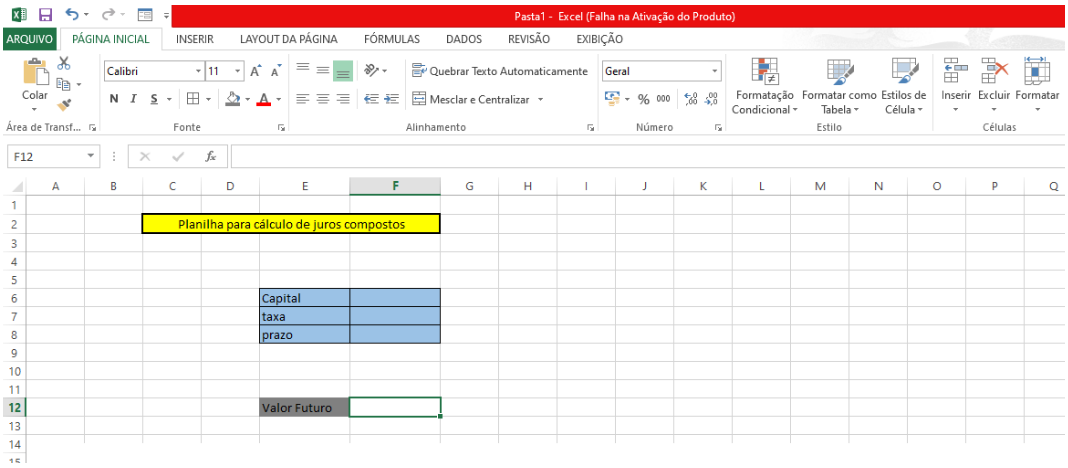

Figura 4. 28: Passo a passo Excel – passo 1

Fonte: Próprio autor

Segundo Passo: clicar no espaço onde queremos o valor referente a resposta, caso aqui (F12) linha 12 coluna F, e na descrição, digitar “=” clicar em bloco “F6”, colocando o mesmo entre parênteses.

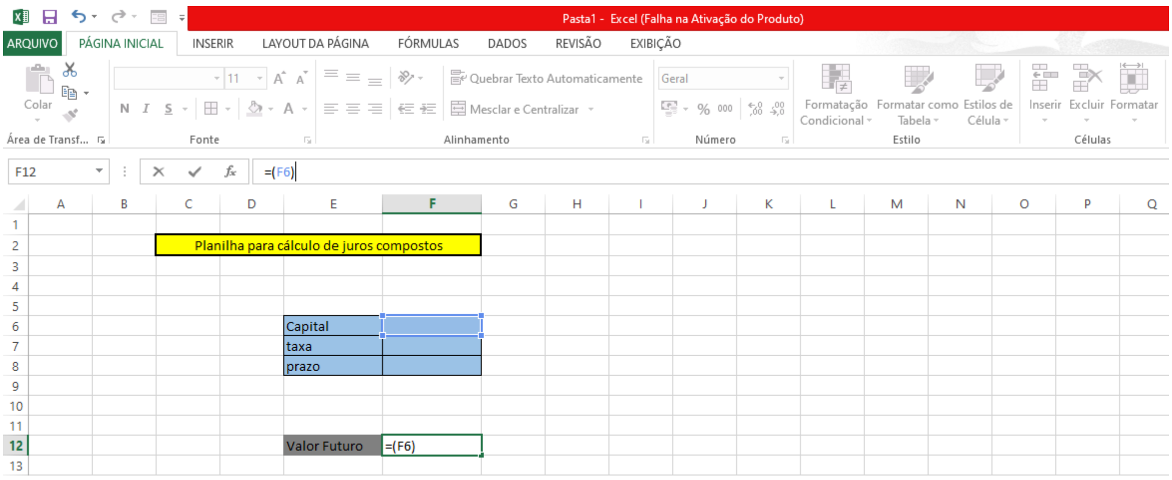

Figura 4. 29: Passo a passo Excel – passo 2

Fonte: Próprio autor

Terceiro Passo: Colocar o símbolo asterisco “ * ” usado no Excel para simbolizar a multiplicação.

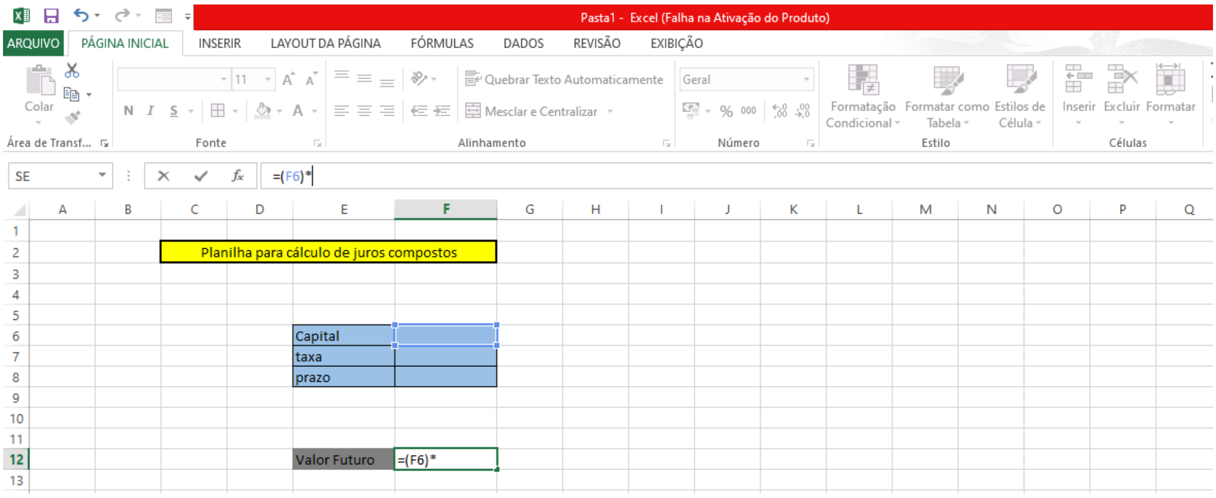

Figura 4. 30: Passo a passo Excel – passo 3

Fonte: Próprio autor

Quarto Passo: Abrir um parênteses digitar “1” depois “+”, abrir parênteses novamente, clicar no bloco F7 (taxa), digitar “/” que significa dividir, digitar “ 100 ” para o cálculo da taxa usado na fórmula, por fim, fechar os dois parênteses.

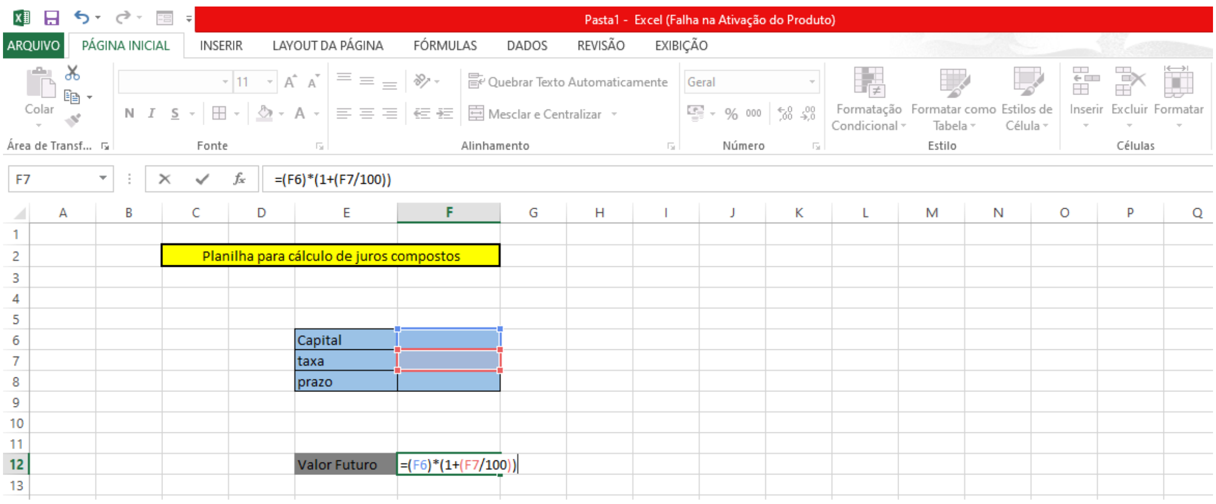

Figura 4. 31: Passo a passo Excel – passo 4

Fonte: Próprio autor

Quinto Passo: Digitar “ ^ ”, que tem como função, elevar à, clicar no bloco F8 (prazo).

