



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL  
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS**

**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

**ARTEFATOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS  
CÔNICAS EM SALA DE AULA**

**MARLI SOLERA**

**TRÊS LAGOAS - MS**

**2021**

**MARLI SOLERA**

**ARTEFATOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS  
CÔNICAS EM SALA DE AULA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza.

**TRÊS LAGOAS - MS**

**2021**

# ARTEFATOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DAS CÔNICAS EM SALA DE AULA

## MARLI SOLERA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas UFMS, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática sob a orientação do Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza.

Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

### Banca Examinadora

Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza (Orientador)

Instituição: UFMS/CPTL

Julgamento:

Prof. Dr. Rinaldo Vieira da Silva Junior

Instituição: UFAL

Julgamento:

Prof. Dr. Edivaldo Romanini

Instituição: UFMS/CPTL

Julgamento:

## **AGRADECIMENTOS**

Dedico este trabalho...

### **Primeiramente a DEUS**

Força suprema, onipresente, onisciente e onipotente que rege os meus dias de vida e povoa meus pensamentos de boas vibrações e energias fluídicas, a quem me deixa participar desse dinamismo que é a vida. Gratidão por conceder-me o sopro da existência em fluxo contínuo de idas e vindas aos planos da matéria e da espiritualidade, imbuído da imortalidade da minha consciência existencial, que só aprende a cada nova oportunidade de um amanhecer.

### **Aos meus pais José Solera, *In memoriam*, e Rosária**

Por todo amor, pelo incentivo aos estudos, pelos desdobramentos em me ajudar, pelo apoio e orações. Os valores ensinados refletem hoje no meu amor incondicional. Meu pai que mesmo ausente está sempre presente. Eu AMO vocês.

### **À minha filha Luciana**

Pelo amor de mãe a uma filha, imensurável, que pulsa freneticamente no peito e transborda pela boca em palavras doces e corretivas, pelos olhos em lágrimas de emoção, pelas curvas do rosto num sorriso singelo ou na face de repreensão, pelos suspiros que damos no continuar da caminhada quando a vontade é desistir. Dedico a fonte que me faz querer viver sempre mais, e que num único lance de olhar eu consigo compreender a linguagem das mães e filhas. Obrigada filha amada por me escolher como mãe, por me incentivar, por ser minha amiga, companheira e por estar aqui comigo. Te amo!

### **À minha filha do coração Ana Clara e a sua mãe biológica Maria Antônia**

A minha pequena semente que não carrega o meu DNA biológico, mas compartilha da minha genética espiritual. Que junto de sua mãe Maria Antônia e pai Maurício, me trouxeram mais alegria, aprendizado e multiplicou o meu amor de mãe, permitindo que eu retribuísse ao universo energias salutares e de luz, pois são dessas energias, do amor que eu emano, com certeza, é o que me visita todos os dias em que comemoro o dom da vida. Obrigada minha lindinha!

### **À minha irmã Sueli e meu cunhado Júnior**

Por toda a admiração que lhe dedico, pelas palavras sempre positivas e de incentivo, e por todo carinho e amor que me tens muito obrigado pelo apoio. Amo vocês.

### **À minha afilhada Luiza**

Primeiramente a “ninha” te ama. Obrigada pequena! A sua energia e sapiência me incentiva a ser uma mulher melhor. O meu abraço sempre será conforto para suas dores e o meu silêncio o apoio que requeres. Agora, como madrinha, uma típica madrinha de linhagem italiana, só espere pelo meu silêncio após umas boas horas de garrula.

### **Aos meus grandes amigos “Meire e Roberto”**

Obrigada queridos por compartilhar a amizade, a família, os amigos, as dores, as fofocas e a essa passagem da vida. Obrigada por estarem presentes, por serem luz em minha trajetória e oferecer apoio sempre que preciso. Gratidão aos cafés de domingo que dispersam as horas em minutos de felicidade.

### **Ao Prof. Dr. Fernando Pereira de Souza**

Por me aceitar como orientanda, por todo aprendizado, pelas correções e pelo exemplo de profissional que alia honestidade e liderança em suas pesquisas. Tenho Gratidão por ser sua orientanda.

Aos meus irmãos José Roberto e Rinaldo que mesmo longe fisicamente, mas muito perto no coração pelas palavras sempre de incentivo.

Aos meus amigos Diogo e Eduardo por sempre me auxiliar nas dificuldades principalmente com o computador sempre de bom humor, dedicação e com disposição. Muito obrigado.

Aos professores pelo compartilhamento do conhecimento, pelo bom humor, incentivo e empenho para tornar as aulas aos sábados menos cansativas.

Aos meus alunos que todos os dias me ensinam ser melhor como pessoa e profissional.

À Universidade Federal do Mato Grosso do Sul Campus de Três Lagoas

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

“A Matemática é a única linguagem que temos em comum com a natureza.”  
(Stephen Hawking)

## RESUMO

SOLERA, MARLI. **Artefatos para o Ensino e Aprendizagem das Cônicas em Sala de Aula**. 2021. 88p. Dissertação (MESTRADO PROFISSIONAL) – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, *campus* de Três Lagoas, Mato Grosso do Sul, 2021.

Este trabalho sugere um estudo das seções cônicas: elipse, hipérbole e parábola, através de cortes no cone e utilizando cálculos algébricos estudados no ensino médio como: multiplicação de matrizes, trigonometria e sistema linear. Também apresenta construções com artefatos para estabelecer uma relação geométrica e algébrica dando enfoque na geometria euclidiana. O final deste trabalho, destaca uma aplicação deste conteúdo em uma sala da terceira série do ensino médio usando os cinco níveis hierárquicos do conhecimento segundo *Van Hiele*.

**Palavras-chave:** Cônicas. Elipse. Hipérbole. Parábola,

## ABSTRACT

SOLERA, MARLI. **Artifacts for Teaching and Learning Conics in the Classroom.** 2021. 88p. Dissertation (PROFESSIONAL MASTER'S DEGREE) – Federal University of Mato Grosso do Sul, Três Lagoas *campus*, Mato Grosso do Sul, 2021.

This paper suggests a conic sections study: ellipse, hyperbola and parabola, through cuts in the cone and using algebraic calculations studied in high school such as matrix multiplication, trigonometry and linear system. It also presents constructions with artifacts to establish a geometric and algebraic relationship focusing on Euclidean geometry. The end of this work highlights an application of this content in a last year of high school using the five hierarchical levels of knowledge according to Van Hiele.

Keywords: Conics. Ellipse. Hyperbole. Parabola

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1. Circunferência e Elipse. ....	20
Figura 1.2. Elipse e seus elementos. ....	21
Figura 1.3. Excentricidade da Elipse. ....	22
Figura 1.4. Simetria de $\mathcal{E}$ em relação à reta focal. ....	23
Figura 1.5. Simetria de $\mathcal{E}$ em relação à reta não focal. ....	24
Figura 1.6. Simetria de $\mathcal{E}$ em relação ao centro. ....	25
Figura 1.7. Esboço de $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .....	26
Figura 1.8. Esboço de $\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ .....	27
Figura 1.9. Elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados. ....	28
Figura 1.10. Elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados. ....	29
Figura 1.11. Elipse $\mathcal{E}: 25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0$ . ....	30
Figura 1.12. Trajetória da Terra em torno do Sol. ....	31
Figura 1.13. Ilustração da hipérbole como seção cônica. ....	32
Figura 1.14. Hipérbole e seus elementos. ....	33
Figura 1.15. Excentricidade da Hipérbole. ....	34
Figura 1.16. Simetria da hipérbole em relação à reta focal. ....	35
Figura 1.17. Simetria de $\mathcal{H}$ em relação à reta não focal. ....	36
Figura 1.18. Simetria da hipérbole em relação ao centro .....	37
Figura 1.19. Gráfico de $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .....	38
Figura 1.20. Gráfico de $\mathcal{H}: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .....	39
Figura 1.21. Hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados. ....	40
Figura 1.22. Hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados. ....	42
Figura 1.23. Esboço do problema. ....	43

Figura 1.24. Ilustração da parábola como seção cônica. ....	44
Figura 1.25. Parábola no plano cartesiano.....	45
Figura 1.26. Simetria de P em relação à reta focal. ....	46
Figura 1.27. Parábola $\mathcal{P}: (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ .....	47
Figura 1.28. Parábola $\mathcal{P}: (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$ .....	48
Figura 1.29. Parábola $\mathcal{P}: (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ .....	49
Figura 1.30. Parábola $\mathcal{P}: (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$ .....	50
Figura 1.31. Parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ .....	51
Figura 1.32. Parábola $\mathcal{P}: y^2 = -4px$ .....	51
Figura 1.33. Parábola $\mathcal{P}: x^2 = 4py$ .....	52
Figura 1.34. Parábola $\mathcal{P}: x^2 = -4py$ .....	52
Figura 1.35. Parábola $\mathcal{P}: (x - 3)^2 = 8y + 1$ .....	53
Figura 1.36. Parábola $\mathcal{P}_1: (y - 1)^2 = 6(x - 2)$ e $\mathcal{P}_2: (x - 2)^2 = 6(y - 1)$ e reta $r: x - y - 1 = 0$ .....	54
Figura 2.1. Sistemas $OXY$ e $O\bar{X}\bar{Y}$ .....	55
Figura 2.2. Elipse nos sistemas $OXY$ e $O\bar{X}\bar{Y}$ .....	58
Figura 2.3. Parábola nos sistemas $OXY$ e $O\bar{X}\bar{Y}$ . ....	59
Figura 2.4. Hipérbole.....	67
Figura 2.5. Parábola.....	69
Figura 3.1. Elipsógrafo. ....	71
Figura 3.2. Elipsógrafo no geogebra. ....	72
Figura 3.3. Hiperbológrafo.....	74
Figura 3.4. Hiperbológrafo no geogebra.....	75
Figura 3.5. Parabológrafo.....	77
Figura 3.6. Esboço de Parabológrafo.....	77

Figura 4.1. Alunos fazendo cortes no cone. ....	82
Figura 4.2. Cones cortados para visualização da Elipse, Hipérbole e Parábola. ....	82
Figura 4.3. Elipse, Hipérbole e Parábola nos cortes do cone.....	83
Figura 4.4. Medição dos parâmetros da Elipse. ....	83
Figura 4.5. Construção das cônicas usando artefatos. ....	84
Figura 4.6. Verificação do foco da Parábola. ....	84

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	16
1    CAPÍTULO 01 .....	20
1.1    ELIPSES .....	20
1.1.1 Definição Geométrica da Elipse.....	21
1.1.2 Forma canônica da elipse .....	25
1.2    HIPÉRBOLES .....	32
1.2.1 Definição Geométrica da Hipérbole.....	33
1.2.2 Forma canônica da Hipérbole .....	37
1.3    PARÁBOLA .....	44
1.3.1 Definição Geométrica da Parábola.....	45
1.3.2 Forma canônica da Parábola.....	46
2    CAPÍTULO 02 .....	55
2.1    Rotação dos eixos coordenados.....	55
2.2    Cônicas Rotacionadas.....	57
2.3    Redução de uma equação do segundo grau à sua forma canônica.....	59
3    CAPÍTULO 03 .....	70
3.1    Métodos de construção .....	70
3.2    Elipsógrafo.....	70
3.3    Hiperbológrafo.....	74
3.4    Parabológrafo.....	76
4    APLICAÇÃO DIDÁTICA .....	79
5    CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	86
6    REFERÊNCIAS.....	87

## INTRODUÇÃO

Diz a lenda que no século IV a.C. em Atenas uma peste devastava a cidade, os gregos ao consultarem o oráculo de *Delfos*, receberam o seguinte conselho: deveriam duplicar o altar de *Apolo* para que a peste fosse amenizada. A forma desse altar era cúbica, fazer essa ampliação parecia ser fácil, para isso duplicaram todas as medidas do local. Desta forma, a ação obteve um efeito contrário ao esperado e a peste se alastrava cada vez mais. Sem saber como agir, os construtores recorreram aos matemáticos da academia de *Platão* para que o projeto fosse revisado.

Os matemáticos constataram que ao duplicar as arestas desse cubo seu volume ficou octuplicado. Descobriu-se que a peste se intensificou ao ampliar o templo ao invés de fazer as profilaxias para tratar e evitar a propagação da doença. Surgiu assim um interessante desafio matemático, o famoso problema da "duplicação do cubo", que, no fundo, consiste em construir um segmento de reta cuja medida seja raiz cúbica de dois.

*Meneacmus*, um dos discípulos de *Eudóximo*, membro da academia de *Platão*, foi um dos matemáticos que tentaram resolver o problema da "Duplicação do cubo". Suas tentativas e abordagens levaram a descobrir as seções cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

*Meneacmus* não dispunha do recurso de uma notação algébrica. Haja vista que na Grécia antiga a abordagem matemática era essencialmente geométrica, o problema se tornou mais desafiador, levando-se em consideração o fato descoberto em 1837, quando o francês *Pierre L. Wantzel* demonstrou que o problema com o uso de régua e compasso apenas, não admite solução.

As abordagens de *Meneacmus* para solucionar o problema culminaram na descoberta das seções cônicas, introduziu essas curvas usando três tipos de superfícies cônicas ilimitadas de uma folha: com seção meridiana aguda, reta ou obtusa. Interceptando cada superfície dessas com um plano perpendicular a uma de suas seções meridianas, obtinha respectivamente uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole. Fica evidente a partir dessa definição o porquê da designação seções cônicas para essas curvas. Mas os nomes elipse, parábola e hipérbole foram introduzidos por *Apolônio de Perga* (262-190 a.C).

Natural de Perga, colônia grega ao sul da Ásia Menor, *Apolônio* estudou matemática em Alexandria, onde passou também algum tempo ensinando. Ensinou ainda em Pérgamo, cuja biblioteca, na época, somente era excedida pela de Alexandria. Conhecido como "o grande geômetra", sua obra maior é *Seções cônicas*, em oito livros, dos quais restaram os sete primeiros, a saber, A seção da relação, A seção do espaço, Seção determinada, As inclinações, Os lugares planos, Os contatos e *Okytokion* (onde se determina um sistema de numeração mais prático do que o de Arquimedes) o oitavo foi perdido.

Ao contrário de *Menaecmus*, *Apolônio* obtinha todas as seções cônicas numa única superfície cônica circular genérica de duas folhas, mediante inclinações convenientes dos planos de secção.

Assim, através de um estudo integrado dessas curvas, conseguiu em sua obra resultados de grande alcance e originalidade. De fato, *Seções cônicas*, em suas 487 proposições, praticamente esgota o assunto sob o ponto de vista teórico e, com justa razão, é considerado o ponto alto da geometria grega.

*Apolônio* buscou os nomes elipse, parábola e hipérbole na matemática da escola pitagórica, no problema da aplicação das áreas em suas três formas: por falta (elipse), simples (parábola) e por excesso (hipérbole). De fato, em coordenadas as três curvas admitem uma equação geral da forma  $y^2 = 2px + qx^2$  ( $p > 0$ ). O caso  $q < 0$  fornece elipses; o caso  $q = 0$ , parábolas; e  $q > 0$ , hipérbolas. Embora sem usá-las, *Apolônio* tinha o sentido das coordenadas.

Depois de um longo período sem que apresentasse um matemático do nível dos antigos, surgiu na Grécia um geômetra de gênio que se debruçou sobre os problemas das cônicas, *Pappus de Alexandria* (300 – 350 d.C.). Na maior parte dos seus trabalhos, Pappus se refere aos estudos de seus antecessores.

*Pappus* é considerado um grande comentador das obras matemáticas de seus antecessores, e foi em uma dessas compilações que apareceu pela primeira vez a propriedade de foco, diretriz das cônicas, que ele atribuiu a Euclides e não a Apolônio.

*Pappus* tentou generalizar o chamado Problema de Apolônio, sobre *tangências*, obra em dois volumes, hoje perdida. A obra sobre tangências foi novamente resolvida no fim do século XVI por *Adriaan van Roomen*, usando intersecção de cônicas, e, muito pouco tempo depois, por *François Viète*, que o resolveu utilizando apenas régua e compasso, e acabou assim dando sua principal contribuição à geometria, discutindo o problema do lugar geométrico de três e quatro

linhas, e seus estudos posteriores para mais linhas. A solução do problema é, como concluiu Apolônio, uma seção cônica. Para as versões do problema com 5, 6 ou mais linhas, devido não haver solução com o uso de apenas régua e compasso, o que *Descartes* vai provar no século XVII, *Pappus* encontrou soluções aproximadas.

Já no século XVII, num movimento caracterizado por uma busca de inspiração nos autores clássicos, após recuperar os textos de *Pappus*, *Descartes* atacou o então chamado “*Problema de Pappus*”, o problema das quatro linhas. Inspirado por novas ideias, apoiado por uma álgebra mais maleável, *Descartes* desenvolve os embriões da geometria Analítica, e resolve o problema de 4 linhas na geometria de 1637, mostrando que esse era redutível à solução de uma equação de segundo grau, tendo como caso particular linear o problema de 3 linhas, mas também mostra que, para 5 linhas, a solução correspondente a resolver uma equação de terceiro grau, impossível portanto, construir a figura correspondente com régua e compasso. *Descartes* fez linhas corresponder a equações, inclusive as de graus mais elevados, e assim nasce o método cartesiano.

Vemos assim que as conclusões de *Pappus* foram diretamente ponto de partida para a invenção da geometria analítica por *Descartes*, aproximadamente treze séculos depois. Portanto, podemos perceber na matemática de nossos dias a influência das cônicas.

Pelas interessantes aplicações que envolvem as cônicas e de sua importância histórica para a matemática, este trabalho surge como produto de reflexão mediante as dificuldades crescentes que os professores do ensino médio encontram para trabalhar, de forma menos abstrata, a geometria analítica nas escolas públicas. Um dos fatores que mais interfere nesse processo é o curto período destinado a estas aulas, que atualmente de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo são restringidas ao primeiro bimestre da terceira série do ano letivo, sendo que as cônicas fecham este conteúdo. Outro problema, é que as aulas que poderiam ser usadas para dedicação as cônicas são utilizadas para revisar conceitos de geometria plana, conteúdo este que fica sempre para o final do período e nem sempre são ministradas.

A sequência de trabalho propostas por muitos livros didáticos para o ensino das cônicas se reduza as equações analíticas a partir da caracterização bifocal e esboço de suas formas geométricas identificando seus parâmetros.

O objetivo deste trabalho é sugerir ao professor um material de apoio didático que estimule maior interesse nos alunos em se aprofundar no tema obtendo maior

base teórica e práticas através de uma forma não usual de tratamento das cônicas, ou seja, que não predomine simplesmente o cálculo algébrico, mas que associa algumas construções com alguns artefatos.

Assim, este texto foi desenvolvido com uma parte teórica essencial das três cônicas, elipse, hipérbole e parábola, como seção de um cone, o trabalho no plano cartesiano definindo e construindo suas equações partindo de suas respectivas definições, as demonstrações das simetrias destas curvas e por fim alguns exemplos, no primeiro capítulo.

