UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Victor Ferreira Ragoni

EXPANDINDO TELAS E CONTANDO EXPERIÊNCIAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA COM O GEOGEBRA: DA SENSIBILIDADE DO TOQUE À PRODUÇÃO DE CONCEITOS DE INTEGRAIS DUPLAS COM O *SMARTPHONE*

Campo Grande

2021

Victor Ferreira Ragoni

Expandindo Telas e Contando Experiências em Educação Matemática com o GeoGebra: da sensibilidade do toque à produção de conceitos de Integrais Duplas com o *smartphone*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus de Campo Grande, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari.

Campo Grande

2021

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Eunice e Valdomiro, que não medem suas forças para me verem atingir meus sonhos. Essa realização não teria acontecido se não fossem vocês!

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que esteve ao meu lado durante dias, noites, chuvas, sóis, choros e sorrisos. Que me permitiu ser quem sou, estar onde estou, crescer como cresci. Eternamente grato.

Aos meus pais, Eunice e Valdomiro, que me constituíram um ser que luta, cai, mas levanta sacode a poeira e continua caminhando. Por terem feito das noites os dias, trabalhando de sol a sol para terem um filho formado com condições de estudos. Meus guerreiros, exemplos de seres humanos, heróis. Que sempre me apoiaram em cada escolha que fiz. Que sempre me aconselharam quando eu achava que não tinha mais saída. Que me abraçaram e riram comigo nas alegrias e choraram comigo nas tristezas. Por sempre terem uma palavra de alento quando a única vontade era desistir de tudo. Obrigado. Abaixo de Deus só vocês!

À minha família que sempre me apoiou e lutou minhas lutas junto comigo. Obrigado aos meus irmãos Waldemir, Dizão (também conhecido no RG como Valdeli), e cunhadas Debora e Mônica. Aos meus filhos de outros pais Nadia, Isabelly e Clóvis.

À minha princesa, minha moça, minha afilhada e amor da minha vida, Maria Clara, pelas brigas, pelas respostas que me deixam sem ter o que dizer e, principalmente, pelos abraços.

À Diva Master que sempre foi um paraíso de paciência com meus anseios, medos e sonhos. Por sempre ser essa pessoa calma, tranquila, paciente, incentivadora que me transmitiu calma, tranquilidade, paciência. Cida é a pessoa que quando eu estava temeroso com alguma coisa durante o mestrado sempre teve uma palavra que me fazia ter paz instantânea. Agradeço todos os dias por Deus ter te colocado como minha orientadora, pois Ele sabia que eu precisaria de uma pessoa exatamente como você é.

À minha banca maravilhosa, Profa. Dra. Débora da Silva Soares e a Profa. Dra. Suely Scherer, instigadoras de reflexões e que contribuíram sem medir esforços para o crescimento dessa pesquisa. Cada sugestão e cada comentário foi levado em consideração para a finalização desse trabalho.

Aos meus amigos Juliana e Tiago, que caminharam ao meu lado, me zoando em alguns momentos e me incentivando na maior parte do tempo. Sem vocês eu não estaria aqui hoje (assim como a Profa. Karla, que lutou comigo no momento mais traumatizante da graduação, afinal o que são 0,3 pontos?).

Ao meu terceiro irmão, de outros pais, que mora longe de mim, André. Obrigado por estar ao meu lado sempre.

Aos meus amigos e companheiros de vôlei Kiko e Allan por contar todas as suas/nossas crises e por ouvir quando eu tive as minhas.

Às minhas companheiras de mestrado, Cíntia, Franciele, Joyce e todxs xs demais da turma 2019 e aos professores que fizeram tão brilhantemente sua contribuição em minha formação.

Aos meus irmãos de orientação Tiago, Vanuza, Felipe, Vitor, Karina, André, Larissa, Gabriela, ao Grupo de Pesquisa Tecnologias Digitais, Mobilidade e Educação Matemática (TeDiMEM) e ao Grupo de Estudos de Tecnologia e Educação Matemática (GETECMAT).

Aos participantes do Curso: Bruno, Danilo, Íris, José Augusto, José Ivan, Karina, Lee, Paulo, Rebeca, Vitor e João Lucas.

À CAPES e ao CNPq (processo 88882.458483/2019-01), pelo financiamento desta pesquisa.

Eu mudei
Nem sinto, nem vejo as coisas como via antes
[...]
Os meus olhos fechados Te enxergam bem perto de mim
(ROSA DE SARON, 2007)

RESUMO

No entrelaçar de várias vozes que ressoam sobre um tema de pesquisa podemos encontrar muitos outros autores, sem nos esquecer da voz do pesquisador. Por isso, nesse relato de pesquisa em que se enlaçam os temas “produção de conceitos”, “*smartphone”* e “integrais duplas”, surge a indagação de pesquisa “como ocorre a produção de conhecimentos de integrais duplas com *smartphone* e o aplicativo GeoGebra?”. Para tanto objetivamos analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra. Estabelecemos como objetivos específicos: i) Analisar movimentos e alterações no sistema de atividade ao trabalhar no ambiente GeoGebra com o *smartphone* em estudos sobre integrais; ii) Analisar possíveis contribuições e limitações do *smartphone* e do GeoGebra na extensão de conceitos de integrais simples para integrais duplas; iii) Analisar possíveis transformações expansivas ocorridas no sistema de atividade durante o estudo dos conceitos de integrais duplas com o *smartphone*. Como referencial teórico encontramos na terceira geração da Teoria da Atividade (TA) suporte para a análise da atividade humana, nessa teoria entende-se a atividade como uma forma sistêmica coletiva. Na produção de dados, nos atendo à natureza qualitativa da pesquisa, desenvolvemos um Projeto de Ensino de Graduação com duração de cinco encontros durante três segundas-feiras em novembro de 2019. Realizado na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus Campo Grande, no qual participaram 11 alunos dos cursos de Matemática e Física. Os dados foram gerados por meio de gravação de tela do próprio *smartphone* dos participantes, de produção escrita (respostas a questões disparadoras) e de uma entrevista. Assim, por meio da TA, analisamos os vídeos de um trio e interpretamos que o *smartphone*, por meio do apelo visual e da capacidade de *feedback* instantâneo, possui potencial para provocar, ou favorecer, transformação nos modos de produzir conhecimentos sobre integrais duplas e, além disso, observar o que significa a extensão dos conceitos, como domínio, gráficos e linguagem matemática. Ainda nos mostrou que a interação entre sujeitos e mediadores são essenciais ao seu desenvolvimento. A troca de informações, discussões e análises possibilitou que eles (re) pensassem e estendessem conceitos antes discutidos apenas com tecnologias não digitais. Uma outra tecnologia trouxe outras possibilidades para a produção de conhecimento de integrais duplas.

Palavras-chave: Educação Matemática. Tecnologias Digitais. Teoria da Atividade. Ensino Superior. Produção de Conhecimento.

ABSTRACT

In the intertwine of several voices that resonate about a research topic, we can find many other authors, without forgetting the researcher's voice. Thus, in this research report in which the themes are binded “concept production”, “smartphone” and “double integrals”, the research question arises “how does the production of knowledge of double integrals with smartphone and the *GeoGebra* application occur?”. To this end, we aim to analyze knowledge production processes about double integrals with smartphones and *GeoGebra*. We set as specific objectives: i) Analyze movements and changes in the activity system by working in the *GeoGebra* environment with the smartphone in studies on integrals; ii) Analyze possible contributions and limitations of smartphone and *GeoGebra* in the extension of concepts from simple integrals to double integrals; iii) Analyze possible expansive transformations occurred in the activity system during the study of the concepts of double integrals with the smartphone. As a theoretical framework we found in the third generation of Theory of Activity (TA) support for the analysis of human activity, in this theory we understand the activity as a collective systemic form. In the production of data, taking into account the qualitative nature of the research, we developed a Graduate Education Project with duration of five meetings along three Mondays in November 2019. Held at the Federal University do Mato Grosso do Sul, campus of Campo Grande, in which 11 students from the Mathematics and Physics courses participated. The data was generated by screen recording of the participants' own smartphones, by written production (answers to trigger questions) and by an interview. Hence, through the TA, we analyzed the videos of a trio and interpreted that the smartphone, through its visual appeal and the ability of instant feedback, has the potential to cause, or favor, a transformation in the ways of producing knowledge about double integrals and, besides that, observe what the extension of concepts means, such as domains, graphics and mathematical language. Still, it showed us that the interaction between subjects and mediators is essential to their development. The exchange of information, discussions and analysis made it possible for them to (re) think and extend concepts previously discussed only with non-digital technologies. Another technology brought other possibilities for the production of knowledge of double integrals.

Keywords: Mathematical Education. Digital Technologies. Theory of Activity. College Education. Knowledge Production.

SUMÁRIO

ABRINDO A TELA INICIAL: CONTANDO UMA TRAJETÓRIA ATÉ A PÓS-GRADUAÇÃO

Olá, a você que se dispôs a ler esse relato de pesquisa. Ficamos felizes, eu e Cida, em tê-lo por esse entrecruzar de linhas, teorias, percepções, sensibilidades e reflexões. Te convidamos a entrar nesse emaranhado de ideias sobre os vários temas que se entrelaçam nesse texto e esperamos que, de algum modo, sinta-se tocado a pensar e analisar possibilidades.

Para iniciar quero esclarecer que a metáfora presente no título dessa seção faz referência à tecnologia, quando estamos destravando nossos celulares, *smartphones* ou ligando nosso *notebook*. Estamos numa tela inicial, quase branca, mas que aos poucos vai sendo preenchida. Essa tela é comum em vários desses dispositivos, ela é como uma apresentação do que pode ser acessado nos aparelhos citados, além de conter outros recursos como pastas, ícones, etc que direcionam para novas telas. Além disso, cito as várias experiências que percorreram essa dissertação, ou seja, “contando experiências” de planejamento de uma produção de dados, de produzir dados, de escrever uma dissertação, de estudar metodologia e procedimentos de pesquisa, teoria, entre outras coisas. Experiências com tecnologias, experiências com cálculo, com pesquisas anteriores. Portanto, vou começar a desenhar nessa tela.

Quero nesse momento trazer uma história que conta a estrada da vida deste pesquisador com as tecnologias, sejam estas digitais, não digitais, da inteligência, que tem a ver com as formas de ensinar, compreender, entender, enfim, pensar e construir o conhecimento (LÉVY, 1993).

Vindo de família humilde e que sempre priorizou o pão ao invés do luxo, tive a infância como uma criança nascida nos anos 90, aquelas que sai de casa e vai jogar bola, brincar, fazer amigos no meio da rua. A minha tecnologia preferida naquela etapa da vida era a televisão, utilizada para recreação e divertimento. Foi ainda nessa fase, por volta dos nove anos, que eu tive o primeiro telefone móvel, um celular que tinha como principais funções fazer ligação e enviar mensagens de texto e, claro, ter o “jogo da cobrinha”.

Fui crescendo, tornando-me mais independente, trocando de celular algumas vezes, até que chegou a adolescência, chegou o Ensino Médio, chegaram junto trabalhos mais elaborados e extensos e imbricada a isso, a evolução tecnológica exponencial. Meus pais então tiveram que me presentear com um computador, aqueles de mesa mesmo, mas já mais evoluídos do que os de monitor com tubo e coloração branca. Só fui ter o meu primeiro computador em 2009, ou seja, depois de 69 anos do primeiro computador, que ocupava uma sala inteira e pesava muitas toneladas (LÉVY, 1993).

Meu “pc” já era preto, com monitor fino, eu me “sentia” quando estava de frente a ele, mas como na vida nem tudo são flores, faltava algo: a internet. Ou seja, eu tinha a máquina, mas não tinha o acesso aos conteúdos. Esse cenário só mudou algum tempo depois. No momento em que esse texto está sendo escrito é muito difícil pensarmos em um equipamento tecnológico, como o computador, notebook, que não esteja conectado à internet. Mas na verdade, ela demorou anos a se popularizar, uma vez que desde 1990 já havia a ideia de expandir a rede de banda larga a todos os domicílios (LÉVY, 1993), enquanto eu lá no interior do Mato Grosso do Sul só tive acesso a essa tecnologia em minha casa a partir de 2010.

Com a evolução tecnológica também chegaram os novos celulares, com novas funções como calculadoras, câmeras, entre outras. Novas mudanças fizeram com que os dispositivos móveis agregassem inovadoras potencialidades de uso, os celulares passaram a ser chamados então de *smartphones*, o que Lévy (1993) já previa quando mencionou sobre pesquisas em desenvolvimento que apontavam para micro interfaces voltadas para os sentidos humanos. E eu ingressando no curso de graduação, dois anos (2013) depois de me formar na Educação Básica. O celular me acompanha durante os anos escolares desde a 4ª série (5º ano) até o dia dessa escrita.

Entramos agora numa questão de contas. A Matemática sempre teve um peso maior em meus estudos, sempre achei legal e interessante resolver multiplicações, divisões, achar o tão temido x, principalmente achar as raízes de equações quadráticas e estudar funções, mas eu preciso fazer uma observação: nem tudo na matemática me encantava. Funções e exercícios que envolvessem logaritmos, trigonometria e fatorial não eram os meus queridos, pois me demandava maior raciocínio, maior foco na hora de resolver os exercícios. Entretanto essas pedras no caminho não fizeram com que eu deixasse de ir pela atração da área das ciências exatas. Ingressei na licenciatura em Matemática, com uma leve passagem pelas engenharias em que pude conhecer o Cálculo.

O Cálculo Diferencial e Integral entrou efetivamente em minha grade apenas no terceiro ano do curso. Meu percurso de aprendizagens com a disciplina era controverso, pois do mesmo modo que eu realmente gostava, tinha a contrapartida de não conseguir me sair bem nas avaliações.

Durante as aulas eu ficava observando a professora fazendo suas explicações e suas demonstrações com um olhar pouco crédulo do que estava acontecendo, mas no fundo adorava calcular limites, derivadas, utilizar as regras da cadeia, de L'Hospital até que chegamos ao Cálculo II. Entrou em cena a tão comentada, por alunos e professores, "integral".

Em um período de desmotivação e cansaço com as apresentações do conteúdo e com o curso, quase não participava e me interessava pelas aulas, copiando por copiar, prestando atenção por obrigação e quase estourando o limite de faltas. Eu tinha um déficit em entender o conteúdo. Passamos um semestre estudando as integrais. Eram regras para o que der e vier: substituição, partes, trigonométricas, etc. Essa tecnologia estudada pelo homem era muito difícil para eu entender. Mas, no fim, tudo deu certo e fui aprovado.

No semestre seguinte, com a mesma professora, com as mesmas práticas, as mesmas formas de avaliar, iniciamos o Cálculo III, que mais tarde passaria a se chamar Cálculo de Várias Variáveis, e era minha oportunidade de buscar melhorar o conhecimento que tinha sobre as integrais. A ementa da disciplina Cálculo III contemplava os seguintes tópicos: Funções de várias variáveis: Limite e continuidade de funções de duas variáveis. Derivadas parciais. Derivada direcional e gradiente. Diferenciabilidade. Máximos e mínimos. Multiplicadores de Lagrange. Integrais múltiplas: dupla e tripla, Teorema de Fubini, mudança de variáveis.

Nessa disciplina revisitávamos o que já havíamos passado pelos outros cálculos, mas agora a visualização seria no espaço de três dimensões. Ao final do semestre deveríamos estar aptos a fazer métodos variados e cálculos envolvendo os conteúdos anteriormente descritos, mas para minha infelicidade eu não estava capacitado o suficiente para desenvolver os raciocínios, métodos e cálculos, ocasionando assim em reprovação em uma área do conhecimento matemático que me instigava muito. Passaram-se alguns semestres e eu me propus a refazer então a disciplina, sendo dessa vez com outro professor, em outro período de aulas, com metodologias diferentes, ânimos renovados, ocasionando em aprovação.

Os semestres se passaram e veio o interesse em me lançar ao desafio de fazer um mestrado, fiz uma seleção de vagas remanescentes no início de 2018, fui aprovado em 1º lugar, mas não pude ingressar por não ter finalizado a graduação. No final do ano, já estando com todas disciplinas da licenciatura cumpridas, fiz novamente o processo seletivo para ingresso em 2019 e mais uma vez tive a felicidade de ser aceito.

Quando entrei para o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), sabia que eu queria pesquisar sobre tecnologias, mas estava acessível a novas experiências, a novas propostas e engajado em buscar meios para que essas experiências fossem as mais prazerosas possíveis. Dentre as opções discutidas estavam trabalhar com o *smartphone* um conteúdo de Análise Matemática ou Integrais Múltiplas, um dos meus algozes da reprovação em Cálculo III.

Embora tenha me tomado um semestre, as integrais sempre fizeram parte da minha instigação em estudar Cálculo. Por esse motivo escolhemos esse tópico da matemática, dentro do Cálculo, como um dos temas para esta pesquisa.

O tema então começou a ser desenvolvido depois de muita análise, discussão e maturação da ideia em grupo. Sendo assim, ele foi sistematizado pela indagação de pesquisa: **"Como ocorre a produção de conhecimentos de integrais duplas com *smartphone* e o aplicativo GeoGebra?"**. Para responder a tal interrogação objetivamos analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra.

Chiari (2015, p. 39) salienta que Borba e Villarreal (2005)

> [...] utilizam a metáfora "seres-humanos-com-mídias" para destacar a produção coletiva de conhecimento além do papel das mídias nessa produção, às vezes subestimado. Para eles, as mídias, digitais ou não, condicionam a forma como os humanos podem pensar, mas não a determinam. Elas moldam os modos como os humanos pensam, assim como os humanos podem moldá-las, em um processo dialético ao qual denominaram moldagem recíproca.

Ou seja, o conhecimento é produzido por meio de atores humanos e não humanos e assume-se que "[...] professores, estudantes e tecnologias fazem parte de um sistema coletivo dinâmico e que a produção de conhecimento se dá por meio desse coletivo [...]" (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018, p. 57).

Ainda para atingir esse objetivo geral da pesquisa, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: i) Analisar movimentos e alterações no sistema de atividade ao trabalhar no ambiente GeoGebra com o *smartphone* em estudos sobre integrais; ii) Analisar possíveis contribuições e limitações do *smartphone* e do GeoGebra na extensão de conceitos de integrais simples para integrais duplas; iii) Analisar possíveis transformações expansivas ocorridas no sistema de atividade durante o estudo dos conceitos de integrais duplas com o *smartphone*.

É preciso contextualizar e observar que a pesquisa está inserida dentro de um escopo maior, ou seja, a pesquisa de mestrado que é apresentada nas próximas páginas faz parte do Projeto Tecnologias Digitais Móveis e Educação Matemática, com coordenação da Profa. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari. O projeto tem duração de três anos, iniciando em 2019 e o objetivo principal é explorar e analisar possibilidades de uso do celular em aulas de matemática, em distintos níveis e processos educativos.

Embora no objetivo do projeto apareça “celular”, necessito neste momento alertar que para esta pesquisa não utilizarei tal termo, uma vez que não entendo o *smartphone* como apenas celular, pois todo *smartphone* pode ser um celular, mas nem todo celular pode ser um *smartphone*, porém esta questão discutirei mais à frente.

Cabe ainda, nesse texto de abertura, fazer um comentário sobre os capítulos que apresentarei a seguir, além de fazer uma breve explicação sobre os títulos presentes em cada tópico, para possibilitar maior clareza acerca das metáforas presentes, assim como foi no início desta introdução. Ainda é necessário esclarecer que as metáforas dos títulos aqui usadas são para fazer referências ao contexto do estudo, o *smartphone*, na intenção de aproximar esse elemento do relato que se faz da pesquisa associada a ele.

No Capítulo 1, que intitulei **“Captando figurinhas das vozes da literatura e ampliando o foco na história das “tecnologias” e do *smartphone*”,** o principal tema abordado são as tecnologias. “Captando” refere-se às considerações que estudiosos trazem de contribuições para a pesquisa. “Ampliar” trata de colocar um *zoom* nas tecnologias. Nesse capítulo discorro sobre como foram as evoluções tecnológicas dentro do contexto da educação matemática, das suas variações, como tratarei o termo e de como o diferenciarei das tecnologias digitais, finalizando com uma seção que conta um pouco sobre o GeoGebra e os aplicativos do GeoGebra para o *smartphone*.

No Capítulo 2, intitulado **“Três *cliques* na história da Teoria da Atividade”**, discorro sobre a Teoria da Atividade usando a metáfora de três *cliques*. Na metáfora desse título os “cliques” tratam das três gerações da Teoria da Atividade. No primeiro *clique* faço uma “rebobinação” para a raiz da teoria na escola histórico-cultural russa, considerando as ideias de Marx e Engels, nas quais Vygtosky se baseia para conceber a ideia de mediação. O segundo *clique* passa das ideias de Vygotsky para seu discípulo Leontiev, que contribui qualitativamente com o princípio da cultura influenciando a atividade, portanto trazendo o caráter coletivo para a atividade humana. O terceiro *clique* traz as ideias de Engeström, o qual toma como base as ideias dos dois psicólogos anteriores para conceber o que ele chama de terceira geração da teoria. Ainda faço uma consideração sobre uma fase de transição entre a terceira para uma quarta geração apoiado em Souto e Borba (2016).

O Capítulo 3 foi reservado para escrever sobre a metodologia. Esse texto da dissertação traz a narrativa de como foi pensada as etapas da produção de dados, desde a sua idealização, a produção de dados e a pós-produção. O título **"Ampliando horizontes e conectando possibilidades com o *smartphone*"** remete a uma metáfora em que buscamos, com uma proposta metodológica para esta pesquisa, novas possibilidades de se fazer pesquisa. Ou seja, fazemos um convite ao leitor para que possa olhar para o horizonte acadêmico e observar o que tecnologias, como o *smartphone*, podem ampliar possibilidades de se pesquisar no campo da Educação Matemática. A metáfora do "conectar" aqui busca integrar essas diferentes "capacidades" que o *smartphone* agrega ao campo investigativo tanto em ser o protagonista da pesquisa quanto em ser ele próprio o coadjuvante, no sentido de ser pesquisado e de ser um suporte à pesquisa.

Ainda na metodologia apresento o Projeto de Ensino de Graduação (PEG) que culminou em um curso intitulado "Integrais Múltiplas e *Smartphone*: o que podemos?", os sujeitos, as tarefas, os materiais utilizados, duração e os temas de cada encontro.

"Deslizando sobre telas e produções: a sensibilidade de olhar para os dados" é o título do Capítulo 4. Essa seção da dissertação traz a metáfora de fazer um "deslize" na "tela" dos dados. É nesse momento que olho para a produção dos sujeitos pesquisados e lanço meu olhar sensivelmente para os dados e deixo que eles me levem pela construção que os alunos do curso fizeram durante os dias dos encontros.

Dividimos essa seção em quatro subseções tratando dos movimentos iniciais em que apresento o grupo escolhido para análise, comentando algumas de suas características. As outras três subseções tratam dos vídeos gravados pelos alunos por meio do *smartphone*, intitulados "panoramas", em que olho para os dados com uma visão "panorâmica", trazendo partes dos vídeos, partes das falas dos alunos, das considerações feitas por eles nas folhas de respostas e as entrevistas, de forma complementar.

Por fim, apresentou o texto das considerações finais, em que brinco no título sobre “fechar telas”, uma vez que desejamos colocar apenas em *standby a pesquisa*. Isto é, não pretendemos finalizar discussões sobre Cálculo, tecnologias digitais e nem mesmo sobre a teoria aqui utilizada na pesquisa, mas contribuir com outras pesquisas e realizar outros estudos e pesquisas.

1 CAPTANDO FIGURINHAS DAS VOZES DA LITERATURA E AMPLIANDO O FOCO NA HISTÓRIA DAS "TECNOLOGIAS" E DO *SMARTPHONE*

Nesse capítulo trazemos nos títulos várias metáforas como, por exemplo, o "captar figuras" que nos remete ao ato de pegar figurinhas (mensagens), ou seja, significa que vamos observar o que temos de informações disponíveis e trazer para o trabalho. O sentido dessa metáfora nos permite ir ao encontro do que os pesquisadores têm pesquisado, do que eles podem nos informar acerca do que estudamos nessa pesquisa. São contribuições significativas que nos possibilitam caminhar e observar sobre algo que já se tem pesquisado a partir do que o outro pode nos falar.

Outra metáfora faz referência às "vozes" da literatura. Ela é inspirada pela expressão de Borba, Almeida e Gracias (2018) em que falam que uma pesquisa é a junção de várias vozes.

Ainda temos a nossa ampliação do foco na história evolutiva das tecnologias digitais em Educação Matemática e, principalmente, do *smartphone*. Nossa intenção é, com base em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015), relatar o desenvolvimento das tecnologias digitais na área de Educação Matemática. Nesse sentido, buscamos ir além de como as tecnologias digitais evoluíram, fazendo um entrelaçamento entre a Educação Matemática e a evolução do *smartphone*. A parte do foco refere-se a como definir o termo "tecnologia", desde as concepções aqui adotadas para essa palavra, baseados em Kenski (2012), até uma breve reflexão acerca da expressão "tecnologia digital".

1.1 Antes de iniciar, vamos conversar? Ouvindo as vozes de pesquisas

A revisão da literatura representa a hora em que conversamos com outros autores para sabermos o que se tem pesquisado, sejam em teses ou dissertações, para além de situar a indagação de pesquisa, os temas abordados, nos dar subsídios teóricos. "A revisão de literatura, portanto, tem como voz principal a literatura, que pode aparecer na forma de citações diretas ou indiretas [...]" (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018, p. 76). Por isso, trazemos nesse texto duas produções já defendidas que tem relações com essa pesquisa.

Para fazer a revisão de literatura, acessei a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), coloquei um primeiro filtro como "educação matemática" só como curiosidade e a busca me retornou 7915 resultados. É um número baixo considerando a expansão que temos dentro desse campo de pesquisa no Brasil, mas precisamos observar que a busca faz uma varredura do que tem no seu banco de dados e procura por termos nos metadados das pesquisas.

Como o Cálculo Diferencial e Integral é um campo muito pesquisado dentro da academia, ao se colocar na busca o termo "cálculo" temos um total de 35.939 teses e dissertações. Por isso, precisamos criar um método que nos levasse à aproximação desse trabalho. Assim, entendemos como Borba, Almeida e Gracias (2018, p. 75) que "uma sequência razoável é [...] como um cone com o vértice para baixo, que vá afunilando [...]".

Ao iniciar a busca pelas vozes da literatura dentro desse "conversar com o outro sobre", inseri o primeiro filtro na plataforma BDTD para estreitar a indagação da minha pesquisa. Para tanto, escolhemos o termo "tecnologias digitais", pois minha pesquisa contempla o estudo dos dispositivos móveis, nesse caso *smartphone*. A busca me retornou, em junho de 2020 um número muito alto de resultados, 5241 produções. Dentre essas, 1254 teses e 3988 dissertações. Com essa quantidade toda fica praticamente impossível ter tempo para conversar com todos os autores.

Outras combinações foram propostas, como o Quadro 1 apresenta:

Quadro 1 – Quantidade de produções em relação aos filtros

Filtro	Resultados
Tecnologias digitais	5421
Cálculo integral	1858
Geogebra 3D	145
Aplicativo Geogebra Cálculo	46
smartphone AND cálculo	41
Cálculo+diferencial+e+integral Geogebra	22
Tecnologias+digitais AND cálculo	22

Fonte: o autor, 2020.

Ao partir das experimentações com as combinações, com o auxílio da plataforma, me informei da possibilidade de usar operadores de busca, como é o caso do "+" e do "AND". Esses são chamados de Operadores Booleanos e

> [...] permitem que os termos se combinem como operadores lógicos. [...] O operador booleano AND (em português e) é padrão, isso significa que se não for explicitado um operador entre dois termos o AND será utilizado. O

> operador AND busca por registros que contenha os termos em qualquer campo do registro. [...] O operador de obrigatoriedade ‘+’ requer que o termo apresentado depois do ‘+’ exista em qualquer campo do registro [...][1].