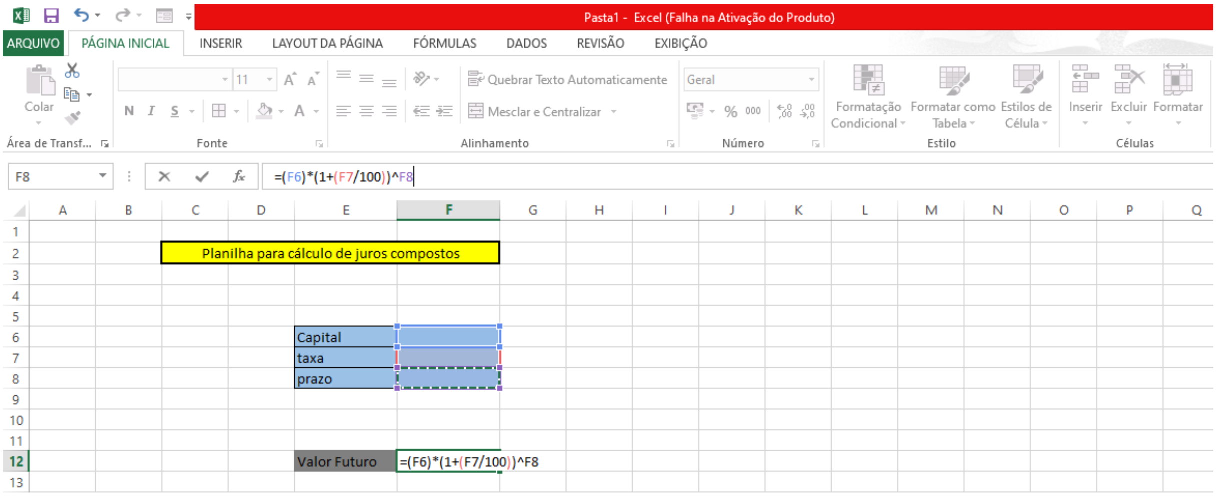

Figura 4. 32: Passo a passo Excel – passo 5

Fonte: Próprio autor

Sexto Passo: Agora vamos formatar a célula onde teremos o “valor futuro”. Primeiramente clicar com o botão direito do mouse, depois em “formatar células” conforme a imagem.

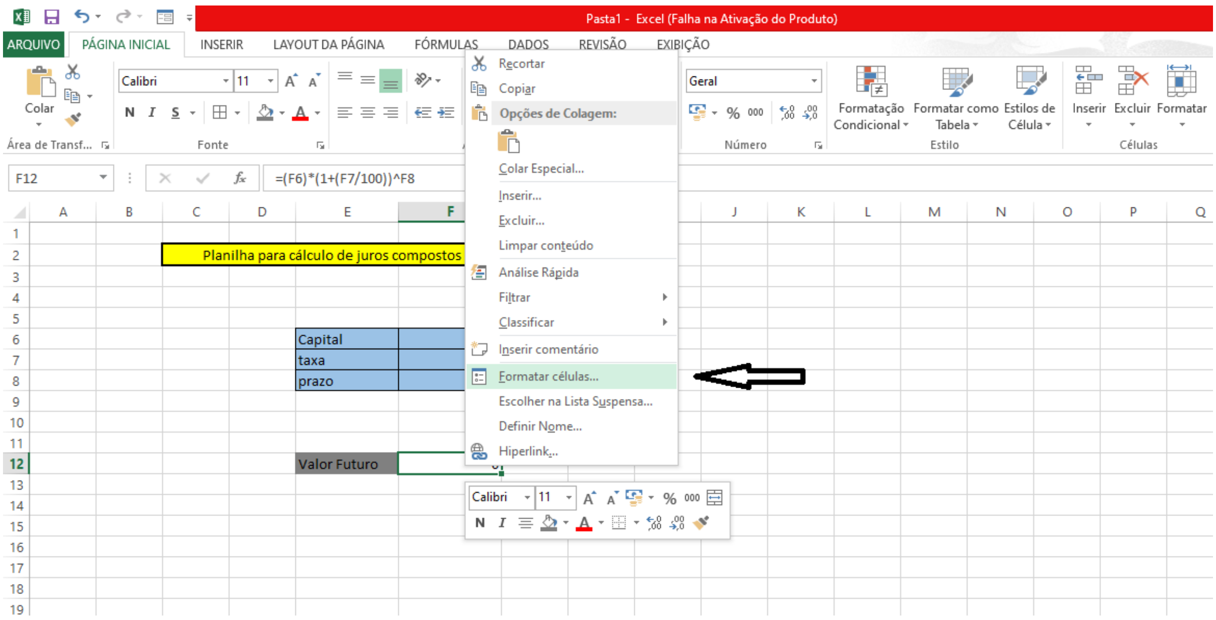

Figura 4. 33: Passo a passo Excel – passo 6

Fonte: Próprio autor

Sétimo Passo: Clicar em “Número” conforme a imagem.

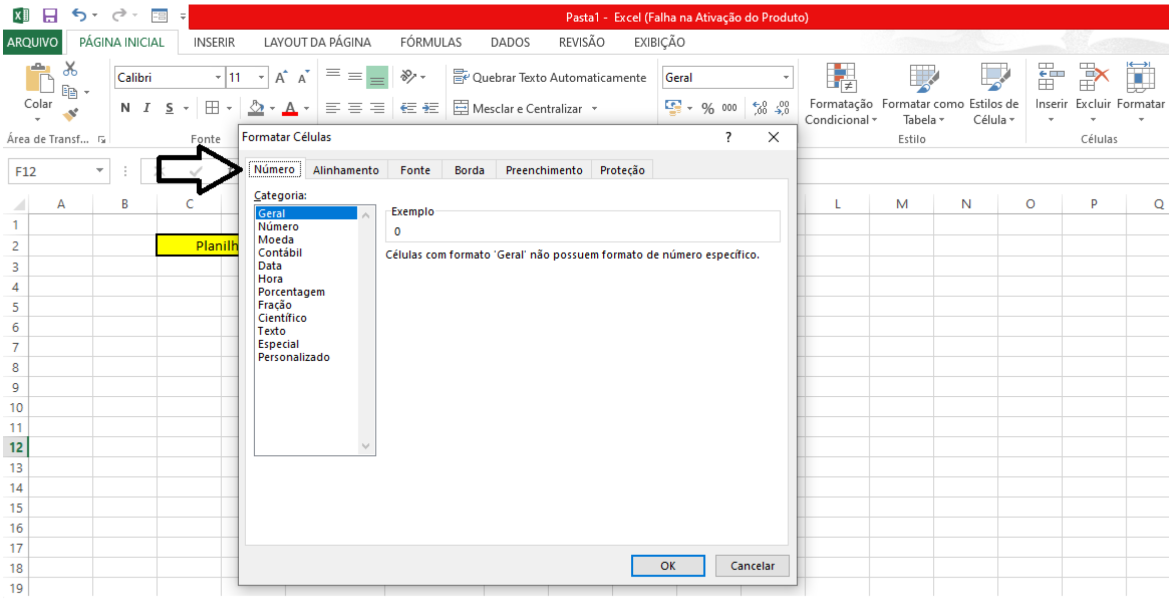

Figura 4. 34: Passo a passo Excel – passo 7

Fonte: Próprio autor

Oitavo Passo: clicar em “número”, depois em “OK”.