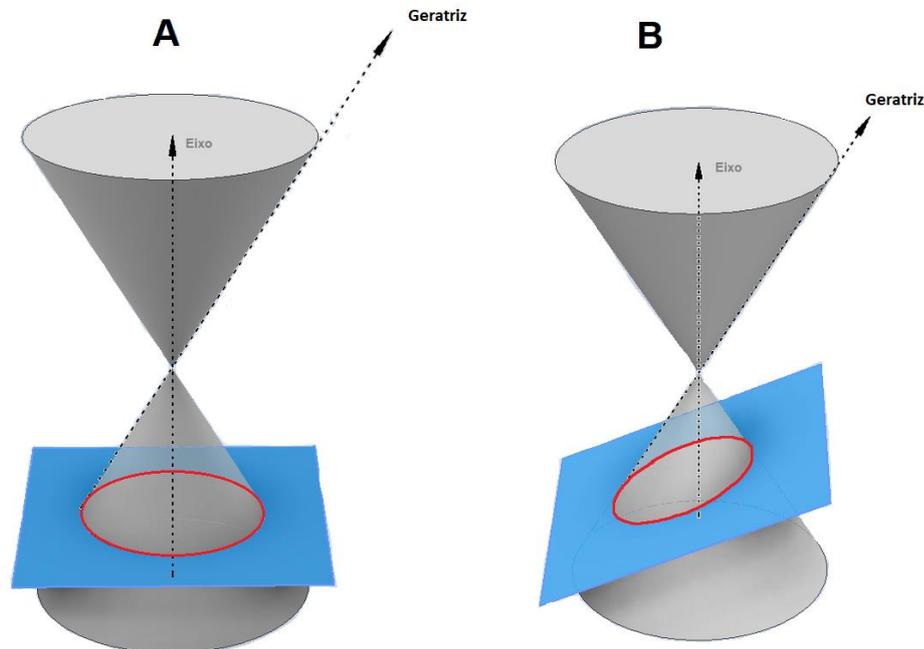
No segundo capítulo evidenciamos as equações das cônicas com os eixos transladados e rotacionados; analisando as equações do segundo grau em  $\mathbb{R}^2$ . No terceiro capítulo mostramos alguns artefatos para a construção das cônicas. Usando a geometria euclidiana provamos a veracidade das cônicas. No quarto capítulo apresentamos uma aula aplicada aos alunos da terceira série do Ensino Médio, onde foi desenvolvido os cinco níveis hierárquicos do conhecimento, segundo *Van Hiele*, para o estudo das cônicas.

## 1 CAPÍTULO 01

### 1.1 ELIPSES

Antes do estudo da elipse no plano, é interessante mostrar sua origem a partir de interseções de plano e cone. Um cone pode ser gerado a partir da rotação de uma reta (geratriz) ao redor de outra concorrente (eixo de rotação) como ilustrado na Figura 1.1. Assim, quando um determinado plano secciona este cone perpendicularmente ao eixo de rotação, obtemos uma circunferência (Figura 1.1A). Porém, ao inclinarmos o plano de tal modo que não fique paralelo à geratriz e que a seção seja apenas num dos cones, esta será uma elipse (Figura 1.1B) e, se o plano passar apenas pelo vértice, consideramos a elipse degenerada, ou seja, um ponto, mas se for paralelo à geratriz, e passar pelo vértice, a interseção será uma reta.

Figura 1.1. Circunferência e Elipse.



Fonte: A autora.

A seguir, iniciamos o estudo da elipse no plano de maneira formal, todavia de forma gradativa.

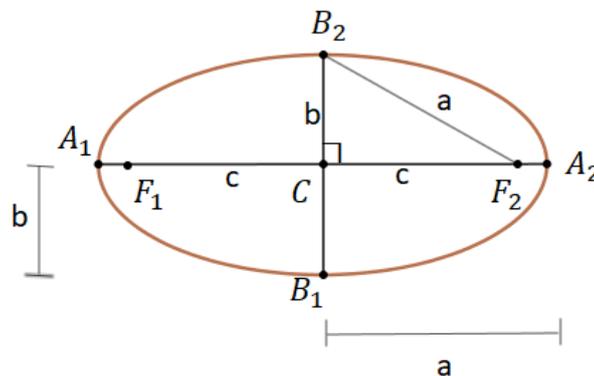
### 1.1.1 Definição Geométrica da Elipse

**Definição 1.1:** A Elipse  $\mathcal{E}$  é formada pelos pontos  $P$  no plano tais que a soma das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é constante.

Denotando  $d(F_1, F_2) = 2c$ , então a elipse é o conjunto de todos os pontos  $P$  tais que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \text{ com } a > c.$$

Figura 1.2. Elipse e seus elementos.



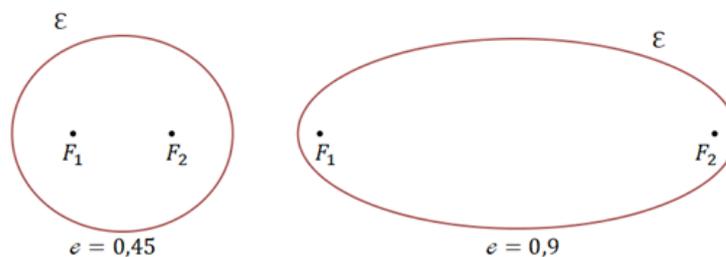
**Fonte:** A autora.

Terminologia:

- **Eixo focal:** é o segmento de extremidades  $A_1$  e  $A_2$  de comprimento  $2a$ .
- **Eixo não focal:** é o segmento de extremidades  $B_1$  e  $B_2$  de comprimento  $2b$  perpendicular ao eixo focal.
- **Centro:** é o ponto  $C$  gerado pela interseção dos eixos focal e não focal da elipse.
- **Vértices:** São os pontos  $A_1$  e  $A_2$  que indicam as extremidades do eixo focal e, os pontos  $B_1$  e  $B_2$  que indicam as extremidades do eixo não focal.
- **Focos:** São os pontos  $F_1$  e  $F_2$  situados sobre o eixo focal  $A_1A_2$ . Estes são equidistantes dos vértices e do centro da elipse. O valor  $2c$ , representa a distância focal.
- **Excentricidade:** é o número  $e = \frac{c}{a}$ .

A excentricidade é um número que mostra quanto os pontos da elipse estão próximos de uma circunferência ou de um segmento de reta. Fixada a medida  $2b$  do eixo menor, temos: quanto mais próximos estiverem os focos, mais próximos de uma circunferência estarão os pontos da elipse, e quanto mais distantes estiverem os focos, mais próximos de um segmento de reta estarão os pontos da elipse. Observamos na Figura 1.3:

Figura 1.3. Excentricidade da Elipse.



**Fonte:** A autora.

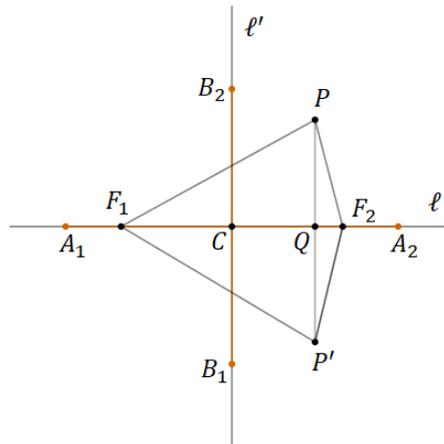
Assim, quanto mais próximo de zero estiver o número  $e = \frac{c}{a}$ , mais próximos de uma circunferência estarão os pontos da elipse, e quanto mais próximo de 1 estiver o número  $e$  mais próximos de um segmento de reta estarão os pontos da elipse.

O número  $a$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal,  $b$  é a distância do centro aos vértices sobre a reta não focal e  $c$  é a distância do centro aos focos.

**Propriedade 1.1** – *A elipse  $\mathcal{E}$  é simétrica em relação a reta focal, à reta não focal e ao centro.*

Vamos mostrar que a elipse é simétrica à reta focal. Seja  $P \in \mathcal{E}$  e  $P'$  simétrico de  $P$  em relação à reta focal.

Figura 1.4. Simetria de  $\mathcal{E}$  em relação à reta focal.



**Fonte:** A autora.

Observamos que os triângulos  $\Delta F_2PQ$  e  $\Delta F_2P'Q$  são congruentes pelo caso de congruência  $LAL$ , já que  $\overline{PQ} = \overline{Q'P'}$ , pois  $P$  é simétrico a  $P'$ , os ângulos  $\widehat{PQF_2}$  e  $\widehat{P'QF_2}$  são congruentes e  $\overline{QF_2}$  é comum aos triângulos. A congruência implica que  $\overline{PF_2} = \overline{P'F_2}$ . Agora, os triângulos  $\Delta F_1PQ$  e  $\Delta F_1P'Q$  também são congruentes pelo mesmo caso de congruência, visto que o lado  $\overline{QF_1}$  é comum aos triângulos.

Assim, obtemos:

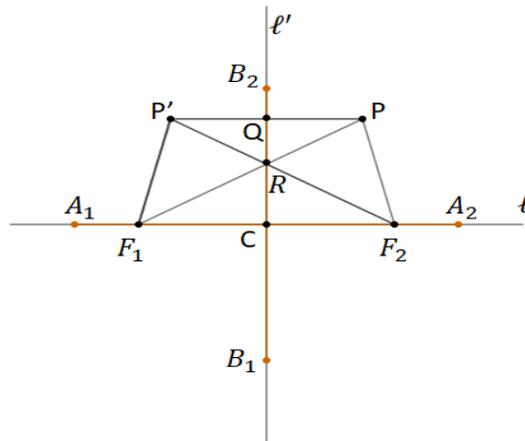
$$|F_1P| = |F_1P'| \text{ e } |F_2P| = |F_2P'|.$$

Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_1) + d(P', F_2) \Rightarrow P' \in \mathcal{E}.$$

Adiante, demonstraremos que a elipse é simétrica a reta não focal.

Sejam  $P \in \mathcal{E}$  e  $P'$  simétrico de  $P$  em relação à reta não focal.

Figura 1.5. Simetria de  $\mathcal{E}$  em relação à reta não focal.

**Fonte:** A autora.

Notamos que os triângulos  $\Delta PQR$  e  $\Delta P'QR$  são congruentes pelo caso de congruência  $LAL$ , pois  $\overline{PQ} = \overline{QP'}$ , pois  $P$  é simétrico a  $P'$ , os ângulos  $\widehat{PQR}$  e  $\widehat{P'QR}$  são iguais e  $\overline{QR}$  é comum aos triângulos. A congruência implica que  $\overline{PR} = \overline{P'R}$ . Também temos a congruência dos triângulos  $\Delta F_1RC$  e  $\Delta F_2RC$  pelo mesmo caso de congruência, posto que o lado  $\overline{RC}$  é comum aos triângulos, os ângulos  $\widehat{F_1CR}$  e  $\widehat{F_2CR}$  são iguais e  $\overline{F_1C} = \overline{CF_2}$ . Assim temos:

$$|P'R| = |PR| \text{ e } |F_1R| = |F_2R|.$$

Verificamos que os triângulos  $\Delta F_1P'R$  e  $\Delta F_2PR$  são congruentes também pelo caso de congruência  $LAL$ , em razão dos ângulos  $\widehat{P'RF_1}$  e  $\widehat{PRF_2}$  serem iguais, opostos pelo vértice, e os lados  $\overline{P'R} = \overline{RP}$  e  $\overline{F_1R} = \overline{RF_2}$  devido a congruência anterior. É compreensível notar que:

$$\overline{P'F_2} = \overline{P'R} + \overline{RF_2} = \overline{PR} + \overline{RF_1} = \overline{PF_1}.$$

Portanto,

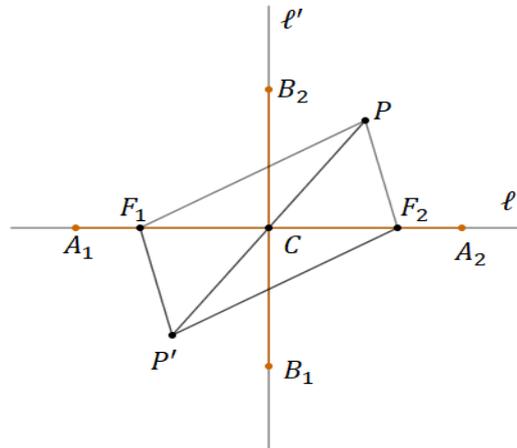
$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P', F_2) + d(P', F_1) \Rightarrow P' \in \mathcal{E}.$$

Em seguida, explanaremos que a elipse é simétrica em relação à origem. Se  $P \in \mathcal{E}$  e  $P''$  é simétrico de  $P$  em relação ao centro, então, pelo caso  $LAL$  de congruência de triângulos, temos que os triângulos  $\Delta PCF_2$  e  $\Delta P''CF_1$  são congruentes.

De fato,  $\overline{PC} = \overline{CP''}$  pois  $P$  é simétrico  $P''$ , os ângulos  $\widehat{PCF_2}$  e  $\widehat{P''CF_1}$ , são opostos pelo vértice, e  $\overline{F_1C} = \overline{CF_2}$ . A congruência implica  $\overline{PF_2} = \overline{P''F_1}$ . Observamos a

congruência dos triângulos  $\Delta F_1CP$  e  $\Delta F_2CP''$  também pelo caso de congruência  $LAL$ , pois os ângulos  $P\hat{C}F_1$  e  $P''\hat{C}F_2$  são congruentes.

Figura 1.6. Simetria de  $\mathcal{E}$  em relação ao centro.



**Fonte:** A autora.

Desta forma, obtemos:

$$|F_1P| = |F_2P''| \text{ e } |F_2P| = |F_1P''|.$$

Portanto,

$$2a = d(P, F_1) + d(P, F_2) = d(P'', F_2) + d(P'', F_1) \Rightarrow P'' \in \mathcal{E}.$$

### 1.1.2 Forma canônica da elipse

A partir da definição da elipse, vamos obter sua equação em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  para alguns casos especiais.

**Elipse  $\mathcal{E}$  com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ .**

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} F_1 &= (-c, 0), & A_1 &= (-a, 0), & B_1 &= (0, -b), \\ F_2 &= (c, 0), & A_2 &= (a, 0), & B_2 &= (0, b), \end{aligned}$$

onde  $0 \leq c \leq a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Substituindo na definição da elipse, obtemos:

$$P = (x, y) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

$$\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \tag{1.1}$$

Elevando ambos os membros da equação 1.1 ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\
x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2, \\
4xc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
a^2 - xc &= a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1.2}
\end{aligned}$$

Agora, elevando ambos os membros da equação 1.2 ao quadrado, obtemos que:

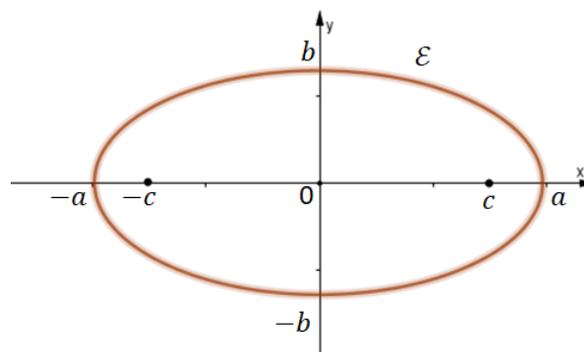
$$\begin{aligned}
(a^2 - cx)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2), \\
a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2), \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2), \\
b^2x^2 + a^2y^2 &= a^2b^2, \tag{1.3}
\end{aligned}$$

pelo fato de termos  $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ , então podemos dividir ambos os membros da equação 1.3 por  $a^2b^2$  e assim, chegamos à equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.4}$$

A equação 1.4 é a forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ .

Figura 1.7. Esboço de  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



Fonte: A autora

**Elipse  $\mathcal{E}$  com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OY$ .**

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}
F_1 &= (0, -c), & A_1 &= (0, -a), & B_1 &= (-b, 0), \\
F_2 &= (0, c), & A_2 &= (0, a), & B_2 &= (b, 0),
\end{aligned}$$

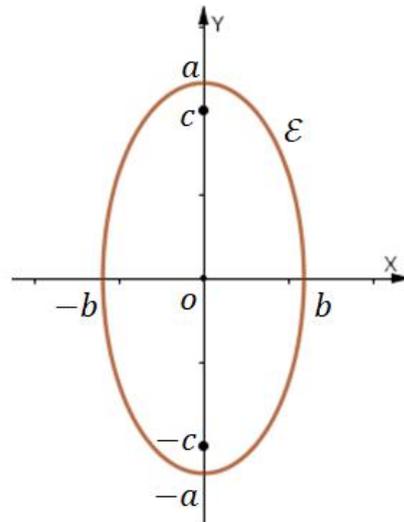
onde  $0 \leq c \leq a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

De forma análoga ao caso anterior, temos que a equação da elipse neste caso é dada por:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad 1.5$$

A equação 1.5 é a forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OY$ .

Figura 1.8. Esboço de  $\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ .



Fonte: A autora.

**Elipse  $\mathcal{E}$  com centro  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ .**

Isso posto, temos:

$$\begin{aligned} C &= (x_0, y_0), \\ F_1 &= (x_0 - c, y_0), & A_1 &= (x_0 - a, y_0), & B_1 &= (x_0, y_0 - b), \\ F_2 &= (x_0 + c, y_0), & A_2 &= (x_0 + a, y_0), & B_2 &= (x_0, y_0 + b), \end{aligned}$$

onde  $0 \leq c \leq a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{E} &\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a, \\ \sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} &= 2a, \\ \sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2} &= 2a, \\ \sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} &= 2a - \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned}$$

Convém fazer as seguintes mudanças de variáveis para facilitar os cálculos,

$$\begin{cases} x - x_0 = u \\ y - y_0 = v \end{cases} \quad \begin{matrix} 1.6 \\ 1.7 \end{matrix}$$

Assim, temos:

$$\sqrt{(u+c)^2 + v^2} = 2a - \sqrt{(u-c)^2 + v^2}, \quad 1.8$$

elevando ambos os membros da equação 1.8 ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} u^2 + 2uc + c^2 + v^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(u-c)^2 + v^2} + u^2 - 2uc + c^2 + v^2, \\ 4uc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(u-c)^2 + v^2}, \\ a^2 - uc &= a\sqrt{(u-c)^2 + v^2}, \end{aligned} \quad 1.9$$

elevando ambos os membros da equação 1.9 ao quadrado, chegamos a:

$$\begin{aligned} (a^2 - uc)^2 &= a^2((u-c)^2 + v^2), \\ a^4 - 2a^2uc + u^2c^2 &= a^2(u^2 - 2uc + c^2 + v^2), \\ a^2(a^2 - c^2) &= u^2(a^2 - c^2) + a^2v^2. \end{aligned}$$

Como  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ , então  $b^2 = a^2 - c^2$ , assim:

$$a^2b^2 = u^2b^2 + a^2v^2. \quad 1.10$$

Dividindo ambos os membros da equação 1.10 por  $a^2b^2$  ( $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ) temos:

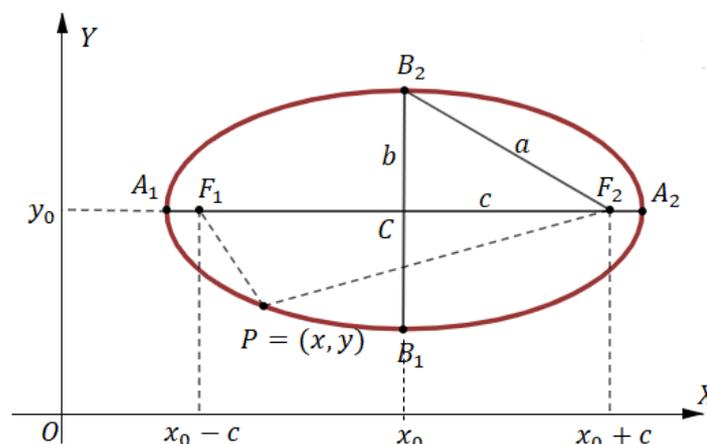
$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \quad 1.11$$

Agora, substituindo 1.6 e 1.7 em 1.11 obtemos a equação,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad 1.12$$

que é a forma canônica da elipse de centro  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ .

Figura 1.9. Elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.



Fonte: A autora.

**Elipse  $\mathcal{E}$  com centro  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .**

Por conseguinte, temos:

$$C = (x_0, y_0),$$

$$F_1 = (x_0, y_0 - c), \quad A_1 = (x_0, y_0 - a), \quad B_1 = (x_0 - b, y_0),$$

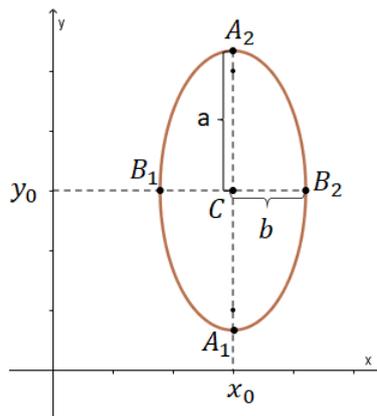
$$F_2 = (x_0, y_0 + c), \quad A_2 = (x_0, y_0 + a), \quad B_2 = (x_0 + b, y_0),$$

onde  $0 \leq c \leq a$  e  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ . De forma análoga ao caso anterior temos que a equação dessa elipse é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1. \quad 1.13$$

A equação 1.13 é a forma canônica da elipse de centro  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .

Figura 1.10. Elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados.



**Fonte:** A autora.

Analisando as equações 1.12 e 1.13 observamos a ocorrência do parâmetro  $a^2$ , ora como denominador de  $x^2$ , ora como denominador de  $y^2$ , e isso está diretamente associado à posição da elipse em relação ao sistema de coordenadas, isto é, quando a reta focal é paralela ao eixo  $OX$  o parâmetro  $a$  é denominador de  $x^2$ , Figura 1.9, e quando a reta focal é paralela ao eixo  $OY$  o parâmetro  $a$  é denominador de  $y^2$ , Figura 1.10.

Notamos que,  $a \geq b$  pois  $a^2 = b^2 + c^2$  e como  $a$  pertence a reta focal podemos concluir que o denominador maior é o parâmetro  $a$ . Agora, se  $a = b$  temos uma circunferência.

**Exemplo 1.1.** Determinar todos os elementos da elipse  $\mathcal{E}$  dada por:

$$\mathcal{E}: 25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0.$$

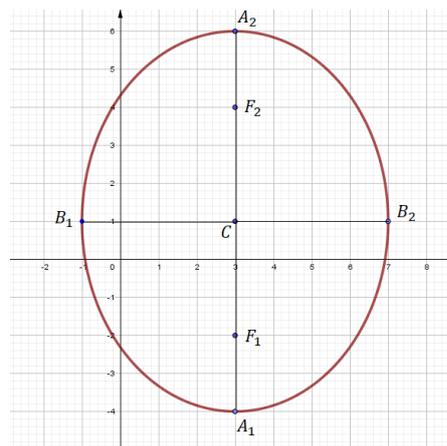
Solução: Completando os quadrados da equação, obtemos:

$$\begin{aligned} 25x^2 - 150x + 16y^2 - 32y &= 159, \\ 25(x^2 - 6x + 9) + 16(y^2 - 2y + 1) &= 159 + 225 + 16, \\ 25(x - 3)^2 + 16(y - 1)^2 &= 400, \\ \frac{(x - 3)^2}{16} + \frac{(y - 1)^2}{25} &= 1. \end{aligned}$$

Portanto  $\mathcal{E}$  representa uma elipse, com:

- $C = (3,1)$ ;
- $a = 5$ ,  $b = 4$  e  $c = 3$ ;
- Vértices sobre a reta focal:  $A_1 = (3, -4)$  e  $A_2 = (3,6)$ ;
- Vértices sobre a reta não focal:  $B_1 = (-1,1)$  e  $B_2 = (5,1)$ ;
- Reta focal:  $\ell: x = 3$ ;
- Reta não focal:  $\ell': y = 1$ ;
- Focos:  $F_1 = (3, -2)$  e  $F_2 = (3,4)$ .

Figura 1.11. Elipse  $\mathcal{E}: 25x^2 + 16y^2 - 150x - 32y - 159 = 0$ .



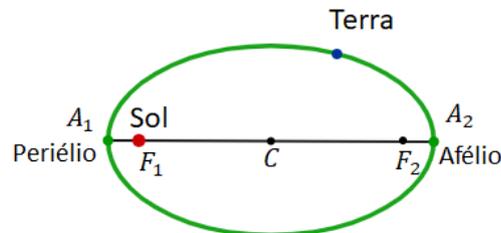
Fonte: A autora.

**Exemplo 1.2.** Pela primeira lei de Kepler, a trajetória da Terra é elíptica e o Sol ocupa a posição de um dos seus focos. Calcular o periélio e o afélio da Terra (que são, respectivamente, a menor e a maior distância da Terra ao sol), adotando os valores

aproximados: distância focal da trajetória da Terra  $0,5 \cdot 10^7 \text{ km}$ ; medida do eixo maior,  $30 \cdot 10^7 \text{ km}$

Solução:

Figura 1.12. Trajetória da Terra em torno do Sol.



Fonte: A autora.

Sabendo que:

$$\overline{F_1F_2} = 2c = 0,5 \cdot 10^7 \Rightarrow c = 0,25 \cdot 10^7.$$

$$\overline{A_1A_2} = 2a = 30 \cdot 10^7 \Rightarrow a = 15 \cdot 10^7,$$

temos que o periélio é dado por  $\overline{F_1A_1} = a - c = 15 \cdot 10^7 - 0,25 \cdot 10^7 = 14,75 \cdot 10^7$  e o afélio  $\overline{F_1A_2} = a + c = 15 \cdot 10^7 + 0,25 \cdot 10^7 = 15,25 \cdot 10^7 \text{ km}$ .

**Exemplo 1.3.** Escrever a equação reduzida da elipse com centro na origem,  $(0, \sqrt{40})$  é um foco e o ponto  $(\sqrt{5}, \frac{14}{3})$  pertence à elipse.

Solução: Temos que o centro é dado por  $C = (0,0)$  e como  $F_1 = (0, -\sqrt{40})$ , então  $F_2 = (0, \sqrt{40})$ . A equação da elipse será da forma:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

pois  $\overline{OY}$  é a reta focal. Como  $P = (\sqrt{5}, \frac{14}{3}) \in \mathcal{E}$ , então:

$$\frac{(\sqrt{5})^2}{b^2} + \frac{(\frac{14}{3})^2}{a^2} = 1,$$

$$\frac{5}{b^2} + \frac{196}{9a^2} = 1,$$

ou ainda,

$$196b^2 + 45a^2 = 9a^2b^2. \quad 1.14$$

Pelo fato de que  $a^2 = b^2 + c^2$  e  $c = \sqrt{40}$  então,

$$a^2 = b^2 + 40. \quad 1.15$$

Substituindo a equação 1.15 na equação 1.14, obtemos:

$$196b^2 + 45(b^2 + 40) = 9(b^2 + 40)b^2,$$

$$196b^2 + 45b^2 + 1800 = 9b^4 + 360b^2,$$

$$9b^4 + 119b^2 - 1800 = 0,$$

que é uma equação biquadrada onde a solução é dada por  $b = 3$  e substituindo em 1.5 obtemos  $a = 7$ .

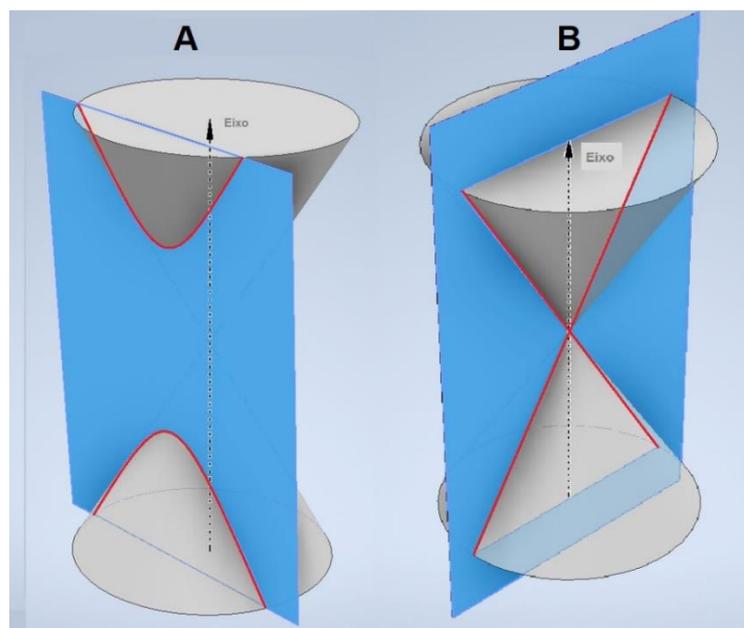
Desta forma, a equação da elipse será:

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

## 1.2 HIPÉRBOLES

Nesta seção abordaremos uma análise similar ao descrito no item 1.1, tendo como meta a cônica hipérbole. Assim, quando um determinado plano oblíquo ao eixo de rotação secciona os dois cones de revolução, obtemos uma hipérbole, Figura 1.13 A. Entretanto, se este plano passar pelo vértice e tiver a mesma direção do eixo de rotação, a seção obtida caracteriza uma hipérbole degenerada pela união de duas retas concorrentes, Figura 1.13 B.

Figura 1.13. Ilustração da hipérbole como seção cônica.



A posteriori, iniciamos o estudo da hipérbole no plano.

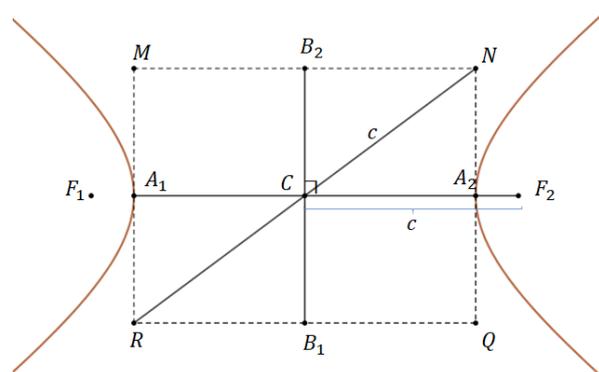
### 1.2.1 Definição Geométrica da Hipérbole

**Definição 1.2:** A Hipérbole  $\mathcal{H}$  é o conjunto dos pontos do plano tais que o módulo da diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante e menor que a distância entre eles.

Se  $d(F_1, F_2) = 2c$ , então a hipérbole é o conjunto de todos os pontos  $P$  tais que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a, \text{ com } a < c.$$

Figura 1.14. Hipérbole e seus elementos.



**Fonte:** A autora.

Terminologia:

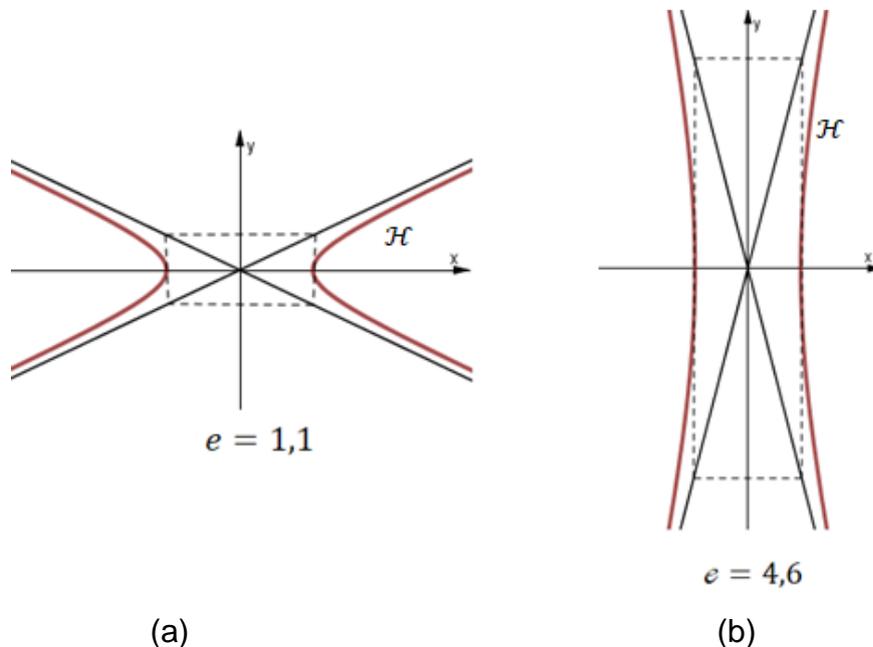
- **Eixo focal:** é o segmento de extremidades  $A_1$  e  $A_2$  de comprimento  $2a$ .
- **Eixo não focal:** é o segmento de extremidades  $B_1$  e  $B_2$  de comprimento  $2b$ , perpendicular ao eixo.
- **Centro:** é o ponto  $C$  gerado pela interseção dos eixos focal e não focal da hipérbole.
- **Vértices:** São os pontos  $A_1$  e  $A_2$  que indicam as extremidades do eixo focal e, os pontos  $B_1$  e  $B_2$  que indicam as extremidades do eixo não focal.
- **Focos:** São os pontos  $F_1$  e  $F_2$  situados sobre o eixo focal  $A_1A_2$ . Estes são equidistantes dos vértices e do centro da hipérbole. O valor  $2c$ , representa a distância focal, ou seja,  $d(F_1, F_2) = 2c$ .
- **Retângulo da base:** É o retângulo cujos lados têm  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$  como pontos médios, também chamado de retângulo fundamental.

- **Excentricidade:** é o número  $e = \frac{c}{a}$ . Notamos que  $e > 1$ , pois  $c > a$ .

Ao contrário da excentricidade da elipse que pertence ao intervalo  $]0,1[$ , a excentricidade da hipérbole é sempre maior que 1.

De fato, dividindo ambos os membros da relação  $c^2 = a^2 + b^2$  por  $a^2$  obtemos  $\left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$  e podemos concluir que se  $e$  é um número muito próximo de 1,  $\frac{b}{a}$  é muito próximo de 0, indicando que a altura do retângulo fundamental é muito menor que sua base. Agora, se  $e$  for muito maior que 1,  $\frac{b}{a}$  também é, e o retângulo fundamental tem altura muito maior que a base.

Figura 1.15. Excentricidade da Hipérbole.



**Fonte:** A autora.

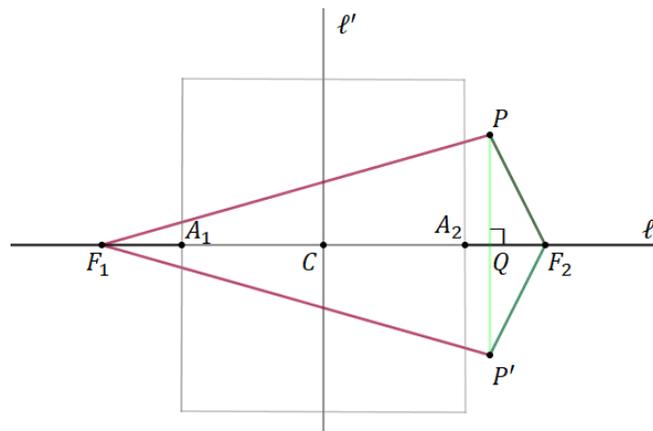
Ainda sobre excentricidade temos que quando  $e$  se aproxima de 1 o gráfico da hipérbole tem os ramos mais fechados nas proximidades dos vértices e abrem lentamente à medida que  $|x|$  cresce, Figura 1.15 a. Por outro lado, se  $e$  for muito maior que 1 os ramos da hipérbole, nas vizinhanças do vértice, quase se confundem com as retas  $x = a$  e  $x = -a$  e seus pontos afastam-se lentamente delas à medida que  $|x|$  cresce, Figura 1.15 b.

- **Assíntotas:** São as retas que contêm as diagonais do retângulo da base, essas retas passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação  $\frac{b}{a}$  e  $-\frac{b}{a}$  em relação à focal.

**Propriedade 1.2:** A hipérbole é simétrica em relação à reta focal, à reta não focal e ao centro.

Primeiro vamos mostrar que a hipérbole é simétrica em relação à reta focal. Se  $P \in \mathcal{H}$  e  $P'$  é o ponto simétrico de  $P$  em relação à reta focal.

Figura 1.16 Simetria da hipérbole em relação à reta focal.



Fonte: A autora.

Verificamos que os triângulos  $\Delta F_2PQ$  e  $\Delta F_2P'Q$  são congruentes pelo caso de congruência  $LAL$ , já que  $\overline{PQ} = \overline{Q'P'}$ , pois  $P$  é simétrico a  $P'$ , os ângulos  $\widehat{PQF_2}$  e  $\widehat{P'QF_2}$  são congruentes e  $\overline{QF_2}$  é comum aos triângulos, a congruência implica que  $\overline{PF_2} = \overline{P'F_2}$ . Repare que os triângulos  $\Delta F_1PQ$  e  $\Delta F_1P'Q$  também são congruentes pelo mesmo caso de congruência, visto que o lado  $\overline{QF_1}$  é comum aos triângulos.

Assim, temos:

$$|F_1P| = |F_1P'| \text{ e } |F_2P| = |F_2P'|.$$

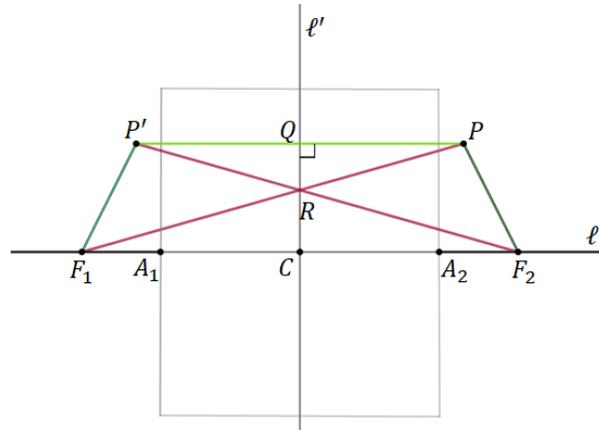
Portanto,

$$|d(P', F_1) - d(P', F_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P' \in \mathcal{H}.$$

Em seguida, demonstraremos que a hipérbole é simétrica a reta não focal.

Seja  $P \in \mathcal{H}$  e  $P'$  simétrico de  $P$  em relação à reta não focal

Figura 1.17. Simetria de  $\mathcal{H}$  em relação à reta não focal.



**Fonte:** A autora.

Notamos que os triângulos  $\Delta PQR$  e  $\Delta P'QR$  são congruentes pelo caso de congruência  $LAL$ , pois  $\overline{PQ} = \overline{QP'}$ , pois  $P$  é simétrico a  $P'$ , os ângulos  $P\hat{Q}R$  e  $P'\hat{Q}R$  são iguais e  $\overline{QR}$  é comum aos triângulos, a congruência implica que  $\overline{PR} = \overline{P'R}$ . Também temos a congruência dos triângulos  $\Delta F_1RC$  e  $\Delta F_2RC$  pelo mesmo caso de congruência, visto que o lado  $\overline{RC}$  é comum aos triângulos, os ângulos  $F_1\hat{C}R$  e  $F_2\hat{C}R$  são iguais e  $\overline{F_1C} = \overline{CF_2}$ .