Finalizei então o rastreio com 44 pesquisas. Mesmo assim, a quantidade de trabalhos ainda continuava grande e para fazer o afunilamento das produções comecei um processo de *downloads* para verificação de títulos e palavras-chave que se relacionassem de modo mais direto com o tema desta pesquisa.

Com a exclusão de repetições e produções que se distanciavam do tema, ficamos então com o total de dois trabalhos que mais se relacionam a essa pesquisa, ou seja, trabalharam em com Cálculo, GeoGebra, Ensino Superior ou *smartphone*, como mostrado a seguir (Quadro 2 – Título, autor e ano):

Quadro 2 – Título, autor e ano

Título	Autor	Ano
A integração do GeoGebra no estudo de funções	Daniele Galvão Mathias	2018
Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação	Marcos Dias da Rocha	2010

Fonte: o autor, 2020.

Ainda, para esse relato trazemos dois trabalhos internos ao PPGEduMat e que fazem parte da linha de pesquisa “Tecnologia e Educação Matemática”, sendo um desses interno ao Projeto TeDiMEM. Esses estudos não apareceram na plataforma da BDTD. Tais estudos investigam as tecnologias digitais móveis e também são ambientados no Ensino Superior. O primeiro tem como pesquisadora Juliana Leal Salmasio e o segundo, Vanessa Rodrigues Lopes.

A partir desses dados selecionados, começamos então a leitura e exploração de cada resumo para ouvirmos o que cada autor, as vozes da literatura, tem a nos falar. Os trabalhos fazem parte de temas que tangenciam de algum modo essa pesquisa, sendo que todos eles fazem referência a algum tópico matemático e exploram as tecnologias digitais. Então, vamos ouvir o que eles têm a nos dizer?

A ordem de apresentação foi estabelecida de modo a favorecer a discussão, o encadeamento de ideias e o estabelecimento de relações com esse relato de pesquisa. Portanto, inicio a escrita com a dissertação intitulada “A integração do

[1] Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/Search/Advanced>. Acesso em: 05 de jun. de 2020.

GeoGebra no estudo de funções” de autoria de Daniele Galvão Mathias, defendida em 2018 na cidade de Pelotas – RS na Universidade Federal de Pelotas.

Mathias (2018) traz como objetivo compreender o potencial pedagógico da integração do *software* GeoGebra ao estudo de funções: afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Para o estudo ela definiu como sujeitos de pesquisa alunos do curso de Licenciatura em Matemática que faziam parte do nono semestre.

Os métodos de trabalho foram divididos em duas fases: na primeira os alunos trabalharam em um laboratório de informática onde foram exploradas cada uma das funções citadas no objetivo no *software* GeoGebra. Na segunda os alunos criaram atividades baseadas no que foi estudado. Além disso, a produção de dados foi pautada em atividades de testes e questionários aplicados ao longo das atividades (MATHIAS, 2018).

Por fim, os resultados mostraram que as visualizações auxiliaram, mas que os cálculos eram feitos por mídias antigas, como lápis e papel. Ela ainda comenta que os alunos eram os chamados nativos digitais, mas que não viveram a cultura digital durante os anos em que estudaram no ensino básico (MATHIAS, 2018).

A autora traz discussões acerca do estudo de funções com o uso do *software* GeoGebra, enquanto esta pesquisa de mestrado buscou realizar mais especificamente o estudo das integrais com o uso do aplicativo GeoGebra instalado no *smartphone*. Embora o programa para o computador e o aplicativo se pareçam, há particularidades e diferenças em cada um. Há diferenças também entre o computador e o *smartphone* citando, por exemplo, o fácil manejo dos *smartphones* que já andam nos bolsos dos estudantes.

Em Salmasio (2020) o uso do *smartphone* foi investigado junto com o tema de Transformações Lineares, dentro da disciplina de Álgebra Linear, enquanto em Lopes (2020) o uso do *smartphone* foi pesquisado entrelaçado com a aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

Salmasio (2020) intitulou seu trabalho como “Desbloqueando Telas para produzir matemática(s): possibilidades e limites envolvendo Álgebra Linear e *smartphone*”. Para o trabalho, a autora trouxe como objetivo de pesquisa investigar o processo de desenvolvimento de tarefas de transformações lineares por alunos de licenciatura em matemática ao utilizarem o GeoGebra mobile a fim de responder à indagação “como um grupo de licenciandos em matemática da UFMS desenvolvem tarefas de Álgebra Linear com o GeoGebra no celular?”.

A autora usou da Teoria da Atividade para nortear a produção e a análise de dados da pesquisa. Além disso, para realizar a produção de dados desenvolveu um Projeto de Ensino de Graduação com 22 alunos da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – campus Campo Grande. Tal projeto teve sete encontros no qual os participantes discutiram tarefas matemáticas sobre Transformações Lineares.

Segundo suas conclusões, o celular (*smartphone*) favorece o pensamento dos alunos, favorecendo também a (re)estruturação de conjecturas, validação de possíveis hipóteses levantadas e, além disso, ainda podem ampliar suas percepções sobre representação gráfica e o entrelaçamento entre os aspectos algébricos e geométricos (SALMASIO, 2020).

A pesquisadora trabalhou no Ensino Superior com o *smartphone*, a Teoria da Atividade e o conteúdo de Álgebra Linear discutindo a produção de conhecimentos. Nesse sentido, a relação da pesquisa de Salmasio (2020) com esta pesquisa se dá pelo entrelaçamento dos três primeiros temas, os quais também estão presentes nesta investigação. O distanciamento se dá pelo conteúdo de Salmasio (2020) estar centrado no campo da álgebra, enquanto nós focamos no ensino de Cálculo e suas representações gráficas.

Em Lopes (2020) a pesquisa entrelaça o uso do *smartphone* com a aprendizagem de cálculo diferencial e integral em um ambiente construcionista. Por isso, a autora intitulou sua tese como “ações em um ambiente construcionista com uso de *smartphone*: uma proposta bimodal para estudar conceitos de cálculo”. Para orientar a investigação, a pesquisadora se baseou na questão “que ações podem favorecer a aprendizagem de conceitos de Cálculo, em um processo de educação bimodal, com uso de *smartphones*?”.

Na metodologia do trabalho podemos encontrar a construção de uma proposta de estudos de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral, em que a autora se utilizou de encontros presenciais e a distância, com/para o uso do *smartphone*.

Para o embasamento teórico, Lopes (2020) buscou as ideias de ciclo de ações e estar junto virtual de José Armando Valente e a Teoria das Situações Didáticas (TSD). A partir disso, a autora denominou sua proposta como “Estar Junto Virtual Ampliado Com *Smartphones*” (LOPES, 2020). Para finalizar, a pesquisadora comenta que vários foram os fatores que influenciaram a aprendizagem dos alunos e o estar junto em um ambiente construcionista, em que se articulam o espaço presencial e virtual. Entre eles, pode-se citar as atividades, o GeoGebra, a interação entre os indivíduos, os questionamentos e os desafios que foram propostos (LOPES, 2020).

Nesse sentido, vemos o trabalho de Lopes (2020) como uma pesquisa que se relaciona com o que foi desenvolvido nesta pesquisa. A autora trabalha com o Cálculo em turmas do Ensino Superior por meio do GeoGebra no *smartphone*. Apesar de trazer ideias como o ciclo de ações, estar junto virtual e a TSD, a autora permeia os assuntos descritos anteriormente buscando analisar a aprendizagem dos alunos. Por isso, vemos que as distinções aqui se encontram na teoria que orienta os estudos, na metodologia, na proposta pedagógica e no foco do objeto matemático investigado.

Outro trabalho que optamos resgatar é o de Rocha (2010), que possui como título “Desenvolvendo atividades computacionais na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação”, é de autoria de Marcos Dias da Rocha e foi publicado em 2010 na Universidade Federal de Ouro Preto, na cidade de Ouro Preto – MG.

Rocha (2010) definiu “Que contribuições uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação, proporcionada pelo ambiente informatizado, pode trazer para a compreensão dos conceitos de limite, derivada e integral em uma disciplina de Cálculo?” como sua questão de pesquisa e a partir dela definiu suas raízes teóricas e metodológicas.

O autor, para a produção de dados, trabalhou com uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I em que todos os alunos eram repetentes e de cursos diversos. Semanalmente o professor da turma cedia duas aulas para atividades em laboratório de informática que tratavam de conceitos de Cálculo (limite, derivada e integral). Essas atividades eram desenvolvidas com o *software* GeoGebra. Os registros produzidos pelos alunos, por meio de papel, computador, questionário, avaliação da disciplina feita pelo professor e diários de campo feitos pelo autor e por um assistente de campo foram utilizados para a análise de dados (ROCHA, 2010).

Por fim, Rocha (2010) salienta que espaços informatizados contribuem para a formulação de conjecturas e formam alunos exploradores e participativos. Além disso, a visualização e a experimentação foram potencializadas por meio do GeoGebra.

Vemos no texto de Rocha (2010) que a intenção era desenvolver uma pesquisa com o assunto de Cálculo em turmas repetentes. Nesse sentido, a relação estabelecida com o trabalho aqui desenvolvido está em temas como o próprio Cálculo, o GeoGebra, que mesmo sendo software ainda possui similaridades com o aplicativo, como veremos mais à frente, e a atenção com o Ensino Superior. Ainda trazemos elementos da pesquisa do autor para nos embasar em algumas ideias apresentadas a seguir.

Ainda gostaria de dar um *standby* para falar de um pouco mais sobre um assunto que abordamos nessa pesquisa: a disciplina de Cálculo. Já me apropriando de algumas ideias de Rocha (2010), Nasser, Sousa e Torraca (2017) e Baruffi (1999), discorro um pouco sobre as características que a disciplina implica para alguns graduandos, tentando fazer um paralelo com o estudo de funções de várias variáveis.

Isso se torna necessário para explicar a seguinte pergunta “por que fazer uma pesquisa dentro de um tema que já consta em diversas pesquisas?”. Não é nada fácil responder a tal questionamento, mas dentro do Cálculo há divisões e subdivisões e, ao pararmos e analisarmos cada uma, percebemos que elas têm muitas características, variados modos de aprender e dificuldades enraizadas que há muito tempo “assombram” professores e alunos. Rezende (2003, p. 324) afirma que

> as dificuldades de aprendizagem que os alunos apresentam em geral num curso inicial de Cálculo no ensino superior são bem diversificadas e se encontram distribuídas ao longo de todo o processo didático. Vão desde de “problemas de fundo emocional”, como, por exemplo, o temor pela possível reprovação, aos “problemas de base” na formação matemática do estudante.

O Cálculo, apesar das muitas pesquisas existentes, ainda se constitui como campo rico para investigação. Não é novo que um professor ao se deparar com turmas cheias de alunos verificará ao final do processo educativo vários problemas quanto ao ensino nessas disciplinas, seja o primeiro Cálculo, o segundo, etc.

Baruffi (1999, p. 16) comenta que, em geral, um acadêmico que ingressa na universidade e já se depara com essa disciplina nunca “[...] trabalhou com nenhuma das noções do Cálculo, e que os novos conceitos lhe são apresentados segundo uma abordagem que está muito pouco relacionada com a maneira pela qual o Cálculo foi sendo historicamente estruturado [...]”. Mas daí surge uma pergunta: “Mas você não trabalhará com o primeiro Cálculo, e sim com a parte de integrais múltiplas, que é parte constituinte de cálculos seguintes”.

Nesse momento, preciso ponderar que nem por isso as dificuldades deixam de existir, mesmo os alunos que já superaram o “Cálculo I” podem apresentar dificuldades quando se defrontam com os próximos Cálculos, inclusive essas dificuldades podem se potencializar, como Lopes (2020, p. 14) destaca

> [...] uma dificuldade que compromete a aprendizagem dos alunos está relacionada com a forma como os conceitos do Cálculo são explorados em sala de aula, a partir de uma apresentação formalizada, como verdades absolutas, sem proporcionar ao educando um ambiente de discussão e produção no qual favoreça ações de reflexão [...].

“Por que podem potencializar?” Basicamente quando o aluno passa pelo primeiro Cálculo ele pouco vê questões de tridimensionalidade. Nasser, Sousa e Torraca (2017, p. 44) em uma revisão de literatura comentam que

> Observa-se que grande parte dos problemas propostos na disciplina de Cálculo depende de uma representação visual adequada [...]. Em geral, a dificuldade dos alunos nesses problemas não é na aplicação do conceito de derivada ou de integral, mas na sua representação geométrica e na identificação de relações entre as grandezas envolvidas no problema ou os elementos da figura.

É nesse ponto que quero tocar, pois quanto ao Cálculo de várias variáveis, os elementos geométricos são de extrema importância para a visualização e compreensão de problemas. Por isso, temos nas tecnologias um forte potencial, como aponta Rocha (2010, p. 18-19):

> [...] os problemas que envolvem a aprendizagem de uma disciplina são bastante complexos, mas, no caso específico do Cálculo, a literatura aponta que o uso de softwares gráficos pode trazer contribuições em diferentes aspectos como, por exemplo, na visualização e análise de gráficos (NASSER, 2007). O uso das TIC pode criar um ambiente favorável para o trabalho com funções e, assim, contribuir para a compreensão dos novos conceitos.

O pesquisador, ao relatar sobre ambientes computacionais para o ensino de Cálculo, traz contribuições sobre a visualização e a experimentação de funções de uma variável. Quando lançamos nosso olhar para a questão das funções devemos fazer um adendo, ou seja, ao tentarmos representar o gráfico de uma função do tipo $f(x)$, uma das grandes dificuldades reside na busca por gráficos de funções que exigem maior detalhamento. Mas ao tentarmos desenhar uma função do tipo $f(x, y)$ essa dificuldade pode se tornar maior, pois passa a ser um objeto matemático tridimensional. Mas essa mesma dificuldade pode até mesmo não existir, visto que cada aluno produz conceitos de maneiras diferentes.

Além disso, “[...] os alunos precisam resolver várias listas de exercícios com diversos tipos de limites, derivadas e integrais, muitas vezes, sem discutir os significados dos conceitos relacionados a esses tópicos” (ROCHA, 2010, p. 24). Nesse sentido, uma das nossas propostas consiste em discutir os conceitos relacionados a esse tema. Logo, na produção e análise de dados que realizamos na pesquisa vamos além do visualizar e experimentar, vamos em busca de outras contribuições das tecnologias que podem potencializar a produção de conhecimento de integrais duplas.

1.2 As fases das tecnologias digitais em Educação Matemática e o *Smartphone*

> *"Eu me lembro até hoje, quando fomos a uma cidade vizinha a Tupi Paulista, porque quando precisávamos comprar móveis ou algo do tipo íamos à cidade vizinha. E aí, me lembro que eu comprei o primeiro telefone celular. De dentro do carro mesmo eu liguei pra minha mãe e falava: 'mãe, não tem fio nenhum. Não sei como minha voz chega até aí e não sei como eu te ouço'" – Profa. Cida Chiari em uma disciplina que debatia tecnologias digitais na pós-graduação.*

No relato acima, da Profa. Cida Chiari, orientadora desse trabalho, em uma disciplina que tinha como tema as tecnologias digitais e o processo educativo, podemos ver sua empolgação ao comprar seu primeiro telefone celular. A evolução das tecnologias é algo que notamos em todo trabalho sobre o tema e que conseguimos ver a "olho nu".

Com base em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015) trago para a discussão neste texto um paralelo entre a evolução das tecnologias digitais em Educação Matemática (EM) com o desenvolvimento histórico do celular. Assim, falando especificamente do celular, temos sempre a capacidade de contemplar a história recente desse artefato e perceber que seu desenvolvimento é veloz.

1.2.1 Primeira geração dos celulares e a primeira fase das Tecnologias Digitais em Educação Matemática

Em uma pesquisa rápida na internet sobre a história do celular, observamos que seus primeiros expoentes começaram a aparecer em 1947, com a sugestão das redes de telefonia móvel. Embora o primeiro telefone celular só aparecesse em 1973, ainda denominado de protótipo e que foi batizado de DynaTAC, gerou somente depois de dez anos do início dos primeiros testes (1983) "[...] o primeiro modelo que foi liberado comercialmente nos EUA (alguns outros países já haviam recebido aparelhos de outras marcas) foi o Motorola DynaTAC 8000x [...]" (TECMUNDO, 2009)[2] marcando, assim, o início da primeira geração de celulares. Na Figura 1 vemos o primeiro celular vendido comercialmente.

Figura 1 – DynaTAC 8000x da Motorola

Fonte: Tecmundo, 2009.

A primeira geração de telefones móveis é caracterizada por dispositivos pesados, com cerca de um quilograma, 30 centímetros de altura e possuía elevado preço de venda. Será que é dessa geração que veio a expressão "tijolão"? Talvez.

Nessa mesma época, anos 1980, já começavam as discussões de como atrelar as tecnologias informáticas (ou tecnologias computacionais, terminologias usadas na época) com a Educação Matemática. Iniciam-se aqui as Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015). Antes de tudo é preciso salientar que, apesar de existirem tais fases, o início e o término de cada uma não são bem definidos, pois "[...] o surgimento de cada fase não exclui ou substitui a anterior. Há certa 'sobreposição' entre as fases, elas vão se integrando [...]"

[2] Utilizo o site TECMUNDO que é especializado em temas de tecnologia e mantido pela empresa NZN (No Zebra Network, em português: rede sem zebra), que também é responsável pelo site www.baixaki.com.br, entre outros.

(BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 18). Também observamos que essa é uma entre várias classificações ou sistematizações possíveis.

Na Educação Matemática, as principais contribuições de estudos desse período tratam do uso do *software* LOGO por volta de 1985 para o ensino de geometria. Esse *software* traz em sua interface uma tartaruga que, por meio de linguagem de programação, executa os comandos inseridos pelo indivíduo. Como mencionado por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015, p. 19),

> cada comando do LOGO determina um procedimento a ser executado por uma tartaruga (virtual). Os movimentos da tartaruga, como passos e giros, possibilitam a construção de objetos geométricos como segmentos de retas e ângulos. A natureza investigativa do LOGO diz respeito à construção de sequências de comandos (um algoritmo) que determina um conjunto ordenado, ou sequencial, de ações que constituem uma figura geométrica.

Sobre a linguagem LOGO, que surgiu em 1967, Valente (1999) destaca que essa linguagem se baseia na teoria piagetiana e em ideais de inteligência artificial.

> Inicialmente, essa linguagem foi implementada em computadores de médio e grande porte (PDP 11 e PDP 10, respectivamente), fato que fez com que, até o surgimento dos microcomputadores, o uso do Logo ficasse restrito às universidades e laboratórios de pesquisa. As crianças e professores se deslocavam até esses centros para usar o Logo, e nessas circunstâncias os resultados das experiências com o Logo se mostraram interessantes e promissores (VALENTE, 1999, p. 15).

Tais construções permitiam aos usuários a visualização de figuras geométricas a partir do uso de conceitos como ângulos, retas, ... Assim, triângulos, quadriláteros e demais figuras geométricas eram investigadas.

1.2.2 Segunda geração de celulares e a segunda fase das Tecnologias Digitais em Educação Matemática

Com o tempo e a necessidade de aparelhos mais leves e dinâmicos, as empresas de telefonia móvel começaram a investir na diminuição das suas dimensões. Assim, a partir da década de 1990 essas empresas iniciaram as vendas de celulares menores. Por isso, a chamada segunda geração "não traria apenas novos aparelhos, todavia também iria aderir a novos padrões de comunicação. Três tecnologias principais iriam imperar nesta época, eram elas: TDMA[3], CDMA[4] e GSM[5]

[3] Time Division Multiple Access, utiliza a separação de chamadas pelo tempo.
[4] Code Division Multiple Access, utiliza a separação de chamadas por um código único.
[5] Global System for Mobile Communications.

[...]"[6] (TECMUNDO, 2009). As principais contribuições dessa geração aos dispositivos basearam-se nas formas como as pessoas se comunicavam. Ou seja, foram atualizações em relação às chamadas e a um novo método de comunicação: as mensagens de texto.

Havia muitas complicações para o uso das mensagens de texto, apesar do teclado alfanumérico, pois os celulares receptores precisavam ser compatíveis com essas novas funções, havia quantidade de caracteres limitada e não era possível inserir caracteres especiais e nem acentos nas letras.

Ainda dentro da segunda geração, mas já se encaminhando para a terceira, os dispositivos começaram a agregar outras particularidades como sons, os chamados *ringtones*, e aí se deu o início das cores: inicialmente com quatro mil cores, depois 64 mil e então 256 mil. Em 2009 nos deparamos com a seguinte afirmação: "[...] Obviamente, a evolução não parou e hoje os aparelhos possuem 16 milhões de cores, um recurso que é fundamental em aparelhos de alta resolução" (TECMUNDO, 2009).

Com essa possibilidade, a nova funcionalidade atraiu vários olhares e, consequentemente, evoluções: o envio de mensagens multimídias, possibilitando o compartilhamento de imagens e até vídeos. Não é nossa intenção ficar comparando e nem trazer dados exaustivos sobre os avanços dos aparelhos celulares, mas contar um pouco sobre as gerações do celular e de como foi sua evolução.

É interessante como as evoluções dos celulares e as fases do uso de tecnologias da informática na educação caminham próximas. Ao olhar para a segunda geração do celular, podemos observar que ela se inicia por volta dos anos 1990. Já a segunda fase das tecnologias digitais em educação matemática também inicia nos anos 1990, pouco antes da sua metade (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015).

A segunda fase das tecnologias digitais em Educação Matemática tem como principal característica o acesso aos computadores e a sua popularização (CHIARI, 2015). "[...] Nessa fase houve uma grande variedade de perspectivas em relação a como alunos, professores e pesquisadores vivenciavam o papel dos computadores em suas vidas, pessoais ou profissionais" (CHIARI, 2015, p. 41).

Apesar de haver certa descrença com o uso de computadores para o ensino, os que se utilizavam de algum modo buscavam *softwares* "[...] voltados às múltiplas

[6] Para mais informações sobre esse tipo de tecnologias sugiro o site: https://tecnologia.uol.com.br/ultnot/2006/11/24/ult2870u201.jhtm. Acesso em: 13 de abr. de 2020.

representações de funções (como o Winplot, o Fun e o Graphmathica) e de geometria dinâmica (como o Cabri Géomètre e o Geometricks) [...]" (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 23). Tais softwares são conhecidos por serem dinâmicos, de fácil visualização e uso em experimentações.

Importante lembrar, que, ao final da década de 90 foi criado o Programa Nacional de Informática na Educação (PROINFO), implantando, ao final do ano de 1998, 119 Núcleos de Tecnologia Educacional nos 27 estados brasileiros. Além disso,

> [...] capacitou, por intermédio de cursos de especialização em Informática em Educação (360 horas), cerca de 1.419 multiplicadores para atuarem nos NTEs. [foram entregues] em 1999 cerca de 30 mil microcomputadores para ser implantados em escolas e em outros 100 NTEs. A meta é atingir 3 mil escolas, 21 mil professores e 2 milhões de alunos [...] (VALENTE, 1999, p. 20).

Com os softwares, como Winplot, Fun, Graphmathica, Cabri Géomètre e o próprio PROINFO capacitando profissionais de educação pelo Brasil, temos os termos mais utilizados nessa fase variando de tecnologia informática a *softwares* educacionais e tecnologia educativa.

1.2.3 Terceira geração em direção à internet móvel e a terceira fase das Tecnologias Digitais em Educação Matemática

Chegamos então à virada do milênio e os celulares estão entre a segunda e terceira geração, um marco importante está no fato de a *internet* começar a ser pensada para os celulares.

> Evidentemente, a internet que era acessada através de um celular não era nada parecida com aquela que as pessoas utilizavam nos computadores, no entanto, isso deveria evoluir muito em breve. Era necessário que os portais criassem páginas próprias para celular (as chamadas páginas WAP), com conteúdo reduzido e poucos detalhes (TECMUNDO, 2009).

Mas o que temos na terceira fase de "vida" dos dispositivos que tanto nos movimentam? Sem dúvidas, a internet nos celulares foi a maior novidade da terceira fase. Evidentemente essa aquisição é um compartilhamento entre a segunda e a terceira geração, pois demandava tempo até os usuários terem acesso a todas essas novas funcionalidades, visto que o valor monetário de um celular era algo elevado ainda nos anos 2000. O desenvolvimento da qualidade da internet, câmeras nos aparelhos e possibilidade da reprodução de arquivos de áudio foram pontos importantes que marcaram essa etapa da história dos celulares.

Em sua terceira geração as vantagens do uso de celulares eram “[...] videochamada, conexão de internet de alta velocidade, economia de energia nos aparelhos e funcionalidade de internet sem a necessidade de um aparelho celular (é possível utilizar a rede de internet 3G em Modems)” (TECMUNDO, 2009).

Neste período, enquanto os celulares estavam na terceira geração entre o início da internet nesses dispositivos e a chegada do 3G, a terceira fase do uso das tecnologias digitais na educação matemática iniciava com o acesso à internet nas escolas, pelos computadores.

Na terceira fase das tecnologias digitais em EM a internet começava a ser usada para viabilizar acesso à fontes de informação e à espaços de comunicação entre professores e alunos. Além disso, pode ser mencionado ainda que essa tecnologia foi utilizado para “[...] realização de cursos à distância para formação continuada de professores via *e-mails*, *chats* e fóruns de discussões [...]” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 31–32), principalmente pela sua característica informacional e comunicacional.

Nessa fase são utilizados como espaços de comunicação o Teleduc[7], *e-mail*, *chat*, fórum, e uso de Ambiente Virtuais de Aprendizagem, como o *moodle*. O Google é um dos navegadores usados para busca de informações. A terminologia mais utilizada nessa época é “TIC”, que significa Tecnologias da Informação e Comunicação.

1.2.4 Um encontro de mobilidade: a quarta geração dos celulares rumo ao computador de mão e a quarta fase das Tecnologias Digitais em Educação Matemática

Vimos nas páginas anteriores que os celulares, em seus primórdios, eram grandes, pesados, foram se transformando, agregando novas funcionalidades, diminuindo seus tamanhos e pesos. Assim como o uso de Tecnologias Digitais foi se alternando no campo da Educação Matemática, apareceram diferentes e se tornaram mais utilizadas em certas fases que outras, isto é, distintas tecnologias tornaram-se presente ao longo da história.

> Assim como demorou certo tempo para que o 3G fosse estabelecido, a quarta geração de telefonia celular (4G) não chegará tão rápida, mas já há algumas ideias de como ela será. Assim como o 3G já fez, a 4G deve continuar investindo no avanço da transmissão de dados. É muito provável que os novos aparelhos celulares já trabalhem com o protocolo IP e sejam compatíveis com as redes de computador, ou seja, a tendência é uma só: os

[7] É um ambiente online que se realiza cursos à distância.

> celulares estão prestes a virar computadores minúsculos (TECMUNDO, 2009).

Visto que o texto foi escrito em 2009, vamos pensar mais sobre essa informação. Voltando um pouco no texto, você pode verificar que nesse mesmo ano eu ainda estava com o primeiro computador, de mesa, sem internet em casa. O autor já imaginava o futuro, enquanto eu estava dentro de uma escola, com um celular ainda com internet própria para esses dispositivos e que gastava uma enormidade de saldos de créditos. Após esse período, o celular continuou se desenvolvendo. Agora, 12 anos se passaram, o 4G já é uma realidade para os que utilizam dispositivos que possuem essa capacidade. Além disso, informalmente, já podemos dizer que a internet tem se aproximado de sua nova geração: o 5G.