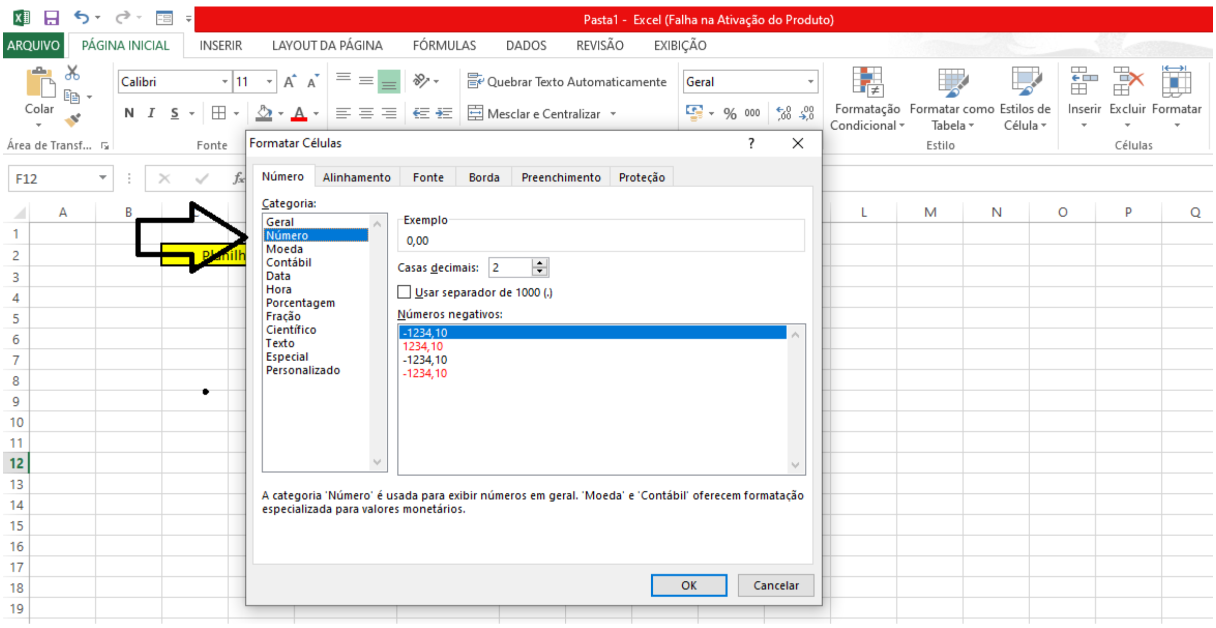

Figura 4. 35: Passo a passo Excel – passo 8

Fonte: Próprio autor

Podemos concluir que temos uma forma prática de calcular o Valor Futuro de um capital, podendo usar qualquer taxa e prazo.

Vamos fazer a mesma atividade para juros simples.

Primeiro Passo: Criar os campos a serem preenchidos posteriormente.

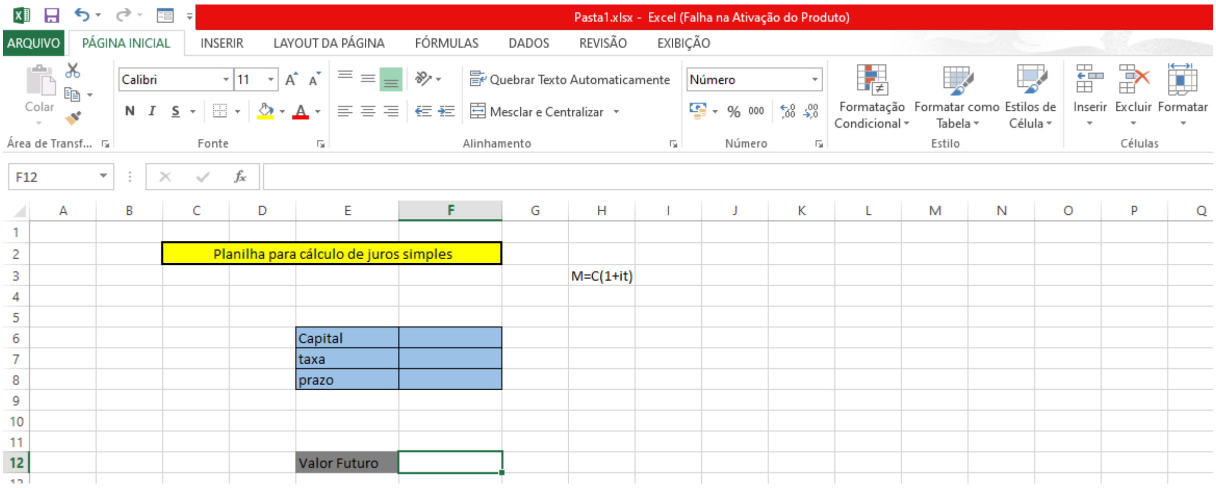

Figura 4. 36: Passo a passo Excel – passo 1

Fonte: Próprio autor

Segundo Passo: Clicar no espaço onde queremos o valor referente a resposta, caso aqui (F12) linha 12 coluna F. Na descrição, digitar “=” clicar em bloco “F6”, colocando o mesmo entre parênteses.

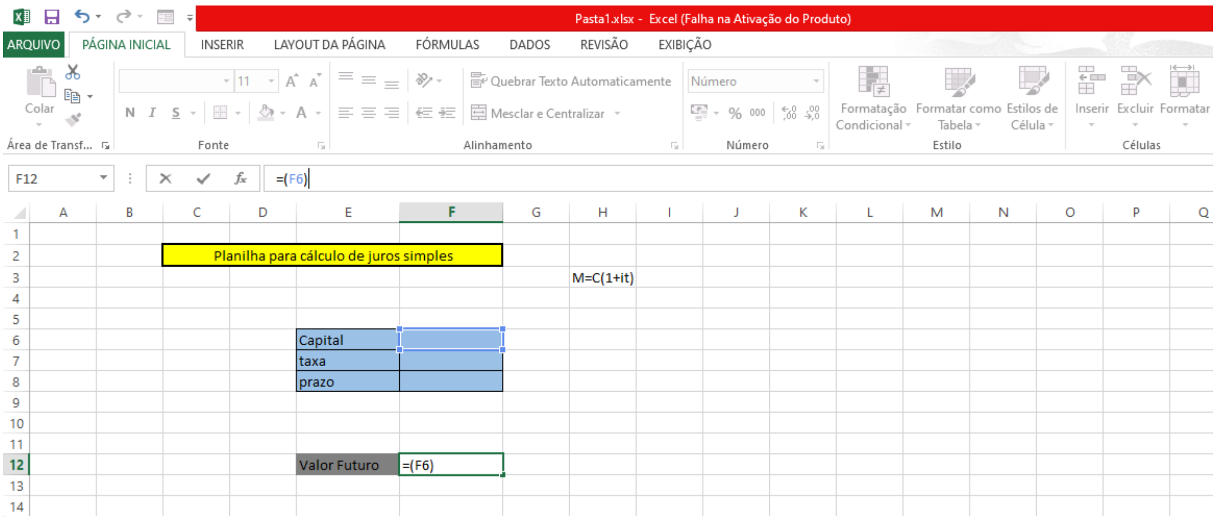

Figura 4. 37: Passo a passo Excel – passo 2

Fonte: Próprio autor

Terceiro Passo: Colocar o símbolo asterisco " * " usado no Excel para simbolizar a multiplicação.

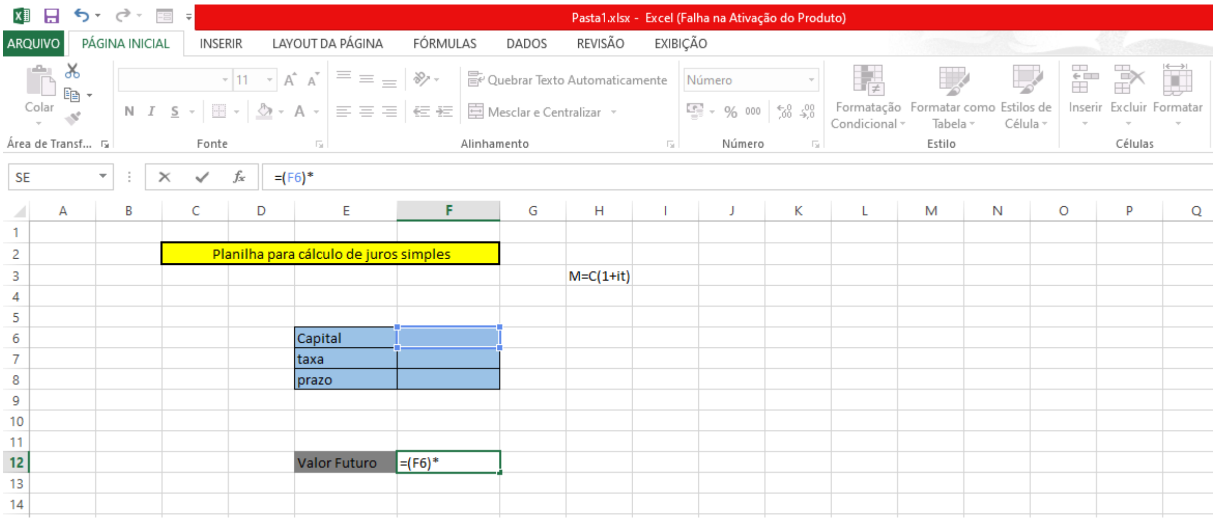

Figura 4. 38: Passo a passo Excel – passo 3

Fonte: Próprio autor

Quarto Passo: Abrir um parênteses digitar "1" depois "+", abrir parênteses novamente, clicar no bloco F7 (taxa), digitar "/" que significa dividir, digitar " 100 " para o cálculo da taxa usado na fórmula. Por fim, fechar os dois parênteses.