Constatamos que os triângulos  $\Delta F_1P'R$  e  $\Delta F_2PR$  são congruentes também pelo caso de congruência  $LAL$ , em razão dos ângulos  $P'\hat{R}F_1$  e  $P\hat{R}F_2$  serem iguais, opostos pelo vértice, e os lados  $\overline{P'R} = \overline{RP}$  e  $\overline{F_1R} = \overline{RF_2}$  devido a congruência anterior. É concebível notar que:

$$\overline{P'F_2} = \overline{P'R} + \overline{RF_2} = \overline{PR} + \overline{RF_1} = \overline{PF_1}.$$

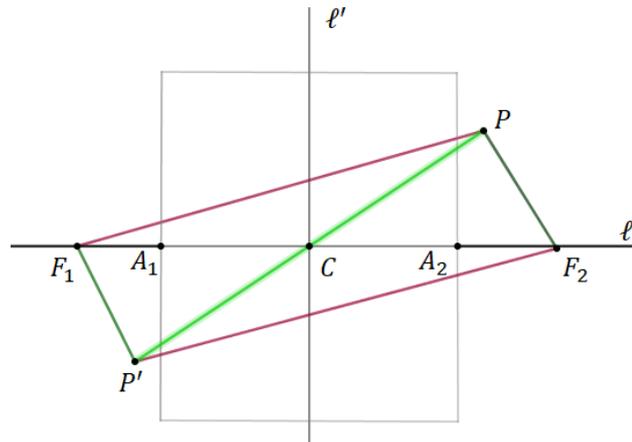
Portanto,

$$2a = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = |d(P', F_2) - d(P', F_1)| \Rightarrow P' \in \mathcal{H}.$$

Adiante, explanaremos que a hipérbole é simétrica em relação ao centro.

Sejam  $P \in \mathcal{H}$  e  $P''$  o ponto simétrico de  $P$  em relação ao centro.

Figura 1.18. Simetria da hipérbole em relação ao centro.



Fonte: A autora.

Pelo caso *LAL* de congruência de triângulos, temos que os triângulos  $\Delta PCF_2$  e  $\Delta P''CF_1$  são congruentes.

De fato,  $\overline{PC} = \overline{CP''}$  pois  $P$  é simétrico  $P''$ , os ângulos  $P\hat{C}F_2$  e  $P''\hat{C}F_1$ , são opostos pelo vértice, e  $\overline{F_1C} = \overline{CF_2}$ . A congruência implica  $\overline{PF_2} = \overline{P''F_1}$ . Analisemos a congruência dos triângulos  $\Delta F_1CP$  e  $\Delta F_2CP''$  também pelo caso de congruência *LAL*, pois os ângulos  $P\hat{C}F_1$  e  $P''\hat{C}F_2$  são congruentes.

Portanto,

$$|d(P'', F_2) - d(P'', F_1)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow P'' \in \mathcal{H}.$$

### 1.2.2 Forma canônica da Hipérbole

Vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  para alguns casos especiais.

**Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ .**

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} F_1 &= (-c, 0), & A_1 &= (-a, 0), & B_1 &= (0, -b), \\ F_2 &= (c, 0), & A_2 &= (a, 0), & B_2 &= (0, b), \end{aligned}$$

logo,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

$$(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1.16}$$

Elevando ambos os membros da equação 1.16 ao quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}
 (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\
 x^2 + 2xc + c^2 + y^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2, \\
 4xc &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\
 xc - a^2 &= \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Elevando agora ambos os membros da equação 1.17 ao quadrado, temos:

$$\begin{aligned}
 (xc - a^2)^2 &= a^2((x-c)^2 + y^2), \\
 c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2), \\
 (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2),
 \end{aligned}$$

e pelo fato de  $c^2 = a^2 + b^2$ , então  $a^2 - c^2 = -b^2$ , vemos que:

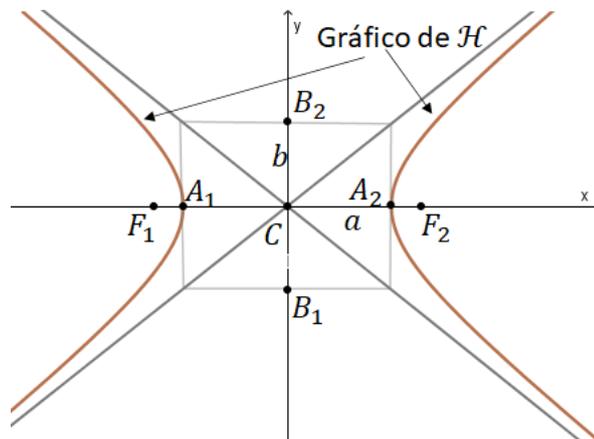
$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2. \tag{1.18}$$

Dividindo ambos os membros da equação 1.18 por  $-a^2b^2$  ( $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ), constatamos que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1.19}$$

A equação 1.19 é a forma canônica da hipérbole  $\mathcal{H}$  de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OX$ . Como as assíntotas de  $\mathcal{H}$  são as retas que passa pela origem e tem inclinação  $\frac{b}{a}$  e  $-\frac{b}{a}$  em relação ao eixo  $OX$  (reta focal), suas equações são  $bx - ay = 0$  e  $bx + ay = 0$ .

Figura 1.19. Gráfico de  $\mathcal{H}$ :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



Fonte: A autora.

**Hipérbole  $\mathcal{H}$  com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OY$ .**

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} F_1 &= (0, -c), & A_1 &= (0, -a), & B_1 &= (-b, 0), \\ F_2 &= (0, c), & A_2 &= (0, a), & B_2 &= (b, 0), \end{aligned}$$

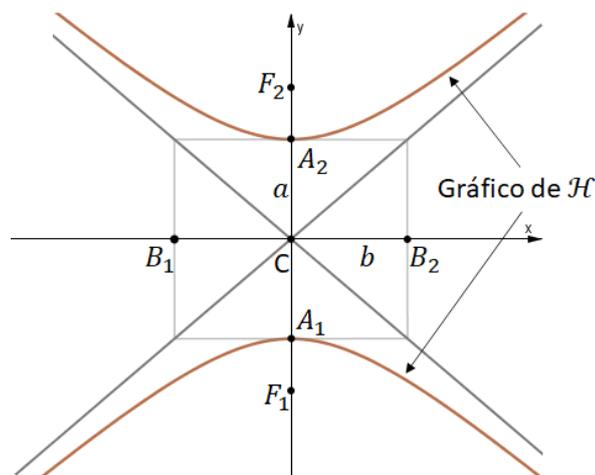
onde  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Desenvolvendo como no caso anterior, podemos verificar que a equação 1.18 é a equação canônica da hipérbole,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1, \quad 1.20$$

cujas assíntotas são as retas  $ax - by = 0$  e  $ax + by = 0$ .

Figura 1.20. Gráfico de  $\mathcal{H}: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ .



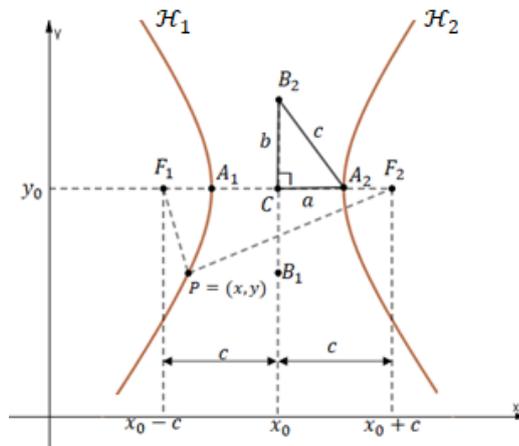
**Fonte:** A autora.

**Hipérbole com centro  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ .** Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} C &= (x_0, y_0), \\ F_1 &= (x_0 - c, y_0), & A_1 &= (x_0 - a, y_0), & B_1 &= (x_0, y_0 - b), \\ F_2 &= (x_0 + c, y_0), & A_2 &= (x_0 + a, y_0), & B_2 &= (x_0, y_0 + b), \end{aligned}$$

onde  $b^2 = c^2 - a^2$ .

Figura 1.21. Hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados.



Fonte: A autora.

Desta forma, temos:

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

$$\sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} - \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a,$$

$$\sqrt{[x - x_0 + c]^2 + (y - y_0)^2} = \pm 2a + \sqrt{[x - x_0 - c]^2 + (y - y_0)^2},$$

convém fazer as seguintes mudanças de variáveis para facilitar os cálculos:

$$\begin{cases} x - x_0 = u, \\ y - y_0 = v. \end{cases} \quad 1.21$$

$$\begin{cases} x - x_0 = u, \\ y - y_0 = v. \end{cases} \quad 1.22$$

Assim, obtemos:

$$\sqrt{(u + c)^2 + v^2} = \pm 2a - \sqrt{(u - c)^2 + v^2}. \quad 1.23$$

Elevando ambos os membros da equação 1.23 ao quadrado, logramos:

$$u^2 + 2uc + c^2 + v^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(u - c)^2 + v^2} + u^2 - 2uc + c^2 + v^2,$$

$$4uc = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(u - c)^2 + v^2},$$

$$a^2 - uc = \pm a\sqrt{(u - c)^2 + v^2}. \quad 1.24$$

Elevando ambos os membros da equação 1.24 ao quadrado, alcançamos:

$$(a^2 - uc)^2 = a^2((u - c)^2 + v^2),$$

$$a^4 - 2a^2uc + u^2c^2 = a^2(u^2 - 2uc + c^2 + v^2),$$

$$a^2(a^2 - c^2) = u^2(a^2 - c^2) + a^2v^2,$$

e como  $b^2 = c^2 - a^2$ , então  $-b^2 = a^2 - c^2$ . Assim:

$$-a^2b^2 = -u^2b^2 + a^2v^2. \quad 1.25$$

Dividindo ambos os membros da equação 1.25 por  $(-a^2b^2)$ , ( $a \neq 0$  e  $b \neq 0$ ), temos:

$$\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2} = 1. \quad 1.26$$

Substituindo 1.21 e 1.22 em 1.26 concluímos:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad 1.27$$

A equação 1.27 é a forma canônica da hipérbole  $\mathcal{H}$  de centro no ponto  $(x_0, y_0)$  e reta focal paralela com o eixo  $OX$ . Como as assíntotas de  $\mathcal{H}$  são as retas que passam por  $C = (x_0, y_0)$  e tem inclinação  $\frac{b}{a}$  e  $-\frac{b}{a}$  em relação ao eixo  $OX$ , suas equações são  $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$  e  $y - y_0 = -\frac{b}{a}(x - x_0)$ , ou seja:

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0 \text{ e } b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0.$$

**Hipérbole  $\mathcal{H}$  com centro  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .** Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned} C &= (x_0, y_0), \\ F_1 &= (x_0, y_0 - c), & A_1 &= (x_0, y_0 - a), & B_1 &= (x_0 - b, y_0), \\ F_2 &= (x_0, y_0 + c), & A_2 &= (x_0, y_0 + a), & B_2 &= (x_0 + b, y_0), \end{aligned}$$

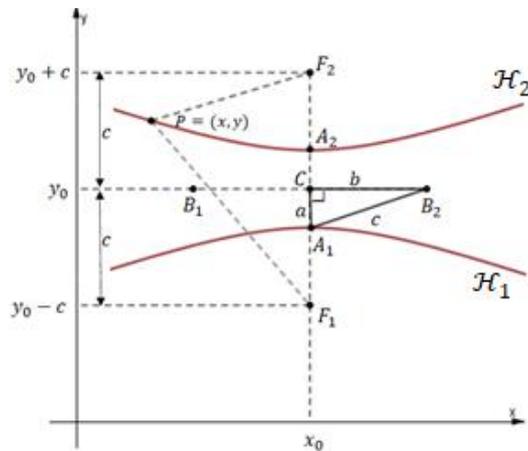
onde  $b^2 = c^2 - a^2$ .

Procedendo como no caso anterior, verificamos que a forma canônica da hipérbole  $\mathcal{H}$  com centro no ponto  $C = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ , é dada por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1, \quad 1.28$$

e as assíntotas de  $\mathcal{H}$  são as retas que passam por  $C = (x_0, y_0)$  e tem inclinação  $\frac{a}{b}$  e  $-\frac{a}{b}$  em relação ao eixo  $OY$ , suas equações são:  $y - y_0 = \frac{a}{b}(x - x_0)$  e  $y - y_0 = -\frac{a}{b}(x - x_0)$ , ou seja:  $a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$  e  $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$ .

Figura 1.22. Hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados.



**Fonte:** A autora.

Acentuemos que nas equações 1.27 e 1.28 o termo com sinal positivo no primeiro membro da equação canônica indica o eixo que contém os focos, e o denominador desse termo, em qualquer dos dois casos, é  $a^2$  (não se trata mais de verificar, como no caso da elipse, qual dos denominadores é o maior, pois  $a$  pode ser maior, menor ou igual a  $b$ ). No caso em que os focos estão em  $OY$  ou em uma reta paralela a  $OY$ , os dois ramos da hipérbole caracterizam-se por  $y \geq a$  ( $\mathcal{H}_2$ ) e  $y \leq -a$  ( $\mathcal{H}_1$ ). Observamos a diferença entre os coeficientes angulares das assíntotas nos casos das hipérboles das equações 1.25 e 1.26, notamos que, no primeiro caso os coeficientes angulares das assíntotas são  $m = \pm \frac{b}{a}$  já no segundo caso  $m = \pm \frac{a}{b}$ .

**Exemplo 1.4.** *A equação dada descreve uma hipérbole de focos em alguns dos eixos coordenados, especificar e determinar seus parâmetros geométricos:*

$$(x \operatorname{sen} \theta)^2 - (y \operatorname{cos} \theta)^2 + 1 = 0 \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right).$$

Resolução: Escrevendo a equação na sua forma canônica, obtemos:

$$-\frac{x^2}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta}} = 1,$$

$$\frac{y^2}{\operatorname{sec}^2 \theta} - \frac{x^2}{\operatorname{cossec}^2 \theta} = 1.$$

Logo,  $a = \operatorname{sec} \theta$  e  $b = \operatorname{cossec} \theta$ , e por  $c^2 = a^2 + b^2$ , concluímos:

$$c^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} + \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \theta}$$

$$c^2 = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta \cos^2\theta}$$

$$c^2 = \frac{1}{\sin^2\theta \cos^2\theta}$$

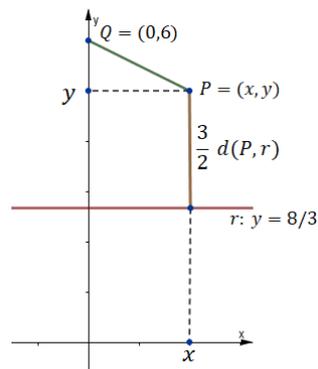
$$c = \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$$

Analisando a equação canônica da hipérbole observamos que os focos pertencem ao eixo  $OY$ , e são  $F_1 = (0, -\sec\theta \operatorname{cosec}\theta)$  e  $F_2 = (0, \sec\theta \operatorname{cosec}\theta)$ .

**Exemplo 1.5.** Encontrar o lugar geométrico dos pontos cuja distância ao ponto  $(0,6)$  é igual a  $\frac{3}{2}$  de sua distância à reta  $y - \frac{8}{3} = 0$ .

Resolução:

Figura 1.23. Esboço do problema.



Fonte: A autora.

Sabemos que  $d(P, Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$  e  $d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,

podemos escrever:

$$d(P, Q) = \frac{3}{2} d(P, r),$$

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 6)^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{|0 + y - \frac{8}{3}|}{\sqrt{0 + 1}},$$

$$x^2 + (y - 6)^2 = \frac{9}{4} \left( y^2 - \frac{16}{3}y + \frac{64}{9} \right),$$

$$x^2 + y^2 - 12y + 36 = \frac{9}{4}y^2 - 12y + 16,$$

$$x^2 - \frac{5}{4}y^2 = -20,$$

$$\frac{5}{80}y^2 - \frac{1}{20}x^2 = 1,$$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1.$$

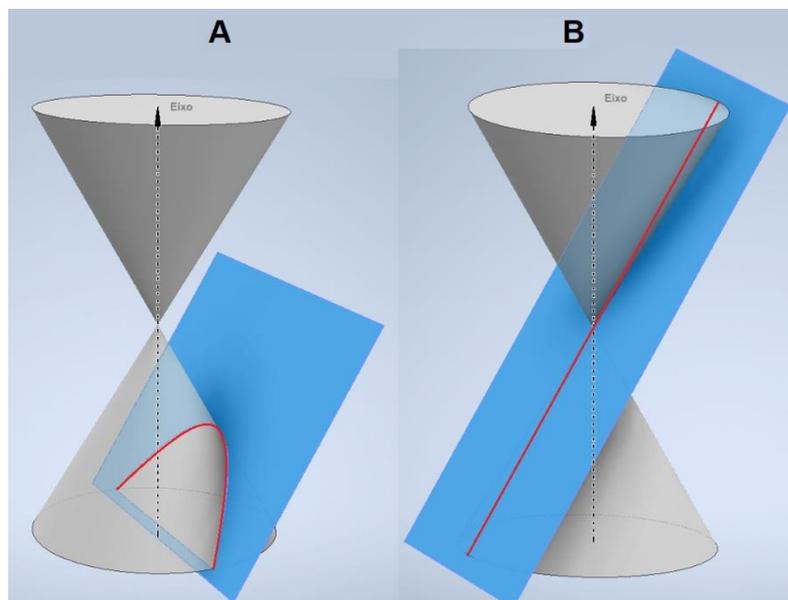
Portanto o lugar geométrico é uma hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo  $OY$ .

### 1.3 PARÁBOLA

No mesmo linear à introdução das outras cônicas, podemos reconhecer a parábola como uma seção cônica. Assim, quando um determinado plano paralelo à geratriz secciona um dos cones de revolução, vislumbramos uma parábola, Figura 1.24 A. No entanto, se este plano passar pelo vértice com a mesma direção da geratriz do cone, a seção obtida é uma reta, Figura 1.24 B, logo uma parábola degenerada.

A seguir, iniciamos o estudo da parábola no plano de maneira formal.

Figura 1.24. Ilustração da parábola como seção cônica.



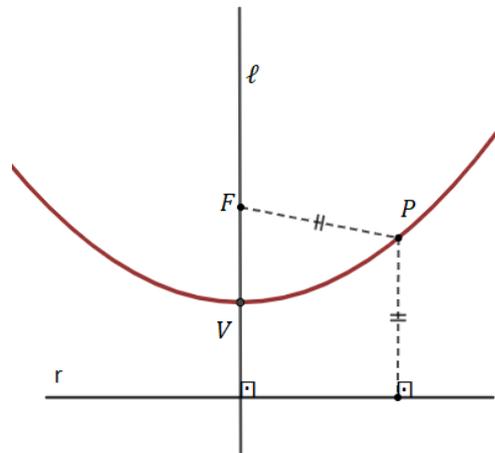
Fonte: A autora.

### 1.3.1 Definição Geométrica da Parábola

**Definição 1.3:** *Sejam  $r$  uma reta e  $F$  um ponto do plano não pertencente a  $r$ . A parábola de foco  $F$  e diretriz  $r$  é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a  $F$  é igual à sua distância a  $r$ , ou seja:*

$$\text{Se } P \in \mathcal{P} \text{ então } d(P, F) = d(P, r).$$

Figura 1.25. Parábola no plano cartesiano.