E em 2021? Em 2021 ainda estamos em desenvolvimento, só podemos falar do que já passou. De modo semelhante, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015) nos dizem que ainda estamos vivendo a quarta fase das tecnologias digitais quando a internet se tornou mais veloz, por volta de 2004. É a partir dessa fase que o termo Tecnologias Digitais toma forma, pois segundo os autores alguns aspectos começaram a aparecer, como a integração de geometria dinâmica e as variadas representações de funções; multimodalidade; interatividade; **tecnologias móveis**; performance; performance matemática digital, dando destaque nessa fase às tecnologias móveis, que constituem o foco dessa pesquisa, mais especificamente o *smartphone*.

Foi a partir dessas novas funcionalidades que surgiram outras novas, mais outras e mais outras. Com esse turbilhão de possibilidades, os celulares passaram a ser chamados de *smartphone*. É aqui que gostaria de dar destaque para compreender a diferença entre os termos celular e *smartphone*.

O segundo termo trata de um celular que possui em sua constituição um sistema operacional, assim como nos computadores. Sistema operacional, ou operativo, segundo o site Wikipédia,

> [...] é um programa ou um conjunto de programas cuja função é gerenciar os recursos do sistema (definir qual programa recebe atenção do processador, gerenciar memória, criar um sistema de arquivos, etc.), fornecendo uma interface entre o computador e o usuário (WIKIPÉDIA, 2020).

O primeiro visto ao longo de sua história não possui tal funcionalidade. Por isso, acrescento que todo *smartphone* é um celular, mas nem todo celular é um *smartphone*. Como afirmado em 2009, “[...] os celulares estão prestes a virar computadores minúsculos" (TECMUNDO, 2009). Ao que nos parece, em 2021, será que os celulares já não viraram computadores minúsculos?

Com sistemas operacionais, funções e aplicativos que podem ser encontrados tanto em computadores quanto adaptados aos dispositivos móveis, se estes não se tornaram computadores, estão a limites próximos de se tornarem. Lopes (2020, p 35, grifo da autora) comenta que "o *smartphone* tem funcionalidades de um computador por possuir um sistema operacional, ou seja, possibilita que um usuário tenha uma área de trabalho, incluindo diversos aplicativos e acesso à internet (dados móveis ou *wifi*)". Na Figura 2 podemos notar como os dispositivos se modificaram, mesmo que alguns celulares coexistam ao mesmo tempo que os *smartphones*, ao longo do tempo.

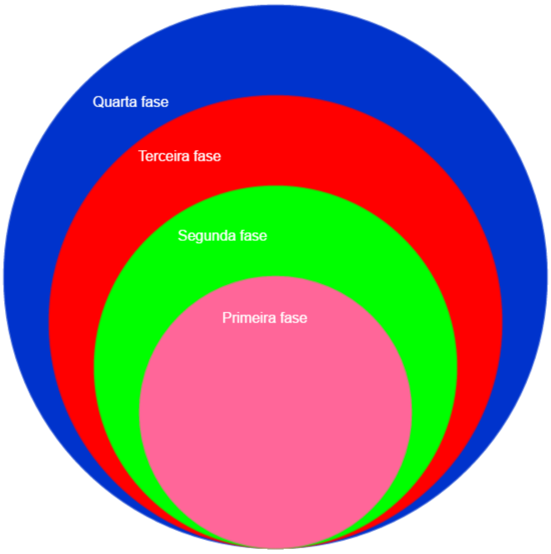
Figura 2 – Evolução histórica do celular

Fonte: Donatilio (2015)[8].

Já a Figura 3 é a representação das fases que Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015) sugerem.

[8] Disponível em: <https://conectadosfulltime.wordpress.com/2015/06/03/a-evolucao-do-telefone-celular-o-que-o-futuro-nos-reserva/>. Acesso em: 23 de jun. de 2020.

Figura 3 – Fases do desenvolvimento tecnológico em Educação Matemática[9]



Fonte: Baseado em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015).

Na segunda figura vemos a evolução do celular, passando a agregar novas funcionalidades e modificando suas estruturas físicas até chegar aos *smartphones*. Apesar dessas modificações ao longo do tempo, celulares com as mesmas funcionalidades dos aparelhos dos anos 2000 ainda existem e são usados.

Na figura três temos as representações das fases das tecnologias digitais em Educação Matemática que, embora pelas cores das fases dispostas uma sobre as outras possam estar dando a impressão de sobreposição isso não ocorre. Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015) defendem que as fases não se sobressaem, mas elas se complementam.

Nessa seção em que trouxemos elementos das fases das TD em Educação Matemática e da evolução histórica do celular até se tornar um *smartphone,* vemos um entrelaçamento com o avanço do uso de tecnologias na educação. O celular pensado primeiramente para a comunicação humana, começou a ganhar elementos novos, como mensagens de texto, mensagens de vídeo, agregou a internet e desenvolveu para o que hoje chamamos de *smartphone*. Por isso, nessa pesquisa discutimos o *smartphone* na Educação Matemática e problematizamos o seu uso para a produção de conceitos de integrais duplas.

A seguir, fazemos uma discussão sobre os termos tecnologia e tecnologia digital, os quais já apareceram anteriormente, mas não debatemos ainda.

[9] As cores utilizadas foram aleatórias e não significam substituição de fases, mas integração.

1.3 Pintura sobre telas: traçando definições dos termos "tecnologia" e "tecnologia digital"

Primeiro, gostaria de salientar que considero esse texto como uma evolução tecnológica. Tanto do aspecto digital, uma vez que é um texto escrito por meio de um computador (outra tecnologia), quanto do aspecto escrito. O texto escrito é uma tecnologia, se olharmos para ele como Kenski (2012, p. 31) considera, ou seja,

> A tecnologia escrita, interiorizada como comportamento humano, interage com o pensamento, [...]. Em seu uso social, como tecnologia de informação e comunicação, os fatos da vida cotidiana são contados em biografias, diários, agendas, textos e redações. Como tecnologia auxiliar ao pensamento, possibilita ao homem a exposição de suas ideias, deixando-o mais livre para ampliar sua capacidade de reflexão e apreensão da realidade.

Ao relatar o excerto acima, você leitor, lê o texto por meio de uma linguagem criada pelos humanos. Isto é, há uma linguagem que foi desenvolvida para conseguir captar o que há escrito nesse excerto. Isso é uma evolução humana, uma construção, que Kenski (2012) também considera tecnologia.

Se você parar alguém na rua e pedir que esta pessoa dê exemplos de tecnologias, é provável que ela fale de máquinas, equipamentos, como computadores, celulares, engenhosidades monstruosas, mas nos esquecemos de olhar para as coisas que nos cercam e que também são tecnologias. Nesse sentido, Kenski (2012, p. 24) considera que o termo tecnologias deve ser associado

> [...] Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de "tecnologia". Para construir qualquer equipamento – uma caneta esferográfica ou um computador –, os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos de tecnologias.

É nesse olhar para o termo tecnologias que repousa a nossa compreensão de tecnologias nesta pesquisa, como uma criação humana, de técnicas, equipamentos, linguagens, etc.

Por isso, discutir o seu conceito, sua definição, se torna algo a nos abrir os olhos para as tecnologias que estão ao nosso redor, que estão intrinsecamente enraizadas em nós. Além dessa discussão, entra em foco com mais intensidade as tecnologias digitais. Chiari (2015, p. 38) afirma que, "[...] em educação, normalmente utilizamos o termo 'Tecnologia Digital' quando nos referimos ao uso de computador, internet e outros meios associados, como softwares, vídeos digitais, entre outros".

Essas são as mais "fáceis" de serem visualizadas como tecnologias porque envolvem artefatos como celular, computador, tablet, televisão digital, *smartphone* e que envolvem a linguagem digital que "[...] é simples, baseada em códigos binários, por meio dos quais é possível informar, comunicar, interagir e aprender [...]" (KENSKI, 2012, p. 31).

Falar sobre as tecnologias, principalmente das digitais, é falar de como essas nos tocam como seres sociais e perpassam nossas vidas. Nós, que vivemos na era digital, vivemos em uma sociedade diferente de anos atrás. Sobre o assunto de tecnologias digitais (TD) que tratamos nesse trabalho, Chiari (2015, p. 38) destaca que,

> Há muitos trabalhos acadêmicos realizados na área com propostas de uso de TD para ensinar Matemática, mas não se encontra com facilidade discussões teóricas sobre o assunto que analisem a fundo as transformações que ocorrem no ensino quando a Tecnologia Digital está presente.

Os nativos da era digital, alunos que nasceram e cresceram com sua presença (PRENSKY, 2001), vivem em uma sociedade diferente da que nossos pais e avós viveram. Nesse sentido, precisamos considerar o contexto de sujeitos que vivem na cibercultura, a qual Lévy (1999, p. 17) caracteriza como "[...] o conjunto de técnicas (materiais e intelectuais), de práticas, de atitudes, de modos de pensamento e de valores que se desenvolvem juntamente com o crescimento do ciberespaço [...]".

Ainda de acordo com Lévy (1999, p. 17), ciberespaço, que ele também chama de "rede" pode ser definido como o "[...]meio de comunicação que surge da interconexão mundial dos computadores [...]". Além disso, o autor da mesma forma considera a infraestrutura física existente na comunicação digital e o que ele chama de "universo oceânico de informações" que está contido nessa infraestrutura, cuja alimentação e navegação é feita por nós, seres humanos (LÉVY, 1999).

Os nativos desse contexto já vivem a chamada sociedade da informação, ou seja, "[...] a sociedade que está actualmente a constituir-se, na qual são amplamente utilizadas tecnologias de armazenamento e transmissão de dados e informação de baixo custo" (ASSMANN, 2000, p. 8). Além disso, é preciso considerar que

> A mera disponibilização crescente da informação não basta para caracterizar uma sociedade da informação. O mais importante é o desencadeamento de um vasto e continuado processo de aprendizagem. [...] sublinhamos que é fundamental considerar a sociedade da informação como **uma sociedade da aprendizagem** (ASSMANN, 2000, p. 9, grifo do autor).

Nessa sociedade, estão inseridas várias tecnologias digitais, como o computador, o tablet e os *smartphones*, mais conhecidos como celulares. O celular em si é uma tecnologia digital que, mesmo sendo considerada um recurso de comunicação, com seu desenvolvimento apresenta potencialidades que podem ser exploradas para o ensino. Como salientam Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015, p. 42)

> A utilização de tecnologias digitais móveis como laptops, telefones celulares ou tablets tem se popularizado consideravelmente nos últimos anos em todos os setores da sociedade. [...] os usos dessas tecnologias já moldam a sala de aula, criando novas dinâmicas [...].

Além disso, consideramos que o celular, como já discutido, se tornou ao longo dos anos um “computador de mão”. Com suas várias funções, deixou de ser meramente utilizado para troca de mensagens e ligações, mas também como uma ferramenta capaz de acessar distintas informações em frações de segundos. Com os *smartphones* podemos fazer cálculos e interagir por meio das redes sociais.

O uso das tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) na aprendizagem é alvo de diversas críticas e de estudos que vêm se intensificando ao longo dos anos. Como salienta Sancho (2006, p. 18)

> Algo que se manifestou nos últimos anos foi a distância entre os que defendem que as TIC fizeram emergir novas perspectivas educativas ou que sua utilização efetiva significa um caminho pedagógico substancial para as políticas educacionais e condições materiais das escolas.

Nesse sentido, “há certa controvérsia sobre a utilização de telefones celulares nas escolas, que envolve inclusive políticas públicas. Algumas dessas controvérsias perpassam por questões semelhantes à proibição do uso de calculadoras em aulas ou exames” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 78). Mas essas polêmicas podem ser superadas para visando a produção de conhecimentos aliando as tecnologias digitais, como o smartphone, com pedagogias e metodologias que priorizem os alunos.

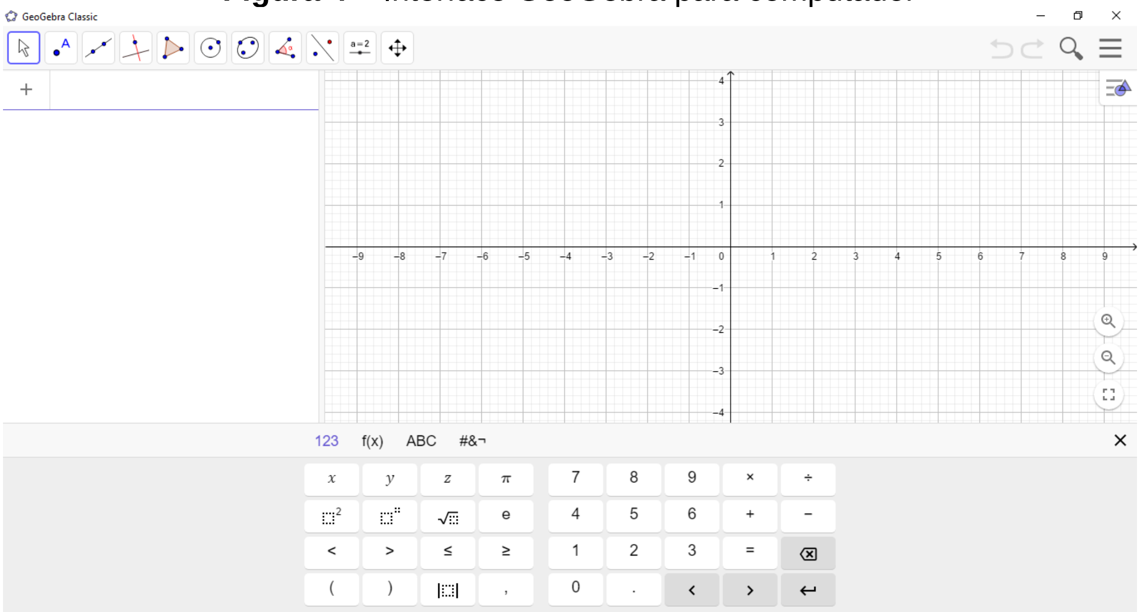
O *smartphone* foi pensado para a comunicação a longas distâncias, mas, em pesquisas como esta que aqui apresentamos, o torna um mediador de produção de conhecimentos, a partir de suas funcionalidades e aplicativos. Nesse sentido, a seguir, faremos a apresentação do GeoGebra, aplicativo que foi utilizado para a produção de dados dessa pesquisa.

1.3 O GeoGebra, a Calculadora Gráfica e a Calculadora Gráfica 3D

O GeoGebra é um *software* criado por Markus Hohenwarter de livre acesso com início em 2001. Inicialmente pensado para computadores e notebooks, o programa foi desenvolvido mais tarde também para dispositivos móveis como tablets e *smartphones*.

O seu nome é a junção das palavras **Geo**metria (Geometry, em inglês) e Ál**gebra** (Algebra, em inglês) resultando em GeoGebra, justificando assim a sua função de integrar várias possibilidades matemáticas. O site do Instituto GeoGebra de São Paulo menciona que “o GeoGebra é um software de matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação”. Além disso, o programa também integra as funções de gráficos em três dimensões. Na figura a seguir podemos ver a interface do software para computadores.

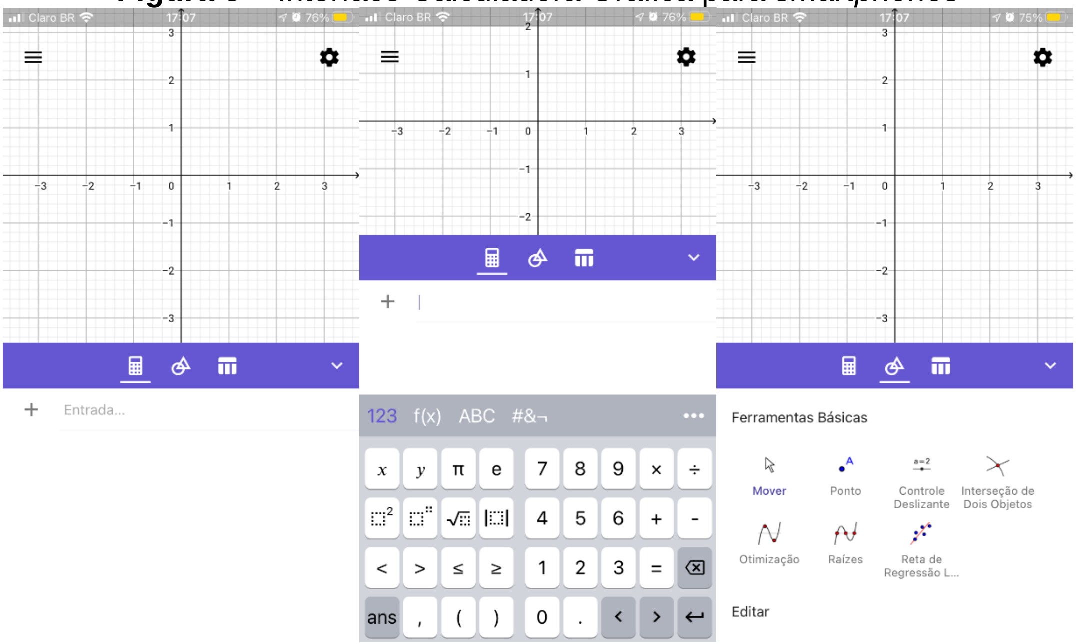
Figura 4 – Interface GeoGebra para computador



Fonte: dados da pesquisa.

Nos dispositivos móveis, a interface se altera e para ter acesso ao ambiente 3D é preciso baixar outro aplicativo. Na figura a seguir vemos três *prints* do aplicativo Calculadora Gráfica (GeoGebra).

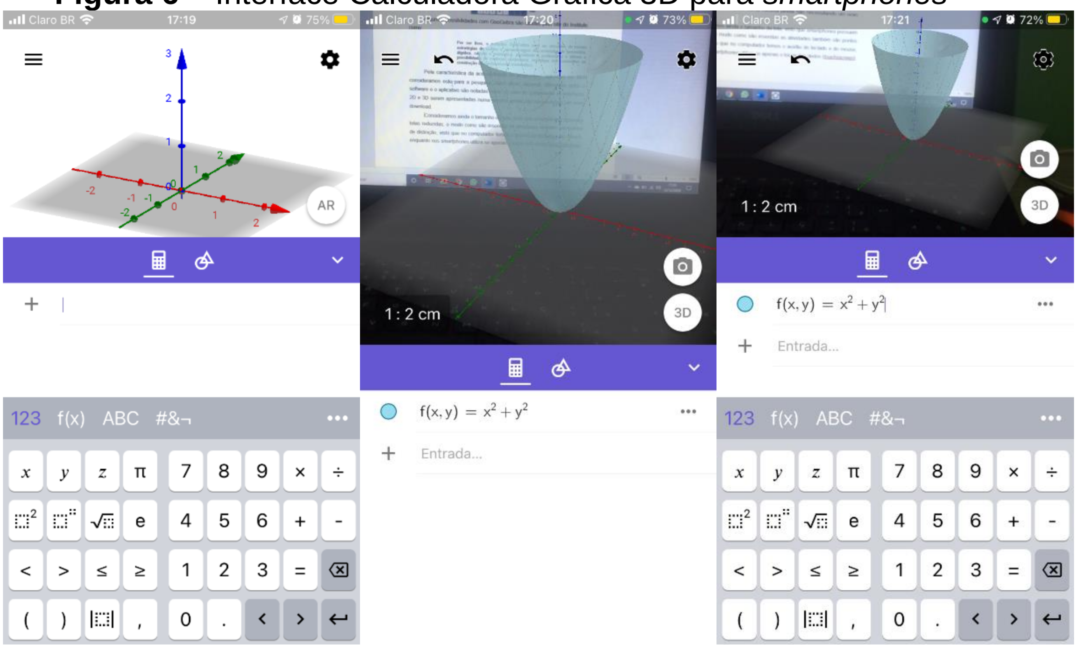
Figura 5 – Interface Calculadora Gráfica para *smartphones*



Fonte: dados da pesquisa.

No *smartphone* para termos a experiência em três dimensões é necessário o *download* do aplicativo Calculadora Gráfica 3D, o que já notamos ser uma limitação do GeoGebra para esse tipo de dispositivo. A seguir temos *prints* da interface do aplicativo mencionado, que ainda possui a função Realidade Aumentada (AR), que consiste em integrar elementos desenvolvidos no ambiente tridimensional com objetos do mundo real.

Figura 6 – Interface Calculadora Gráfica 3D para *smartphones*



Fonte: dados da pesquisa.

Algumas possibilidades com GeoGebra são citadas pelo site do Instituto como

> Por ser livre, o software GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático.

Pela característica da acessibilidade do programa e aplicativo ser fácil consideramos este para a pesquisa. Além disso, algumas diferenças entre o *software* e o aplicativo são notadas: no caso do computador as interfaces 2D e 3D são apresentadas numa mesma janela não necessitando *download* de outro *software*.

Consideramos ainda o tamanho da tela, visto que *smartphones* possuem telas reduzidas. O modo como são inseridas as atividades também são pontos de distinção, visto que no computador temos o auxílio do teclado e do mouse, enquanto nos *smartphones* utiliza-se apenas o toque dos dedos (*touchsscreen*).

2 TRÊS *CLIQUES* NA HISTÓRIA DA TEORIA DA ATIVIDADE

Nesse capítulo, discorro um pouco sobre como a Teoria da Atividade (TA) se desenvolveu historicamente segundo as gerações que Engeström (2001) propôs. Os "cliques" que o título sugere trazem uma metáfora como se estivéssemos abrindo abas de algum documento digital. Em tal documento a cada "clique" falo de uma geração da (TA).

Seguindo essa evolução em gerações busco responder algumas questões centrais para o desenrolar do capítulo, tais como: Onde surgiu a TA? O que é a Teoria da Atividade? O que essa teoria estuda? Por que foi considerada neste trabalho?

Inicio assim retomando a primeira geração, marcada pelos estudos do pensamento vygotskyano de mediação. Embora o "[...] surgimento da teoria [tenha sido] [...] obscurecido por dificuldades de tradução [...]" (DANIELS, 2011, p. 163), parece ser consensual entre pesquisadores que é em Vygotsky a base da Teoria da Atividade.

Em seguida, vamos para os estudos de Leontiev (1978), que para Engeström (2001) é caracterizado como a segunda geração. Leontiev, a partir dos estudos de Vygotsky, "[...] formulou suas próprias ideias e deu continuidade ao desenvolvimento da teoria da atividade" (SOUTO, 2014, p. 18). Sua principal contribuição parte da elaboração de noções do que é objeto e meta, além de trazer o caráter coletivo para a atividade.

A partir dessas ideias, Engeström (1987) propõe a sua própria interpretação da teoria. Essa interpretação traz como contribuições o que chamamos de princípios da TA (ENGESTRÖM, 2001), a serem especificados mais à frente nesse relato. Além disso, é pretendido responder a seguinte pergunta: O que é o conceito de "atividade" para Engeström?

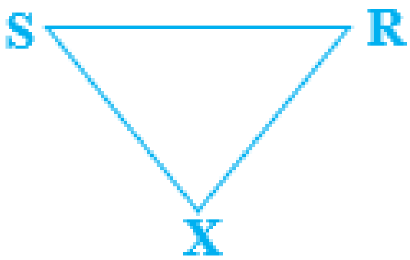
2.1 De volta ao início com o primeiro *clique*: colocando Vygotsky em foco

A Teoria da Atividade (TA) tem suas raízes históricas na escola histórico-cultural, cujo principal representante é Vygotsky. Este pesquisador, influenciado pelas ideias de Engels e Marx, concebeu a ideia de mediação entre sujeito e objeto por meio de artefatos. As ideias de Vygostky, baseadas na perspectiva materialista-dialética, considerava o sujeito com o poder de agir sobre um objeto (S → R). No entanto, para que isso acontecesse, seria necessário ainda um terceiro elemento (X) que mediaria essa relação, isto é,

> [...] o indivíduo não podia mais ser entendido sem seus meios culturais; a sociedade não podia mais ser entendida sem a ação de indivíduos que usam e produzem artefatos. Isso significava que os objetos deixavam de ser apenas matérias-primas para a formação de operações lógicas no sujeito [...] (ENGESTRÖM, 2001, p. 134).

Vygotsky sistematizou uma expansão da relação estímulo → resposta com a seguinte figura:

Figura 7 – Triângulo mediacional de Vygotsky



Fonte: Baseado em Souto (2014).

O terceiro elemento (X), mencionado anteriormente, refere-se aos signos utilizados para "solucionar um problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.) [...]" (SOUTO, 2014, p. 17). Além disso, "Vygotsky fez distinção entre dois tipos de instrumentos mediadores inter-relacionados: ferramentas e signos. Os signos pertencem a uma categoria mais ampla de 'ferramentas psicológicas'" (ENGESTRÖM, 1987, p. 87).

Essa teoria considera a atividade humana como principal meio de desenvolvimento humano e possui muitos desdobramentos e variações. Embora sua principal fonte histórica seja Vygotsky, a dificuldade de tradução dos escritos soviéticos impõe barreiras para saber ao certo quais foram os rumos da teoria.

Engeström (1987) explica suas ideias de desenvolvimento e considera que houve três gerações: a primeira centrada na concepção de mediação por Vygotsky; a segunda por Leontiev, o qual considerou o contexto cultural da atividade e; a terceira, sustentada no desenvolvimento do próprio Engeström (2001), cujas contribuições tratam da sistematização de uma estrutura como unidade mínima de análise da atividade humana.

Dessa forma, é possível interpretar que as ideias de Vygotsky permaneceram centradas no indivíduo, enquanto Leontiev expandiu suas análises para o plano coletivo. Segundo Engeström (2001, p. 134, tradução nossa).

> A primeira geração, centrada em torno de Vygosty criou a ideia de mediação. [...] A ideia de Vygotsky de mediação cultural é comumente expressa como a

> tríade de sujeito, objeto e artefato mediador. [...] O indivíduo não podia mais ser entendido sem seus meios culturais; e a sociedade não podia mais ser entendida sem a ação de indivíduos que usam e produzem artefatos. [...] A limitação da primeira geração foi que a unidade de análise permaneceu focada individualmente. Isso foi superado pela segunda geração [...].

Assim, enquanto Vygotsky traz à tona o caráter mediacional dos instrumentos, mesmo tratando a atividade como ato individual, Leontiev parte disso para aprofundar seus estudos. Como destaca Engeström (2001, p. 134, tradução nossa) "a limitação da primeira geração foi que a unidade de análise permaneceu focada individualmente. Isso foi superado pela segunda geração, centrada em torno de Leontiev [...]", como veremos na seção seguinte.

2.2 O "avançar" do segundo *clique*: a geração de Leontiev

Alexei Nicolaevich Leontiev, como dito anteriormente, é considerado por Engeström (2001) como expoente da segunda geração da TA. Leontiev era discípulo de Vygotsky, passando assim a continuar os estudos de seu mestre e a desenvolver a teoria.

Dois dos estudiosos, Engeström e Souto, os quais são referência nesta pesquisa para discussão de conceitos, história, princípios e gerações da Teoria da Atividade, fazem contrapontos ao estudo de Vygotsky e Leontiev.

Souto (2014) pondera que, para Engeström (2001), enquanto a análise de Vygotsky era focada no individual, Leontiev passa a considerar o papel da coletividade humana durante a atividade, como foi mencionado na seção anterior. A mesma autora traz ainda as considerações de Daniels (2011) que, segundo ela, trata-se de "[...] um esforço para colocar a mediação em seu contexto cultural, ampliando a presença real da cultura na vida humana [...]" (SOUTO, 2014, p. 18–19).

Ainda, sobre Daniels (2011), Souto (2014, p. 19) comenta que "[...] Vygotsky não se baseava em uma explanação das estruturas sociais que agem, elas mesmas, para organizar e restringir a própria atividade, e que o trabalho de Leontiev traz contribuições nesse sentido". Ou seja, Leontiev começa a considerar a questão da organização (divisão, como será tratada mais à frente) do trabalho.