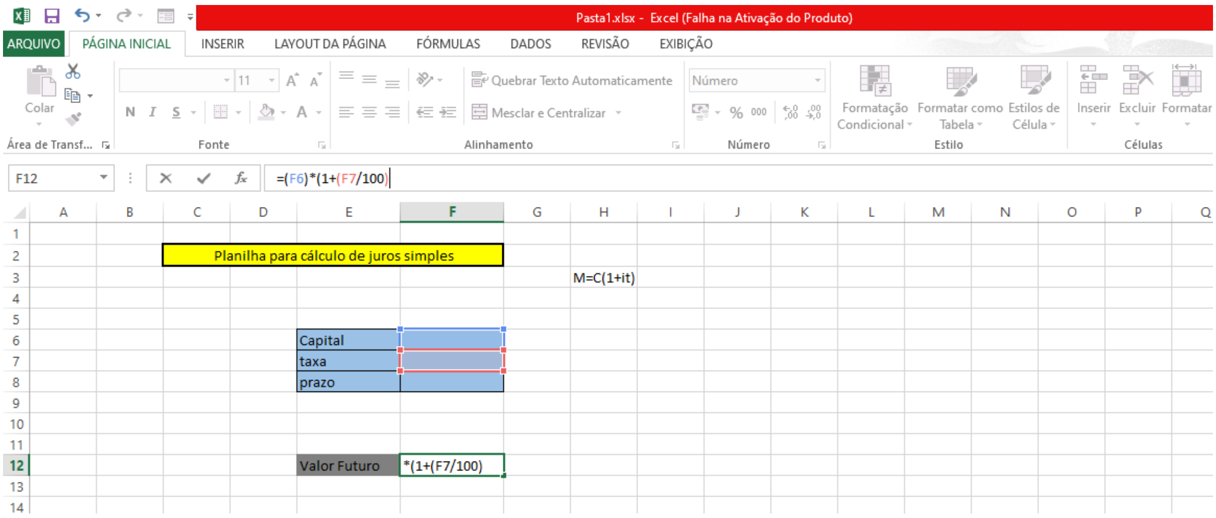

Figura 4. 39: Passo a passo Excel – passo 4

Fonte: Próprio autor

Quinto Passo: Digitar " * " (asterisco), clicar no bloco F8 (prazo) e fechar parênteses.

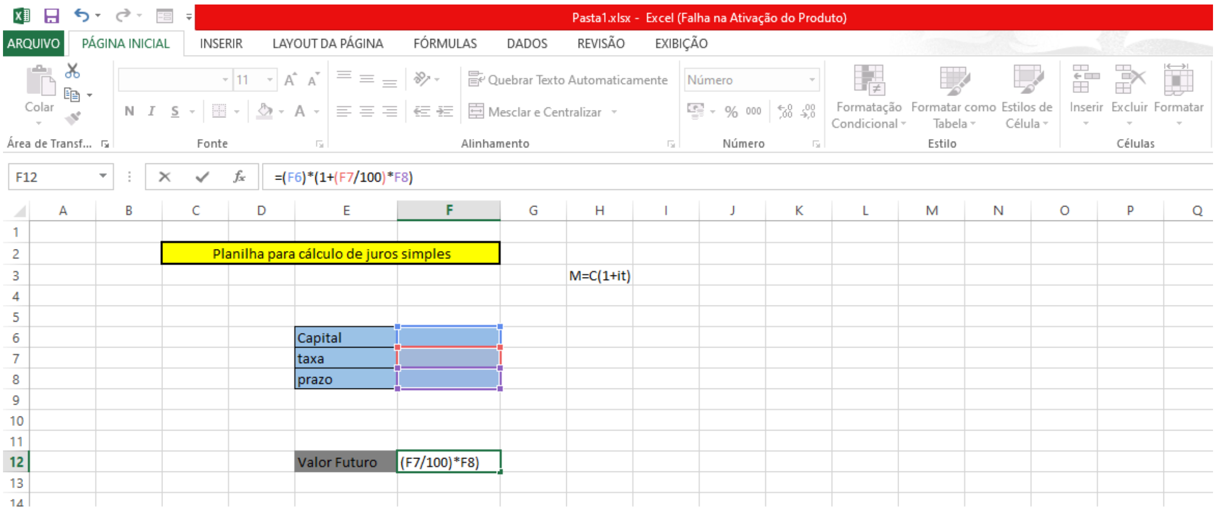

Figura 4. 40: Passo a passo Excel – passo 5

Fonte: Próprio autor

Sexto Passo: Agora, vamos formatar a célula onde teremos o "valor futuro". Primeiramente clicar com o botão direito do mouse, depois em "formatar células" conforme a imagem.

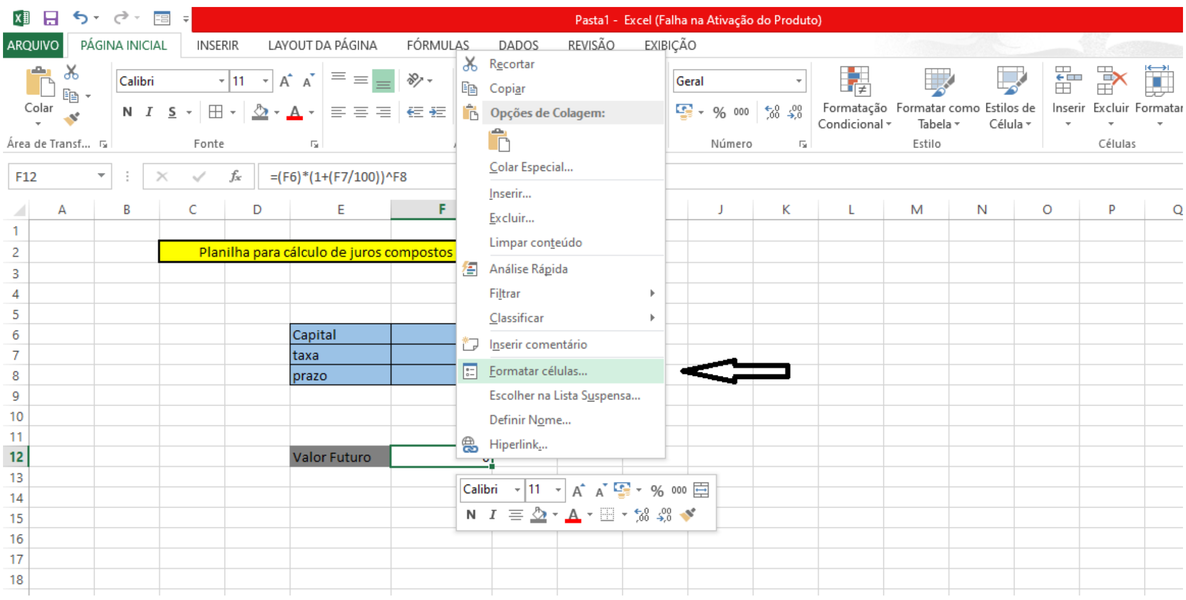

Figura 4. 41: Passo a passo Excel – passo 6

Fonte: Próprio autor

Sétimo Passo: Clicar em "Número" conforme a imagem.