**Fonte:** A autora.

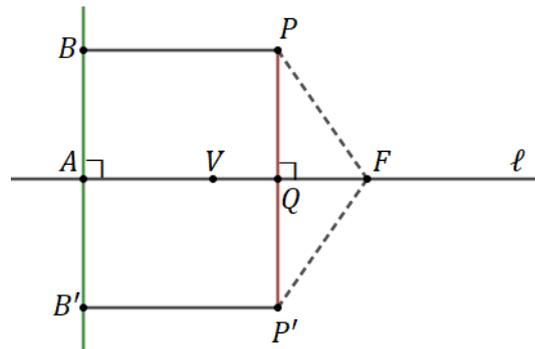
Terminologia:

- **Foco:** é o ponto  $F$ .
- **Reta focal:** ( $\ell$ ) é a reta que contém o foco e é perpendicular à diretriz.
- **Vértice:** ( $V$ ) é o ponto que pertence a reta focal sendo equidistante de  $F$  e  $r$ .
- **Parâmetro:** é o número  $2p = d(F, r)$ .

**Proposição 1.3:** *Toda parábola é simétrica em relação à reta focal.*

De fato, seja  $\mathcal{P}$  uma parábola de foco  $F$ , vértice  $V$ , diretriz  $r$  e reta focal  $\ell$ . Seja  $P \in \mathcal{P}$  e  $P'$  o simétrico de  $P$  em relação à reta  $\ell$ . O segmento  $PP'$  é perpendicular à reta focal  $\ell$  e a intersecta em um ponto  $Q$  que é o ponto médio do segmento  $PP'$ .

Figura 1.26. Simetria de  $\mathcal{P}$  em relação à reta focal.



Fonte: A autora.

Como os triângulos  $\Delta PQF$  e  $\Delta P'QF$  são congruentes pelo caso  $LAL$ , pois  $\overline{PQ} = \overline{P'Q}$ ,  $P'$  e  $P$  são simétricos, o segmento  $\overline{QF}$  é comum aos triângulos e por fim os ângulos  $F\hat{Q}P$  e  $F\hat{Q}P'$  são congruentes. A congruência desses triângulos implica que  $d(P, F) = d(P', F)$ .

Além disso,  $d(P, r) = d(Q, r) = d(P', r)$ , pois  $BPQA$  e  $AQP'B'$  são retângulos. Isto posto,  $d(P', F) = d(P, F) = d(P, r) = d(P', r)$  e, portanto,  $P' \in \mathcal{P}$ .

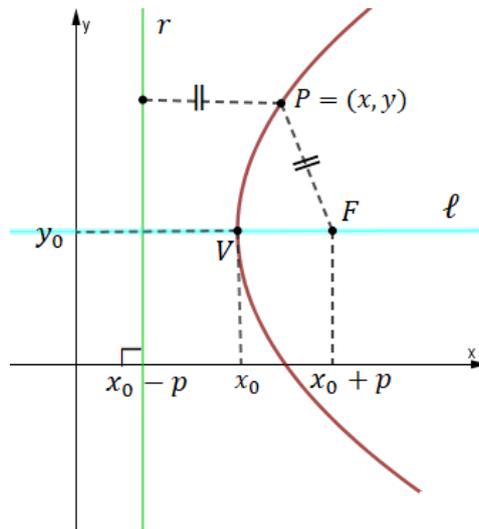
### 1.3.2 Formas canônicas da Parábola

Vamos obter as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas  $OXY$ . Trataremos dos casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

**Parábola com vértice  $V = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OX$ .**

Caso I. O foco  $F$  está à direita da diretriz  $r$ .

Figura 1.27. Parábola  $\mathcal{P}: (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ .



Fonte: A autora.

O vértice da parábola  $\mathcal{P}$  é  $V = (x_0, y_0)$ , então o foco é o ponto  $F = (x_0 + p, y_0)$  e a diretriz é a reta  $r: x = x_0 - p$ , onde  $2p = d(F, r)$ , desta forma, temos:

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r),$$

$$\sqrt{[x - (x_0 + p)]^2 + (y - y_0)^2} = |x - (x_0 - p)|. \quad 1.30$$

Elevando ambos os membros da equação 1.30 ao quadrado, temos:

$$[x - (x_0 + p)]^2 + (y - y_0)^2 = [x - (x_0 - p)]^2,$$

$$x^2 - 2x(x_0 + p) + (x_0 + p)^2 + (y - y_0)^2 = x^2 - 2x(x_0 - p) + (x_0 - p)^2,$$

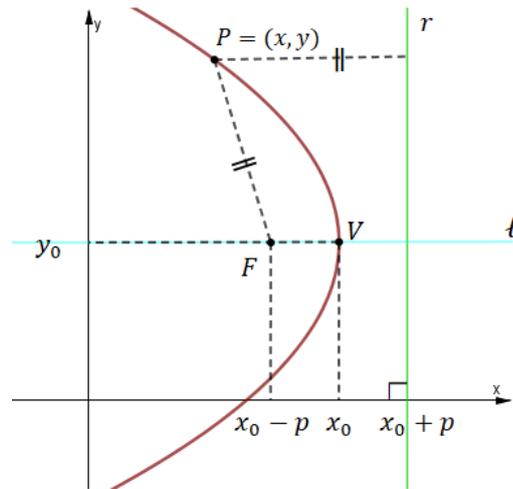
$$-2xx_0 - 2xp + x_0^2 + 2x_0p + p^2 + (y - y_0)^2 = -2xx_0 + 2xp + x_0^2 - 2x_0p + p^2,$$

$$(y - y_0)^2 = 4xp - 4x_0p,$$

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

Caso II. O foco  $F$  está à esquerda da diretriz  $r$ .

Figura 1.28. Parábola  $\mathcal{P}: (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$ .



Fonte: A autora.

Nesse caso, temos  $V = (x_0, y_0)$ ,  $F = (x_0 - p, y_0)$  e a diretriz é a reta  $r: x = x_0 + p$ , onde  $2p = d(F, r)$ . Desta forma, temos:

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r),$$

$$\sqrt{[x - (x_0 - p)]^2 + (y - y_0)^2} = |x - (x_0 + p)|. \quad 1.31$$

Elevando ambos os membros da equação 1.31 ao quadrado, temos:

$$[x - (x_0 - p)]^2 + (y - y_0)^2 = [x - (x_0 + p)]^2,$$

$$x^2 - 2x(x_0 - p) + (x_0 - p)^2 + (y - y_0)^2 = x^2 - 2x(x_0 + p) + (x_0 + p)^2,$$

$$-2xx_0 + 2xp + x_0^2 - 2x_0p + p^2 + (y - y_0)^2 = -2xx_0 - 2xp + x_0^2 + 2x_0p + p^2,$$

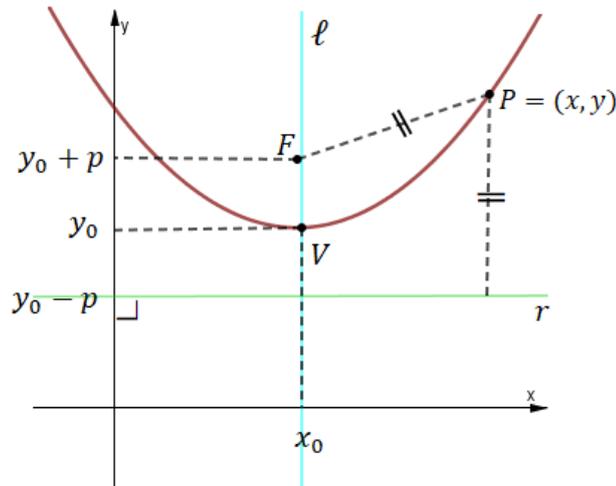
$$(y - y_0)^2 = -4xp + 4x_0p,$$

$$(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0).$$

Trataremos agora a **parábola com vértice  $V = (x_0, y_0)$  e reta focal paralela ao eixo  $OY$ .**

Caso I. O foco  $F$  está acima da diretriz  $r$ .

Figura 1.29. Parábola  $\mathcal{P}: (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$ .



Fonte: A autora.

Pelo fato do vértice da parábola  $\mathcal{P}$  ser  $V = (x_0, y_0)$ , temos que o foco é o ponto  $F = (x_0, y_0 + p)$  e a diretriz é a reta  $r: y = y_0 - p$ , onde  $2p = d(F, r)$ . Assim concluímos, que:

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r),$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + p)]^2} = |y - (y_0 - p)|. \quad 1.32$$

Elevando ambos os membros da equação 1.32 ao quadrado, temos:

$$(x - x_0)^2 + [y - (y_0 + p)]^2 = [y - (y_0 - p)]^2,$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 - 2y(y_0 + p) + (y_0 + p)^2 = y^2 - 2y(y_0 - p) + (y_0 - p)^2,$$

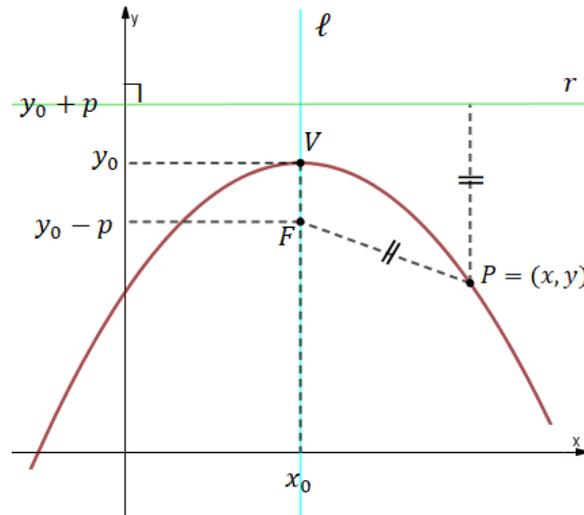
$$(x - x_0)^2 - 2yy_0 - 2yp + y_0^2 + 2y_0p + p^2 = -2yy_0 + 2yp + y_0^2 - 2y_0p + p^2,$$

$$(x - x_0)^2 = 4yp - 4y_0p,$$

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Caso II. O foco  $F$  está abaixo da diretriz  $r$ .

Figura 1.30. Parábola  $\mathcal{P}: (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$ .



Fonte: A autora.

Nesse caso,  $V = (x_0, y_0)$ ,  $F = (x_0, y_0 - p)$  e a diretriz é a reta  $r: y = y_0 + p$ , onde  $2p = d(F, r)$ .

Portanto,

$$P = (x, y) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, r),$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + [y - (y_0 - p)]^2} = |y - (y_0 + p)|. \quad 1.33$$

Elevando ambos os membros da equação 1.33 ao quadrado, temos:

$$(x - x_0)^2 + [y - (y_0 - p)]^2 = [y - (y_0 + p)]^2,$$

$$(x - x_0)^2 + y^2 - 2y(y_0 - p) + (y_0 - p)^2 = y^2 - 2y(y_0 + p) + (y_0 + p)^2,$$

$$(x - x_0)^2 - 2yy_0 + 2yp + y_0^2 - 2y_0p + p^2 = -2yy_0 - 2yp + y_0^2 + 2y_0p + p^2,$$

$$(x - x_0)^2 = -4yp + 4y_0p,$$

$$(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0).$$

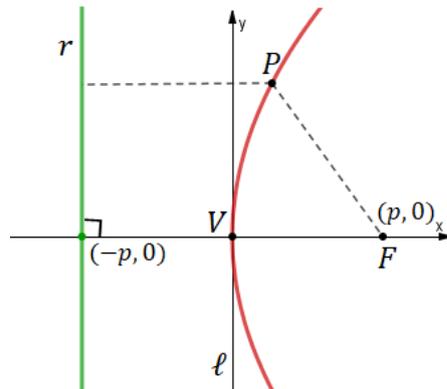
Nos casos particulares onde o vértice é a origem, ou seja,  $V = (0,0)$  e a reta focal é um dos eixos coordenados as formas canônicas da parábola ficam da seguinte forma:

Caso I. A reta focal coincide com o eixo  $OX$ .

i) O foco  $F$  está à direita da diretriz  $r$ .

$$y^2 = 4px$$

Figura 1.31. Parábola  $\mathcal{P}: y^2 = 4px$ .

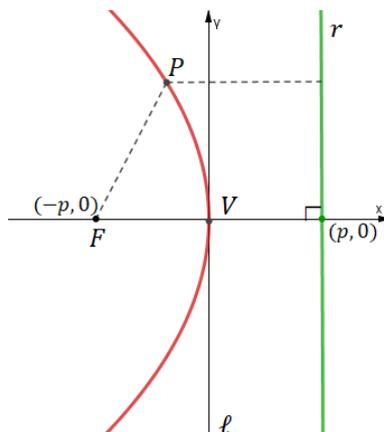


Fonte: A autora

- ii) O foco  $F$  está à esquerda da diretriz  $r$ .

$$y^2 = -4px$$

Figura 1.32. Parábola  $\mathcal{P}: y^2 = -4px$ .

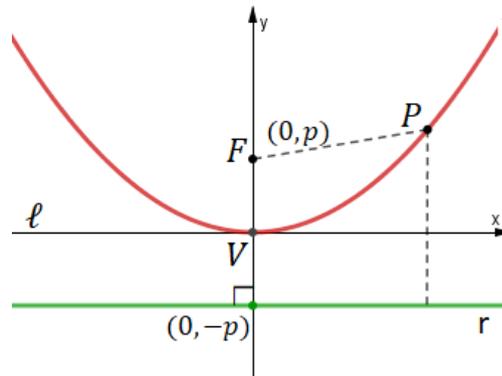


Fonte: A autora.

Caso II. A reta focal coincide com o eixo  $OY$ .

- i) O foco  $F$  está acima da diretriz  $r$ .

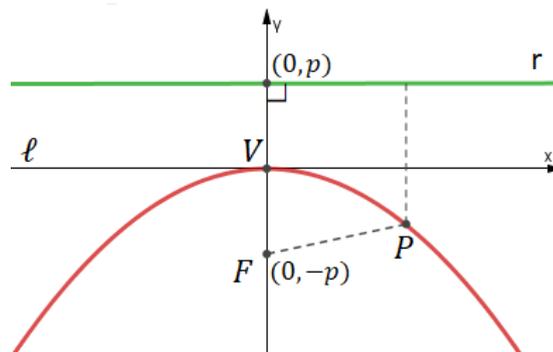
$$x^2 = 4py$$

Figura 1.33. Parábola  $\mathcal{P}: x^2 = 4py$ .

Fonte: A autora.

- ii) O foco  $F$  está abaixo da diretriz  $r$ .

$$x^2 = -4py$$

Figura 1.34. Parábola  $\mathcal{P}: x^2 = -4py$ .

Fonte: A autora.

**Exemplo 1.6.** São dados, o foco  $F = (3,1)$  e a diretriz  $r: y + 3 = 0$  de uma parábola. Obter uma equação algébrica de segundo grau em  $x$  e  $y$  que todo o ponto  $(x, y)$  da parábola deve satisfazer:

Resolução: Seja  $P = (x, y) \in \mathcal{P}$  então  $d(P, F) = d(P, r)$ ,

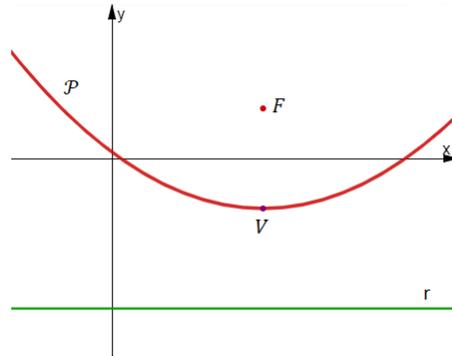
$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = \frac{|0x + y + 3|}{\sqrt{0^2 + 1^2}},$$

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = (y+3)^2,$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 6y + 9,$$

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 8y + 1 &= 0, \\x^2 - 6x + 9 &= 9 - 1 + 8y, \\(x - 3)^2 &= 8(y + 1).\end{aligned}$$

Figura 1.35. Parábola  $\mathcal{P}$ :  $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$ .



Fonte: A autora.

**Exemplo 1.7.** Encontrar as equações das parábolas cuja reta focal é paralela a um dos eixos coordenados, tem vértice no ponto  $V = (2, 1)$  e parâmetro  $2p = 3$  sendo uma das coordenadas do foco maior que 2. Mostrar que o outro ponto onde as parábolas intersectam-se pertence à reta  $x - y - 1 = 0$ .

Resolução: Como uma coordenada do foco é maior que 2, as parábolas podem ser escritas das seguintes formas:

$$\mathcal{P}_1: (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0),$$

$$\mathcal{P}_2: (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Pelo fato de que  $2p = 3$ , obtemos:

$$\mathcal{P}_1: (y - 1)^2 = 4 \frac{3}{2}(x - 2),$$

$$(y - 1)^2 = 6(x - 2).$$

$$\mathcal{P}_2: (x - 2)^2 = 4 \frac{3}{2}(y - 1),$$

$$(x - 2)^2 = 6(y - 1).$$

Agora, analisemos a interseção das parábolas.

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$$

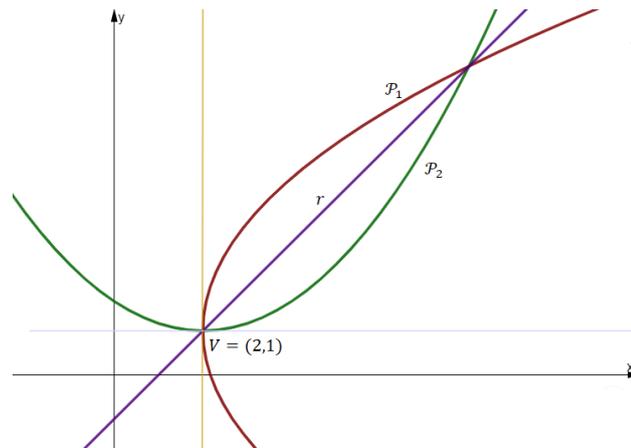
$$\frac{(y - 1)^2}{x - 2} = 6 = \frac{(x - 2)^2}{y - 1}$$

$$(y - 1)^3 = (x - 2)^3$$

$$y - 1 = x - 2.$$

Portanto,  $r: x - y - 1 = 0$  é a reta que contém o outro ponto onde as parábolas intersectam-se, e mais, esse ponto é  $P = (8,7)$ .

Figura 1.36. Parábolas  $\mathcal{P}_1: (y - 1)^2 = 6(x - 2)$  e  $\mathcal{P}_2: (x - 2)^2 = 6(y - 1)$  e reta  $r: x - y - 1 = 0$



Fonte: A autora.

Abordamos neste capítulo os conceitos teóricos das cônicas: Elipse, Hipérbole e Parábolas com reta focal coincidente ou paralelas aos eixos  $OX$  e  $OY$ , a seguir trataremos dos conceitos teóricos das cônicas, mas com os eixos rotacionados e a equação geral do segundo grau em  $\mathbb{R}^2$ .

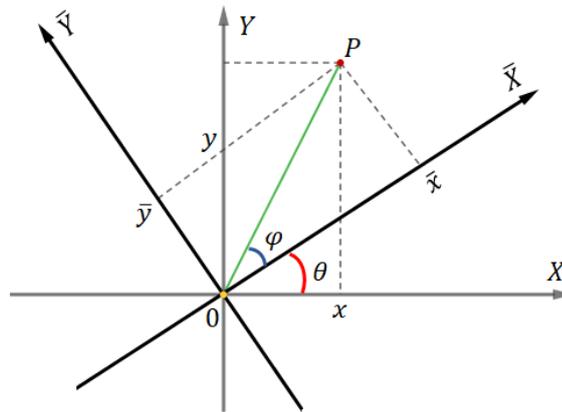
## 2 CAPÍTULO 02

### 2.1 Rotação dos eixos coordenados

Seja  $OXY$  um sistema de eixos ortogonais no plano e seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema de eixos obtido girando os eixos  $OX$  e  $OY$  de um ângulo  $\theta$ ,  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$  no sentido positivo (que vai de  $OX$  para  $OY$ ) em torno da origem  $O$ .