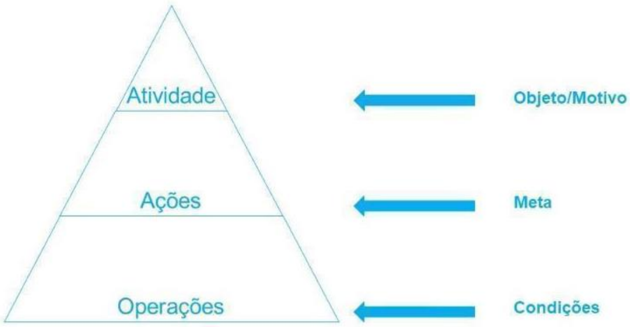
Outras contribuições de Leontiev foram a elaboração de duas noções importantes para o desenvolvimento da teoria: objeto e meta. Este autor, segundo Souto (2014), centraliza o objeto da atividade na motivação que os sujeitos têm para realizar determinada atividade. A partir disso, Engeström (1987) considera que o trabalho humano é cooperativo e coletivo desde os seus primórdios, assim

> [...] Nós podemos falar da atividade do *indivíduo*, mas nunca de *atividade individual*; apenas ações são individuais. [...] o que distingue uma atividade de outra é seu objeto. De acordo com Leontiev, o objeto de uma atividade é seu motivo verdadeiro. Portanto, o conceito de atividade está necessariamente ligado ao conceito de motivo (ENGESTRÖM, 1987, p. 94, grifo do autor).

Souto (2015) destaca que no pensamento de Leontiev (1978) havia três níveis interdependentes para uma estrutura sistêmica, o que mais tarde Engeström utilizaria para reforçar a sua ideia de sistema de atividades, como veremos nas próximas seções.

No primeiro nível encontra-se a atividade, com sua característica coletiva, ligada aos motivos e, por isso, ao objeto (SOUTO, 2015); no segundo nível situam-se as ações, ligadas diretamente com os objetivos; e, no último nível, localizam-se as operações, que "[...] são os métodos pelos quais a ação é concluída [...]. As ações são relacionadas a metas conscientes e as operações são relacionadas às condições nem sempre conscientemente refletidas pelo sujeito. As ferramentas são operações cristalizadas" (ENGESTRÖM, 1987, p. 95). Para exemplificar esses níveis e a relação de cada um Daniels (2011) representou graficamente da seguinte forma:

Figura 8 – Representação hierárquica de atividade



Fonte: baseado em Daniels (2011).

Nessa representação fica claro que as operações dependem das condições, que as ações individuais (ou em grupo) visam às metas e a atividade visa atingir um objeto. "[...] A distinção entre ação e operação é fundamental, uma vez que uma única ação pode ser realizada em condições materiais e com o uso de métodos diferentes, por meio de operações distintas" (SOUTO, 2014, p. 21).

Engeström (1987) ainda comenta que as ações podem servir a várias atividades, assim como são capazes de evoluir para uma. Além disso, o objeto é o verdadeiro motivo de uma atividade que, para Leontiev, segundo Engeström (1987, p. 96), "[...] é uma formação sistêmica em constante movimento interno".

Para que seja considerada uma atividade, no pensamento de Leontiev, eram precisos processos para responder a uma necessidade. Isso nos leva à sua célebre frase que enuncia a existência de uma atividade que sem objeto não possui qualquer significado, ou seja, é a partir do objeto que podemos diferenciar uma atividade de outra e, se não o houver, não há atividade.

Souto (2014) argumenta que Leontiev não representou seu pensamento de forma modelar como na figura anteriormente apresentada, pois quem a fez foi Daniels (2011) seguindo as ideias do psicólogo russo. Ainda, Engeström (2001, p. 134, tradução nossa) comenta que "[...] Leontiev explicou a diferença crucial entre uma ação individual e uma atividade coletiva. No entanto, Leontiev nunca expandiu graficamente o modelo original de Vygotsky para um modelo de sistema de atividade coletiva". Para sumarizar as ideias aqui apresentadas trago o seguinte excerto:

> Em síntese, de acordo com o pensamento de Leontiev, a atividade humana é consciente e intencional, tem a mediação cultural como principal característica e leva a um processo de transformações recíprocas entre sujeito e objeto. Seus exemplos e argumentos apontam a uma necessidade de uma ampliação, em relação à unidade de análise de Vygotsky, focada no individual, para um plano coletivo (SOUTO, 2014, p. 20).

Vimos nessa seção que Leontiev, baseado nas ideias de Vygotsky, expandiu seu entendimento do plano individual de atividade para o coletivo (mediação cultural), trouxe o caráter de divisão de tarefas entre os indivíduos, diferenciou objeto de metas e atividade de ações. Isso nos leva à próxima seção, na qual as ideias propostas por Engeström se tornam o cerne a ser compreendido.

2.3 O âmago do terceiro *clique*: o desenvolvimento da Teoria da Atividade com Engeström

Chegamos ao terceiro momento da evolução da Teoria da Atividade, considerada por Engeström (2001) como a terceira geração. Depois de anos sendo trabalhada e estudada, a TA saiu de seu campo de estudos, a psicologia, para ser usada em vários outros âmbitos, como a antropologia, a filosofia, a linguística, entre outros, como é o nosso caso: a educação.

Para orientar essa seção trago duas perguntas: "o que é atividade para Engeström?" e "quais os princípios do seu desenvolvimento?". Entender o que o autor considera como atividade nos dá um norte para podermos diferenciá-lo de termos como tarefa, exercício, problema. Por isso, nessa pesquisa quando estivermos mencionando "atividade" é no contexto da teoria.

A primeira questão já nos leva a uma discussão interessante. Enquanto para Leontiev a atividade se diferenciava das ações, sendo uma formação sistêmica com movimentos internos contínuos (ENGESTRÖM, 1987), para Engeström (1987) "[...] a atividade é uma formação coletiva, sistêmica, que possui uma estrutura mediadora complexa" (DANIELS, 2011, p. 167). Além disso, como Souto (2014, p. 24) salienta:

> [...] a atividade é tomada como um processo contínuo de mudança e movimento decorrentes de crises e rupturas, os quais, inter-relacionados em uma formação criativa, composta de múltiplos elementos, vozes e concepções, provocam transformações e inovações que são entendidas do ponto de vista histórico.

Esse excerto já nos traz certas dúvidas do que poderiam ser essas "crises e rupturas", relacionadas a uma "formação criativa" que tem "múltiplos elementos, vozes", que geram "transformações" e que são compreendidas a partir do seu histórico. Basicamente a autora está se referindo aos cinco princípios propostos por Engeström (2001): contradições internas, sistema de atividades, multivocalidade, transformações expansivas e historicidade.

Embora Souto (2014) faça em seu excerto essa classificação, instigados pela segunda questão, aqui iniciaremos falando dos princípios como Engeström (2001) nos apresenta: sistema de atividade, abordando os elementos que o compõe, multivocalidade, historicidade, contradições internas e seus quatro níveis, e, por fim, as transformações expansivas.

Engeström (1987), partindo das ideias de Leontiev, sistematiza essa formação criativa, mencionada anteriormente, representando uma estrutura que amplia o triângulo mediacional de Vygotsky. Agora, são apresentados os elementos culturais, ou seja, Engeström (1987) sistematiza um todo unificado como o primeiro princípio "[...] que é um sistema de atividade coletiva, mediado por artefatos e orientado ao objeto [...] é tomado como a unidade principal de análise [...]" (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa), como mostrado a seguir:

Figura 9 – Sistema de Atividade

Fonte: Baseado em Souto (2014).

O SA integra em sua estrutura artefato, sujeito, objeto, regras, comunidade e a divisão do trabalho. Cada um desses integrantes chamamos de "*nó*" do sistema. Ademais, pelas ideias de Vygotsky de mediação e pela contribuição de Leontiev com relação ao caráter cultural e coletivo, podemos dizer que quem medeia a relação do sujeito com o objeto, além do artefato, é também a comunidade.

A comunidade tem a sua relação com o sujeito mediada pelas regras, e com o objeto, pela divisão do trabalho. Ou seja, no triângulo superior, a relação sujeito-objeto é mediada pelo artefato. Nos triângulos inferiores temos as regras mediando a relação sujeito-comunidade, a comunidade mediando a relação sujeito-objeto e a divisão do trabalho mediando comunidade-objeto. Nesse trabalho, veremos mais à frente, no capítulo de análise, que a comunidade tem um papel importante para o desenvolver da atividade.

Artefatos são os signos como linguagens (oral, escrita, matemática, etc) e os instrumentos como *smartphone*, *softwares*, aplicativos, lápis, papel, quadro, giz, etc, utilizados. Sujeito são todos os que têm o poder de ação dentro da atividade a ser desenvolvida. São os protagonistas na atividade.

A comunidade contribui para o desenvolvimento da atividade, mas não tem poder de ação, embora compartilhe do mesmo objeto. A divisão do trabalho compreende a divisão das tarefas, *status* e poder entre os membros da comunidade. As regras são as regulações implícitas e explícitas, normas, convenções e padrões que regulam as ações dentro do sistema.

É preciso ainda destacar que o objeto é representado com um destaque oval nessa estrutura, o que é justificado por Engeström (2001, p. 136, tradução nossa) como "[...] um alvo em movimento, não redutível a objetivos conscientes de curto prazo". Além disso "[...] o objeto é matéria-prima resistente e propósito futuro de uma atividade. O objeto é o verdadeiro portador do motivo da atividade" (ENGESTRÖM;

SANNINO, 2010, p. 4). Isso ainda indica que "[...] as ações orientadas por objeto são sempre, explícita ou implicitamente, caracterizadas por ambiguidade, surpresa, interpretação, produção de sentido e potencial para mudança" (DANIELS, 2011, p. 170).

Para Engeström (2001), um SA é coletivo e possui nos artefatos o caráter mediacional, se orienta para o objeto e, por esse motivo, deve ser considerado como uma unidade mínima de análise da atividade. A coletividade faz o objeto ser compartilhado por todos os sujeitos envolvidos na atividade e este refere-se "[...] à matéria-prima ou espaço-problema para o qual a atividade é dirigida" (SOUTO, 2014, p. 24).

Por ter esse caráter coletivo, o SA ainda vem carregado por uma multiplicidade de vozes, conceitos, opiniões, ou seja, aqui se encontra o segundo princípio proposto por Engeström (2001): multivocalidade.

> Um sistema de atividade é sempre uma comunidade de múltiplos pontos de vista, tradições e interesses. A divisão do trabalho em uma atividade cria posições diferentes para os participantes, que carregam suas próprias histórias diversas, e o próprio sistema de atividade carrega múltiplas camadas e vertentes da história gravadas em seus artefatos, regras e convenções (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa).

O autor ainda destaca que a multivocalidade "[...] é uma fonte de problemas e uma fonte de inovação, exigindo ações de tradução e negociação" (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa). Em um curso no qual são convidados alunos de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Física da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como será abordado no capítulo de metodologia desta pesquisa, e que faziam parte de semestres diferentes do seu período de vida acadêmica, esse contexto torna-se um campo fértil para a revelação das múltiplas vozes existentes.

A historicidade é o terceiro princípio da Teoria da Atividade. É, aparentemente, o princípio mais simples de se entender, pois, assim como a multivocalidade, seu enunciado é autoexplicativo. Ou seja, é através da história contínua que devemos analisar o desenvolvimento de uma atividade.

Engeström (2001) defende a ideia de que um sistema de atividade é transformado segundo a sua história, ou seja, seus problemas e desafios tomam formas e "só podem ser entendidos em relação à sua própria história" (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa).

Além disso, a historicidade é importante para entender a história local da atividade, do objeto, ou seja, olhar para a história local da construção do conceito de integrais duplas. Ainda, é pertinente nesta pesquisa para a análise a história global dos conceitos que se relacionam com as integrais duplas, como, por exemplo, a construção do conceito de integrais simples, o entendimento de cada termo da Soma de Riemann, derivadas, área abaixo de uma curva, e outros conceitos que são interligados.

No quarto princípio da Teoria da Atividade proposto por Engeström (2001) temos as contradições internas. Tal princípio se define por serem tensões estruturais que acontecem durante uma atividade. Essas tensões podem ocorrer de quatro diferentes formas.

Corroboramos Soares e Souto (2014) ao considerarem para estas diferentes formas níveis para diferenciá-las. No primeiro nível, as chamadas contradições primárias, ocorrem dentro dos *nós* do sistema de atividade (SOARES; SOUTO, 2014), por exemplo, em um sistema de atividades de um professor que se propõe a trabalhar com um dispositivo móvel em sua aula. Nesse sistema podem aparecer regras como "usar o dispositivo móvel para a construção de polígonos" e esse artefato ser proibido por uma regra para consulta à *internet*. Assim, temos duas regras se "chocando", pois ao mesmo tempo que o docente tem a intenção de utilizar o dispositivo, existem normativas que o proíbem. Para "solucionar" essa tensão o docente pode incluir em seu plano de aula que o uso do celular será pedagógico.

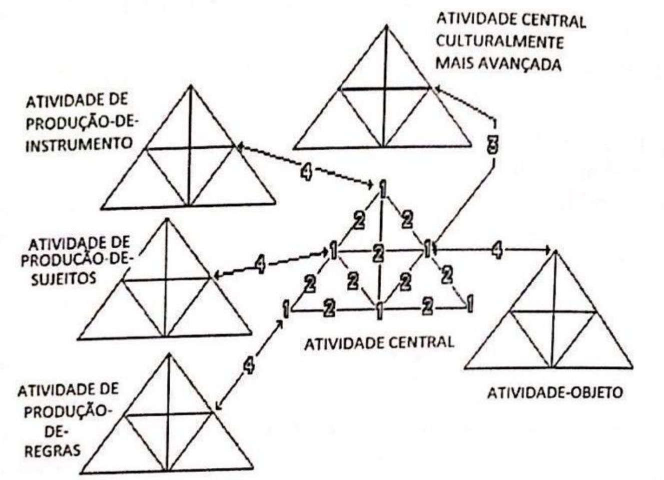
As contradições secundárias, nível 2, ocorrem dentro de um sistema e entre elementos (*nós*) diferentes, por exemplo, entre o sujeito da atividade e o artefato (SOARES; SOUTO, 2014). Esse nível de contradição poderá ser melhor exemplificado quando chegarmos ao capítulo de análise dos dados da pesquisa desenvolvida, cujas tensões poderão ser notadas.

Para que ocorram as contradições terciárias, nível 3, é necessária uma tensão estrutural entre "ações que formam o objeto coletivo, principalmente entre algo novo que é proposto e algo que é padrão dominante" (SOUTO, 2014, p. 26-27). Por exemplo, entre o objeto do sistema de atividade dos alunos "jogar na internet" e o objeto do sistema de atividade do professor "aprendizagem de polígonos com o *smartphone* no GeoGebra". Isto é, segundo Engeström (1987, p. 116, grifo do autor), a contradição terciária ocorre "[...] **entre** o objeto/motivo da forma dominante da atividade central e o objeto/motivo de uma forma da atividade central culturalmente mais avançada".

As contradições de nível 4, quaternárias, ocorrem entre um sistema de atividade e sistemas de atividade vizinhos, interligados (SOARES; SOUTO, 2014). Por exemplo, quando o professor sugere uma atividade a ser feita com o uso do *smartphone*, mas os alunos estão em outro movimento, tal como fazer uma atividade de outra disciplina.

Podemos ver como se caracteriza cada contradição com a figura 10 a seguir**:**

Figura 10 – Quatro níveis de contradição dentro do sistema de atividade humana



Fonte: Engeström (1987).

As contradições internas podem ser observadas por meio do discurso dos sujeitos, como veremos a categorização feita por Engeström e Sannino (2011) e estudada por Galleguillos (2016).

Galleguillos (2016), apoiada em Engeström e Sannino (2011), faz uma análise das contradições internas por meio das Manifestações Discursivas Sistêmicas (MDS) e categoriza como podem ocorrer esse princípio por meio das expressões linguísticas. Segundo Galleguillos (2016, p. 83) "as contradições sistêmicas não são visíveis diretamente, mas é possível vislumbrá-las por meio de manifestações ou expressões discursivas nos dados".

Engeström e Sannino (2011), e mais tarde também estudado por Galleguillos (2016), apontam que podem surgir MDS de quatro tipos: dilemas, conflitos, conflitos críticos e beco sem saída. Tais MDS podem ser vistas na figura 11 a seguir:

Figura 11 – Tipos de manifestações discursivas de contradições

Manifestações	Características	Dicas linguísticas
Beco sem saída ou Duplo vínculo	Beco sem saída: situação que não oferece alternativas de prosseguir. *Duplo vínculo*: situação em que se enfrentam duas alternativas igualmente inaceitáveis ou indesejáveis.	"nós", "nos", "devemos" ou "teremos que". Perguntas retóricas de pressão, expressões de impotência.
	Resolução: transformação prática ou mudança radical (indo além das palavras)	"Permita a nós fazer isso", "o faremos".
Conflito crítico	Enfrentando motivos contraditórios em interação social, sentindo-se maltratado ou culpado.	Estrutura narrativa pessoal, emocional, moral, metáforas.
	Resolução: Encontrando novo sentido pessoal e negociando um novo significado.	"Eu agora realizo isso [...]"
Conflito	Fundamentando, argumentando e criticando.	"não", "eu discordo", "isto não é verdade".
	Resolução: Encontrando um compromisso ou submissão	"Sim", "isto eu posso aceitar",
Dilema	Expressão ou intercâmbio de avaliações incompatíveis.	"por um lado [..] por outro lado"; "sim, mas", "mas",
	Resolução: negação, reformulação.	"Eu não quis disser isso", "eu agora quero dizer",

Fonte: Galleguillos (2016).

Para finalizar seus estudos sobre as MDS, Galleguillos (2016) ainda aponta que podem existir outras formas, em que Engeström e Sannino (2011) afirmam não ter estudado, como a ironia ou o paradoxo. "[...] a ironia corresponde a uma contradição em si mesma, em que o irônico diz uma coisa, mas com expressões ou gestos está dizendo exatamente o contrário" (GALLEGUILLOS, 2016, p. 85).

As MDS nos auxiliarão, no momento da análise, para identificar possíveis traços linguísticos que podem apontar para prováveis contradições internas ocorrendo durante a atividade.

Esse princípio, assim como os outros, é muito importante para a atividade, uma vez que as contradições são o motor necessário, são as molas que propulsionam possíveis transformações expansivas dentro do sistema de atividades (SOUTO, 2014). As transformações expansivas, dentro da Teoria da Atividade, é o quinto e último princípio que Engeström (2001) traz.

Sobre as transformações expansivas, Engeström (2001, p. 137, tradução nossa), comenta que

> Os sistemas de atividade passam por ciclos relativamente longos de transformações qualitativas. À medida que as contradições de um sistema de atividades são agravadas, alguns participantes individuais começam a questionar e a se desviar de suas normas estabelecidas. Em alguns casos, isso aumenta a visão colaborativa e um esforço deliberado de mudança coletiva.

Essas transformações ocorrem quando "[...] o objeto e o motivo da atividade são reconceitualizados para abarcar um horizonte de possibilidades radicalmente mais amplo do que no modo anterior da atividade" (ENGESTRÖM, 2001, p. 137, tradução nossa). Ou seja, mudam o objeto e o motivo da atividade em busca de abarcar novos horizontes e novas possibilidades.

2.3.1 Olhos para o futuro de uma possível quarta geração

Indo em direção a uma possível quarta geração da Teoria da Atividade, fundamentada nos três teóricos apresentados, Souto e Borba (2016) discutem a perspectiva e a possibilidade de olhar para as tecnologias (artefatos) em mais de um *nó* do sistema de atividade, ou seja, "[...] onde a antropomorfização das tecnologias, pode dar uma dinamicidade a modelos de como conhecemos em um ambiente social" (SOUTO; BORBA, 2016, p. 240).

Os autores observam, principalmente, quando tais mídias têm o poder de ação dentro da atividade, ou seja, quando essas compartilham o papel de sujeitos, denominado pelos autores como a antropomorfização das mídias. Essa possibilidade poderá ser notada no capítulo de análise de dados dessa pesquisa, assim como em Salmasio (2020) e Domingues (2020).

3 AMPLIANDO HORIZONTES E CONECTANDO POSSIBILIDADES COM O *SMARTPHONE*

Quando iniciamos uma pesquisa pensamos imediatamente em uma metodologia, pois essa é quem determina e mostra o rigor e os procedimentos de que se necessita para que possamos ter a validade do que pesquisamos. Entretanto, uma pergunta que pouco fazemos é: o que é metodologia?

Essa discussão torna-se interessante, pois muitas vezes respondemos: é o caminho que vamos seguir, são as escolhas que fazemos para responder à questão de pesquisa. Essa resposta não está de todo errada, mas, nesse momento da discussão, buscamos apoio em Goldenberg (2018) para tornar essa ideia mais precisa.

Ao se referir à metodologia, a autora traz logo no início de sua obra "A Arte de Pesquisar" sua consideração acerca do termo. Para ela a metodologia "[...] é um caminho possível para a pesquisa científica [...]" (GOLDENBERG, 2018, p. 14).

Sendo assim, nessa pesquisa, a metodologia foi tratada como Goldenberg (2018, p. 109) define, ou seja, como sendo "[...] etimologicamente, o estudo dos caminhos a serem seguidos, dos instrumentos usados para se fazer ciência [...]". Consideramos, então, que metodologia é o caminho que percorremos, as escolhas que fizemos e, somado a isso, todos os processos envolvidos durante o transcorrer da pesquisa aqui relatada.

Para essa pesquisa, nossa opção foi produzir dados em um Projeto de Ensino de Graduação, no qual os participantes gravavam as telas dos *smartphones* ao realizarem tarefas exploratórias e investigativas. A partir disso foram gerados vídeos pelos sujeitos, ao mesmo tempo que interagiam com essa tecnologia e com outros colegas. Além disso, folha de respostas e entrevistas. Contamos com a participação de 11 acadêmicos que se envolveram nas tarefas durante três encontros no mês de novembro de 2019.

Nas subseções seguintes discorro sobre o que entendemos por pesquisa qualitativa, como a Teoria da Atividade influenciou na produção de dados, caracterizamos os sujeitos e os métodos que utilizamos para produzir os dados que compõe essa pesquisa.

3.1 Iniciando o navegar: caracterizando a pesquisa qualitativa

Ao falarmos de pesquisa no meio acadêmico nos vem à mente aqueles cientistas em seus laboratórios manipulando substâncias e fazendo experimentos, com seus jalecos brancos, luvas e todos aqueles instrumentos de que um cientista necessita. Todavia, ao lançarmos nossos olhares para uma pesquisa em educação, esse exemplo torna-se descabido, por não retratar o que é a pesquisa que programas de pós-graduação nessa área fazem.

Ao restringir o nosso foco ao campo da educação entram em cena alguns tipos de pesquisa que podem ser produzidas: quantitativas, qualitativas e qualiquantitativas. Entretanto, nesse relato de pesquisa vamos nos ater aos conceitos que envolvem a pesquisa qualitativa, pois nossa intenção nesta pesquisa de mestrado não foi quantificar os dados, mas entender fenômenos, analisá-los, estudá-los, compreendê-los em suas formas com suas características. Ou seja, em sendo uma pesquisa qualitativa, "a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, de uma instituição, de uma trajetória etc" (GOLDENBERG, 2018, p. 14).

Para isso, buscamos produzir informações (dados) que nos deem margem para tal compreensão. Tais dados "[...] consistem em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos. Estes dados não são padronizáveis como os dados quantitativos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade [...]" (GOLDENBERG, 2018, p. 58), principalmente no período em que ocorre a produção de dados e no momento de analisar os materiais produzidos.

Ademais, entendemos como Bicudo (1993) que uma interrogação é o termo mais preciso para se descrever algo que se quer pesquisar no escopo qualitativo, pois pretendemos "dar voltas em torno" desta e observá-la de diferentes ângulos. Baseados no exposto acima e em nossa interrogação de pesquisa: **"Como ocorre a produção de conhecimentos de integrais duplas com *smartphone* e o aplicativo GeoGebra?"**, podemos afirmar que essa pesquisa é caracterizada como qualitativa.

Além disso, delimitamos como objetivo geral "**analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra**". Para chegar nesse objetivo mais global, estabelecemos os seguintes objetivos específicos: i) Analisar movimentos e alterações no sistema de atividade ao trabalhar no ambiente GeoGebra com o *smartphone* em estudos sobre integrais; ii)

Analisar possíveis contribuições e limitações do *smartphone* e do GeoGebra na extensão de conceitos de integrais simples para integrais duplas; iii) Analisar possíveis transformações expansivas ocorridas no sistema de atividade durante o estudo dos conceitos de integrais duplas com o *smartphone*.

Esses objetivos se articulam com o geral, pois ao observarmos os movimentos do sistema de atividade, as possíveis contribuições e limitações do *smartphone* e as possíveis transformações expansivas podemos analisar e problematizar os processos envolvidos em interações na produção de conhecimentos. As transformações expansivas constituem uma transformação do objeto para abarcar novos horizontes, nesse sentido poderemos identificar os movimentos feitos dos alunos na produção de novos conceitos, produzindo conhecimentos referentes ao conceito de integrais duplas.

3.2 Selecionando os ícones da tela: instrumentos de pesquisa

Alguns dos procedimentos de pesquisa envolveram a organização da proposta do curso por meio do PEG "Integrais Múltiplas e *Smartphone* - O que podemos?" que teriam as telas dos *smartphones* sendo gravadas por aplicativos originando um vídeo a cada encontro, a realização de tarefas no *smartphone*, folha de respostas dos alunos e uma entrevista posterior ao curso, com a análise de dados já em andamento.

Com a gravação da tela dos *smartphones* temos a possibilidade de observar as interações que acontecem quando os alunos usam esse dispositivo em meio a uma tarefa exploratória, ou investigativa, buscando produzir conceitos matemáticos. Destarte a isso, sempre que o aluno discutisse algo e manipulasse o GeoGebra teríamos o registro gravado no formato de vídeos, o que nos proporcionaria analisar os movimentos durante o curso.

Quanto ao uso de vídeos para a produção e análise de dados, Powell, Francisco e Maher (2004) comentam que ele é um artefato flexível, pois trabalha com informações orais e visuais, captura interações complexas e tem a possibilidade de exame de dados quando o pesquisador sentir necessidade.

Os autores ainda destacam que durante a produção dos dados "[...] são feitas seleções do fenômeno que se desenvolve com base na tecnologia utilizada e nos interesses teóricos. Por sua vez, essas realidades tanto compelem quanto moldam as análises posteriores e a apresentação de resultados" (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 86). Nessa perspectiva, entendemos que a subjetividade e sensibilidade dos autores da pesquisa é fundamental para a melhor escolha dos dados a serem analisados.

Corroboramos Henrique e Bairral (2019) quando os autores trazem que os registros em vídeo trazem possibilidades como imagens combinadas a áudio, o que pode auxiliar no processo de análise ao buscarmos o entendimento de interações “[...] individualmente no caso do estudante – tecnologia ou no contexto social (professor – estudantes e estudantes – estudantes)” (HENRIQUE; BAIRRAL, 2019, p. 117). Logo, com os vídeos podemos ter um norte para a análise de dados de modo alinhado à perspectiva teórica que consideramos na pesquisa.

Aliadas aos vídeos como instrumentos de pesquisa tivemos as folhas de respostas, cuja intenção era a sistematização das discussões. O registro escrito se tornou mais uma fonte de triangulação dos dados da pesquisa. É nesse momento que os alunos expressaram o seu entendimento, as suas opiniões e suas concepções sobre o que foi discutido, analisado e explorado durante as tarefas. Tornou-se de extrema importância observar o que foi manifestado pelos participantes do curso, pois tivemos a possibilidade de apreciar suas sistematizações.