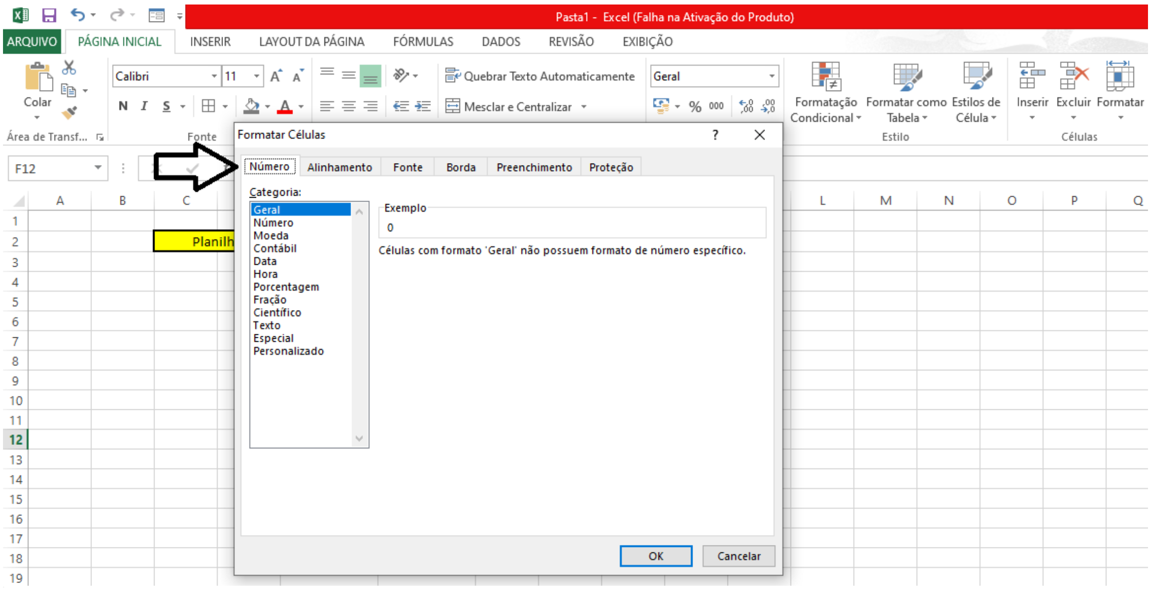

Figura 4. 42: Passo a passo Excel – passo 7

Fonte: Próprio autor

Oitavo Passo: Clicar em “número”.

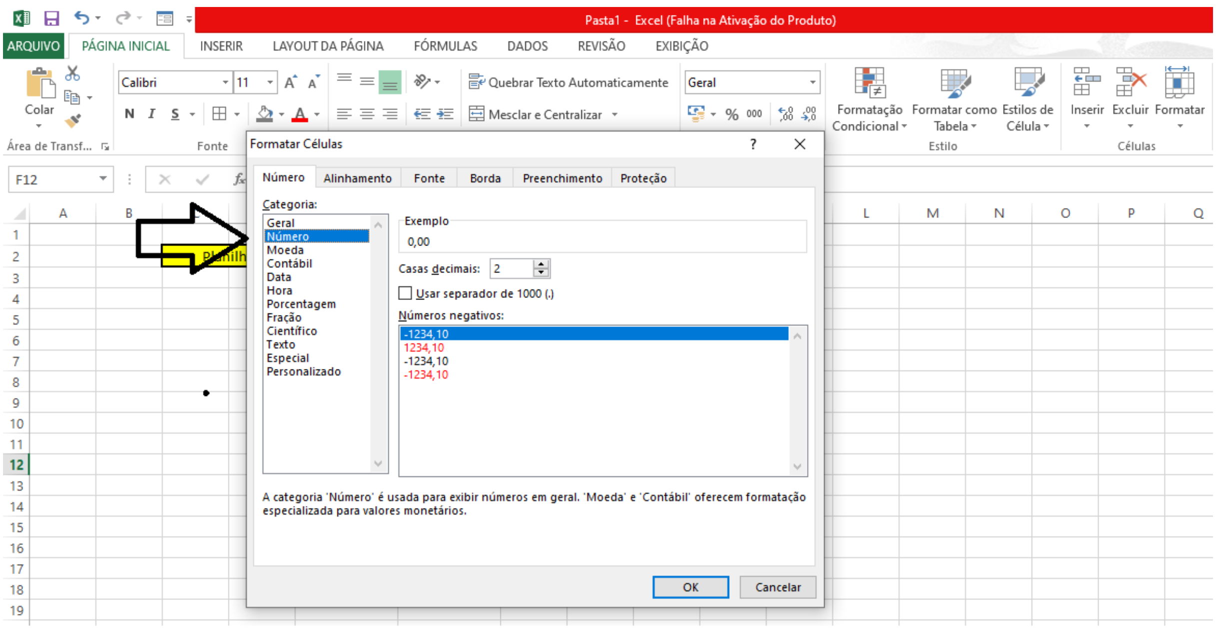

Figura 4. 43: Passo a passo Excel – passo 8

Fonte: Próprio autor

Nono Passo: Clicar em “OK”.

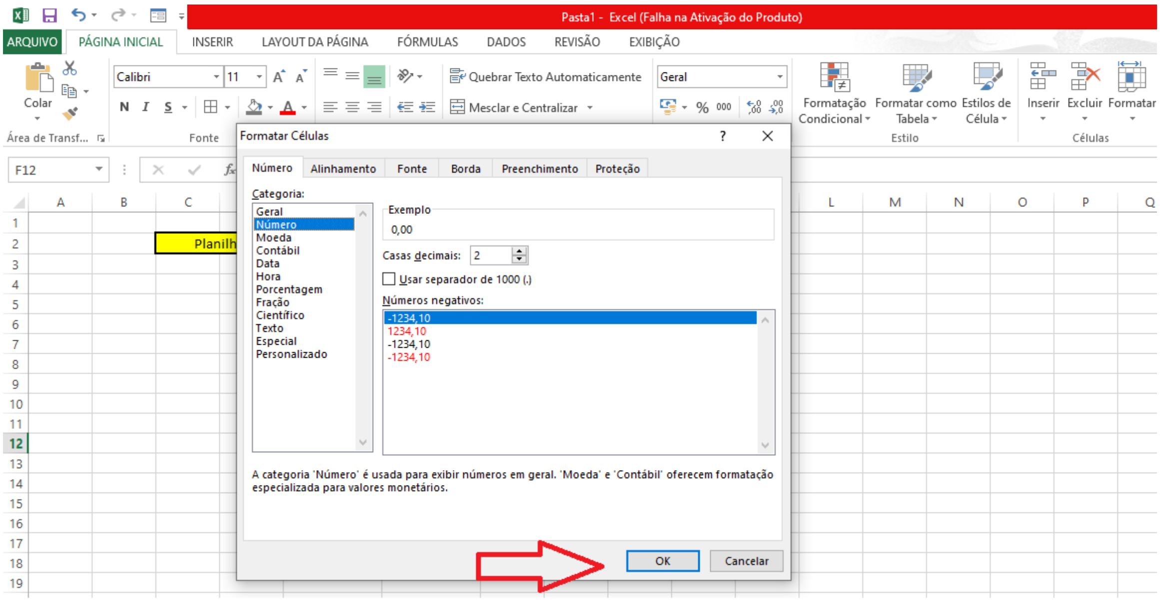

Figura 4. 44: Passo a passo Excel – passo 9

Fonte: Próprio autor

4.3.5.4 Atividade 4

Realizar junto aos alunos uma atividade na qual expomos nitidamente a importância em ter uma educação financeira na hora de uma escolha em contratar algum produto bancário.

Exercício 05. Uma cliente foi até um banco, e contratou um empréstimo de R$ 20.000,00 em 12 meses, a uma taxa de 5% ao mês, porém seu esposo descobriu que por ser funcionário público, possuía uma linha de crédito consignado em folha de pagamento, com a possibilidade de contratar a uma taxa de 2%. Eles já haviam pago 3 parcelas. Sendo assim, solicitamos:

a) Cálculo de quanto ficou as parcelas do primeiro empréstimo.
b) O saldo devedor após o pagamento da terceira parcela.
c) Um cálculo da parcela, deste valor a amortizar na nova taxa.
d) Analisar as parcelas e informe se é viável a contratação de crédito consignado para quitação do primeiro empréstimo.