Sejam  $(x, y)$  e  $(\bar{x}, \bar{y})$  as coordenadas de um ponto  $P$  nos sistemas  $OXY$  e  $O\bar{X}\bar{Y}$ , respectivamente,  $\varphi$  o ângulo que o vetor  $\overrightarrow{OP}$  faz com o semieixo positivo  $O\bar{X}$  e  $r = d(P, O)$ .

Figura 2.1. Sistemas  $OXY$  e  $O\bar{X}\bar{Y}$ .



Fonte: A autora.

Então, utilizando as propriedades das funções trigonométricas, obtemos:

$$\cos(\theta + \varphi) = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos(\theta + \varphi),$$

$$\text{sen}(\theta + \varphi) = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \text{sen}(\theta + \varphi),$$

$$\cos \varphi = \frac{\bar{x}}{r} \Rightarrow \bar{x} = r \cos \varphi,$$

$$\text{sen} \varphi = \frac{\bar{y}}{r} \Rightarrow \bar{y} = r \text{sen} \varphi.$$

Podemos relacionar as coordenadas  $(x, y)$  com as coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos(\theta + \varphi), \\
 x &= r (\cos \theta \cos \varphi - \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi), \\
 x &= r \cos \theta \cos \varphi - r \text{ sen } \theta \text{ sen } \varphi, \\
 x &= \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \text{ sen } \theta.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

e

$$\begin{aligned}
 y &= r \text{ sen}(\theta + \varphi), \\
 y &= r (\text{sen } \theta \cos \varphi + \text{sen } \varphi \cos \theta), \\
 y &= r \text{ sen } \theta \cos \varphi + r \text{ sen } \varphi \cos \theta, \\
 y &= \bar{x} \text{ sen } \theta + \bar{y} \cos \theta, \\
 y &= \bar{y} \cos \theta + \bar{x} \text{ sen } \theta.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

De 2.1 concluímos que:

$$\begin{aligned}
 x &= \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \text{ sen } \theta, \\
 \bar{x} \cos \theta &= x + \bar{y} \text{ sen } \theta, \\
 \bar{x} &= \frac{x + \bar{y} \text{ sen } \theta}{\cos \theta}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Substituindo 2.3 em 2.2, obtemos:

$$\begin{aligned}
 y &= \bar{y} \cos \theta + \frac{x + \bar{y} \text{ sen } \theta}{\cos \theta} \cdot \text{sen } \theta, \\
 y &= \frac{\bar{y} \cos^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{x \text{ sen } \theta}{\cos \theta} + \frac{\bar{y} \text{ sen}^2 \theta}{\cos \theta}, \\
 y &= \bar{y} \left( \frac{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta}{\cos \theta} \right) + \frac{x \text{ sen } \theta}{\cos \theta}, \\
 \bar{y} &= y \cos \theta - x \text{ sen } \theta.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Agora, substituindo 2.4 em 2.3, chegamos a:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{x + \bar{y} \text{ sen } \theta}{\cos \theta} = \frac{x + (y \cos \theta - x \text{ sen } \theta) \text{ sen } \theta}{\cos \theta}, \\
 \bar{x} &= \frac{x + y \cos \theta \cdot \text{sen } \theta - x \text{ sen}^2 \theta}{\cos \theta}, \\
 \bar{x} &= \frac{x (1 - \text{sen}^2 \theta) + y \text{ sen } \theta \cdot \cos \theta}{\cos \theta}, \\
 \bar{x} &= x \cos \theta + y \text{ sen } \theta.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dessa forma, temos:

$$\begin{cases} x = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \text{ sen } \theta \\ y = \bar{y} \cos \theta + \bar{x} \text{ sen } \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \bar{x} = x \cos \theta + y \text{ sen } \theta \\ \bar{y} = y \cos \theta - x \text{ sen } \theta \end{cases}$$

Tais equações são as expressões de mudanças de coordenadas pela rotação de um ângulo  $\theta$  do sistema ortogonal  $OXY$  para o sistema ortogonal  $O\bar{X}\bar{Y}$  ou a mudança inversa.

A mudança de coordenadas pela rotação de um ângulo  $\theta$  dos eixos  $OX$  e  $OY$  podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix},$$

e a inversa é dada por:

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

## 2.2 Cônicas Rotacionadas

Seja um sistema de eixos ortogonais  $O\bar{X}\bar{Y}$ , obtido rotacionando o sistema ortogonal  $OXY$  por um ângulo  $\theta$ , no sentido anti-horário em torno da origem  $O = (0,0)$ .

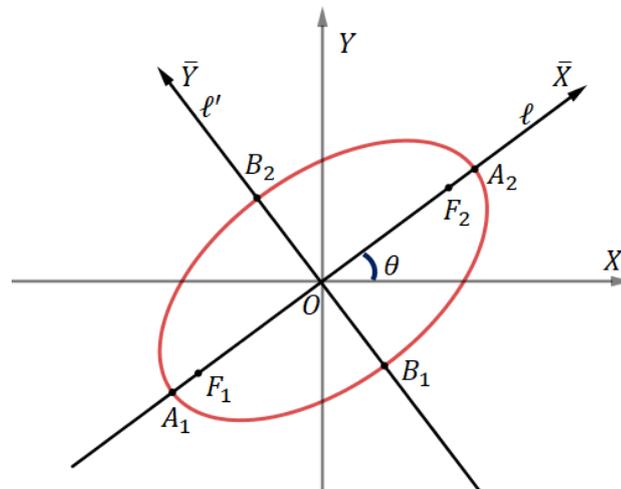
Seja a elipse  $\mathcal{E}$  cuja reta focal não é paralela aos eixos coordenados, ou seja, a reta focal forma com os eixos coordenados um ângulo  $\theta$ . Logo, a reta focal é paralela a um dos eixos logrados rotacionando o sistema  $OXY$  por um ângulo  $\theta$ .

No sistema ortogonal  $O\bar{X}\bar{Y}$ , podemos escrever a equação canônica da elipse da seguinte forma:

$$\mathcal{E}: \frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1,$$

e no sistema ortogonal  $OXY$ :

$$\mathcal{E}: \frac{(x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)^2}{a^2} + \frac{(y \cos \theta - x \operatorname{sen} \theta)^2}{b^2} = 1.$$

Figura 2.2. Elipse nos sistemas  $OXY$  e  $O\bar{X}\bar{Y}$ .

Fonte: A autora.

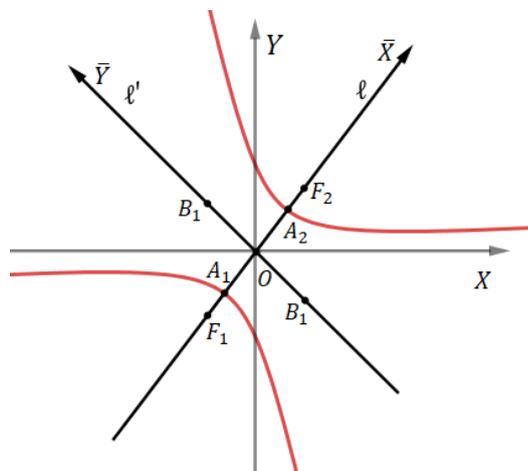
Notamos que a reta focal da elipse pode ser tanto o eixo  $O\bar{X}$  quanto o eixo  $O\bar{Y}$ .

Nessa perspectiva, também podemos visualizar a forma canônica da hipérbole no sistema ortogonal  $O\bar{X}\bar{Y}$ :

$$\mathcal{H}: \frac{\bar{x}^2}{a^2} - \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1,$$

e no sistema ortogonal  $OXY$ :

$$\mathcal{H}: \frac{(x \cos \theta + y \sin \theta)^2}{a^2} - \frac{(y \cos \theta - x \sin \theta)^2}{b^2} = 1.$$

Figura 2.1. Hipérbole nos sistemas  $OXY$  e  $O\bar{X}\bar{Y}$ .

Fonte: A autora.

Por fim, podemos apresentar a forma canônica da parábola no sistema ortogonal  $O\bar{X}\bar{Y}$ :

$$\mathcal{P}: \bar{x}^2 = \pm 4p\bar{y},$$

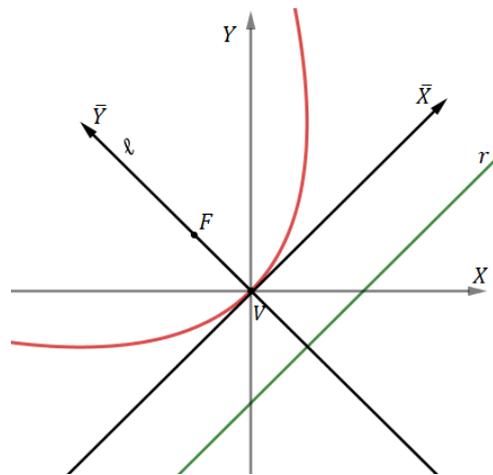
$$\mathcal{P}: \bar{y}^2 = \pm 4p\bar{x},$$

no sistema ortogonal  $OXY$ .,

$$\mathcal{P}: (x \cos \theta + y \sin \theta)^2 = \pm 4p(y \cos \theta - x \sin \theta),$$

$$\mathcal{P}: (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 = \pm 4p(x \cos \theta + y \sin \theta).$$

Figura 2.4. Parábola nos sistemas  $OXY$  e  $O\bar{X}\bar{Y}$ .



Fonte: A autora.

### 2.3 Redução de uma equação do segundo grau à sua forma canônica

Agora, daremos um tratamento unificado às curvas planas que podem ser descritas por equações de segundo grau em duas variáveis, entre elas a elipse, a hipérbole e a parábola.

Fixado um sistema ortogonal, chamamos cônica o lugar geométrico dos pontos  $P = (x, y)$  que satisfazem uma equação de segundo grau  $f(x, y) = 0$  em que

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F. \quad 2.6$$

A condição sobre o grau significa que ao menos um dos números  $A, B, C$  é diferente de zero. Dizemos que:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad 2.7$$

é uma equação da cônica;  $Ax^2$ ,  $Bxy$  e  $Cy^2$  são os termos quadráticos e para distinguir  $Bxy$  dos outros dois referimo-nos a ele como termo quadrático misto. Por sua vez,  $Dx$  e  $Ey$  são os termos lineares e  $F$  é o termo independente.

Vamos apresentar um método que permita, conhecida a equação da cônica, identificá-la e fazer seu esboço. Sabemos que se os coeficientes  $B$ ,  $D$  e  $E$  são nulos recaímos em equações reduzidas de elipse, hipérbole e parábola, agora, se esses coeficientes não são nulos vamos fazer uma mudança de variáveis que transformem a equação da cônica em outra que não apresente o termo quadrático misto. Nesse processo, utilizaremos a rotação dos eixos.

Após uma rotação positiva de um ângulo  $\theta$ , dos eixos  $OX$  e  $OY$ , obtemos um novo sistema de eixos ortogonais  $O\bar{X}$  e  $O\bar{Y}$ . As coordenadas  $(x, y)$  e  $(\bar{x}, \bar{y})$  de um ponto  $P$  do plano nos sistemas  $OXY$  e  $O\bar{X}\bar{Y}$ , respectivamente, estão relacionadas da seguinte maneira:

$$x = \cos \theta \bar{x} - \sin \theta \bar{y}, \quad 2.8$$

$$y = \sin \theta \bar{x} + \cos \theta \bar{y}. \quad 2.9$$

Substituindo 2.8 e 2.9 na equação 2.7, obtemos:

$$\begin{aligned} & A(\cos \theta \bar{x} - \sin \theta \bar{y})^2 + B(\cos \theta \bar{x} - \sin \theta \bar{y})(\sin \theta \bar{x} + \cos \theta \bar{y}) + C(\sin \theta \bar{x} + \cos \theta \bar{y})^2 \\ & \quad + D(\cos \theta \bar{x} - \sin \theta \bar{y}) + E(\sin \theta \bar{x} + \cos \theta \bar{y}) + F = 0, \\ & A(\cos^2 \theta \bar{x}^2 - 2 \cos \theta \sin \theta \bar{x}\bar{y} + \sin^2 \theta \bar{y}^2) + B(\cos \theta \sin \theta \bar{x}^2 + \cos^2 \theta \bar{x}\bar{y} - \sin^2 \theta \bar{x}\bar{y} \\ & \quad - \cos \theta \sin \theta \bar{y}^2) + C(\sin^2 \theta \bar{x}^2 \\ & \quad + 2 \cos \theta \sin \theta \bar{x}\bar{y} + \cos^2 \theta \bar{y}^2) + D(\cos \theta \bar{x} - \sin \theta \bar{y}) + E(\sin \theta \bar{x} \\ & \quad + \cos \theta \bar{y}) + F = 0, \\ & \bar{x}^2(A\cos^2 \theta + B\cos \theta \sin \theta + C\sin^2 \theta) + \bar{x}\bar{y}[2(C - A)\cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \\ & \quad + \bar{y}^2(A\sin^2 \theta - B\cos \theta \sin \theta + C\cos^2 \theta) + \bar{x}(D\cos \theta + E\sin \theta) \\ & \quad + \bar{y}[-D\sin \theta + E\cos \theta] + F = 0, \\ & \quad \bar{A}\bar{x}^2 + \bar{B}\bar{x}\bar{y} + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0. \end{aligned} \quad 2.10$$

A equação 2.10 é a equação do segundo grau nas variáveis  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , onde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A\cos^2 \theta + B\cos \theta \sin \theta + C\sin^2 \theta, \\ \bar{B} &= 2(C - A)\cos \theta \sin \theta + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \bar{C} &= A\sin^2 \theta - B\cos \theta \sin \theta + C\cos^2 \theta, \\ \bar{D} &= D\cos \theta + E\sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{E} &= -D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta, \\ \bar{F} &= F.\end{aligned}$$

Observando as equações, podemos escrevê-las na forma matricial.

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B}/2 \\ \bar{B}/2 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad 2.11$$

Notamos que o termo misto  $\bar{x}\bar{y}$  indica que o sistema de coordenadas está rotacionado.

Determinemos o ângulo  $\theta$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , para o qual o coeficiente  $\bar{B}$  da equação nas variáveis  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  seja igual a zero e desta forma, poderemos escrever a equação na sua forma canônica.

Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned}\bar{B} &= 2(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) = 0, \\ \bar{B} &= (C - A) \operatorname{sen}(2\theta) + B \cos(2\theta) = 0, \\ B \cos(2\theta) &= (A - C) \operatorname{sen}(2\theta).\end{aligned}$$

Se  $\theta = 45^\circ$  então  $A = C$ . Agora se  $\theta \neq 45^\circ$  e  $A \neq C$  então podemos escrever:

$$\begin{aligned}\frac{B}{A - C} &= \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{\cos(2\theta)}, \\ \operatorname{tg}(2\theta) &= \frac{B}{A - C}.\end{aligned}$$

Portanto,

- i)  $\theta = 45^\circ$ , se  $A = C$ ;
- ii)  $2\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( \frac{B}{A - C} \right)$ , se  $A \neq C$ .

Como  $0 < 2\theta < \pi$  temos que  $\operatorname{tg} 2\theta$  e  $\cos 2\theta$  tem o mesmo sinal e pela relação trigonométrica  $1 + \operatorname{tg}^2(2\theta) = \frac{1}{\cos^2(2\theta)}$ , concluímos:

$$\cos^2(2\theta) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)},$$

assim, podemos escrever:

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}}, \operatorname{tg}(2\theta) > 0,$$

e

$$\cos(2\theta) = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}}, \operatorname{tg}(2\theta) < 0.$$

Além disso, temos a relação fundamental da trigonometria e a relação do cosseno de arco duplo, isto é,

$$\operatorname{sen}^2\theta + \operatorname{cos}^2\theta = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta = 1 - \operatorname{cos}^2\theta, \quad 2.12$$

e

$$\operatorname{cos}(2\theta) = \operatorname{cos}^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta. \quad 2.13$$

Assim substituindo a equação 2.12 na equação 2.13, podemos escrever:

$$\operatorname{cos}(2\theta) = \operatorname{cos}^2\theta - (1 - \operatorname{cos}^2\theta) = 2\operatorname{cos}^2\theta - 1,$$

$$\operatorname{cos}^2\theta = \frac{1 + \operatorname{cos}(2\theta)}{2},$$

$$\operatorname{cos}\theta = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{cos}(2\theta)}{2}},$$

e

$$\operatorname{cos}(2\theta) = (1 - \operatorname{sen}^2\theta) - \operatorname{sen}^2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta,$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \operatorname{cos}(2\theta)}{2},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos}(2\theta)}{2}}.$$

Desta forma, a equação do segundo grau nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , pode ser escrita:

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0, \quad 2.14$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cos}\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{cos}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{cos}\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \operatorname{cos}\theta \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{cos}\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \operatorname{cos}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}.$$

O número real  $I = B^2 - 4AC$ , chamado indicador da equação 2.7, estabelece se a equação representa uma elipse, uma hipérbole, ou uma parábola, degeneradas ou não, antes de reduzirmos a equação a sua forma canônica.

Assim, a equação geral do segundo grau 2.7 representa:

- uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio se  $I < 0$ ;
- uma hipérbole ou um par de retas concorrentes se  $I > 0$ ;
- uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio se  $I = 0$ .

**Exemplo 2.1** Seja  $\mathcal{E}$  a elipse que tem vértices nos pontos  $(4,4)$  e  $(3,1)$ , e reta focal  $\ell: x - y = 0$ .

a) Determinar os outros vértices, os focos, o centro e a reta não focal.

b) Obter a equação  $\mathcal{E}$ .

c) Fazer um esboço de  $\mathcal{E}$ , indicando todos seus elementos.

Resolução: A reta não focal  $\ell'$  é perpendicular a reta focal  $\ell: x - y = 0$  e passa pelo vértice  $V = (3,1)$ , então,

$$m_{\ell} \cdot m_{\ell'} = -1 \Rightarrow m_{\ell'} = -1,$$

$$\ell': (y - y_0) = m_{\ell'}(x - x_0),$$

$$(y - 1) = -(x - 3),$$

$$\ell': y + x = 4.$$

O centro de  $\mathcal{E}$  é a interseção das retas focal e não focal, assim,

$$\ell \cap \ell',$$

$$-x + 4 = x,$$

$$x = 2 \text{ e } y = 2,$$

logo,  $C = (2,2)$ . Sejam  $A_2 = (4,4)$ ,  $B_1 = (3,1)$ ,  $C = (2,2)$ ,  $a = d(A_2, C)$  e  $b = d(B_1, C)$ .

Assim,

$$d(A_2, C) = \sqrt{(4-2)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},$$

e

$$d(B_1, C) = \sqrt{(3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{2}.$$

Considerando o sistema de eixos ortogonais  $O\bar{X}\bar{Y}$  obtidos rotacionando o sistema ortogonal  $OXY$  por um ângulo de  $45^\circ$ , podemos escrever,

$$\mathcal{E}: \frac{(\bar{x} - 2\sqrt{2})^2}{8} + \frac{(\bar{y} - 0)^2}{2} = 1,$$

onde,  $C = (x_0, y_0) = (2\sqrt{2}, 0)$ ,  $a = 2\sqrt{2}$  e  $b = \sqrt{2}$ .