Buscamos ainda uma terceira oportunidade de produção de dados e realizamos uma entrevista. Tal instrumento de pesquisa se baseia na inquirição dos sujeitos de pesquisa sobre sua produção, percepção e intenções acerca do que pode-se notar nos vídeos e folhas de respostas. As questões (Quadro 3) utilizadas nas entrevistas tiveram caráter aberto, ou seja, as respostas eram livres e não tinham alternativas, os pesquisados falaram livremente sobre os temas (GOLDENBERG, 2018).

Ainda é preciso fazer duas considerações sobre as entrevistas. A primeira é que as entrevistas foram feitas um período (quatro meses) após a conclusão do curso, com a análise de dados em andamento, para ter a possibilidade de acrescentar perguntas específicas aos entrevistados.

Vemos que na entrevista realizada após a produção de dados, via Google Meet, encontramos alguns problemas, como o esquecimento por parte dos entrevistados de alguns fatos. Como queríamos exibir vídeos dos próprios alunos não pudemos, visto que o distanciamento social causado pela pandemia de COVID-19 em 2020 não deixou realizá-la presencialmente.

Além disso, os nomes que aparecem são os reais, pois os participantes do curso tinham a opção de escolher se queriam que o nome aparecesse na pesquisa.

Os três escolhidos dentre os 11 participantes para a análise de dados aqui apresentada, escolheram essa opção.

Quadro 3 – Questões para entrevista

1) Quais foram os motivos para fazerem o curso? O que levou vocês a participarem de um curso que traz o *smartphone* para a discussão? De integrais que, inclusive, alguns possam não ter visto, fazer as construções, manipulações, responder às questões que fazíamos, etc...

1) Sobre fazer as discussões em duplas, no caso de vocês em trio, como vocês veem a importância disso? De ter eu, a Ju e a Cida para discutir? De trocas de informações com outros colegas? O que vocês podem me falar disso?

2) E com relação às dificuldades, coisas que vocês acharam que deveriam ser mais exploradas pelo curso, fragilidades do curso etc...? Quais foram as que vocês sentiram mais presentes no curso? Mais especificamente com relação aos conteúdos, o que vocês podem relatar que foi uma dificuldade e pontos que vocês acharam importantes que foram explorados, pontos fortes?

3) Com relação ao *smartphone* para cunho de estudos, antes do nosso curso, para a aprendizagem de vocês. Já utilizaram? Como utilizaram? Por que vocês utilizaram? Em que momento da graduação? E fora da faculdade, quais as principais funções que usam no *smartphone*? E como tá o uso do *smartphone* agora, após o curso, o que mudou?

4) O que vocês podem me falar sobre fazer uma construção e manipulações no computador e sobre fazer no *smartphone*? O que vocês veem de diferente? E se vocês tivessem que fazer no papel? O que o *smartphone* proporcionou que no papel ou computador vocês não conseguiriam fazer ou fariam de forma diferente?

5) Durante o curso foi solicitado que vocês fizessem algumas explorações, investigações e construções de alguns conceitos no *smartphone*. Como vocês veem a importância de fazer essas manipulações para que pudessem produzir significado sobre os conceitos ali presentes? Como vocês se sentem tendo que fazer as construções, manipulações e visualizando os movimentos relacionados ao conceito de integral?

6) Agora que vocês passaram por essa experiência, com o *smartphone*, para sua aprendizagem, o que vocês veem de possibilidades desse artefato para o ensino quando forem professores? E para sua aprendizagem? Por que utilizaria o *smartphone* para ensinar? E para aprender? Que tipos de conteúdo?

7) Danilo faz uma afirmação no primeiro vídeo: “aqui eu vejo bem o conceito de integral”. Danilo, você poderia me explicar melhor o que você quis dizer com essa fala?

8) Eu tenho um vídeo aqui, ele tem cerca de 7 minutos, acho ele grande para vocês assistirem, mas vou colocar e aí se vocês acharem necessário assistir até o final me falem que eu continuo. Vou colocar os dois primeiros minutos e aí eu paro e volto. OK? Bom... o que eu tenho para perguntar primeiramente é se vocês estavam trabalhando no plano 2D ou no 3D. Se 3D, qual era o comando que estavam tentando plotar? O que vocês queriam discutir?

9) Nesse vídeo (3) vocês fazem uma discussão sobre os termos do conceito de integral dupla, por soma de Riemann. O que vocês podem me falar sobre isso em relação à soma no contexto 2D comparado ao contexto 3D? O que podem me falar de diferenças entre ambos? Como a soma no 2D influenciou para vocês chegarem a essas conclusões no 3D?

10) Nesse último vídeo vocês falam do m e do n variando. Em um applet aparece o *m* e no outro o *n*. Iris fala em integral tipo 1 e tipo 2. O que seriam esses tipos? Por que vocês podem afirmar isso? Quanto ao resultado final em um cálculo, o que podem me falar sobre usar o tipo 1 e a tipo 2? O que faz vocês afirmarem isso?

Fonte: os autores, 2020.

Todas esses procedimentos de pesquisa nos permitem fazer uma triangulação de dados, ou seja, a partir desses dados produzidos o pesquisador pode relacioná-los e “[...] checar algum detalhe ou [...] compreender melhor algum fato ocorrido [...]

promovendo uma maior credibilidade de sua pesquisa" (ARAÚJO; BORBA, 2013, p. 42).

Segundo Goldenberg (2018, p. 69) "a combinação de metodologias diversas no estudo do mesmo fenômeno, conhecida como triangulação, tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto de estudo". Ou seja, a utilização de variados métodos proporciona o aprofundamento do estudo em si.

Na próxima seção discorro sobre como a Teoria da Atividade nos orientou para a produção e análise de dados, trazendo os princípios que direcionam as formas de planejamento para esse momento da pesquisa.

3.3 Toques da Teoria da Atividade na produção de dados

Para a segunda parte da discussão a respeito da metodologia da pesquisa, separamos o momento em que pensamos a produção de dados. Ao iniciarmos o planejamento nos deparamos com alguns princípios da Teoria da Atividade (TA) que nos deram norte para esse momento da pesquisa.

Esses princípios são o sistema de atividade, a multivocalidade e a historicidade, primeiro, segundo e terceiro princípios da TA, respectivamente. Cada um tem uma influência significativa no processo de planejamento da produção de dados, como apresentado a seguir.

O sistema de atividade, primeiro princípio da TA, traz em sua base o triângulo proposto por Engeström (2001) com os *nós* que simbolizam cada elemento que faz a representatividade da atividade humana. Quando pensamos a produção de dados, nos baseamos nos *nós* para que pudéssemos restringir o público, como será explicado abaixo. No caso desta pesquisa, por exemplo, alguns requisitos foram criados para que os sujeitos pudessem se inscrever para fazer o curso.

As regras, ou requisitos, eram: ser licenciando ou licenciado em Matemática, ter disponibilidade de horário no período da tarde, ter visto o conteúdo de integrais simples (não era necessário que estivesse aprovado em Cálculo II), ter espaço na memória do *smartphone* (aproximadamente 100mb) para baixar os aplicativos necessários no curso. Além disso, não era preciso que a pessoa tivesse um desses dispositivos, pois a nossa intenção era trabalhar em duplas, ou trios.

Necessariamente a nossa intenção era criar um grupo de pessoas para que o curso acontecesse: a comunidade, pois dentro dessa comunidade poderíamos olhar para os indivíduos e selecionar o sujeito, ou mesmo considerar a comunidade no todo como sujeito. Ao selecionar a comunidade como sujeitos, nesse caso, teríamos os sujeitos agindo duplamente. O artefato a ser estudado era o *smartphone*. Em um sistema idealizado, nosso objeto foi considerado como a construção do conceito de integrais duplas, pois é a chamada matéria-prima resistente orientado a uma atividade, que carrega o motivo verdadeiro da atividade (ENGESTÖM; SANNINO, 2010).

Portanto, até aqui temos quatro *nós* contemplados, faltando ainda os sujeitos, caso não agissem como tal, e a divisão do trabalho. Nesse caso, os sujeitos são os licenciandos em matemática e licenciandos em física[10], ou seja, os indivíduos que fazem parte da comunidade. E, por fim, a divisão do trabalho, que corresponde aos sujeitos participarem das tarefas, a professora regente ministrar o curso e o auxílio dos assistentes de pesquisa.

A multivocalidade age no espectro da formulação da produção de dados quando se pensa um curso que considera várias vozes, sejam elas da professora regente, dos alunos enquanto participantes do curso, dos assistentes. No caso dos participantes, por serem sujeitos diferentes e possuírem suas próprias histórias e crenças, é realçada ainda mais a multivocalidade, principalmente quando são separados em duplas ou trios, ocorrendo um confronto entre essas histórias e crenças pessoais.

O terceiro princípio da TA, a historicidade, influencia a produção de dados na questão do tempo a ser conduzido o curso. O nosso plano para o curso, ao escrevermos o projeto de pesquisa, era para seis encontros, pois "[...] os sistemas de atividades tomam forma e são transformados em longos períodos de tempo. Seus problemas e potenciais só podem ser entendidos em relação à sua própria história [...]" (ENGESTRÖM, 2001, p. 136, tradução nossa), mas um sistema de atividade também pode evoluir em um tempo curto como em uma aula de 50 minutos, buscando satisfazer o princípio da historicidade, visto que uma atividade só pode ser analisada a partir de sua história.

Tais encontros foram então divididos em: i) Tarefa de exploração do *GeoGebra 2D*; ii) Tarefa de revisão do conceito de integral e sua definição por soma de Riemann;

[10] Um dos alunos participantes fazia licenciatura em Física, mas era licenciado em Matemática.

iii) Tarefa de exploração do *GeoGebra 3D*; iv) Tarefa abordando Integrais Duplas e Iteradas; v) Tarefa sobre o Teorema de Fubini; e vi) Tarefa sobre Regiões Gerais.

Nessa seção busquei trazer elementos da Teoria da Atividade que nos nortearam a pensar o curso, suas tarefas, os alunos que participariam e outras pessoas envolvidas. Assim ficou desenhado o curso, desde a sua idealização até a concepção. Na próxima seção trago alguns aspectos do Projeto de Ensino de Graduação cuja intencionalidade era constituir um ambiente para a produção de dados e apresento os alunos das licenciaturas que participaram da pesquisa.

3.4 Selecionando os primeiros dados: o PEG "Integrais Múltiplas e o *Smartphone*: o que podemos?" e os futuros professores

O curso mencionado nas subseções anteriores é fruto de um Projeto de Ensino de Graduação (PEG) submetido à Pró-Reitoria de Graduação com o título "Integrais Múltiplas e o *Smartphone*: o que podemos?". Esse PEG tinha como objetivo geral, além da produção de dados para essa pesquisa, desenvolver com os licenciandos discussões acerca do uso de aplicativos no dispositivo móvel para a aprendizagem de conceitos matemáticos envolvendo integrais simples e múltiplas.

Como objetivos específicos tínhamos a intenção de: i) explorar os aplicativos Geogebra e Geogebra 3D no desenvolvimento de conceitos matemáticos relacionados ao estudo de integrais simples e múltiplas; ii) levar os alunos à reflexão sobre o uso das tecnologias digitais e das tecnologias digitais móveis no ensino; e iii) desenvolver tarefas que possibilitassem a reflexão e discussão sobre integrais simples e múltiplas.

Inicialmente havíamos pensado em fazer o curso com alunos que já tivessem feito Cálculo II na Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, mas corríamos o risco de ter um público reduzido. Optamos então por abrir o leque para alunos que em algum momento da trajetória acadêmica tivessem estudado integrais, além de receber alunos da Licenciatura em Física.

Com o fim do segundo semestre chegando, ficamos com o tempo apertado para executar o PEG. Nesse sentido, tivemos que fazer algumas adaptações no curso para que esse acontecesse ainda em 2019. Nossa intenção era fazer 6 encontros de 1h30min às segundas e quartas-feiras, mas devido aos horários dos alunos da graduação e de sugestões dos mesmos, adequamos os horários para as segundas-feiras de novembro de 2019. Além disso, devido às provas finais estarem próximas, os alunos nos solicitaram para que fizéssemos dois encontros no mesmo dia.

Para participarem do curso, os licenciandos em matemática foram convidados por meio de folders impressos afixados nos corredores do Instituto de Matemática, além de visitas feitas em algumas aulas, como História da Matemática e Cálculo II. Os professores das duas disciplinas foram muito receptivos e disponibilizaram um momento para que convidássemos os alunos para realização do curso.

No folder (figura 12) havia informações sobre alguns requisitos para participar, onde se inscrever por meio de um QR Code, quem seriam os ministrantes e local de realização, além de um telefone para contato. O QR Code os direcionava para um formulário do Google em que eram solicitadas algumas informações, tais como: nome, número de dispositivo móvel para contato, e-mail, semestre em que se encontrava, disponibilidade de horários no período vespertino, se em algum momento da vida acadêmica já viu o tema integrais e, em caso afirmativo, havia uma solicitação para relatarem um pouco da experiência.

Figura 12 – Folder de apresentação do Curso

Fonte: Os autores, 2019.

Ainda no formulário, os alunos encontravam na descrição os dias e os horários definidos anteriormente: 04/11/2019, 11/11/2019, 18/11/2019 e, se necessário, 25/11/2019, no horário das 13h30min às 16h40min.

Após algum tempo de divulgação tivemos 14 inscritos, embora nem todos tenham participado do curso. É preciso constatar aqui a presença da tecnologia digital como meio para obtenção de dados, para a inscrição dos participantes no PEG. Ou seja, por meio da tecnologia “papel” em que uma imagem codificada foi impressa, a tecnologia digital “dispositivo móvel” usava de sua câmera para direcionar a um *site* em que os alunos fariam sua inscrição por meio da tecnologia escrita.

Ao iniciarmos o curso tivemos presentes 10 alunos dos que haviam realizado a inscrição por meio do formulário criado no Google Formulários. No segundo encontro tivemos uma desistência e duas novas inscrições, ou seja, no segundo encontro participaram 11 alunos. No último encontro, tivemos novamente algumas faltas, ocasionando a participação de apenas nove estudantes.

De todos os acadêmicos que fizeram parte em algum momento do curso, apenas um cursava o segundo semestre de licenciatura em Física, mas era formado em Matemática, sendo os nove restantes da licenciatura em Matemática. Os nove alunos da Licenciatura em Matemática se distribuíam em: um cursando o 2º semestre, um o 3º semestre, cinco o 4º semestre, um o 6º semestre e um do último semestre que, estava frequentando há dez semestres o curso.

3.5 Selecionando os segundos colaboradores para a produção de dados: os aplicativos utilizados no curso

Durante todo o processo de planejamento e desenvolvimento das tarefas do curso, pensamos em aplicativos voltados tanto para a matemática, como o GeoGebra, voltado para o estudo de integrais, e o Mobizen para gravação de tela e áudio.

O GeoGebra foi explorado em duas categorias: a primeira refere-se ao GeoGebra 2D, que nos *smartphones* se encontra com o nome “Graphing Calculator”. O aplicativo possui como característica, que o diferencia do segundo, a apresentação, na tela do *smartphone*, de uma janela em duas dimensões. A segunda refere-se ao GeoGebra 3D, que se intitula no *smartphone* como “3D Calculator” e tem como característica principal a apresentação da janela em três dimensões.

Além das funções para duas e três dimensões, o GeoGebra pode ser encontrado também como aplicativo específico para Geometria, na forma de *software* para computadores que integra as funções de Geometria plana e o 2D em uma única janela. Por fim, o *software* também tem a possibilidade de acesso a uma nova janela para Geometria espacial e atribuições em três dimensões.

Com o passar do processo de maturação da produção de dados, pensamos em realizar algumas tarefas de incentivo à exploração e de introdução aos aplicativos, em consonância com a introdução de temas que tangenciavam de algum modo o objeto de pesquisa dessa dissertação.

A partir disso, pensamos em utilizar em momentos e situações diferentes os aplicativos 2D e 3D. Por exemplo, no primeiro encontro utilizamos exclusivamente o GeoGebra 2D, quando pedimos que eles explorassem o aplicativo. Já no segundo encontro, nos utilizamos dos dois aplicativos, separadamente em um momento e simultaneamente em outro. No último encontro evidenciamos apenas o comportamento do aplicativo em 3D.

Como nossa proposta era analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra, precisaríamos de algum modo observar o que os sujeitos elaborariam quando estivessem em atividade. Para que isso fosse possível, optamos por solicitar aos alunos que baixassem o aplicativo Mobizen e o executassem sempre que fossem realizar as tarefas.

O Mobizen é um aplicativo destinado a dispositivos móveis com sistema operacional *Android* que grava a tela do *smartphone* e capta o áudio em volta desse mesmo dispositivo. Todavia, apesar de utilizarmos dessa possibilidade, essa não é a principal função do aplicativo, o qual foi criado para manipular o *smartphone* em uma tela maior, como no computador. Gravar tela, capturar o áudio, editar e compartilhar a gravação são atribuições secundárias do aplicativo[11].

Esse aplicativo grava vídeos em FULL HD[12] com 1080 pixels e 60 quadros por segundo. No campo de editar ele permite cortar o vídeo, criar várias cenas e adicionar ou remover o som dos vídeos. Em compartilhar, o usuário pode partilhar sua criação em várias redes sociais e plataformas de jogos. O motivo de usar o Mobizen se baseia na utilização de vídeos como instrumentos de pesquisa.

Tendo em vista que nos depararíamos com imprevistos, tanto tecnológicos como outros quaisquer, em um primeiro momento pensamos que os aplicativos selecionados seriam suficientes para o decorrer do curso e a produção de dados, mas esbarramos com um imprevisto de sistemas operacionais incompatíveis com o Mobizen. Assim, antes de iniciar o primeiro encontro fizemos uma busca rápida no Google a fim de encontrar um aplicativo compatível com o iOS e semelhante ao Mobizen que teria a mesma função: capturar áudio e gravar a tela do *smartphone*.

[11] Disponível em: <https://www.mobizen.com/>. Acesso em: 27 de abr. de 2020.
[12] Alta definição de imagem, possibilitando nitidez e clareza.

Essa busca resultou em um aplicativo chamado Recgo, mas infelizmente este não resultou como esperávamos. O aplicativo capturava poucos segundos de tela e iniciava propaganda, o que gastou tempo e energia dos usuários. Com esses empecilhos, o Recgo foi deixado de lado, pois seria necessário pagar para ter a versão sem propagandas.

Uma das propostas mais discutidas durante todo o processo de pensar a produção de dados era buscar aplicativos para dispositivo móvel que não demandassem o investimento de recursos. Ou seja, procurávamos aplicativos, matemáticos ou não, que fossem gratuitos para os participantes do curso baixarem livremente, o que foi facilitado pelo GeoGebra e pelo Mobizen. Entendemos que existem várias possibilidades de aplicativos para a aprendizagem a serem usados sem precisar envolver gastos, seja do docente ou dos alunos.

3.6 Desenhando e criando telas para os encontros

Embora tenham aparecido durante esse relato informações sobre o curso, até o momento não houve uma explicação sobre como aconteceram os encontros. Essa é a minha proposta para essa subseção, ou seja, trazer elementos de como o curso foi pensado, como ocorreu, seus temas e objetivos.

Vários foram os fatores que influenciaram no decorrer das tarefas do curso, dentre eles, como já foi mencionado, o período de planejamento. Pensamos em tarefas exploratórias e investigativas, visto que “[...] é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 49). Esses mesmos autores ainda apontam algumas potencialidades de tais tarefas como a possibilidade de enveredar por vários caminhos, resoluções e soluções diversas e os alunos poderem propor diferentes estratégias para resolução das tarefas, dentre outras (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015).

Por isso, corroboramos Borba e Penteado (2010, p. 18) ao afirmarem que

> [...] há pedagogias e visões epistemológicas que se coadunam com [a tecnologia digital]. Aula expositiva, seguida de exemplos [com a tecnologia digital], parece ser uma maneira de domesticar essa mídia. A forma de evitar isso seria a escolha de propostas pedagógicas que enfatizem a experimentação, visualização, simulação, comunicação eletrônica e problemas abertos [...].

Durante o pré-curso, por exemplo, percebemos que os dispositivos móveis teriam sistemas operacionais que influenciariam no percurso do que estaria por vir. No decorrer da execução das tarefas durante o curso houve interferências em horários, o que é normal também. O curso ocorreu como mostra a Quadro 4 – Distribuição dos temas e objetivos nos dias de encontro, abaixo:

Quadro 4 – Distribuição dos temas e objetivos nos dias de encontro

Dias	Tema	Objetivos
04/11/2019	Primeira parte: Contato inicial com os participantes do curso; Segunda parte: Tarefa de exploração do GeoGebra Graphing Calculator;	Primeira parte: Explicação do decorrer do curso, objetivos do curso, apresentação dos aplicativos e por que/para que o curso foi desenvolvido. Segunda parte: Apresentação e exploração do GeoGebra; Construção de uma função e cálculo da área abaixo do gráfico da função;
11/11/2019	Primeira parte: Explorando Integrais Definidas; Segunda parte: Explorando o aplicativo *GeoGebra 3D Graphing Calculator*;	Primeira parte: Explorar a área sob funções a partir da Soma de Riemann e Integrais Definidas. Segunda parte: Deixar que os alunos se ambientem com o GeoGebra 3D; Construção de uma função de duas variáveis; Manipulação da função.
18/11/2019	Primeira parte: Continuação da segunda parte do encontro do dia 11/11. Segunda parte: Integrais Iteradas e Teorema de Fubini	Primeira parte: Continuação da segunda parte do encontro do dia 11/11 Segunda parte: observação e manipulação de *applets* sobre iteração e a discussão sobreo Teorema de Fubini;

Fonte: Os autores, 2020.

Além disso, utilizamos o livro Cálculo, volume 1 e 2, de James Stewart como base para a projeção das tarefas (Apêndice A). Tanto o volume 1, com seus capítulos de integração, quanto o segundo volume tiveram a presença constante no processo de elaboração das tarefas. Inicialmente a primeira parte dos encontros foi inspirada em um tema que podemos elencar como “uma introdução às integrais múltiplas”, já que se constituiu como um momento de recordar as integrais simples, com o *smartphone*.

Assim como no capítulo 15 do segundo volume do livro de Stewart (2013), em que faz uma revisão de integral definida em sua parte inicial, trouxemos para a discussão a Soma de Riemann. O livro ainda nos inspirou em procurar por *applets* que possuíssem similaridades com os exemplos contidos dentro de cada subseção do capítulo. Denominamos a segunda parte dos encontros como “a construção do conceito de integrais múltiplas”.

Embora nossa intenção fosse a de tentar fazer um estudo dessas integrais, por conta de o tempo ser escasso e o tema ser fruto para vários trabalhos, não conseguimos contemplar alguns tópicos como as propriedades das integrais múltiplas. Alguns exemplos são: a linearidade da integral (a integral da soma é a soma das integrais e a integral de constante multiplicando a função é a constante multiplicando a integral da função) e, se $f(x,y) \geq g(x,y)$ para todo(x,y) em R, então $\iint_R f(x,y)dA \geq \iint_R g(x,y)dA$.

Assim, nosso curso foi caminhando para se encerrar no tópico de integrais iteradas e o Teorema de Fubini, mas ainda tem-se que considerar a abrangência dos encontros, uma vez que partes importantes do tema "integrais múltiplas" como é o caso da construção do seu conceito, foram exploradas e investigadas.

O livro se constituiu como instrumento enriquecedor para o ensino e aprendizagem, mostrando-nos que "[...] não podemos negligenciar as práticas de mídias anteriores, nem seu valor [...]" (CHIARI, 2018, p. 363). Por essa razão é preciso que sejamos capazes de pensar as várias possibilidades de usar as tecnologias e integrá-las e, ainda, "[...] precisamos lançar nosso olhar reflexivo sobre as novas possibilidades que as tecnologias digitais atuais trazem para a discussão sobre Educação e sobre Educação Matemática" (CHIARI, 2018, p. 363). A importância do livro como recurso de base nos permitiu ter uma visão ampliada das várias tecnologias presentes no âmbito educacional, seja ele básico ou superior.

Nas próximas subseções discorro sobre os encontros e os instrumentos utilizados em cada momento da produção de dados. Conto, resumidamente, o que foi feito em cada aula, desde os *downloads* dos aplicativos até as folhas de respostas, alguns instrumentos utilizados e as tarefas.

3.6.1 Encontro I – 04 de novembro

O primeiro encontro, com duração de 160 minutos, aproximadamente, foi destinado para as tarefas I e II do curso, já que ficou decidido fazer encontros duplos e diminuir a quantidade de dias. No início fizemos uma apresentação falando dos ministrantes, de por que estávamos fazendo aquele curso, do projeto TeDiMEM, aplicativos que teriam de fazer o *download* em seus *smartphones*, temas que seriam contemplados durante o período de encontros e uma pergunta esclarecedora muito importante que era "Por que usar o *smartphone*?".

Além disso, foi entregue um questionário inicial (Apêndice B) com algumas perguntas que já haviam sido respondidas no Google Formulários e outras que não tinham sido contempladas anteriormente, como por exemplo citar alguma experiência que considerava boa com o Cálculo e uma que considerava ruim. A intenção desse questionário se desdobra em três questões: i) conhecer os alunos, suas experiências com as tecnologias e com o Cálculo; ii) avaliação quanto aos anseios com o curso e iii) potencialidade de triangulação de dados.

Durante o desenvolvimento do encontro os alunos foram solicitados a fazer dois tipos de tarefa: exploração do aplicativo GeoGebra 2D e construção de uma função a partir de um protocolo com instruções, incrementando essa função com a aplicação da Soma de Riemann. Nessa primeira reunião os participantes tiveram a possibilidade de explorar as funcionalidades do GeoGebra.

Por que consideramos esse momento para a construção do conceito de Riemann pelos alunos se poderíamos enviar um *applet* pronto? A resposta para essa pergunta repousa no fato de que não queríamos que o grupo passasse durante todo o curso praticando com tarefas prontas. Pensamos que poderiam ter momentos em que os participantes tivessem maior contato com a tecnologia digital que fosse além de manipulações, afinal estes integrantes serão professores futuramente e precisarão de experiências que viabilizem o processo docente. Outro motivo seria a gama de funções que os membros do curso poderiam explorar, indo muito além do que nós trazíamos no protocolo.

Com a construção pronta, eram projetadas algumas perguntas disparadoras para o debate em grupo, além de ser entregue aos estudantes uma folha com estas impressas, com a finalidade de que os alunos registrassem as conclusões do que foi discutido. Ao final do encontro foi feita uma sistematização do que era a Soma de Riemann, a Integral Definida e a relação com a área abaixo da curva do gráfico.

Por fim, destacamos as variadas tecnologias aqui utilizadas, sejam elas digitais ou não. O *smartphone* já mencionado como recurso auxiliar de obtenção de dados, o projetor, o giz, a lousa, o papel, o lápis/caneta e os aplicativos/*applets*. Apesar de pesquisar sobre tecnologias digitais, ainda defendemos que é preciso uma integração das diferentes tecnologias como recurso para o ensino e aprendizagem de matemática.

3.6.2 Encontro II – 11 de novembro

O segundo encontro do curso tinha como objetivo explorar integrais definidas e o aplicativo *GeoGebra 3D Graphing Calculator*. Além disso, tínhamos como objetivo na primeira parte explorar a área sob gráficos de funções a partir da Soma de Riemann e Integrais Definidas e, na segunda parte, deixar que os alunos se ambientassem com o GeoGebra 3D, a construção de uma função de duas variáveis e manipulação da função.

Para iniciar o encontro, tivemos a revisão da reunião anterior introduzindo assuntos que seriam discutidos no dia, como o conceito de integral definida. Após isso, entregamos outro protocolo de construção em que os alunos precisavam plotar uma função com quatro controles deslizantes. Em seguida, era solicitado que inserissem o comando da Soma de Riemann. Para esse caso pedimos apenas a soma inferior e que explorassem essa construção. Já o último passo era plotar o comando “IntegralNumérica”. No próprio protocolo de construção já havia perguntas para discussão, por exemplo, uma que relacionava as funções (Soma de Riemann Inferior e Integral Numérica) citadas anteriormente.