Solução:

a) Para o primeiro empréstimo temos:

$$Parcela = \frac{P.(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1} = \frac{20000.(1+0{,}05)^{12}.0{,}05}{(1+0{,}05)^{12} - 1} = \frac{20000.1{,}796.0{,}05}{0{,}796} = \frac{1796}{0{,}796}$$

$Parcela = 2256{,}28.$

Portanto, a parcela é de R$ 2.256,28.

b) Para verificar o saldo devedor devemos trazer todas parcelas para data focal 3.

$$Saldo = \frac{P_4}{(1+i)^1} + \frac{P_5}{(1+i)^2} + \frac{P_6}{(1+i)^3} + \frac{P_7}{(1+i)^4} + \frac{P_8}{(1+i)^5} + \frac{P_9}{(1+i)^6} + \frac{P_{10}}{(1+i)^7} + \frac{P_{11}}{(1+i)^8} + \frac{P_{12}}{(1+i)^9}$$

$$Saldo = \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^1} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^2} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^3} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^4} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^5} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^6} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^7} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^8} + \frac{2256{,}28}{(1{,}05)^9}$$

$$Saldo = 2148{,}84 + 2046{,}51 + 1949{,}06 + 1856{,}25 + 1767{,}85 + 1683{,}67 + 1603{,}50 + 1527{,}14 + 1454{,}42$$

$Saldo = 16037{,}24.$

Logo, o saldo para quitação após o pagamento da terceira parcela seria R$ $16037{,}24$.

c) Para calcularmos a nova parcela usaremos a fórmula:

$$Parcela = \frac{P.(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1} = \frac{16037{,}24.(1+0{,}02)^9.0{,}02}{(1+0{,}02)^9 - 1} = \frac{16037{,}24.1{,}195.0{,}02}{1{,}195 - 1} = \frac{383{,}29}{0{,}195} = 1965{,}59$$

Logo a parcela com a nova taxa será de R$ 1.965,59.

d) Caso o cliente opte por “trocar” um empréstimo pelo outro, a parcela passaria de R$ 2.256,28 para R$ 1.965,59 gerando assim uma economia de R$ 290,69 por parcela e no final economizará R$ 2616,21.

Vemos aqui um caso que: se o cliente tiver conhecimento em matemática financeira pode economizar valores apenas com algumas decisões corretas.

Exercício 06. João deseja comprar um notebook, verificou em determinada loja o anúncio a seguir [19]:

Figura 4. 45: Anúncio de notebook

Fonte:< https://economia.estadao.com.br/noticias/seu-dinheiro,juros-da-compra-a-prazo-superam-os-115-ao-ano,10000067743>

João não tem condições financeiras de efetuar o pagamento à vista, mas tem a possibilidade de realizar um empréstimo consignado com taxa de juros de 2% ao mês. Com base nas informações do texto apresentado e utilizando a planilha do Excel, responda as questões:

a) Qual a taxa de juros cobrada pela loja no parcelamento em 18 vezes?

b) Se João tomar o empréstimo consignado também em 18 vezes, qual o valor da parcela mensal?

c) Qual a melhor opção de financiamento para João?

Solução:

a) Na planilha do Excel clicar em fórmulas, em seguida na tecla do menu f_x, com esta operação aparecerá a tela:

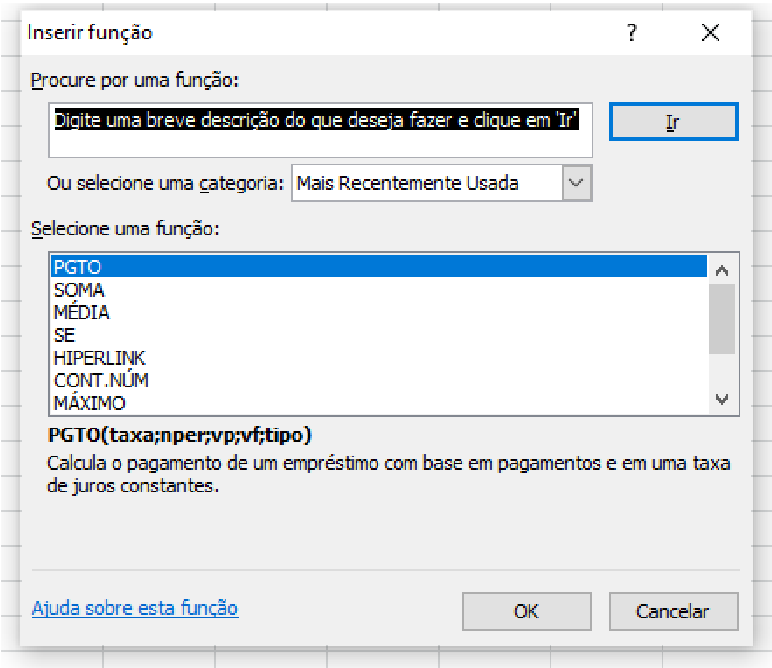

Figura 4. 46: Planilha de Excel - Cálculo de taxa

Fonte: Próprio autor

Clicar na seta à direita de "Mais Recentes Usadas" e clicar em Financeira, como ilustrado na tela a seguir.

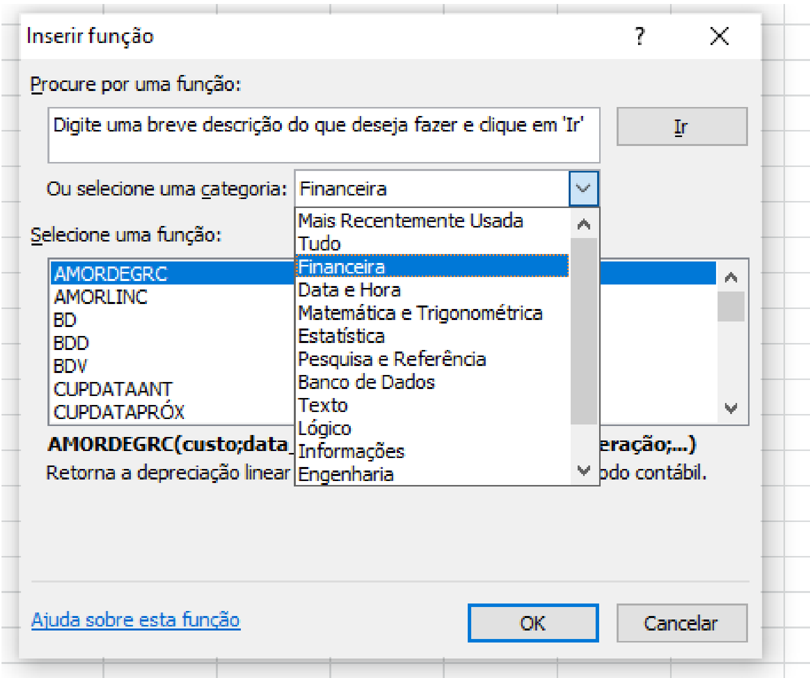

Figura 4. 47: Planilha de Excel - Cálculo de taxa

Fonte: Próprio autor

Em seguida, selecionar a função TAXA e clicar em OK.

Aparecerá a seguinte caixa de diálogo e será necessário preencher com os dados do problema.

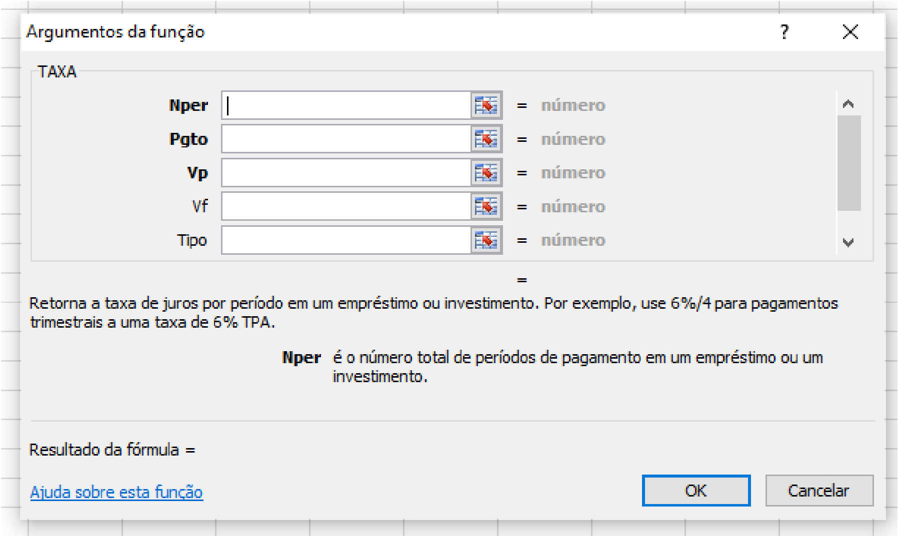

Figura 4. 48: Planilha de Excel - Cálculo de taxa

Fonte: Próprio autor

Nper: número total de pagamentos;

Pgto: valor das prestações;

Vp: valor presente, com sinal contrário ao do pagamento. Se Vp é preenchido Vf deve ficar em branco.

Vf: valor futuro, com sinal contrário ao pagamento. Se Vf é preenchido Vp deve ficar em branco.

Tipo: é o número 0 ou 1, conforme pagamentos sejam postecipados ou antecipados. Se for deixado em branco, o Excel assumirá 0, considerando pagamentos postecipados.