Agora, no sistema ortogonal  $OXY$ , temos:

$$\mathcal{E}: \frac{[(x \cos \theta + y \sin \theta) - x_0]^2}{a^2} + \frac{[(y \cos \theta - x \sin \theta)]^2}{b^2} = 1,$$

$$\mathcal{E}: \frac{\left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) - 2\sqrt{2} \right]^2}{8} + \frac{\left( \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x \right)^2}{2} = 1,$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x+y)^2 - 4(x+y) + 8}{8} + \frac{\frac{1}{2}(x-y)^2}{2} = 1,$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) - 4x - 4y + 8}{8} + \frac{\frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2}{2} = 1,$$

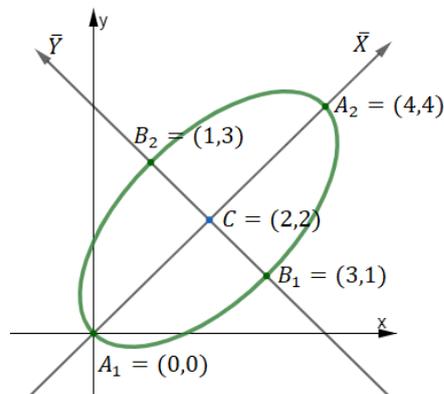
$$\frac{x^2 + 2xy + y^2 - 8x - 8y + 16}{16} + \frac{4x^2 - 8xy + 4y^2}{16} = 1,$$

$$5x^2 + 5y^2 - 6xy - 8x - 8y + 16 = 16.$$

Portanto:

$$\mathcal{E}: 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 8x - 8y = 0.$$

Figura 2.2  $\mathcal{E}: 5x^2 + 5y^2 - 6xy - 8x - 8y = 0$ .



Fonte: A autora

**Exemplo 2.2.** Identificar a cônica e, quando for o caso, obtenha seus parâmetros geométricos ( $a, b, c$  ou  $p$ ) e determine, em relação ao sistema inicial, os elementos geométricos principais: centro, focos, vértices, eixos, assíntotas, diretriz.

a)  $7x^2 + 24xy - 256x - 192y + 1456 = 0$ .

Resolução: Os coeficientes da equação são:  $A = 7$ ,  $B = 24$ ,  $C = 0$ ,  $D = -256$ ,  $E = -192$  e  $F = 1456$  e seu indicador é  $I = B^2 - 4AC = 576 > 0$ . Portanto, a equação representa uma hipérbole ou um par de retas concorrentes.

Seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema de eixos ortogonais obtido rotacionando os eixos  $OX$  e  $OY$  de um ângulo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , no sentido positivo de modo a obter a equação canônica nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

Como  $A \neq C$  temos que:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{24}{7} > 0.$$

Desta forma, temos:

$$\cos(2\theta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{625}{49}}} = \frac{7}{25} > 0,$$

de onde obtemos:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{32}{25}}{2}} = \frac{4}{5},$$

e

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{18}{25}}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Assim, as equações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y} \\ y = \frac{4}{5}\bar{y} + \frac{3}{5}\bar{x} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \\ \bar{y} = \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}x \end{cases}$$

A equação do segundo grau nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , fica na forma:

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0,$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{64}{5} & \frac{48}{5} \\ \frac{27}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -256 \\ -192 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -320 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então,  $\bar{A} = 16$ ,  $\bar{C} = -9$ ,  $\bar{D} = -320$ ,  $\bar{E} = 0$  e  $\bar{F} = 1456$  a equação nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  é

$$16\bar{x}^2 - 9\bar{y}^2 - 320\bar{x} + 1456 = 0.$$

Completando os quadrados, temos:

$$16(\bar{x} - 10)^2 - 9\bar{y}^2 = 144,$$

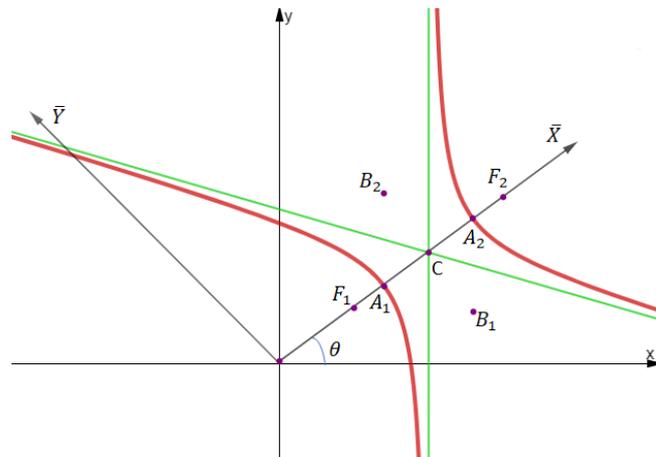
$$\frac{(\bar{x} - 10)^2}{9} - \frac{\bar{y}^2}{16} = 1,$$

que é a forma canônica de uma hipérbole.

A equação representa uma hipérbole  $\mathcal{H}$  com  $a = 3$ ,  $b = 4$  e  $c = 5$  que, nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , tem centro  $\bar{C} = (10,0)$ , reta focal  $\bar{\ell}: \bar{y} = 0$ , reta não focal  $\bar{\ell}': \bar{x} = 10$ , vértices sobre reta focal  $\bar{A}_1 = (7,0)$  e  $\bar{A}_2 = (13,0)$ , vértices sobre reta não focal  $\bar{B}_1 = (10,-4)$   $\bar{B}_2 = (10,4)$ , focos  $\bar{F}_1 = (5,0)$  e  $\bar{F}_2 = (15,0)$  e assíntotas  $\bar{y} = \pm \frac{4}{3}(\bar{x} - 10)$ .

Então, pelas equações de mudança de variáveis obtemos, a reta focal  $\ell: \bar{y} = \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}x \Rightarrow 0 = \frac{4}{5}y - \frac{3}{5}x \Rightarrow 3x - 4y = 0$ , reta não focal  $\ell': \bar{x} = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \Rightarrow 10 = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \Rightarrow 4x + 3y = 10$ , centro  $C = \left(\frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y}, \frac{4}{5}\bar{y} + \frac{3}{5}\bar{x}\right) = (8,6)$ , focos  $F_1 = (4,3)$  e  $F_2 = (12,9)$ , vértices sobre reta focal  $A_1 = \left(\frac{28}{5}, \frac{21}{5}\right)$  e  $A_2 = \left(\frac{52}{5}, \frac{39}{5}\right)$ , vértices sobre reta não focal  $B_1 = \left(\frac{52}{5}, \frac{14}{5}\right)$  e  $B_2 = \left(\frac{28}{5}, \frac{46}{5}\right)$  e assíntotas  $x = 8$  e  $7x + 24y - 200 = 0$  da hipérbole nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

Figura 2.6. Hipérbole.



Fonte: A autora.

$$b) \quad x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 8\sqrt{3}x - 8y + 32 = 0.$$

Resolução: Os coeficientes da equação são:  $A = 1$ ,  $B = 2\sqrt{3}$ ,  $C = 3$ ,  $D = 8\sqrt{3}$ ,  $E = -8$  e  $F = 32$  e seu indicador é  $I = B^2 - 4AC = 0$ . Portanto, a equação representa uma parábola, um par de retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio.

Seja  $O\bar{X}\bar{Y}$  o sistema de eixos ortogonais obtido rotacionando os eixos  $OX$  e  $OY$  de um ângulo  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , no sentido positivo de modo a obter a equação canônica nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ .

Como  $A \neq C$  temos que:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} < 0.$$

Logo,

$$\cos(2\theta) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(2\theta)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + 3}} = -\frac{1}{2} < 0,$$

de onde obtemos:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

e

$$\operatorname{sen} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, as equações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\bar{x} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{y} \\ y = \frac{1}{2}\bar{y} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{x} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \bar{x} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \bar{y} = \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{cases}$$

Desta forma, a equação do segundo grau nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , fica na forma:

$$\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{D}\bar{x} + \bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0,$$

onde:

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & \bar{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\sqrt{3} \\ -8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -16 \end{pmatrix}.$$

Então,  $\bar{A} = 4$ ,  $\bar{C} = 0$ ,  $\bar{D} = 0$ ,  $\bar{E} = -16$  e  $\bar{F} = 32$  a equação nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  é dada por:

$$4\bar{x}^2 - 16\bar{y} + 32 = 0,$$

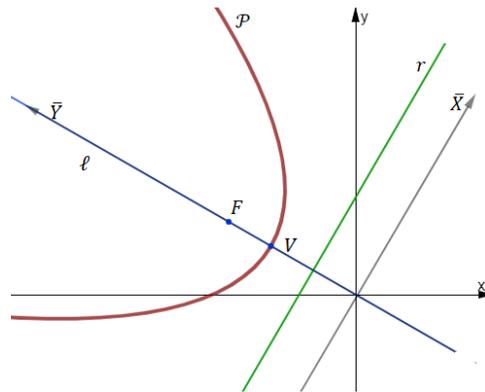
$$\bar{x}^2 = 4(\bar{y} - 2),$$

que é a forma canônica de uma parábola.

A equação representa uma parábola  $\mathcal{P}$  que, nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , tem vértice  $\bar{V} = (0,2)$ , foco  $\bar{F} = (\bar{x}_0, \bar{y}_0 - p) = (0,3)$ , reta focal  $\bar{\ell}$ :  $\bar{x} = 0$  e diretriz  $r$ :  $\bar{y} = \bar{y}_0 - p \Rightarrow \bar{y} = 1$ .

Então, pelas equações de mudança de variáveis obtemos, vértices  $V = (-\sqrt{3}, 1)$ , foco  $F = \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , reta focal  $\ell: x + \sqrt{3}y = 0$  e diretriz  $r: \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$  da parábola nas coordenadas  $x$  e  $y$ .

Figura 2.7. Parábola.



Fonte: A autora.

Discorreremos neste capítulo os conceitos das cônicas: Elipse, Hipérbole e Parábolas rotacionadas, a seguir explanaremos sobre artefatos na construção de tais cônicas.

### **3 CAPÍTULO 03**

#### **3.1 Métodos de construção**

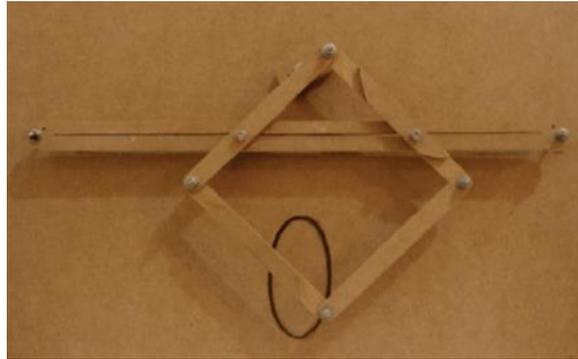
Particularmente nos séculos XV e XVI, a presença de sistemas articulados na Geometria se acentuou e ganhou densidade. Com o passar dos anos, surgiu uma pluralidade de mecanismos que possibilitaram traçar curvas mais refinadas e acuradas. Vale notar que alguns instrumentos podem ser construídos pelos alunos em sala de aula, com a ajuda do docente, sendo que tal feito representa uma alternativa de instrução relevante devido à possibilidade de visualizar o traçado da curva, realizado de forma dinâmica. Acreditamos que tais construções, realizadas com o emprego de madeira, parafusos e lápis, podem ser executadas em uma aula de laboratório de uma escola, tendo como objetivo produzir uma atividade para acompanhar o estudo das cônicas na Geometria ou Geometria Analítica do ensino médio.

Nesse linear, apresentaremos alguns aparatos que desenhavam seções cônicas. A justificativa de conceituação e funcionamento de cada um deles será fundamentada na caracterização geométrica ou analítica das cônicas.

#### **3.2 Elipsógrafo**

O elipsógrafo é um instrumento que permite desenhar elipses. Há diversos mecanismos que desenhavam elipses e nesta seção vamos compreender o funcionamento de um modelo descrito na foto da Figura 3.1.

Figura 3.1. Elipsógrafo.



**Fonte:** Pereira e Bonfim, S/Ano.

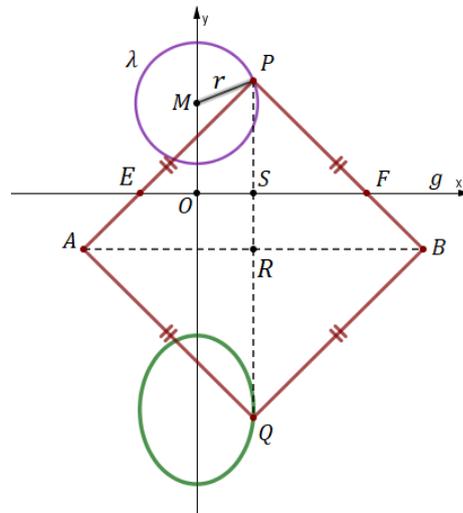
Na Figura 3.1 visualizamos o formato do elipsógrafo elaborado em madeira. O instrumento em questão é composto por uma haste fixa e quatro hastes de mesmo tamanho, formando um losango.

Um dos vértices desse losango, que chamaremos de  $P$ , é ligado a um ponto fixo, o qual é o centro de uma circunferência de raio  $r$ , em posições predeterminada e iguais ao longo dos lados do losango cujo vértice é o  $P$ , fixamos um trilho onde estes pontos podem deslizar.

No vértice oposto ao  $P$  colocamos um lápis que descreverá a elipse. Desta forma, quando o ponto  $P$  descreve a circunferência os pontos prefixados são obrigados a deslizar sobre o trilho e o lápis desenhará a elipse.

Agora, a Figura 3.2 mostra a representação do mesmo elipsógrafo no geogebra, onde vamos mostrar que a curva desenhada é uma elipse.

Figura 3.2. Elipsógrafo no geogebra.



**Fonte:** A autora.

Pelo fato de as hastes possuírem o mesmo tamanho, temos então que  $AQB'P$  é um losango, digamos de lado  $l$ . O vértice  $P$  do losango é vinculado a um ponto fixo  $M$ , visto que se trata do centro de uma circunferência  $\lambda$  de raio  $\overline{PM} = r$ , representada na Figura 3.1, pelo “pestilo”. Os pontos  $E$  e  $F$ , fixados nos lados do losango  $\overline{PA}$  e  $\overline{PB}$ , respectivamente, são escolhidos a uma mesma distância do ponto  $P$  e podem mover-se sobre o trilho horizontal, o qual podemos visualizar na figura 3.1 e como consta na Figura 3.2 é a reta  $g$ .

Vamos mostrar que, quando  $P$  percorre a circunferência  $\lambda$ , os pontos  $E$  e  $F$  movem-se obrigados a escorregar sobre o trilho  $g$ , o vértice  $Q$  do losango (local onde o lápis está fixado) reproduz uma elipse, visto que possui um semieixo igual ao raio da circunferência  $\lambda$  e o outro semieixo com comprimento dependendo da escolha dos pontos  $E$  e  $F$ .

Notamos que,  $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{QB} = \overline{QA} = l$  pois  $AQB'P$  é um losango e  $\overline{PE} = \overline{PF} = d$ . Assumimos um referencial cartesiano sendo o eixo  $x$  sobre a reta  $g$  e o eixo  $y$  passando pelo ponto  $M$  e perpendicular a reta  $g$ , conforme Figura 3.2. Nesse sistema de coordenada, consideremos  $P = (a, b)$  e  $Q = (x, y)$ .

Traçamos os segmentos  $\overline{PQ}$  e  $\overline{AB}$ , cujo encontro ocorre no ponto  $R$ . Indicamos por  $S$  o ponto de interseção da reta  $g$  com o segmento  $\overline{PQ}$ .

Note que os triângulos  $\Delta PSF$  e  $\Delta PRB$  são semelhantes pelo caso de semelhança  $AA$ , já que os ângulos  $P\hat{R}B$  e  $P\hat{S}F$  são congruentes e o ângulo  $R\hat{P}B$  é comum aos triângulos. A semelhança implica que:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{PS}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PR}} = \frac{d}{b} = \frac{l}{\overline{PR}} \Rightarrow \overline{PR} = \frac{lb}{d}.$$

Isto posto, se torna basilar determinar a medida do segmento  $\overline{QS}$  para obter a ordenada do ponto  $Q$ :

$$\begin{aligned} \overline{QS} &= \overline{RS} + \overline{QR} = \overline{PR} - \overline{PS} + \overline{QR} = \overline{PR} - \overline{PS} + \overline{PR} = 2\overline{PR} - \overline{PS} \\ &= 2\left(\frac{lb}{d}\right) - b = \frac{2lb - bd}{d} = \frac{b(2l - d)}{d}. \end{aligned}$$

Fazendo  $\frac{2l-d}{d} = c$  o qual é uma constante que depende apenas das dimensões do instrumento e da posição dos pontos fixos  $E$  e  $F$ , temos que,  $\overline{QS} = cb$ .

Como os pontos  $P$  e  $Q$  têm mesma abscissa, temos  $x = a$ . A ordenada,  $y$ , de  $Q$  no sistema escolhido é  $-\overline{QS} = -cb$ .

A distância do ponto  $P = (a, b)$  ao ponto  $M = (0, h)$ , é  $r$ . Portanto,

$$r^2 = a^2 + (b - h)^2, \quad 3.1$$

fazendo a substituição,  $x = a$  e  $b = -\frac{y}{c}$  em 3.1, obtemos:

$$x^2 + \left(-\frac{y}{c} - h\right)^2 = r^2,$$

$$x^2 + \left(\frac{y + ch}{c}\right)^2 = r^2,$$

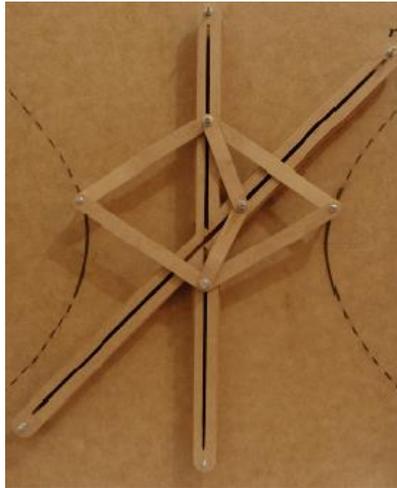
$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{(y + ch)^2}{c^2 r^2} = 1.$$

Diante do exposto, podemos concluir que o ponto  $Q$  descreve uma elipse de semieixo igual ao raio da circunferência e o outro igual a  $c \cdot r$  que contém a reta focal cujo comprimento é variável devido as medidas do instrumento e da escolha dos pontos  $E$  e  $F$ , ou seja, elipse de centro  $C = (0, -ch)$  e a distância do centro aos vértices são  $r$  e  $c \cdot r$ .

### 3.3 Hiperbológrafo

A Figura 3.3 representa um hiperbológrafo, instrumento que desenha hipérbole.

Figura 3.3. Hiperbológrafo.