Na segunda parte do encontro iniciamos a exploração do GeoGebra 3D, que demandou ser dividida em dois momentos. No primeiro momento foi solicitado aos alunos que um dos membros da dupla ficasse responsável em colocar uma função de uma variável no GeoGebra 2D e o outro ficasse responsável em criar uma função de duas variáveis no GeoGebra 3D.

Visto por meio da TA isso configura um dos *nós*, ou seja, era uma regra que cada um usasse um dos aplicativos. Podemos notar também que o *nó* da divisão dos trabalhos foi movimentado, visto que era para inserir uma função de uma variável em um aplicativo e de duas variáveis em outro.

A finalidade nesse exercício era trabalhar com o domínio de funções em duas dimensões e em três dimensões. Novamente tivemos uma pausa para que fossem entregues perguntas propulsoras de discussão.

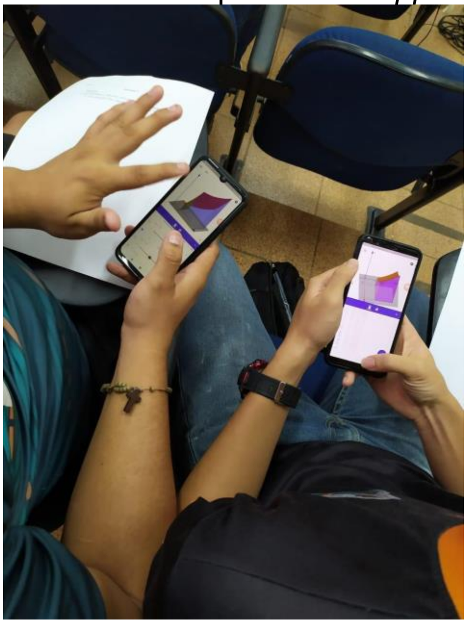
Houve muitas discussões durante as perguntas, principalmente com a função que sugerimos ($f(x) = \frac{c}{x} + 1$), em um certo ponto, $x = 0$, que ocasionou respostas diferentes. Em alguns *smartphones* o GeoGebra apresentava um número e em outros apresentava “indefinido”. Assim, o encontro foi encerrado após a sistematização do porquê nesse ponto eram apresentados diferentes valores, o que será discutido no capítulo de análise.

3.6.3 Encontro III – 18 de novembro

O terceiro (e último) encontro iniciou-se como o anterior, ou seja, fizemos uma introdução relembrando o que havia sido feito relacionando com o que aconteceria nessa última reunião. O tema era Integrais Iteradas e o Teorema de Fubini e os objetivos eram: observação e manipulação de *applets* sobre iteração e a apresentação do Teorema de Fubini.

Como não houve tempo hábil para finalizar as tarefas do segundo momento do encontro anterior, precisamos tomar o tempo pós-introdução do terceiro encontro. Para isso era preciso um *applet* em que os alunos pudessem explorar o GeoGebra 3D, esse foi enviado via aplicativo de mensagens do *smartphone* em um grupo que todos estavam inseridos. O *applet* proporcionava a visualização de um recorte de uma superfície, como mostra a Figura 13 a seguir:

Figura 13 – Alunos explorando o *applet* em 3D



Fonte: Os autores, 2020.

Os alunos exploravam, faziam a visualização e discutiam a partir das perguntas disparadoras. Todas as perguntas foram entregues para discussão em grupo e os alunos faziam a sistematização em papel. Para finalizar a discussão do assunto, fizemos a proposta de um debate com os alunos para que eles discutissem entre si estratégias que utilizariam para achar o volume e o que poderia ajudar ou atrapalhar na sua aprendizagem de integrais múltiplas. Por fim, deixamos a seguinte pergunta: “Como você explicaria o conceito de cálculo de uma integral dupla? E a relação com volume?”.

Iniciamos então o segundo momento que era a exploração de um *applet*, enviado do mesmo modo que o anterior, em que os alunos precisavam manipular os controles deslizantes disponíveis e discutir a partir das perguntas impulsionadoras, por exemplo: “o que você percebeu ao manipular o *applet*?”.

Em seguida, foi solicitado que os participantes tentassem resolver uma integral manualmente. Depois pedimos que os alunos verificassem tal integral a partir do aplicativo. E ainda fizemos algumas perguntas como “Que conjecturas se estabelecem a partir da exploração do *applet* e da resolução em papel?”, “Que relações conseguem fazer entre o procedimento no papel e o procedimento no geogebra?”, “Qual a importância da visualização do gráfico e da resolução com papel e lápis, quando variamos x e y, para o seu entendimento?”.

Ainda restavam três pontos a serem contemplados para finalizar o encontro e o curso, como um todo. A apresentação do Teorema de Fubini, a revisão dos conceitos a partir da conceitualização, discussão e produção dos alunos e, por fim, o questionário final (Apêndice D) a ser respondido pelos alunos.

No último questionário nos preocupamos em tentar entender o que poderia melhorar no curso, se os participantes foram contemplados com o que esperavam e, ainda, sobre dificuldades encontradas para desenvolver tarefas com o *smartphone*. Outras questões apresentadas também foram sobre como utilizariam o *smartphone* para potencializar a sua aprendizagem e enquanto futuro(a) professor(a), quais possibilidades vislumbrava em relação do uso do *smartphone* para o ensino de matemática[13].

As tarefas mencionadas no decorrer desse subcapítulo estão ao final dessa pesquisa, na seção Apêndice A. Ao longo desse capítulo expus e “selecionei” alguns “cliques” e “toques”. A partir deles, fizemos ampliações e observamos novos horizontes no decorrer da metodologia. Os percursos que passamos nos moldaram até esse momento, nos movimentaram em busca de respostas, fizeram-nos sair da zona de conforto e buscar a exploração e a investigação. Agora com os dados já produzidos vamos nos lançar em outro desafio: sua análise.

---

[13] As atividades propostas durante o curso podem ser apreciadas no final desse relato de pesquisa, na seção “Apêndice”.

4 DESLIZANDO SOBRE TELAS E PRODUÇÕES: A SENSIBILIDADE DE OLHAR PARA OS DADOS

Na análise de dados buscamos olhar para o que foi produzido com a teoria constituindo um caminho interpretativo, ou seja, por meio das concepções teóricas adotadas vamos expor o que foi feito pelos alunos no decorrer do curso. É a partir desse momento que iremos nos ater aos dados impregnados "[...] por uma visão de conhecimento e por diversas leituras prévias que englobem os temas [...]" conforme apontado por Borba, Almeida e Gracias (2018, p. 82).

Nesse ponto do relatório é importante que, segundo os autores, "[...] apareça a criatividade e a voz do autor, que estará dialogando com as lentes da voz teórica e com a literatura analisada" (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018, p. 81). As vozes da literatura vão tendo sua presença diminuindo e as dos sujeitos pesquisados tendo sua amplificação, ou seja, "[...] a voz dos professores, dos alunos envolvidos e dos participantes da pesquisa que estejam aí colocadas – é fortemente destacada a partir da voz do autor, que entrelaça, tece e analisa mantendo viva a voz teórica" (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018, p. 81).

Outra característica importante que se nota na análise de dados vem da subjetividade do autor, pois é nessa parte da pesquisa, a partir da sua sensibilidade para aproveitamento máximo dos dados e da teoria (GOLDENBERG, 2018) que estes são revelados.

Dito isso, seguimos para uma nova fase dentro dessa seção: escolha do grupo a se tornarem atores potenciais de análise. Para isso buscamos apoio na Teoria da Atividade com o objetivo de dar base para a justificativa. Assim, dentre os grupos de alunos que participaram da pesquisa, escolhemos um, cujos registros nos permitiriam olhar com mais profundidade para aspectos envolvendo historicidade, multivocalidade e possibilidade de contradições internas, alguns dos quais foram notados durante a produção de dados.

No decorrer da produção, a historicidade tornou-se ponto de escolha, pois dentro dos grupos tivemos muitos casos de mudança de duplas, trios, sendo os escolhidos um dos que menos ocorreram modificações. Como aponta Galleguillos (2016, p. 54), o Sistema de Atividade "[...] é construído e transformado de forma irregular ao longo do tempo, e só pode ser compreendido ao ser estudada a sua história. A história da organização, dos conceitos teóricos, das ferramentas, do objeto e da atividade mesma". Além disso, tivemos problemas com faltas dos alunos durante os encontros, o que não foi notado nesse grupo.

A multivocalidade é um princípio importante da TA, pois traz a ideia de múltiplas vozes para o desenvolver da atividade. Nesse grupo, especificamente, embora todos fossem do curso de Licenciatura em Matemática, temos vozes de vários momentos da graduação: uma integrante já está em vias de finalizar o curso, se encontrando no décimo semestre (embora o curso tenha apenas oito semestres, os alunos usam uma contagem temporal para isso, ou seja, faz dez semestres que a aluna estava na graduação). O outro já havia estudado integrais em algum momento da vida, mas ainda se apresentava no terceiro semestre. Por fim, o terceiro integrante, que se juntou à dupla apenas no segundo encontro, também frequenta o terceiro semestre do curso, mas não havia visto o tema "integrais" durante a vida escolar.

Falando em tempo de gravação disponibilizado, este grupo está longe de ser o que possui a maior medida, mas ao ser observado durante a produção notamos que em atividade os alunos, muitas vezes, iam além do que pedíamos, víamos a teoria sendo movimentada, tensões entre *nós*, indícios de contradições internas, o que será discutido mais à frente, e isso nos instigou a olhar mais a fundo sua produção.

Aqui quero trazer a importância dos assistentes de pesquisa que contribuíram qualitativamente com o seu olhar atento aos movimentos ocorridos, o que, por sua vez, facilitou o momento de "mergulho" nos dados.

Alguns problemas ocorridos e limites que as tecnologias trazem podem ser notados nesse momento, como capacidade de armazenamento e problemas de gravações serem excluídas acidentalmente. Sendo assim, tivemos três vídeos para a análise das discussões ocorridas nesse grupo, além de uma entrevista feita com estes.

Chegamos então ao momento de apresentar os sujeitos: Danilo, Íris e João. Na Figura 14 apresentamos Danilo e João.

Figura 14 – João e Danilo, respectivamente, durante a entrevista[14]

Fonte: dados da pesquisa.

A partir da teoria e da escolha do grupo a ser analisado, iniciamos o movimento de observação e análise dos dados produzidos por meio das ações dos alunos, mais precisamente por meio dos Sistemas de atividades construídos, como veremos a partir das subseções a seguir.

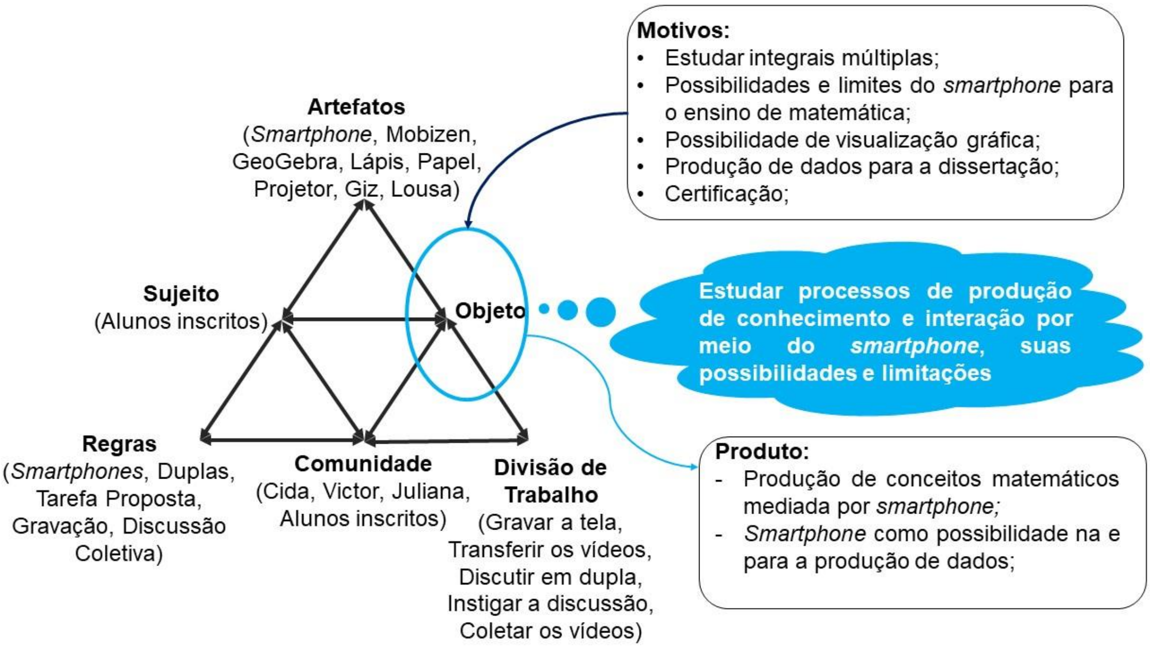
4.1 Movimentos iniciais: o que pensamos e os motivos dos alunos

Para iniciar, pensamos ser interessante para a pesquisa apresentar um Sistema de Atividades Idealizado do Curso (SAIC), fruto de motivos de quem propôs o curso e de quem se dispôs a participar, dos objetivos e foco do curso, pois Engeström (1999), "[...] em sua visão de atividade coletiva, acrescenta que os motivos estão incorporados no objeto da atividade e que, o objeto e os motivos dão às ações coerência e significado [...]" (GALLEGUILLOS, 2016, p. 52).

A partir dos motivos expostos pelos participantes no primeiro encontro e dos motivos que *nós*, enquanto proponentes do curso, desejávamos proporcionar, podemos identificar um objeto, pois a atividade tem caráter coletivo para Engeström. Segundo Souto (2014, p. 24), "[...] o objeto, em geral, é compartilhado por todos os sujeitos [...]". Assim, apresentamos como objeto: Estudar processos de produção de conhecimento e interação por meio do *smartphone*, considerando as possibilidades e limitações de seu uso.

[14] Íris não participou da entrevista por motivos que fogem do nosso conhecimento.

Figura 15 - Sistema de Atividades Idealizado do Curso (SAIC)



Fonte: os autores, 2020.

Na representação os artefatos são estabelecidos conforme foram mobilizados no curso, como o *smartphone*, os aplicativos Mobizen e GeoGebra, lápis, papel, projetor, giz e quadro (ou lousa). Os sujeitos, que possuem poder de ação sobre as tarefas propostas, são os alunos inscritos no curso, assim como outros que pediram para participar no decorrer do mesmo. As regras eram: usar os *smartphones* em duplas para realizar as tarefas propostas, executando o Mobizen para a gravação da discussão com o colega ou coletiva.

Dentro da comunidade estavam inseridos: Cida, que era a professora regente do curso; eu e Juliana, que éramos colaboradores; e os alunos inscritos, que fazem parte de dois *nós,* pois também realizam o papel de comunidade dentro dessa atividade. A divisão de trabalho constitui-se de ações individuais, mas que podem ser feitas por mais de um membro, assim como um membro pode fazer mais de uma ação: gravar a tela, transferir os vídeos, discutir em dupla, instigar a discussão e coletar os vídeos.

Para iniciar a análise escolhi o trio anteriormente citado, diante do princípio da historicidade, assim como me ative a esse mesmo princípio para justificar a escolha dos três encontros duplos nesse movimento. Ou seja, usarei todos os encontros e os vídeos que estes me disponibilizaram para inferir e estudar sobre a produção de conhecimentos envolvendo as integrais duplas. Do mesmo modo, analisarei o processo de desenvolvimento da atividade permeado por contradições historicamente desenvolvidas e influenciadas pelas múltiplas vozes na possibilidade de que tais mudanças propiciem a investigação de possíveis transformações expansivas ocorridas.

Além disso, trago momentos de uma entrevista feita com os três alunos escolhidos depois da realização do curso, na tentativa de triangulação de dados do tipo método como explicado em Javaroni, Santos e Borba (2011, p. 198): "os principais tipos de triangulação são as de fontes e as de métodos, com o objetivo de promover maior credibilidade à pesquisa. [...] ao observar o trabalho de um grupo de alunos e, em seguida, entrevistá-los seria uma triangulação de métodos".

Com a construção do Sistema de atividades idealizado podemos dar mais um passo adiante na análise de dados. Iniciamos o nosso observar sensível sobre os dados fazendo uma distinção do SAIC com o Sistema de Atividades Inicial dos sujeitos, como poderá ser notado na subseção seguinte.

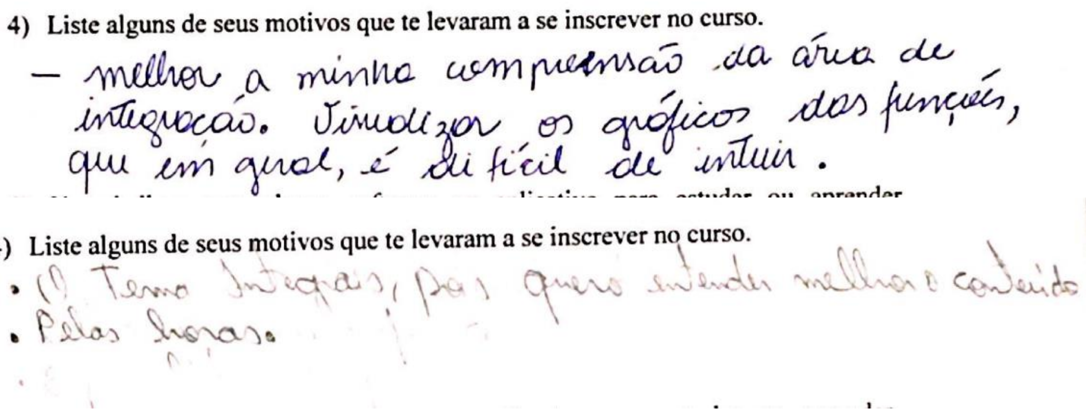
4.2 O primeiro panorama: construindo funções e produzindo conhecimentos matemáticos

Apresentado o Sistema de Atividade Idealizado do Curso nos movemos agora em direção da construção do Sistema de Atividade Inicial dos sujeitos, nesse caso da dupla Danilo-Íris, que se tornará trio a partir do segundo encontro. Assim, era esperado que os alunos, movidos pelos seus motivos, se engajassem na tarefa de explorar o GeoGebra. Como nossa intenção na pesquisa era analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra, no caso, o processo em que os alunos produzem o conceito de integrais duplas por meio do *smartphone*, pensamos que observar como se desenvolvem os movimentos que ocorrem no sistema de atividade dos alunos na produção do conceito de integrais pode ser uma possibilidade de encontrarmos traços prováveis de contradições internas.

Vistas à luz da TA, as contradições são o princípio que possibilita a existência de transformações expansivas, ou seja, podem ser consideradas molas propulsoras potenciais movimentando o sistema para novos estágios qualitativos, surgindo soluções qualitativas para as formas de atividade que foram modificadas (SOUTO, 2014). Com isso, as contradições trazem a possibilidade de emergirem as transformações expansivas, cuja análise corresponde a um dos objetivos específicos da pesquisa.

No primeiro encontro foi entregue um questionário inicial para os participantes com questões abertas e de múltipla escolha a fim de conhecê-los em suas especificidades. Ainda com a intenção de observar os motivos por trás da inscrição de cada um, fizemos uma questão estritamente direcionada a isso, como mostro nas imagens a seguir:

Figura 16 – Respostas dos alunos à questão dos motivos[15]


4) Liste alguns de seus motivos que te levaram a se inscrever no curso.

— melhor a minha compreensão da área de integração. Visualizar os gráficos das funções, que em geral, é difícil de intuir.

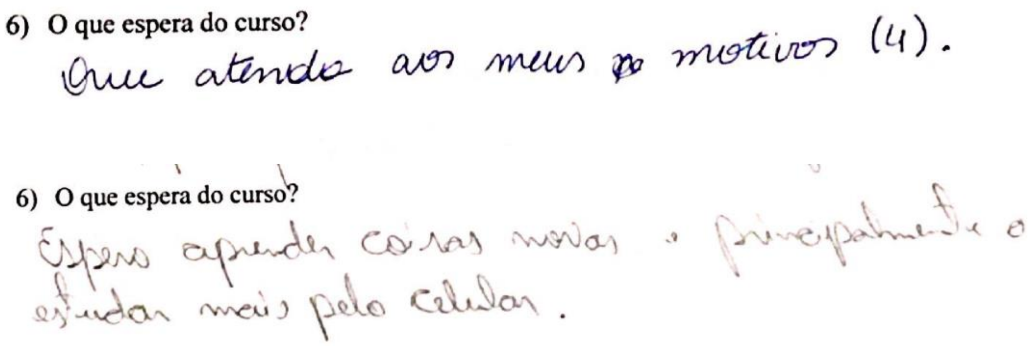
4) Liste alguns de seus motivos que te levaram a se inscrever no curso.

• O Tema Integrais, pois quero entender melhor o conteúdo
• Pelas horas.

Fonte: dados da pesquisa.

Como é possível observar, temos apenas duas respostas, ou seja, da Íris e do Danilo, respectivamente, pois João já entrou com o curso em desenvolvimento. Nessas respostas podemos observar os motivos de ambos se inscreverem no curso. Quanto às suas expectativas:

Figura 17 – Expectativas com o curso[16]


6) O que espera do curso?

Que atenda aos meus motivos (4).

6) O que espera do curso?

Espero aprender coisas novas e principalmente a estudar mais pelo celular.

Fonte: dados da pesquisa.

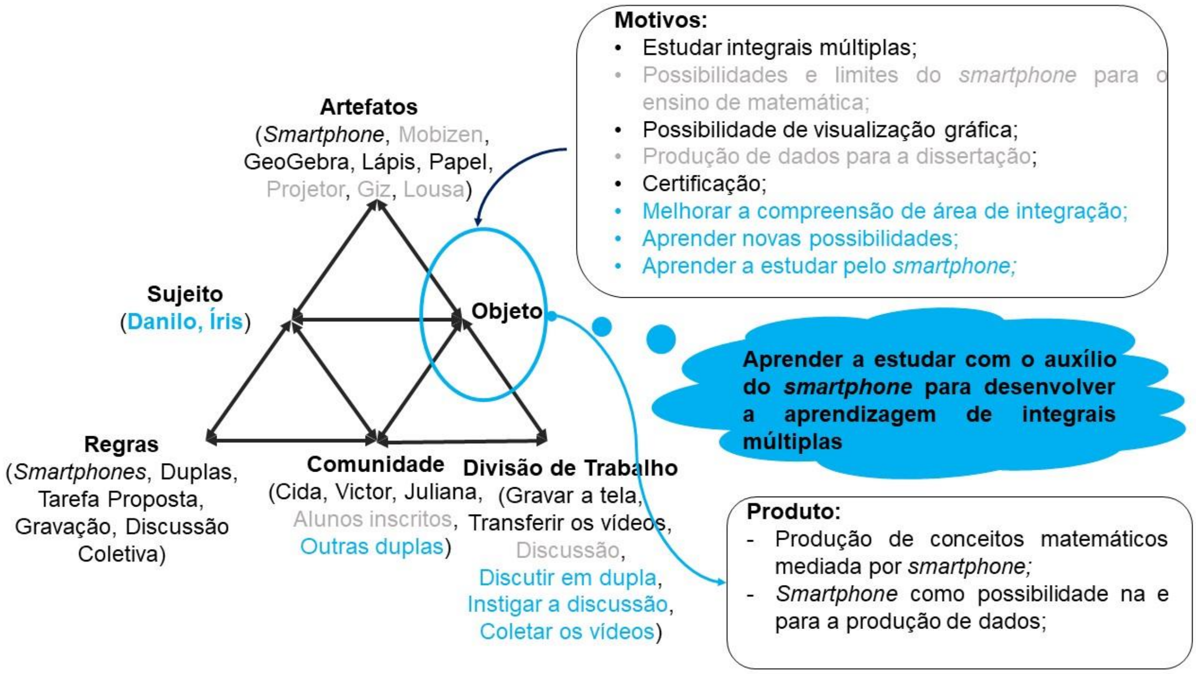
---

[15] Melhor a minha compreensão da área de integração. Visualizar os gráficos das funções, que em geral, é difícil de intuir.
O tema integrais, pois quero entender melhor o conteúdo.
Pelas horas.

[16] Que atenda aos meus motivos (4).
Espero aprender coisas novas e principalmente a estudar mais pelo celular.

Íris é categórica ao afirmar que espera que seus motivos sejam contemplados, enquanto Danilo responde que busca aprender coisas novas, assim como a estudar pelo *smartphone*. Todos esses motivos e expectativas nos levam na direção da construção de um objeto da atividade inicial: Compreender Integrais Múltiplas com o auxílio de gráficos e do *smartphone*. A seguir apresento o Sistema de Atividade Inicial:

Figura 18 – Sistema de Atividade Inicial



Fonte: os autores, 2020.

Do SAIC para o Sistema de Atividade Inicial temos algumas mudanças, que foram destacadas com algumas cores. Para familiarizar o leitor, em azul são considerados “novos” *nós* do sistema, em cinza colocamos elementos que já faziam parte do sistema e não se tornaram foco para a análise.

Pensando nessas mudanças, agora os sujeitos são apenas Danilo e Íris, e os outros participantes do curso, aqui chamados de “outras duplas”, passam a fazer parte apenas da comunidade. Os artefatos agora só se referem aos que os sujeitos vão se utilizar para a mediação com o objeto, elencados como *smartphone*, GeoGebra, lápis e papel.

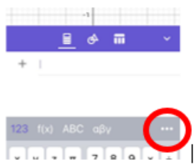
As regras continuam as mesmas, pois os sujeitos vão usar os *smartphones* com sua dupla para realizar a tarefa proposta fazendo discussões e gravando. Os motivos mudaram junto com os sujeitos, assim como o objeto. E a divisão do trabalho agora se concentra em gravação de tela, discussão (em duplas e coletiva) e a transferência dos vídeos.

No primeiro encontro o objetivo era fazer a construção de uma função e inserir o comando “SomaDeRiemannInferior” para exploração. Como pretendíamos desenvolver um trabalho de modo que o conceito de integrais duplas fosse visto como uma ampliação do conceito, iniciamos a produção de dados com uma discussão envolvendo tarefas sobre o conteúdo de integrais simples. Assim, alunos teriam a oportunidade de ressignificar, discutir e produzir conceitos. Para que tivessem mais tempo disponível no momento de investigar o que foi construído, entregamos um protocolo de construção, como pode ser visto a seguir:

Figura 19 – Protocolo de construção

PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO DE SOMA DE RIEMANN INFERIOR

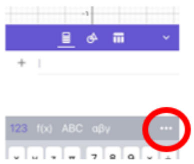
Passos:



a) Crie 4 “Controles Deslizantes”. Para cria-los vá em → Todos os comandos → “ControleDeslizante”. Escreva entre os parênteses (a, b, c, d) e dê enter para ativá-los;

b) Em seguida, crie uma função genérica no Campo de Entrada

. Por exemplo: f(x) = ax² + bx + c. Dê enter para ativar a função;



c) Novamente, vá em e selecione a função “SomaDeRiemannInferior”. Escreva entre os parênteses (f(x), -4, 4, d) e dê enter para ativar esta função;

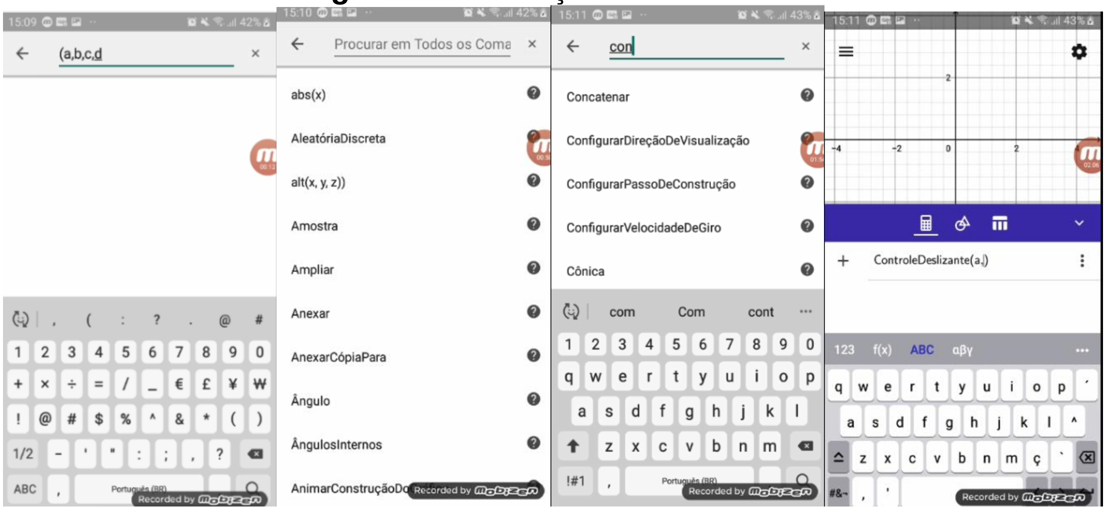
Fonte: dados da pesquisa.