Observação: O Excel trabalha com a "lógica do contador", na qual os pagamentos e os recebimentos devem ter sinais contrários, logo se o valor das prestações é positivo, o valor presente obrigatoriamente deve ser negativo [10].

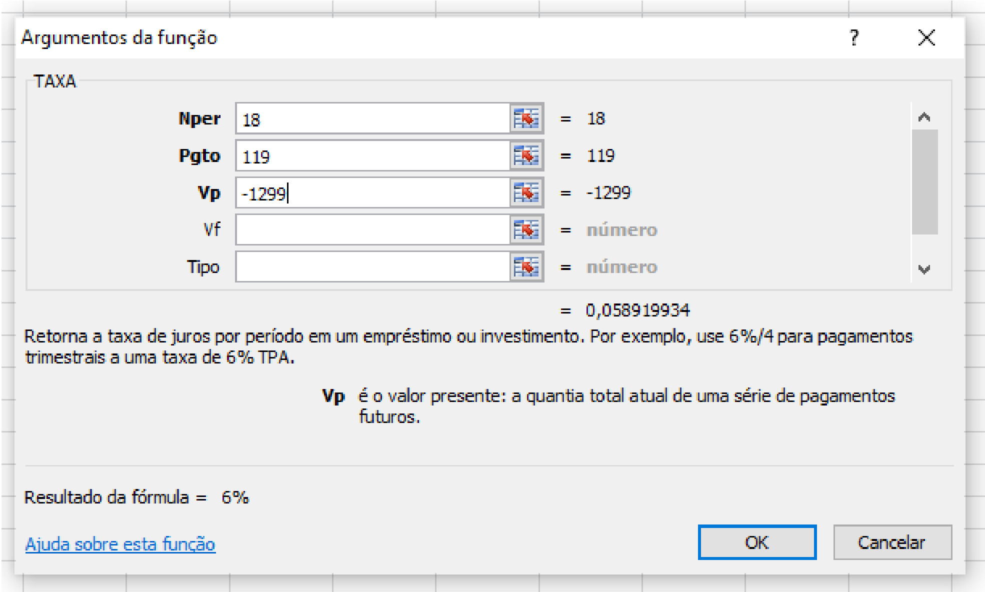

Figura 4. 49: Planilha de Excel - Cálculo de taxa

Fonte: Próprio autor

Portanto a taxa de juros cobrada pela loja é de 6%.

b) Na planilha do Excel clicar em fórmulas e em seguida na tecla do menu f_x. Clicar na seta a direita de “mais Recente Usada” e clicar em Financeira. Em seguida, selecionar a função PGTO e clicar em OK (Lembrar que o valor presente Vp deve ser negativo).

Aparecerá a caixa de diálogos e será necessário preencher com os dados do financiamento consignado.

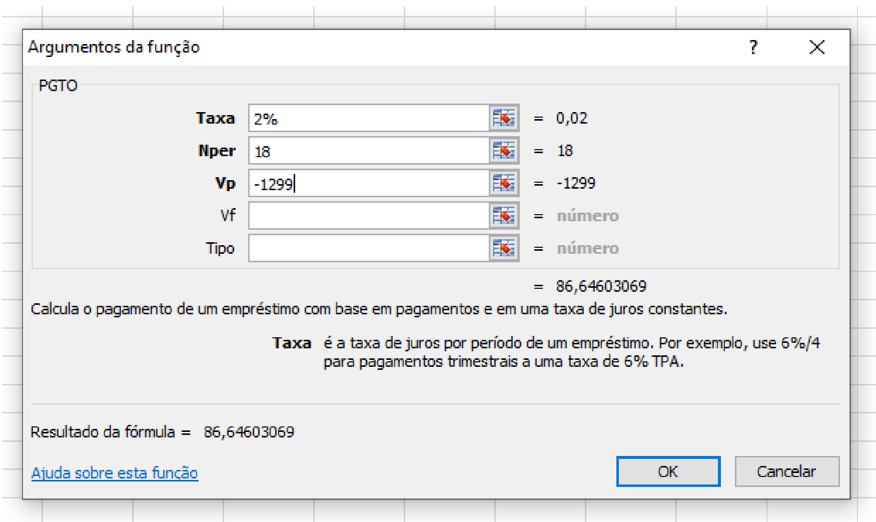

Figura 4. 50: Planilha de Excel - Cálculo de parcela

Fonte: Próprio autor

Portanto, se João tomar o empréstimo consignado para pagar à vista o notebook, sua parcela mensal será de aproximadamente R$ 86,64.

c) Para João a proposta de contratar o empréstimo consignado e pagar o produto à vista é mais vantajosa, pois terá uma economia mensal de R$ 119,00 – R$ 86,64 = R$ 39,36.

Podemos verificar aqui uma jogada de marketing de uma empresa, muito comum neste tipo de comércio, por falta de uma educação financeira, conforme já comentamos, os brasileiros se preocupam apenas com o valor da parcela e acham um valor justo, mas vemos aqui um caso em que a loja esconde o valor dos juros mensais cobrados, divide em muitos meses para que a parcela não fique alta, facilitando assim a venda, porém se o consumidor calcular o valor cobrado, o mesmo poderá verificar opções mais baratas.

4.3.5.5 Atividade 5

Podemos também fazer junto aos alunos uma análise do caso citado na introdução deste trabalho, o caso do jovem que comprou um celular no valor de R$ 3.500,00, parcelado em 10 vezes iguais.

Problema: Calcular o valor gasto total por um cliente que comprou um celular no valor de R$3.500,00 parcelado em dez vezes no seu cartão de crédito, sendo que das dez parcelas o cliente pagou regularmente apenas três prestações, a quarta e a quinta parcelas não foram pagas, porém como o cartão é vinculado à sua conta corrente, estas duas parcelas foram debitadas de sua conta o valor mínimo de pagamento, ou seja, 30% do seu valor no cheque especial, que é um valor que o banco disponibiliza para o cliente diretamente na conta com a cobrança de uma taxa de 7% ao mês, os outros 70% que faltaram ficou como crédito rotativo, que é uma cobrança do próprio cartão de crédito quando há o pagamento de apenas o valor mínimo (30%); sua taxa de juros é de 9,8% ao mês. Já na data de pagamento da sexta parcela o cliente procurou o banco e foi orientado a fazer um parcelamento desta dívida em parcelas fixas e a uma taxa de 2,9% ao mês. Usando estes dados, calcular o valor total gasto pelo cliente no final do pagamento total da dívida.

Solução:

Vamos calcular a dívida do cartão:

No primeiro mês de atraso, na quarta parcela, foi para o crédito rotativo 70% de R$ 350,00, totalizando R$ 245,00.

No segundo mês de atraso, na quinta parcela, temos 9,8% de juros sobre os R$ 245,00, totalizando R$ 269,01 acrescidos dos R$ 245,00 não pagos nesta parcela, portanto a dívida ficou neste mês em R$ 514,01.

Na sexta parcela, quando o cliente fez o parcelamento, ele devia a sexta parcela e as restantes, ou seja, 7x R$ 350,00 = R$ 2.450,00, além disso, de rotativo, acréscimo de juros de 9,8 da dívida do mês anterior, ficando em R$ 564,38, assim sendo o total é:

Total = R$ 2.450,00 + R$ 564,38 = R$ 3.014,38, somente no cartão.

Já no cheque especial temos:

No primeiro mês de atraso: 30% de R$ 350,00 = 0,3.350 = R$ 105,00.

No segundo mês de atraso, temos os acréscimos de juros, R$ 105,00. 1,07 = R$ 112,35, mais R$ 105,00, totalizando R$ 217,35.

No sexto mês, quando renegociou a dívida, temos o acréscimos de juros do "cheque especial", 1,07.R$ 217,35 = R$ 232,56.

Somando todas as dívidas, chegamos a um total de R$ 3.014,38 + R$ 232,56 = R$ 3.246,94.

Vamos calcular a parcela deste novo empréstimo a uma taxa de 2,9% ao mês em 36 vezes.

$$Parcela = \frac{P.(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1} = \frac{3246{,}94.(1+0{,}029)^{36}.0{,}029}{(1+0{,}029)^{36} - 1} = \frac{3246{,}94.2{,}799.0{,}029}{2{,}799 - 1}$$

$$= \frac{263{,}557}{1{,}799}$$

$Parcela = 146{,}50.$

Agora vamos verificar o total gasto pelo cliente:

Total = 36xR$ 146,50 (renegociação) + 3xR$ 350,00 (parcelas pagas no prazo normal).