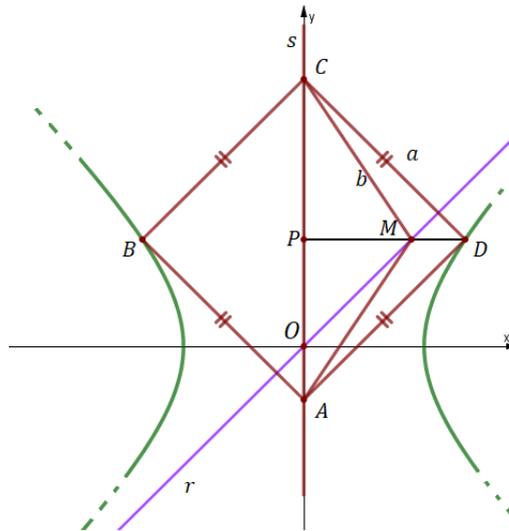


**Fonte:** Pereira e Bonfim, S/Ano.

O hiperbológrafo em questão é construído por duas hastes fixas e quatro hastes iguais, que forma um losango, e possui dois segmentos em seu interior, articulados em um ponto o qual desliza sobre a reta  $r$ . Com o movimento deste ponto, os dois vértices que estão ligados com os segmentos deslizam sobre uma reta fixa, ao passo que os outros dois vértices contém o lápis que desenhara os ramos da hipérbole.

A representação gráfica do mecanismo articulado construído é ilustrada na Figura 3.4. Vamos justificar que a curva desenhada é uma hipérbole.

Figura 3.4. Hiperbológrafo no geogebra.



**Fonte:** A autora.

Seja  $ABCD$  um losango de lado  $a$  com vértices  $A$  e  $C$  vinculados a um trilho vertical  $s$ , o ponto  $M$  se move sobre a reta  $r$  e ainda  $\overline{CM} = \overline{AM} = b$ , onde  $b < a$ . A posteriori, demonstraremos quando o ponto  $M$  percorre a reta  $r$ , os pontos  $A$  e  $C$  deslizam sobre a reta  $s$  e os pontos  $B$  e  $D$  (acoplados com pontas de lápis) descrevem os dois arcos de uma hipérbole.

Devemos partir do referencial que  $O$  é o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ . Determinado um referencial cartesiano com origem  $O$  e o eixo  $y$  coincidente com a reta  $s$ , sejam  $M = (m, n)$  e  $D = (x, y)$  o ponto que percorrerá uma parte do ramo direito da hipérbole.

Na figura,  $\overline{CD} = a$ ,  $\overline{CM} = b$ ,  $\overline{PM} = m$  e  $\overline{PD} = x$ . Aplicando o teorema de Pitágoras aos triângulos  $\Delta CPM$  e  $\Delta CPD$ , obtemos:

$$\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2, \quad 3.2$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PD}^2, \quad 3.3$$

substituindo 3.2 em 3.3, temos que:

$$\overline{CM}^2 - \overline{PM}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{PD}^2,$$

nessa perspectiva, percebemos que:

$$b^2 - m^2 = a^2 - x^2,$$

ou seja,

$$m^2 = x^2 - (a^2 - b^2).$$

Fazendo,  $a^2 - b^2 = c^2$ , ficamos com  $m^2 = x^2 - c^2$ .

A reta  $r$  tem equação da forma  $y = kx$  e, como o ponto  $M = (m, n)$  pertence a essa reta, temos  $n = km$ , ou, ainda,

$$n^2 = k^2 m^2. \quad 3.4$$

Sabendo que os pontos  $M$  e  $D$  têm mesma ordenada, fazendo as substituições:  $m^2 = x^2 - c^2$  e  $n = y$  em 3.4, obtemos:

$$y^2 = k^2(x^2 - c^2),$$

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{(kc)^2} = 1,$$

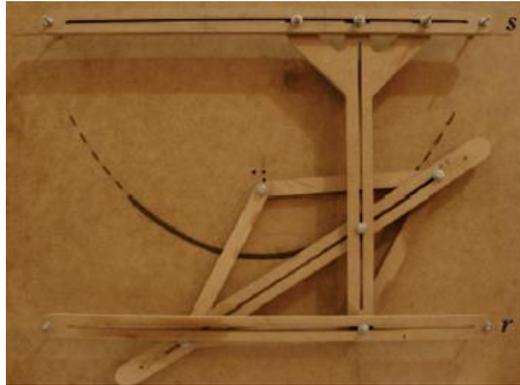
que é a equação de uma hipérbole. Interessante observar que como  $B$  é simétrico de  $D$  em relação a  $O$ , quando  $D$  percorre o ramo direito da hipérbole,  $B$  transita pelo ramo esquerdo. Na mesma lógica, uma das assíntotas dessa hipérbole é a reta  $y = \frac{kc}{c}x = kx$ , que é a reta  $r$ .

### 3.4 Parabológrafo

No parabológrafo o lápis que desenhará a parábola está na intersecção de dois segmentos, o ponto  $P$ . A extremidade de um desses segmentos desliza por uma reta  $r$ , permanecendo sempre perpendicular a mesma que é a diretriz da parábola, enquanto o outro segmento possui os dois vértices opostos de um losango flexível.

O vértice do losango oposto ao que desliza na reta  $r$  é fixo e conforme o ponto desliza em  $r$  o ponto  $P$  descreve a parábola. O mecanismo articulado construído é ilustrado na Figura 3.5.

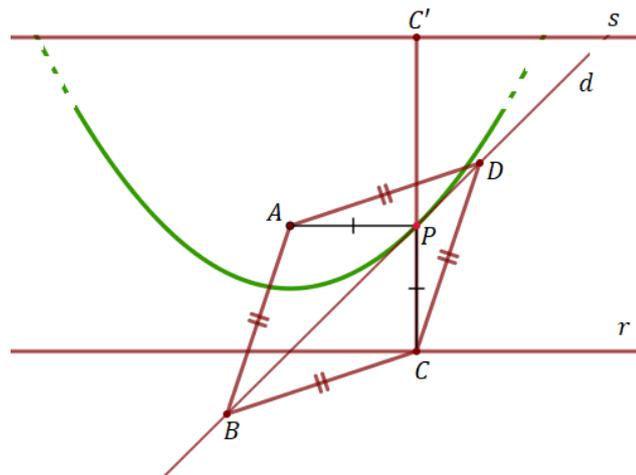
Figura 3.5. Parabológrafo.



**Fonte:** Pereira e Bonfim, S/Ano.

Na figura 3.6, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas. Os pontos  $C$  e  $C'$  deslizam sobre  $r$  e  $s$ , respectivamente, de forma que o segmento  $CC'$  seja sempre perpendicular a essas paralelas.  $ABCD$  é um losango articulado, o vértice  $A$  do losango é fixo. O vértice  $C$ , oposto ao vértice  $A$ , desliza sobre  $r$ . Os outros dois vértices,  $B$  e  $D$ , determinam a reta  $d$ , que intersecta o segmento  $\overline{CC'}$  no ponto  $P$ .

Figura 3.6. Esboço de Parabológrafo.



**Fonte:** A autora.

Ao passo que  $C$  resvala sobre  $r$ , o ponto  $P$  descreve uma parábola com foco  $A$  e diretriz  $r$ . De acordo com o raciocínio que será exposto a seguir, tal instrumento foi

habilmente tecido de tal maneira que ao se afastar o mecanismo sobre uma reta (diretriz), o ponto  $P$  (em que se acopla o lápis) desenha uma parábola.

Fundamentamos esse processo em questão através da congruência dos triângulos  $\Delta PAB$  e  $\Delta PCB$  pelo caso de congruências  $LAL$ , tendo em vista que os ângulos  $A\hat{B}P$  e  $C\hat{B}P$  são congruentes, o lado  $\overline{BP}$  é comum aos triângulos e os lados  $\overline{AB}$  e  $\overline{AC}$  são congruentes, lados do losango. A congruência implica  $\overline{PA} = \overline{PC}$ . Dessa forma, o ponto  $P$  é equidistante de um ponto fixo  $A$  e de uma reta fixa  $r$ , isto é, seu lugar geométrico é a parábola de foco  $A$  e diretriz  $r$ .

Concebemos que a construção dos sistemas articulados engloba a percepção de movimentos, a manipulação e a experimentação, sendo assim conquistada a atenção e aguça o raciocínio dos discentes em compreender os conceitos envolvidos na construção e, conseqüentemente, impossibilita a aprendizagem vaga e rasa na abordagem das cônicas. Finalmente, propomos a utilização de softwares de geometria dinâmica para robustecer as ideias nos processos de construção, nos quais não há limitações.

## 4 APLICAÇÃO DIDÁTICA

Na Educação Básica, o estudo relativo às seções cônicas normalmente é feito somente sob o ponto de vista algébrico, fazendo com que, muitas vezes, os alunos desconheçam a relação entre as seções cônicas e a geometria euclidiana.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais para Ensino Médio:

As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas que podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação de partes do mundo que o cerca. (PCNs, 1999. p. 257)

Com o estudo dessas habilidades é possível então construir as cônicas, entender suas propriedades e chegar em suas expressões algébricas.

A teoria de *Van Hiele* para o desenvolvimento do pensamento geométrico vem sendo ao longo dos anos analisadas e pesquisadas por vários educadores em Educação Matemática entre eles Lílian Nasser. A autora nos relata como os alunos progredem de acordo com esta teoria:

De acordo com *Van Hiele*, os alunos progredem segundo níveis hierárquicos de conhecimento quando aprendem geometria. Estes níveis podem ser descritos como: Reconhecimento (visualização) análise, abstração (síntese) dedução e rigor. *Van Hiele* estabelece que o progresso de nível depende da experiência de atividades especialmente preparadas pelo professor, com essa finalidade, e passa por cinco fases de aprendizagem. Portanto o modelo de *Van Hiele* incorpora ao cognitivo um aspecto didático (NASSER, Anais VI. 1998).

Para Nasser (1998) a teoria de *Van Hiele* sugere cinco níveis hierárquicos, no sentido de que o aluno só atinge determinado nível de raciocínio após passar por todos os níveis inferiores. A seguir enumeramos esses níveis e suas características:

### → Nível básico: Reconhecimento.

Identificação, comparação da nomenclatura de figuras geométricas, com base em sua aparência global.

**→ Nível 1: Análise.**

Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.

**→ Nível 2: Síntese ou abstração.**

Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.

**→ Nível 3: Dedução.**

Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes.

**→ Nível 4: Rigor.**

Capacidade de compreender demonstrações formais. Capacidade de entender axiomas, mesmo na ausência de modelos concretos.

A ideia de implementar estratégias didáticas diversificadas confere ao ensino subsídios que atraem a atenção e a motivação dos alunos. Apenas atividades de lousa e livro não são suficientes para a compreensão e o despertar pelo saber. É essencial que os materiais didáticos aplicados ao ensino sejam selecionados, adaptados e criados de acordo com cada contexto em que será inserido, e conforme os objetivos estabelecidos.

O modelo de *Van Hiele* conduz o aluno ao nível da visualização de um conceito geométrico, em seguida ao nível da análise, depois ao da ordenação lógica, mais adiante ao nível da dedução e, por fim, a atingir o nível do rigor da conceituação. Neste ponto, o aluno torna-se capaz de entender e relacionar conceitos abstratos.

Abaixo, descreveremos as fases necessárias para organizar o ensino de acordo com o modelo sugerido por *Van Hiele*, segundo JAIME (1993); FOUZ e de DONOSTI (2005) e VARGAS e ARAYA (2013).

**Fase 1 → Informação/interrogação.**

O professor deve identificar os conhecimentos prévios que os alunos possuem sobre o assunto a ser trabalhado.

**Fase 2 → Orientação dirigida.**

O ensino precisa ser direcionado através de atividades concretas, que respeitem uma sequência didática.

**Fase 3 → Explicação.**

Esta fase é baseada em experiências anteriores, os alunos devem ser capazes de expressar através da linguagem oral ou escrita os resultados obtidos a partir de suas experiências e argumentar sobre estas com o professor e os outros alunos.

**Fase 4 → Orientação livre.**

Os estudantes devem utilizar os conhecimentos adquiridos para resolver atividades e problemas diferentes dos anteriores.

**Fase 5 → Integração.**

Os alunos reveem e sintetizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral e uma nova rede interna de conhecimentos aprendidos.

Esse roteiro metodológico é fundamental para que o aluno avance para um nível posterior.

Ainda de acordo com Nasser (1998):

Para *Van Hiele*, cada nível é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagem próprias. Consequentemente, não pode haver compreensão quando o curso é dado num nível mais elevado do que o atingido pelo aluno.

Do que foi exposto acima, concluímos que uma das dificuldades apresentadas pelos alunos na aquisição de conceitos geométricos, é a de passar de um nível inferior para um mais elevado sem passar pelas experiências dos níveis intermediários.

O enfoque do tema, cônicas, se deu em aulas ministradas em uma sala da Terceira Série do Ensino Médio de uma escola pública, classe essa com quarenta alunos, para que os níveis de desenvolvimento da teoria de *Van Hiele* sejam observados, primeiramente, nos cortes do cone para identificação da nomenclatura das cônicas: Elipse, Hipérbole e Parábola (Nível Básico). Vejamos na Figuras 4.1 uma das alunas realizando o corte, com o equipamento específico para cortar isopor (cortador a pilha modelo memo-corte júnior), no cone de isopor para visualização da elipse. Esse mesmo procedimento foi feito com outros cones para constatar a hipérbole e a parábola dependendo da inclinação do cortador.

Figura 4.1. Alunos fazendo cortes no cone.



Fonte: A autora.

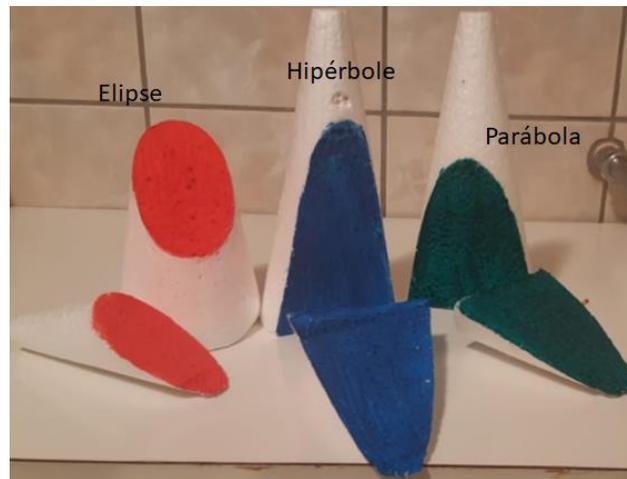
Após o corte os alunos realizaram a pintura das áreas das cônicas com tinta guache. Conforme apresentado nas Figuras 4.2 e 4.3.

Figura 4.2. Cones cortados para visualização da Elipse, Hipérbole e Parábola.



Fonte: A autora.

Figura 4.3. Elipse, Hipérbole e Parábola nos cortes do cone.



Fonte: A autora.

É possível observar, Figura 4.4, a medição e conferência dos parâmetros das cônicas,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , análise de suas propriedades, riscar a reta focal e a reta não focal (Nível 1).

Figura 4.4. Medição dos parâmetros da Elipse.



Fonte: A autora.

Em um segundo momento foi usado alguns artefatos para a construção das cônicas sabendo e usando suas definições a partir da caracterização bifocal (Nível 2). Analisamos as medidas realizadas em momento anterior e os alunos trocaram suas

experiências. Com raio laser, Figura 4.6. e com o aparato para a parábola ficou visível seu foco, foram citados vários exemplos do dia a dia como por exemplos a antena parabólica.

Figura 4.5. Construção das cônicas usando artefatos.



Fonte: A autora.

Figura 4.6. Verificação do foco da Parábola.



Fonte: A autora.

Em momento subsequente, a partir da definição das cônicas, foi aplicado várias atividades com diferentes graus de dificuldades e através da correção observamos as

respostas dos alunos, a autonomia na resolução e se conseguiram abstrair os conceitos (Nível 3). Pelas respostas de vários alunos foi possível perceber que muitos conseguiam resolver os exercícios com grau de dificuldade pequena, mas o percentual dos alunos que resolveram todos foi baixa. Muitos têm dificuldades acumuladas desde o ensino fundamental, como produtos notáveis, fatoração, Teorema de Pitágoras entre outros.

Desta forma, o correto é continuar no mesmo nível de *Van Hiele* com mais atividades e revisão destes conteúdos falhos para depois passar para o último nível com as demonstrações formais e fazer a rotação das cônicas, mas, devido a pandemia causada pelo vírus *SarsCov2*, e as medidas de isolamento social, foi impossível continuar com as aulas presenciais e dar continuidade ao presente projeto. Infelizmente, no ambiente remoto, não conseguimos avançar com as análises devido as dificuldades apresentadas pelos alunos quanto a observação, construção e demonstração das cônicas e a falta de recursos tecnológicos como aparelhos eletrônicos e internet.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Utilizando-se apenas de sistemas, trigonometria e multiplicação de matrizes, conteúdo este ministrado no ensino médio, onde observamos qual é a cônica representada por uma equação geral do segundo grau.

A organização desta dissertação sugere uma abordagem diferenciada sobre o tema “cônicas”. A dissertação em questão visa auxiliar ao trabalho dos professores, bem como dos alunos da terceira série do ensino médio, tendo em vista a dificuldade de abstração por meio de instrumentos articulados que desenham cônicas e cortes no cone para obtenção delas. A ideia de explorar esses instrumentos geométricos reafirma a importância da geometria no ensino da matemática. Nos dias atuais há uma valorização do estudo algébrico sobre o geométrico. Fato este confirmado na retirada do ensino da disciplina desenho geométrico da grade curricular e na forma de pensar de nossos educandos que demonstram necessidade por fórmulas para resolver os mais variados exercícios e problemas da matemática.

Exatamente por reunir geometria analítica, trigonometria, matrizes e sistemas de equações, trabalhar com a rotação e a translação de curvas no plano pode ser uma das atividades enriquecedoras para os alunos, além de poder ser utilizado para revisar estes assuntos.

## 6 REFERÊNCIAS

BOYER, CARL B. História da matemática. 2ª Edição. São Paulo. Edgard Blücher LTDA. 1996. [ISBN 85-212-0023-4](#).

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília. 1999.

CALVOSO, J. C. Estudo das cônicas com aplicações e o software geogebra como ferramenta de apoio didático. 2014.

CAMARGO, I.; BOULOS, P. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. 3ª ed., Ed. Pearson, São Paulo, 2005.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. Geometria Analítica: Coleção Profmat. 2ª ed., Rio de Janeiro: SBM.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. São Paulo. Unicamp. 2004. [ISBN 85-268-0657-2](#).

FOUZ, F.; DONOSTI, B. Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. Un paseo por la geometría. p.67-81, 2005.

JAIME, A. Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La evaluación del nivel de razonamiento. (1993). f.298. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Universidad de Valencia, España.

KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A. S.; REIS, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. Rio Claro – SP, v. 9, n. 10, 1994. [ISBN 978-85-89082-23-5](#)

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P. Geometria segundo a Teoria de Van Hiele. 4ª ed. v.1 Rio de Janeiro: Projeto Fundação/IM-UFRJ, 1997.

NASSER, L. A construção do pensamento geométrico. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 6., 1998. São Leopoldo. Anais... São Leopoldo: UNISINOS, 1998.

PEREIRA, L. R.; BONFIM, V. Instrumentos articulados que desenharam cônicas. Revista do professor de matemática, n. 80, p. 10-13, S/Ano.

RODRIGUES, R. M. S. Sólidos de Platão sob a visão da teoria de Van Hiele aliada ao origami.2008.

SANTOS, M. S.; SANT'ANNA, N. F. P. O Ensino de Geometria E A TEORIA de Van Hiele: Uma Abordagem Através do Laboratório de Ensino de Matemática no 8º Ano da Educação Básica, S/Ano

VARGAS, G.; ARAYA, R. G. El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. Uniciencia, v. 27, n. 1, p. 74-94, 2013.

VIER, M. R. O Estudo das Cônicas e Quádricas com o Auxílio dos Softwares GeoGebra e R. 2019.