Com o protocolo em mãos os alunos poderiam construir e inserir o comando rapidamente, o que pensávamos que poderia ser um recurso para dinamizar o tempo. Mas ao inserir uma nova mídia, alguns problemas podem surgir como a não familiaridade com os aplicativos, por exemplo. Isso pode ser notado no vídeo[17] a seguir em que Danilo tenta inserir várias vezes o mesmo comando inicial “ControleDeslizante”.

[17] Disponível em: <https://youtu.be/fSLyZi8RKPY>. Acesso em: 21 jun. 2020

No vídeo não há discussão pois os alunos ainda não começaram a manipular e explorar os comandos. Nessa parte, eles estão começando a construir o que é pedido. Para ir direto ao vídeo basta apontar a câmera do seu *smartphone* para o Qr Code[18] ao lado.

Figura 20 – Inserção de comandos



Fonte: dados da pesquisa.

Perceba que o aluno tenta inserir várias vezes o comando na barra de busca, até que ele se atenta à função da barra e digita o comando para enfim encontrá-lo. Ao selecioná-lo, o comando vai direto para o Campo de Entrada e começa a digitar os controles deslizantes. Nessa tarefa era necessário inserir quatro controles deslizantes, cujos “a, b, c” respondiam aos coeficientes de uma função quadrática e “d” à quantidade de retângulos formados pelo comando “SomaDeRiemannInferior”.

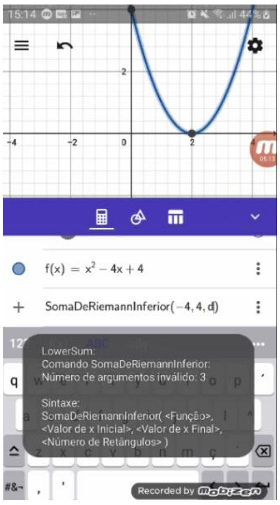
Essa dificuldade de Danilo ao inserir os comandos pode ser explicada como uma tensão gerada pela ação individual e o artefato. Entendo aqui não ser possível ainda afirmar tratar-se de uma contradição interna, pois segundo a perspectiva de Galleguillos (2016), a autora aponta que as contradições podem produzir tensões, mas que nem todas estas são frutos de contradições.

Outro “choque” apresentado entre o aplicativo e o aluno é ao inserir a “SomaDeRiemannInferior”. Para esse passo era preciso algumas especificações ficando assim: SomaDeRiemannInferior(f, -4, 4, d), cujos números e letras representam a função (f), o intervalo para que a soma fosse aplicada (-4, 4) e o número

[18] A partir desse momento, trabalharemos com dois modos de apreciar os vídeos: i) escanear o Qr Code ao lado e; ii) clicar no link que haverá em rodapé.

de retângulos a ser apresentado (d). A tensão surge na hora de inserir as especificações. Danilo tentou inserir o comando sem a parte da função. Sem essa informação, o aplicativo não entende o comando e retorna uma mensagem de erro, como vemos na figura a seguir:

Figura 21 – GeoGebra retornando um erro

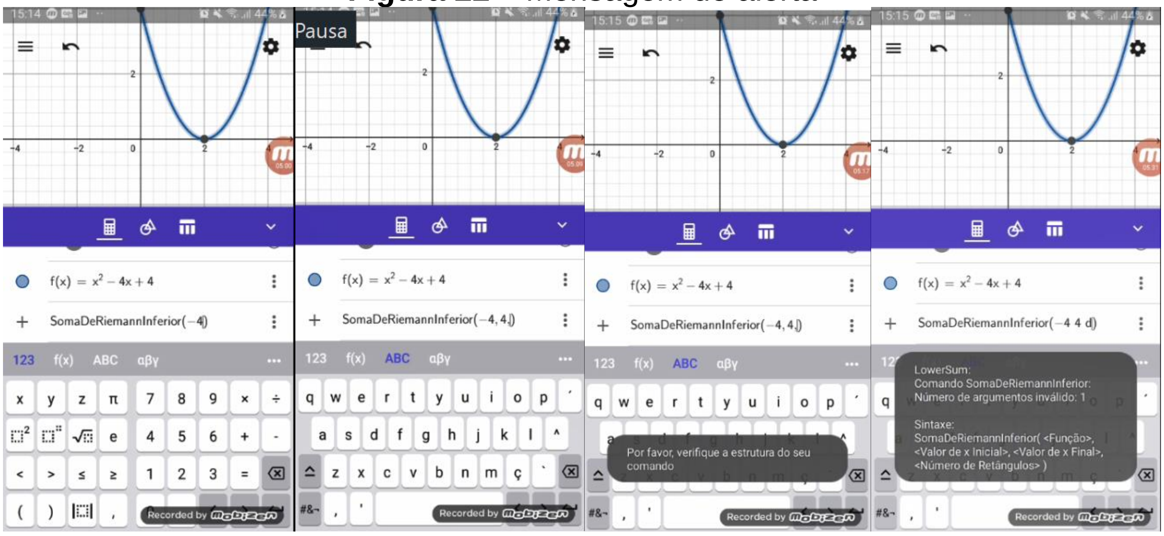


Fonte: dados da pesquisa.

Isso tem a ver com a não familiaridade do aluno com o artefato, pois se não há um certo período para se adaptar aos comandos, principalmente considerando o GeoGebra, que apesar de ser fácil de usar, possui suas características próprias, o aluno pode cometer alguns erros, como os relacionados ao uso da linguagem do aplicativo. Ao se deparar com a mensagem de erro, o aluno tentou outra possibilidade, como apagar a letra "d", fazendo com que o GeoGebra retornasse com outra mensagem de alerta. Nesse momento, vemos o GeoGebra influenciando nas ações do sujeito a partir das mensagens de erro. Todos os movimentos feitos por Danilo podem ser vistos no QrCode[19]:

[19] Disponível em: <https://youtu.be/QRb0R-e_GP8>. Acesso em: 21 jun. 2020.

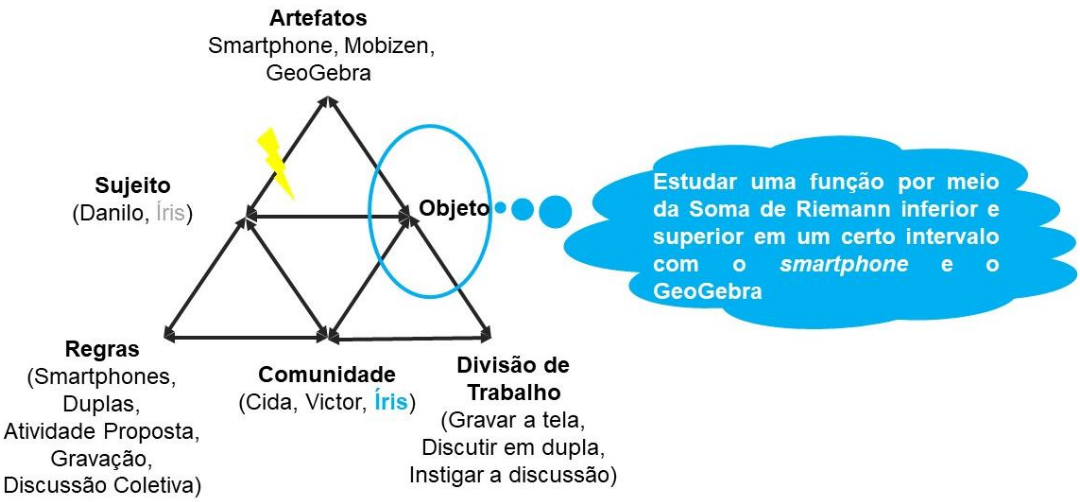
Figura 22 – Mensagem de alerta



Fonte: dados da pesquisa.

Para superar tais desafios e tensões, Danilo recorreu à comunidade. Naquele momento o Sistema encontra-se estagnado, ou seja, a tensão entre o sujeito e o artefato faz o Sistema não se mover. Graficamente poderíamos representar assim:

Figura 23 – Sistema com tensão estagnado



Fonte: os autores, 2020.

Algumas coisas podem ser notadas no SA: Íris agia naquele momento como comunidade, uma vez que ela compartilhava o mesmo objeto da atividade, mas não tinha o poder de ação no momento, nem manipulando o *smartphone*, nem interagindo ou discutindo sobre a tarefa proposta. Engeström (2001, p. 141) comenta que "[...] indivíduos diferentes com vozes diferentes assumem a posição de sujeito principal na atividade em diferentes momentos. O principal papel e agência do sujeito não é fixo, ele continua mudando".

Os sujeitos se enveredaram por um caminho diferente na atividade e, por isso, vemos uma mudança no objeto para "estudar uma função por meio da soma de Riemann inferior associada a ela em um certo intervalo com o *smartphone* e o GeoGebra". O raio amarelo entre os *nós* sujeito e artefato significa uma tensão entre esses *nós*. Segundo Engeström (2001), contradições são tensões, entraves, problemas ou conflitos que se acumulam historicamente dentro dos sistemas de atividade e entre estes. Agora, como esse "choque" impede o Sistema de se movimentar, esse abalo o faz ter uma relativa "estagnação", ou mesmo movimentos significativamente tímidos (SOUTO; BORBA, 2016). Para que isso fosse superado, Danilo (D) pede ajuda à comunidade, nesse caso, chama por Victor (V), como mostra o diálogo abaixo:

D: oooh Victor. Aqui é um exemplo? Pode ser qualquer um?
V: É um exemplo.
D: Mas eu coloquei o menos quatro e dou enter e aparece isso.
V: É preciso colocar o f de x.
D: O f de x? Ah, beleza.
V: Ou só o "f" ele já entende. Ou se você renomeou a função por outra letra é só colocar ela.
D: Eu coloquei... eu tinha colocado... você fala aqui? Eu não coloquei f de x não, mas tá aqui f de x oh...
V: É... não. Ah então é só colocar o "f".

Pela interação da comunidade (V) com o sujeito (D) vemos que D não percebe que havia nomeado a função de "f(x)" e que era necessário colocar no comando "SomaDeRiemannInferior" algo que remetesse à qual função ele queria que fosse aplicada a soma. Isso pode ser visto no vídeo em que o QrCode[20] ao lado direciona.

Dizemos que pode ter indícios de uma contradição entre dois *nós* do sistema, pois podemos estar diante de um dilema na forma discursiva de Danilo ao dizer "Eu não coloquei "f(x)" não, mas tá aqui "f(x)"", ao mencionar que não inseriu o "f(x)" mas que está lá. A forma expressiva "mas" pode ser indício da ideia de dilema, que segundo Galleguillos (2016) se traduz na forma de uma expressão, intercâmbio de avaliação e geralmente é expresso por alguma barreira diante dos seus discursos.

Nesse momento, vemos que produzimos conhecimentos "[...] quando interagimos com os outros e o mundo e depois, quando interiorizamos, quando nos voltamos para dentro, fazendo nossa própria síntese [...]" (MORAN, 2012, p. 23).

Assim, é perceptível que a comunidade agiu de forma a favorecer que o sujeito superasse uma tensão entre dois *nós* que havia desestabilizado o sistema de

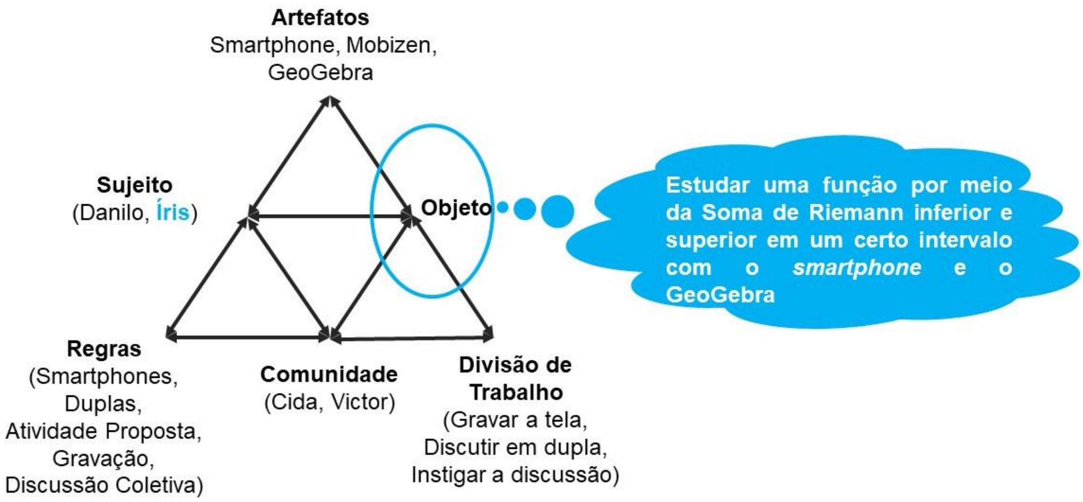
[20] Disponível em: https://youtu.be/pcap0TIkqfg. Acesso em: 21 jun. 2020.

atividade, fazendo-o se movimentar. Ou seja, a comunidade orientou o sujeito a resolver uma contradição interna secundária, pois algo que não era do conhecimento do sujeito foi mobilizado (SOUTO, 2014). Ao transpor essa dificuldade, Íris voltou a ser sujeito, modificando novamente o SA e indo além do que era pedido.

A partir da construção do gráfico e exploração, os alunos se engajam em inserir a Soma de Riemann superior. O objetivo da tarefa era inserir a soma inferior apenas, mas vemos que os sujeitos se propuseram a estudar algo além do que foi solicitado. Podemos ver isso no vídeo que o QrCode[21] ao lado direciona.

Todo o esforço feito com a tecnologia para superação do desafio, nesse caso, altera o objeto que era "estudar uma função por meio da Soma de Riemann inferior associada a ela em um certo intervalo com o *smartphone* e o GeoGebra" para "estudar uma função por meio da Soma de Riemann inferior **e superior** em um certo intervalo com o *smartphone*". Além disso, é importante notar que os alunos estão estudando integral definida (em um certo intervalo), pois há uma grande diferença em relação ao conceito de integração indefinida.

Figura 24 – Transformação do objeto



Fonte: os autores, 2020.

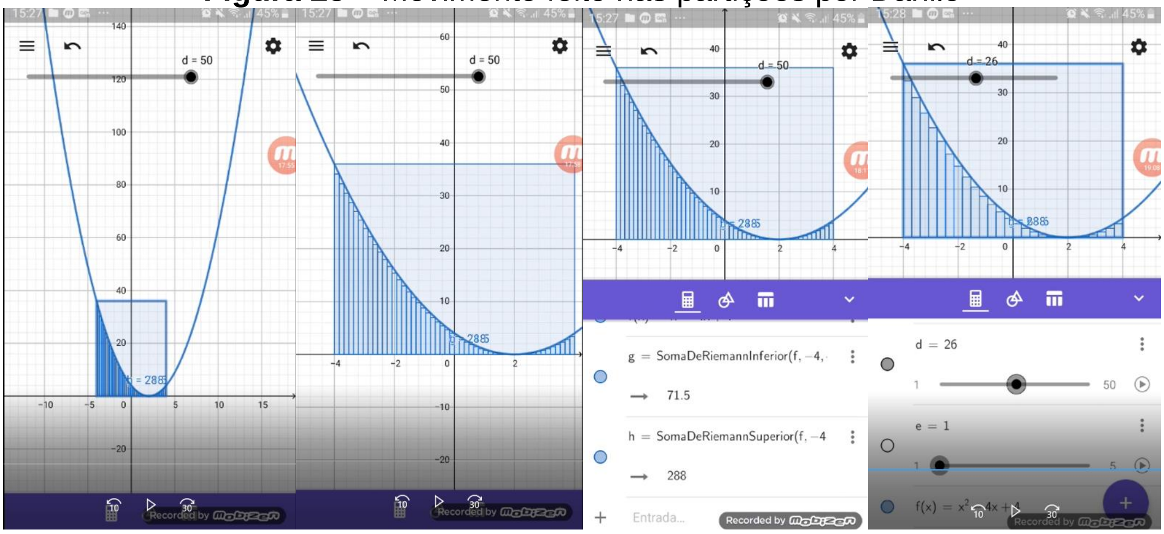
[21] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=6ViUSrtzZ74. Acesso em: 21 jun. 2020.

É perceptível que mesmo com dificuldades os sujeitos fizeram a construção da Soma de Riemann superior ainda que em seguida discutam sobre como fazer a partição com maior quantidade de retângulos, como vemos no diálogo que segue[22].

Í: Aí, ela tá particionada por um. Você viu que ela apareceu um blocão, então é uma única partição. Foi o que eu 'tava vendo como eu mudava essas partições. Eu coloquei só...
D: Como é que faz pra mudar a partição?
Í: Pois é, eu 'to tentando lembrar. Como é esse processo. Vou chamar ele de novo pra fazer a partição. Eu sei que eu acabei mexendo em alguma coisa que eu mudei. E é no controle deslizante que a gente vai alterar. Porque é ele que 'tá dando pra gente quantas partições a gente tá...
D: Eu vou no duplicar ou configurações?
Í: Eu dupliquei o meu "d" e aí já apareceu como "e". Porque a gente... quando você abre ela aqui oh... a primeira coisa que a gente fez foi colocar os controles, não foi?
D: Sim.
Í: então eles estão já estabelecidos, aí eu dupliquei o "d" e aí ele automaticamente abriu pra mim o "e". Na hora que ele abriu o "e" aí eu consegui trabalhar.
D: Ah... entendi.

Nesse trecho do diálogo vemos que os sujeitos tentam sozinhos superar dificuldades que encontram com as funcionalidades do aplicativo associadas com o conceito de integral, como a funcionalidade de apresentação da quantidade de partições apresentadas, embora seja necessário fazer um adendo: a partição é apenas uma, o que temos de diferença é a quantidade de intervalos existentes. Novamente, aparece um problema entre sujeito e artefato e, por isso, se em algum momento posterior notarmos que há algo acontecendo entre esses *nós,* teremos indícios de uma contradição interna.

Figura 25 – Movimento feito nas partições por Danilo



Fonte: dados da pesquisa.

[22] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=qv0HRXZd8gs. Acesso em: 21 jun. 2020.

Na afirmação: “‘tá dando pra gente quantas partições a gente tá”, percebemos que há um equívoco na relação entre partições e quantidade de intervalos existentes. Entendo que é essa questão de imprecisão do conceito que está dificultando que consigam enxergar que o problema não seria resolvido duplicando a partição

Finalizando com a investigação dos controles deslizantes, temos os alunos buscando as configurações desse comando para mudar a quantidade de retângulos apresentados na tela.

Isso pode ser constatado com o último vídeo desse encontro, em que o Danilo comentou ao final do vídeo que a ideia de integral está nítida para ele ao visualizar os movimentos no gráfico:

D: E pra mim tá bem nítida a ideia de integral aqui. Conforme eu vou aproximando vai ficando bem clara a ideia de integral.

Buscando evidenciar o que ele quis dizer com isso, a partir do processo de triangulação, uma das perguntas feitas a Danilo e João, participantes da entrevista, era: “Danilo faz uma afirmação no primeiro vídeo: ‘aqui eu vejo bem o conceito de integral’. Danilo, você poderia me explicar melhor o que você quis dizer com essa fala?”. Em seguida, passo a palavra a Danilo pedindo que ele comente sobre[23].

D: Ali eu pude perceber o seguinte... No caso vários retângulos preenchendo aquela área. E vamos supor um retângulo médio. Conforme você vai diminuindo a quantidade desse retângulo, ele vai ficando até como se fosse virar uma linha e essa linha consegue preencher, independentemente se a área é... daquela curva, daquela região é torta, é... é toda descida, caída. Conforme você vai diminuindo cada vez mais esses retângulos ela vai preenchendo essa área todinha.

O que entendemos que Danilo queria comentar nessa parte é que ao passo que acontece a diminuição da medida da base dos retângulos, consequentemente aumentando o número de retângulos na partição, a soma das áreas vai cada vez mais se aproximando da área da região abaixo da curva, considerando um intervalo em que a função é positiva. Ou seja, quando aumentamos essa quantidade de retângulos até o infinito podemos ter a aproximação da área abaixo da curva.

[23] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=3r0fXLnTKgo. Acesso em: 21 jun. 2020.

Ao final das discussões em dupla os alunos precisavam registrar suas sistematizações em papel. Algumas perguntas (Quadro 5) foram entregues em uma folha.

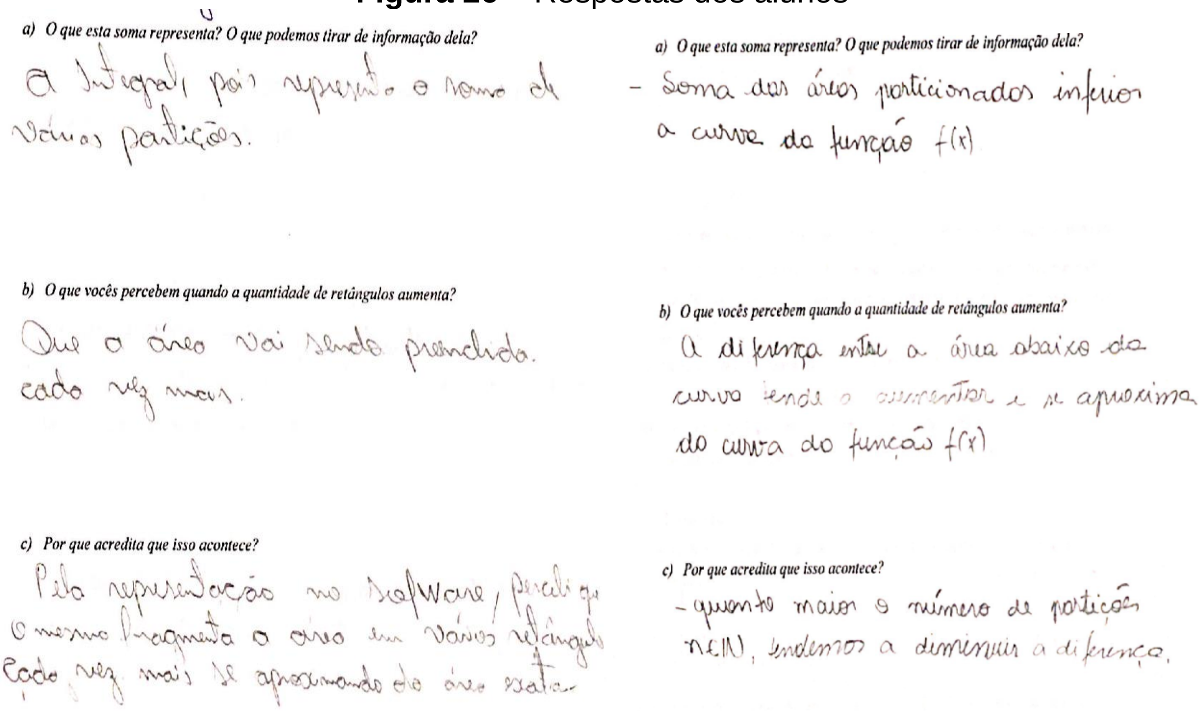
Quadro 5 – Perguntas do primeiro encontro

a)	*O que esta soma representa? O que podemos tirar de informação dela?*
b)	*O que vocês percebem quando a quantidade de retângulos aumenta?*
c)	*Por que acredita que isso acontece?*
d)	*Se mudasse a função, o que aconteceria? Como ficariam os retângulos?*

Fonte: dados da pesquisa.

Algumas coisas podem ser notadas quando observamos as respostas sistematizadas em registro escrito.

Figura 26 – Respostas dos alunos[24]



Fonte: dados da pesquisa.

Nota-se agora que tanto Danilo quanto Íris trazem uma palavra importante com relação à Soma de Riemann: aproximação. Danilo (primeira figura), ao ser indagado sobre por que ele acredita que a área vai sendo preenchida cada vez mais, responde

[24] a) A integral, pois representa a soma de várias partições;
a) Soma das áreas particionadas inferior a curva da função f(x);
b) Que a área vai sendo preenchida cada vez mais;
b) A diferença entre a área abaixo da curva tende a aumentar e se aproxima da curva da função f(x);
c) Pela representação no *software*, percebi que o mesmo fragmenta a área em vários retângulos cada vez mais se aproximando da área exata;
c) Quanto maior o número de partições $n \in \mathbb{N}$, tendemos a diminuir a diferença.

que: “Pela representação no *software*, percebi que o mesmo fragmenta a área em vários retângulos cada vez mais se **aproximando** da área exata”.

Assim como Íris, ao responder o que percebeu quando a quantidade de retângulos aumentou: “A diferença entre a área abaixo da curva tende a aumentar e se **aproxima** da curva da função $f(x)$”. Ela acredita que isso acontece porque: “quanto maior o número de partições $n \in N$, tendemos a diminuir a diferença”. Aqui parece estar um ponto importante, pois essa questão conceitual é bastante importante para a compreensão de integral, já que a quantidade de intervalos envolvida na partição é o que aproxima a Soma de Riemann ao cálculo numérico da integral.

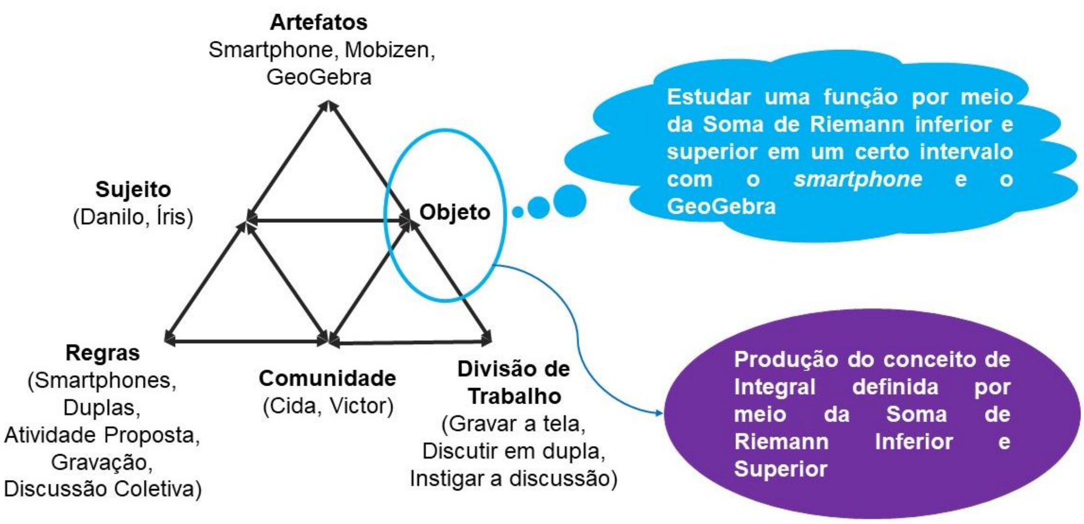
Um conceito chave da definição de Soma de Riemann é que o

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$$

Ou seja, sempre que a função for positiva, podemos interpretar a Soma de Riemann como a soma das áreas dos retângulos. Ainda podemos interpretar a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ como a área sob a curva da função em um intervalo que vai de a até b.