Total = R$ 5.272,92 + R$ 1.050,00 = R$ 6.322,92.

Verificamos aqui um caso em que uma pessoa, por não ter uma boa educação financeira, acabou gastando quase 4,9 vezes seu salário em um celular.

4.3.6 Avaliação

Devemos propor algumas atividades aos alunos usando estas planilhas de Excel, sempre verificando sua aprendizagem, tanto no assunto abordado, juros simples e compostos como também no uso das planilhas de Excel. Em seguida podemos propor alguns exercícios.

Adicionalmente podemos propor atividades nas quais os alunos possam fazer uma comparação entre uma cobrança com juros simples e composto, por exemplo, solicitar aos mesmos que calculem o valor final cobrado por uma dívida de R$ 1.000,00, cobrada em 24 parcelas a uma taxa de 2% ao mês, questioná-los em relação ao resultado, porque um é maior do que o outro.

Da mesma forma, propor atividades que estimulem os alunos a poupar. Por exemplo, solicitar a comparação de um depósito de R$ 2.000,00 por 60 meses através dos juros simples e compostos, para que os alunos também possam verificar os benefícios de poupar.

Neste capítulo final, procuramos apresentar alguns casos objetivando mostrar a importância de se ter uma educação financeira, visando obter tomada de decisões sensatas em finanças. Tal objetivo pode ser alcançado, utilizando a estratégia de criar situações práticas em forma de exercícios propostos e/ou resolvidos, assim como, atividades práticas utilizando programas que lidam com planilhas financeiras como o Excel.

Capítulo 5. Considerações Finais

Trabalho em uma instituição financeira, na qual fornecemos produtos bancários como, por exemplo: financiamento de casas, empréstimos, cartões de crédito, seguros, previdências, títulos de capitalização. Ao longo de quase quinze anos de carreira notamos a falta de conhecimento da população em matemática financeira, fazendo com que essas pessoas tomassem decisões erradas e fizessem o consumo de produtos bancários de forma errônea. Notamos também que o consumo acelerado e desnecessário prejudicam a vida de muitos brasileiros, fazendo com que desde cedo fiquem com seus nomes negativados em órgãos de proteção ao crédito, impossibilitando muitas vezes que esses jovens comprem uma casa financiada, por exemplo, um bem na qual é muito difícil juntar dinheiro e comprar à vista. Além disto, um outro agravante é o fato das instituições bancárias não deixarem explícitos todas características, dificultando assim as decisões dos clientes que acabam fazendo a compra de algum produto desnecessário ou de forma errada, uma taxa mais cara, um prazo maior ou algo assim.

A população em geral, quando vai consumir algum bem ou produto, se preocupa com o valor da parcela, não se preocupa com o valor final a ser pago, se está sendo embutido algum custo a mais, um seguro ou algo do tipo, não se preocupa se existe alguma forma mais barata de adquirir, seja um financiamento consignado, consórcio por exemplo. Não se preocupam também em poupar pelo menos alguma parte para a compra de algum bem no futuro, ou guardar para fazer uma faculdade.

Nossa intenção neste trabalho, foi mostrar a importância na tomada de decisões em situações financeiras, como por exemplo, evitar a compra de produtos bancários de forma incorreta, para isso mostramos casos reais de financiamentos onde uma escolha entre um sistema de amortização faz muita diferença. Além disso, foi apresentado neste trabalho a equivalência de capitais, que consiste em movimentações financeiras ao longo do tempo, como também, preparamos algumas atividades e planos de aula que acreditamos que possam ser úteis para trabalhos futuros de colegas professores no ensino médio. Outro ponto a destacar, foi a utilização de cálculos financeiros com o auxilio de planilhas no Excel, visando atrair a atenção das pessoas interessadas no assunto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] "Carl Friedrich Gauss" em Só Matemática. Virtuous Tecnologia da Informação, 1998-2021. Consultado em 23/02/2021 às 19:46. Disponível na Internet em https://www.somatematica.com.br/biograf/gauss.php.

[2] Currículo Paulista, UNDIME SP, 2021. Disponível em: <https://efape.educacao.sp.gov.br/curriculopaulista/wp-content/uploads/sites/7/download/habilidades-essenciais-ensino%20medio%202021/Habilidades%20Essenciais%20de%20Matem %C3%a1tica%20-%20EM.pdf>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2021.

[3] DUARTE, Lucas Rodrigues; FRANCA, Ildeu Rolla. Elementos de Matemática Financeira e Comercial. Belo Horizonte MG: Simplíssimos Livros, 1. ed. 2019.

[4] FUSINATO, Joni. Sistemas de Amortização. DOCPLAYER, 2018. Disponível em: https://docplayer.com.br/49417529-Sistemas-de-amortizacao-prof-joni-fusinato.html . Acesso em: 20 de janeiro de 2021.

[5] FUSINATO, Joni. Sistemas de Amortização. Joinville IFSC, 2020. Disponível em: <http://joinville.ifsc.edu.br/~joni.fusinato/GH%20-%20MFI22/Aula/Aula%208%20-%20Sistemas%20de%20Amortiza%C3%A7%C3%A3o.pdf>.Acesso em: 02/09/2020.

[6] GOLVEIA, Rosimar. Matemática Financeira. TodaMatéria, 2021. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/matematica-financeira-conceitos-ormulas/ .Acesso em: 16/02/2021.

[7] IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo SP: Atual, 1. ed. 2019.

[8] Inadimplência atinge 62 milhões de brasileiros e afeta 3% do crédito, Correio Brasiliense, 2018. Disponível <https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/Ec

onomia/2018/11/12/internas_economia,718908/inadimplencia-atinge-62-milhoes-de-brasileiros-e-afeta-3-do-credito.shtml>.

[9] LEGISLAÇÃO, Câmara dos Deputados, 1996. Disponível em <https://www2.cama ra.leg.br/legin/fed/lei/1996/lei-9394-20-dezembro-1996-362578-publicacaooriginal-1-pl.html#:~:text=Estabelece%20as%20diretrizes%20e%20bases%20da%%2020educa%C3%A7%C3%A3o%20nacional.&text=%C2%A7%201%C2%%B%20A%20Esta%20Lei%20disciplina,trabalho%20e%20a%20pr%C3%A1tica%%2020social.>. Acesso em 20 de fevereiro de 2021.

[10] LIMA, R. O.,A IMPORTÂNCIA DA EDUCAÇÃO FINANCEIRA COMO FATOR DE INFLUÊNCIA NA TOMADA DE DECISÕES, Três Lagoas MS, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do sul, 101 pg, 2020.

[11] MATEMÁTICA FINANCEIRA, Educa Mais Brasil, 2020. Disponível em:<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/matematica-financeira> Acesso em 12/09/2020.

[12] MENEZES, Márcio de. Matemática Financeira. Curitiba: IESDE Brasil S.A., 1. ed, 2012.

[13] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. Matemática Discreta. Rio de Janeiro RJ: 2. ed. 2015.

[14] MORGADO, Augusto César. Progressões e Matemática Financeira. Rio de Janeiro: SBM, 5. ed., 2010.

[15] No vermelho: 46% dos jovens brasileiros estão endividados. Educa mais Brasil, 2018. Disponível em: <https://www.educamaisbrasil.com.br/educacao/noticias/no-vermelho-46-dos-jovens-brasileiros-estao-endividados>. Acesso em: 20 de dezembro de 2020.

[16] ORIGEM DO DINHEIRO, Casa da Moeda do Brasil, 2015. Disponível em <https://www.casadamoeda.gov.br/portal/socioambiental/cultural/origem-do-dinheiro.html#:~:text=As%20primeiras%20moedas%2C%20tal%20como,)%2C%20no%20s%C3%A9culo%20VII%20A.%20C..&text=Assim%20surgiram%20as%20primeiras%20c%C3%A9dulas,dava%20origem%20a%20institui%C3%A7%C3%B5es%20banc%C3%A1rias.> Acesso em 12/09/2020.

[17] PROGRESSÃO ARITMÉTICA, Educa Mais Brasil, 2020. Disponível em:<https://www.educamaisbrasil.com.br/enem/matematica/progressao-aritmetica> Acesso em: 31/08/2020.

[18] QUERO BOLSA, FIES 2021 e Novo FIES - Guia Completo, 2021. Disponível em: < https://querobolsa.com.br/fies>. Acesso em 20/09/2020.

[19] VENTURINI, R.C.P., EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO, Três Lagoas MS, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do sul, 116 pg, 2016.