Observamos ainda que a produção de conceitos nesse momento da atividade se tornou consistente quando os alunos expressaram por meio da escrita a explicação de integral definida em um intervalo fechado. Assim, podemos representar o Sistema de Atividade final desse encontro da seguinte maneira:

Figura 27 – Sistema de Atividade Final do Encontro 1



Fonte: os autores, 2020.

Analisando o SA final é perceptível que, durante o encontro 1, elementos do sistema sofreram alterações e mudanças. A comunidade atuou no momento que houve tensões entre sujeitos e artefatos mais de uma vez. O artefato *smartphone* por meio do GeoGebra influenciou os sujeitos a modificarem o objeto, principalmente, por seu caráter interativo.

Além disso, o *smartphone*, por meio do GeoGebra, por facilitar a visualização de movimentos que outras mídias podem não contemplar, fez com que os sujeitos inserissem além da soma inferior, a soma superior. Todo esse movimento no sistema fez o objeto do primeiro encontro ser reconstruído e, também, possibilitou movimentações referentes à produção do conceito de integral definida por meio da Soma de Riemann inferior e superior.

4.3 O segundo panorama: trazendo desafios tridimensionais

Nesse segundo encontro sentimos a necessidade de dividi-lo em dois grandes momentos, o primeiro tratava de explorar a área sob gráficos de funções a partir da Soma de Riemann e Integrais Definidas. O segundo objetivou deixar que os alunos se ambientassem com o GeoGebra 3D, construíssem uma função de duas variáveis no GeoGebra tridimensional e manipulassem a função. Este ainda foi subdividido em outros dois momentos: i) os alunos foram convidados a pensar e explorar o domínio das funções e ii) exploração de um *applet* enviado aos alunos.

O primeiro momento iniciou com o retrospecto das atividades desenvolvidas no encontro anterior e introdução do debate do dia. Em seguida, aos alunos foi solicitado que pegassem seus *smartphones* e que cada um da dupla abrisse um aplicativo, ou seja, um o GeoGebra 2D e o outro o GeoGebra 3D.

Uma das dificuldades de se utilizar a gravação de tela dos alunos decorre de ter que aguardar o envio dos vídeos por parte deles, o que pode ocasionar o não envio ou até mesmo a perda dessa mídia. Por isso, ao iniciar a análise desse encontro anunciamos que: não dispomos do vídeo que a Íris gravou, então não temos o vídeo em que os alunos trabalharam no GeoGebra 3D, mas o áudio ficou gravado a partir do *smartphone* de Danilo. O segundo é que os sujeitos estavam engajados no uso do tridimensional, então o bidimensional quase ficou relegado a segundo plano.

Para que possamos analisar o SA historicamente, vamos fazer suposições com os vídeos do GeoGebra 2D e tentar sustentá-las com as entrevistas. Além disso, temos o João se juntando ao grupo neste segundo encontro, e a discussão vai para além do que foi solicitado. A partir desse encontro a dupla se tornou um trio.

O vídeo 2 de Danilo, Íris e João inicia com a discussão das questões entregues junto ao Protocolo de Construção II, cuja finalidade era construir uma função e inserir os comandos de SomaDeRiemann e IntegralNumérica, como pode ser visto a seguir:

Figura 28 – Protocolo de Construção II

Nome: ____

PROTOCOLO DE CONSTRUÇÃO II

a) Criar os controles deslizantes abaixo:
   i) Insira no campo de entrada:
      a = 1.
      b = 1.
      c = 1.
      n = 100.
b) Insira uma função. Por exemplo: $f(x) = \frac{c}{x} + 1$ (por favor, não utilize os números "a" e "b" nessa construção, pois eles serão usados no passo seguinte, mas fique à vontade para usar o "c" e/ou criar outros controles deslizantes para construir sua função).
c) Insira o comando "SomaDeRiemannInferior"
   SomaDeRiemannInferior(f, a, b, n)
d) Após a manipulação insira o comando "IntegralNumérica"
   IntegralNumérica(f, a, b)

Fonte: dados da pesquisa.

Com a construção feita e as discussões nos grupos finalizadas, foi feita a discussão com a professora Cida com o intuito da sistematização, cujas perguntas (Quadro 6) eram projetadas na lousa para iniciar o debate com todos.

Quadro 6 – Perguntas norteadoras do Encontro II

Perguntas: *a) Ao explorar a construção feita, o que percebeu quanto ao comando IntegralNumérica e à SomaDeRiemann?* *b) O que percebe quando manipula b em relação aos valores do IntegralNumérica e à SomaDeRiemann?* *c) Qual a relação dada pelo cálculo integral e a área abaixo da figura?*

Fonte: dados da pesquisa.

É nesse momento que o vídeo começou e Íris trouxe uma questão intrigante para a discussão, que é o caso de a função ser par ou ímpar. A indagação de Íris tem relação com um comportamento que o aplicativo GeoGebra apresentava. Em alguns casos ele retornava números ou apresentava a palavra "indefinido" ou, em outros casos, mostrava o símbolo de infinito. A função pedida para a construção, $f(x) = 1 +$

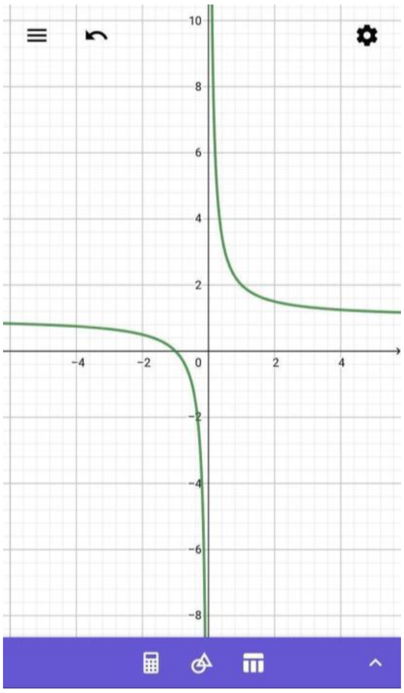
$\frac{1}{x}$ era descontínua e indefinida em $x = 0$, ou seja, quando o intervalo de integração continha esse ponto, o aplicativo apresentava alguns comportamentos não comuns.

Algumas conjecturas foram elaboradas durante a discussão, como quando o intervalo era $[-a, a]$, ou seja, ao inserir um intervalo de integração com um número real negativo e seu oposto, o GeoGebra apresentava como resultado $2a$, isto é, o dobro de a. Nesse caso, 0 também é contemplado e algumas questões foram levantadas, embora, nesse momento, desejava-se entender a relação que Íris fez sobre o fato da função ser par ou ímpar.

O que se pode tentar supor é que Íris estivesse buscando uma resposta para a questão: Por que o GeoGebra retorna um número, indefinido ou infinito para um intervalo que contemple $x = 0$?". Uma explicação para isso é a questão da simetria da função, cujos conceitos envolvem ser uma função par ou ímpar.

Uma função f é considerada par quando $f(-x) = f(x)$, qualquer que seja o valor de $x \in D(f)$. Uma função f é considerada ímpar quando $f(-x) = -f(x)$, qualquer que seja o valor de $x \in D(f)$. Isso quer dizer que deve haver uma simetria de reflexão da função em relação ao ponto $O = (0,0)$, o ponto da origem.

Figura 29 – Print da função $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$



Fonte: construção própria.

Note, entretanto, que a função dada não possui nenhuma das simetrias citadas, ou seja, não é par e nem ímpar. Isso é resolvido quando a professora Cida interfere e faz os alunos chegarem a uma conclusão[25]:

Í: Essa função é simétrica, não é?
C: Ela tem uma simetria sim.
[...] Inaudível [...]
Í: Ela é positiva, não é?!
D: Eu acho que ela é ímpar, não?
C: Aqui íris, oh... Se a gente olha a expressão aqui.
D: Ela é ímpar.
C: Se fosse só um sobre x seria ímpar, mas esse mais um tá fazendo com que ela não seja...
D: Nem par e nem ímpar.
C: Nem par e nem ímpar. Porque olha... para ser par ela deveria ter simetria em relação ao y (inaudível)... e não é! E para ser ímpar ela deveria (inaudível), só que como ela tá deslocada uma unidade para cima tá "quebrando" a simetria.
Í: Entendi.
C: Esse mais um tá "quebrando" a simetria.
D: Será que foi isso que deu aquela "bugada"?
Í: Talvez seja isso que esteja fazendo você ter valor ali quando eles são opostos (inaudível)... a indeterminação. Se a gente pegar...

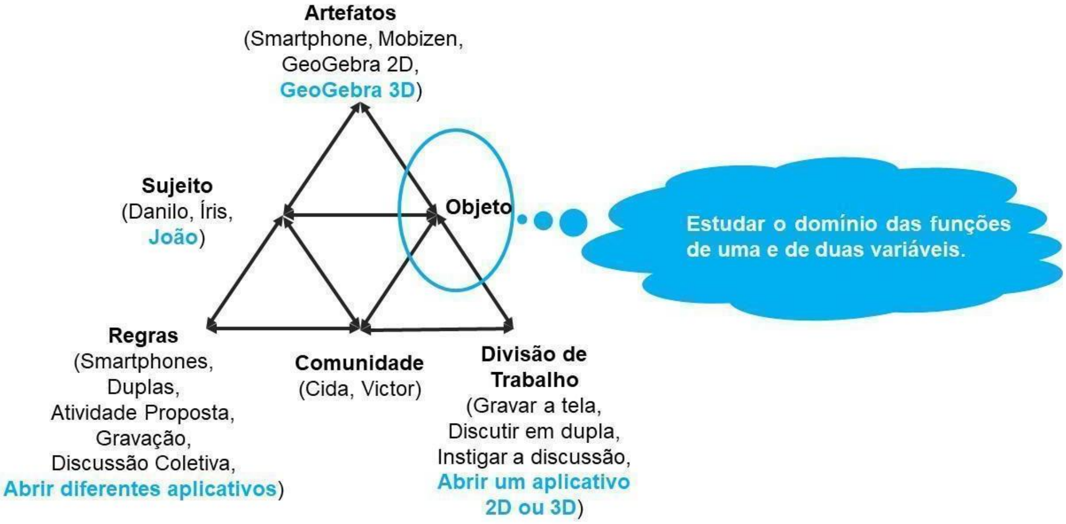
Nesse momento Danilo desliga o Mobizen e inicia a gravar novamente somente quando estão na segunda parte do encontro, pois achou que os vídeos deveriam ser de, no máximo, 30 minutos. Nos próximos parágrafos trazemos como ocorreu o segundo momento e as tarefas envolvidas.

Na segunda parte do encontro os alunos foram instigados a pensar e explorar o domínio das funções. Um membro da dupla ficou responsável em colocar uma função de uma variável no GeoGebra 2D e o outro em criar uma função de duas variáveis no GeoGebra 3D.

Os alunos ficavam livres para escolher qual função colocar em cada aplicativo e não havia nenhum protocolo de construção, com o intuito de deixar os alunos livres para exploração e a fim de propiciar novas possibilidades, diferentes funções e maior abrangência matemática, pois muitos alunos inseriram funções que nem pensaríamos. Com isso, podemos construir um Sistema de Atividade Inicial do segundo encontro:

[25] Disponível em: https://youtu.be/ctat9naYVv8. Acesso em: 21 jun. 2020.

Figura 30 – Sistema de Atividade Inicial do segundo encontro



Fonte: os autores, 2020.

Algumas coisas mudaram em relação ao SA final do primeiro encontro: tivemos a adição de mais um sujeito, João. Uma nova divisão de trabalho foi criada: um membro abria o aplicativo 2D e o outro abria o 3D, o que implicava ainda em uma nova regra “abrir diferentes aplicativos”. Por fim, temos a inserção de um novo artefato: GeoGebra 3D, o que gera novos movimentos dentro do SA.

4.3.1 Abrindo novas telas de possibilidades

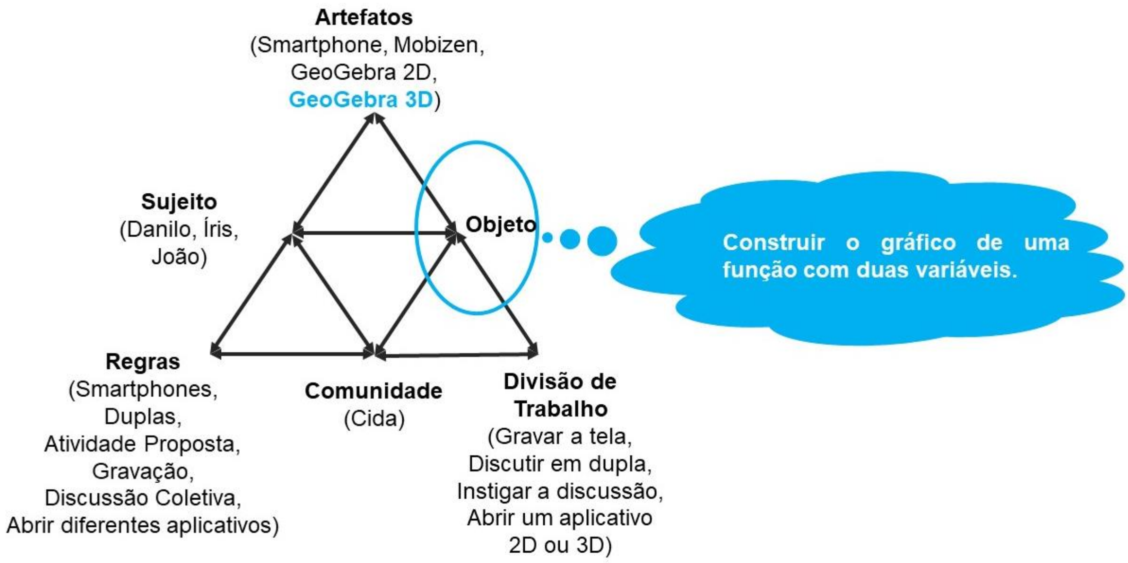
No vídeo não conseguimos falar exatamente o que os alunos estão fazendo no GeoGebra 3D, mas, aparentemente, eles tentam inserir uma função no ambiente tridimensional da mesma forma que inseriram no aplicativo bidimensional[26].

C: Posso ver aqui um pouquinho?
D: Pode.
C: Aqui tá os períodos, o f, a gente tem ele igual a um sobre x.
D: Aqui, oh professora, oh! Opa... Soma de Riemann Inferior, aí tem a inferior também.
C: Ali tá a inferior? Soma de Riemann Inferior, aí você colocou ali do y né?!
D: Eu coloquei f...
C: E y você definiu como um sobre x, urrum... Mas ele tá calculando né?!
D: Ahhhh... acho que eu sei o que é!
I: Tá, ele tá calculando. Mas eu entendi o seguinte...
C: Ele só não tá dando a resposta visual que você queria ver, que era a questão dos retângulos né?!
D: Sim...
C: Mas ele tá calculando né, por exemplo, se você mudar o número de retângulos... Oi?
I: Mas ele não daria a resposta... Ele teria que dar também a resposta visual dos retângulos? No 3D?
C: Então... aí eu não sei. Aí teria que dar uma olhada na estrutura do 3D né?! Se ele faz isso...
I: É... eu acho que é meio...

[26] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=_JBjQ0byvpM&feature=youtu.be. Acesso em: 23 de jun. de 2020.

Como inserimos na atividade um novo artefato (Figura 31), segundo Engeström (2001, p. 137, tradução nossa) “[...] quando sistemas de atividades adotam um novo elemento de fora (por exemplo, uma nova tecnologia ou um novo objeto), muitas vezes leva a uma contradição secundária agravada em que algum elemento antigo (por exemplo, as regras ou a divisão do trabalho) [...]” são potenciais geradores de conflitos levando os sujeitos a tentativas de mudar a atividade (ENGESTRÖM, 2001, tradução nossa). Os sujeitos agora se mobilizam para tentar plotar o gráfico de uma função com duas varáveis no ambiente tridimensional.

Figura 31 – Sistema de Atividade “construção do gráfico 3D”



Fonte: os autores, 2020.

Podemos notar na discussão do vídeo[27] os movimentos que os alunos fizeram ao tentar plotar uma função com duas variáveis.

I: A gente não colocou ali, professora, o... quando eu tenho uma função (inaudível).
C: Se estiver muito difícil para... Falta... Isso! ***E o que que você definiu como f?***
D: Um sobre x.
C: ***O y! Mas e o f?***
D: O f...
I: É por isso que o z não vale nada, não tem a f definida.
C: ‘Cê tá colocando f, f aqui óh... f é um número qualquer.
J: Ah, não...
C: ***‘Cê não definiu f como uma função****.*
I: Por isso que o seu z não tá valendo nada. Por isso que ele não é a folha que ‘cê queria chegar.
D: Qual função que eu deveria colocar para f?

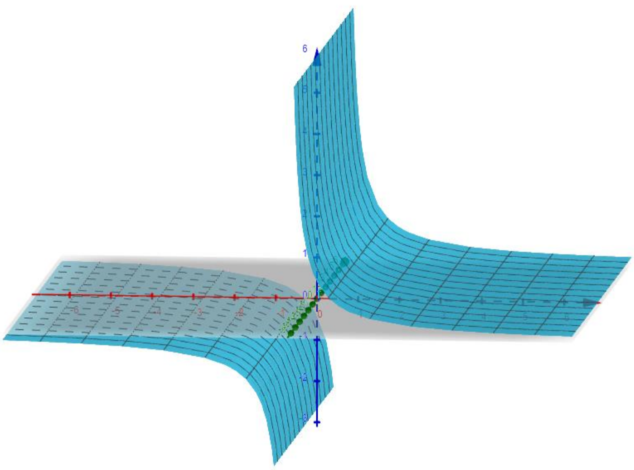
[27] Disponível em: https://youtu.be/blUnMniKNjw. Acesso em: 23 de jun. de 2020.

J: Não... é porque você definiu f como... esse valor aqui.
C: Coloca f... é! Você colocou uma...
J: Aí quando você coloca lá na soma de Riemann...
C: Tenta colocar um sobre x aí em cima da f.
J: Apaga esse f.
C: Dá o enter.
*J: Ah lá... Agora ele... Oh, uma **folha**.*
C: Ele ainda tá dando zero ponto sete. Cadê o... Por que que ele não tá aceitando o f?
J: Apaga esse f aí.
*C: **Deleta o f. Isso. Deleta o f, porque ele tá com a estrutura de número. Clica naqueles três pontinhos ali. Apaga. Agora constrói ele do começo... f, f de x.***
J: Acho bom, então, apagar esse aqui também, né professora?! Esse outro que tá não sei o que x, y?
C: É... ou depois ocultar ele pelo menos.
*I: Agora deu a **folha**.*

Nas falas podemos ver que há uma tensão novamente entre o artefato, que acredito ser o GeoGebra 3D pelo contexto em que é descrito, e os sujeitos. Seria necessário a gravação do segundo *smartphone* para poder ter a noção visual do que os alunos estavam tentando produzir nesse momento, porém, a partir das falas, busco deduzir algo, como, por exemplo, que os sujeitos tentavam plotar o gráfico de uma função com duas variáveis, mas novamente a atenção à linguagem que o aplicativo demanda para “entender” o que os sujeitos queriam ter visualmente estava incorreta.

Alguns trechos deixei destacado para comentários. Em vários momentos a professora Cida chama a atenção dos alunos quanto à estrutura dos comandos, mesmo não sendo explícita. Ao perceber que os mesmos continuavam com as dúvidas, resolvi interferir mais incisivamente. Quando há a menção a uma folha, acreditamos que o gráfico desejado pelos alunos seja o que representa a figura a seguir, em que temos a impressão de ser uma “folha” de papel curva.

Figura 32 – Representação da função $f(x, y) = \frac{1}{x}$



Fonte: elaboração própria.

Isso só foi resolvido após a manipulação do gráfico, como podemos notar com o diálogo a seguir[28]:

J: Aí apaga aquele y lá também, Danilo.
D: Por que apagar o y?
J: Porque tem duas funções, oh... y igual a um sobre x e f.
C: Ou só clica... ou você apaga ou clica na bolinha rosa que ele não vai aparecer ali. Agora manipula aqui pra ver a natureza. Aqui na janela de visualização pra gente ver a natureza desse gráfico. Aqui na...
I: Não...
C: Tira ele.
I: Não, ainda é ***linha****.*
C: Ainda continua ***linha****. Agora...*
I: A gente não teria que dar a definição? Se escrevesse assim... f é um sobre x, um sobre x é z, aí ele interpretaria?
C: Então... eu não sei como... acho que pra...
I: Porque aí eu entendo a z como a variável. A variável nem apareceu, eu entendo que ela vale zero. Aí eu colo ela lá no chão.
C: Urrum... Isso... Isso que eu teria que ver. Nem aparecer se eu concluo que ela vale zero.
I: Exato!
C: Não sei se o GeoGebra entende isso.
I: Porque... como a gente tá fazendo cálculo, como ele não aparece é como se ele...
C: Ele tá mostrando ali só o 2D né?!
I: É... só o 2D. Ele vale zero. Por isso que quando você falou para mim que quando ele não aparece ele é variável, (difícil de entender) disso... porque ***quando ele é só z, então ele percorre os reais.*** *Ele vai...*
C: Se eu tivesse ***colocado ali como uma terceira coordenada z*** *né?!*
I: Z!
C: Z, é verdade! Tem razão.
I: ***Porque aí sim ele dá a folha que você quer****. Agora, se você colocar só isso aqui, só o y igual a um sobre x.*
C: Acho que você tem razão.

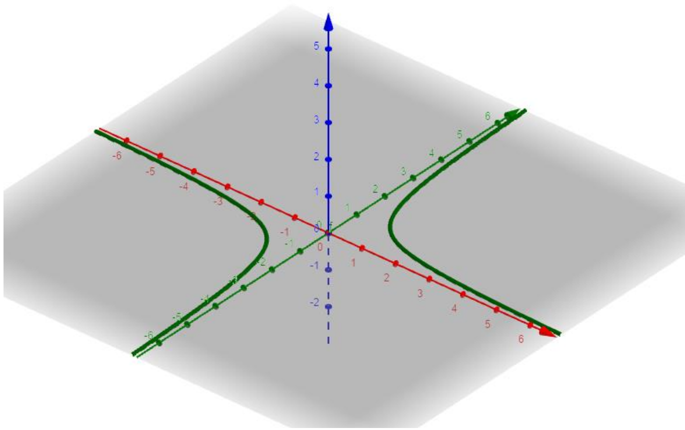
O aplicativo GeoGebra 3D "entende" que uma função de duas variáveis precisa ser escrita como "$f(x, y)$". Assim, a partir das falas somos capazes de supor que os alunos tentam plotar o gráfico com a estrutura para o ambiente bidimensional, como "$f(x)$", ou ainda "$y =$". Nesse sentido, o aplicativo traz uma resposta visual possibilitando que essas mídias participem "[...] de um coletivo que produz conhecimento, a partir das possibilidades de que experimentações sejam feitas com o feedback visual quase instantâneo" (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2015, p. 54).

Isso demora a ser resolvido, fazendo com que o SA fique estancado, paralisado e é preciso uma maior análise do que estão fazendo para que o sistema volte a se movimentar.

[28] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=FsWFz1B5UH0. Acesso em: 23 de jun. de 2020.

Pode-se observar que o novo artefato trouxe novos comandos, novas ações individuais e outra divisão de trabalho entre os participantes. O novo artefato (GeoGebra 3D) fez o sistema se estagnar por um momento, que gerou discussões, tentativas e erros, mas a resposta estava na matemática, cuja estrutura também tem suas especificidades. Um exemplo do que estão fazendo é a seguinte figura:

Figura 33 – Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$

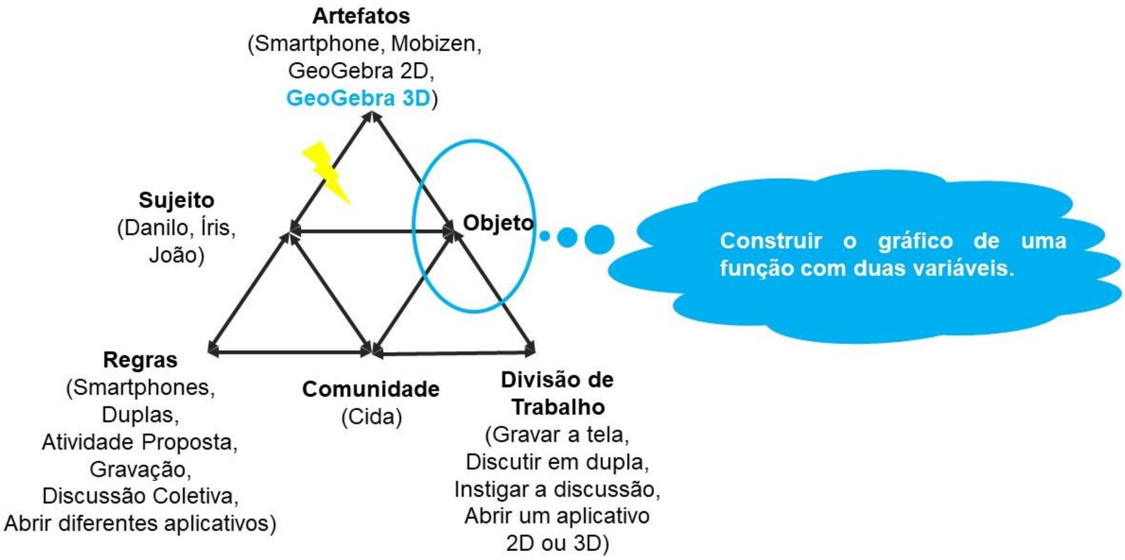


Fonte: elaboração própria.

Quando os sujeitos falam que o gráfico continua dando "linha" é nessa figura que podemos inferir, pois é com a estrutura do ambiente 2D que os alunos tentam plotar um gráfico de três dimensões. A partir do momento que eles consideram "z como variável", $f(x)$, que também pode ser entendida como y, passa ser a variável a qual se aplicará as duplas ordenadas (x, y), nesse caso $\mathbb{R}^2$, e z será o resultado dessa aplicação. Precisamos notar o papel da comunidade (Cida) que nesse momento, apesar de auxiliar, deixou os alunos resolverem o problema.

Durante a construção os alunos se enveredaram por outra discussão que, embora não seja o objetivo do encontro, mostra-se rica em aspectos tecnológicos, matemáticos e estruturais. Podemos, nesse excerto, ver que a matemática foi discutida, questões tecnológicas estruturais foram amplamente contempladas e, além disso, ainda podemos ver que houve uma relação do contexto matemático e tecnológico quando os sujeitos debateram sobre a estrutura $f(x)$ e $f(x, y)$.

Figura 34 – Sistema de Atividade com tensão entre sujeitos e artefato



Fonte: os autores, 2020.

No sistema de atividade anterior temos a tensão sendo representada entre os *nós* sujeito e artefato, novamente, o que pode reforçar nossa ideia de uma contradição entre esses dois elementos do sistema. Será que essa tensão foi resolvida? A essa questão não conseguimos responder até o final dessa discussão, uma vez que os sujeitos voltaram-se à discussão que era pedida para o encontro: reflexões sobre os domínios das funções.

4.3.2 *Retornando às telas principais*

Ao voltar para a tarefa que foi proposta, é preciso que se deixe claro as perguntas que os alunos se ancoraram para a discussão. Assim, para aquele momento, definimos como questões norteadoras:

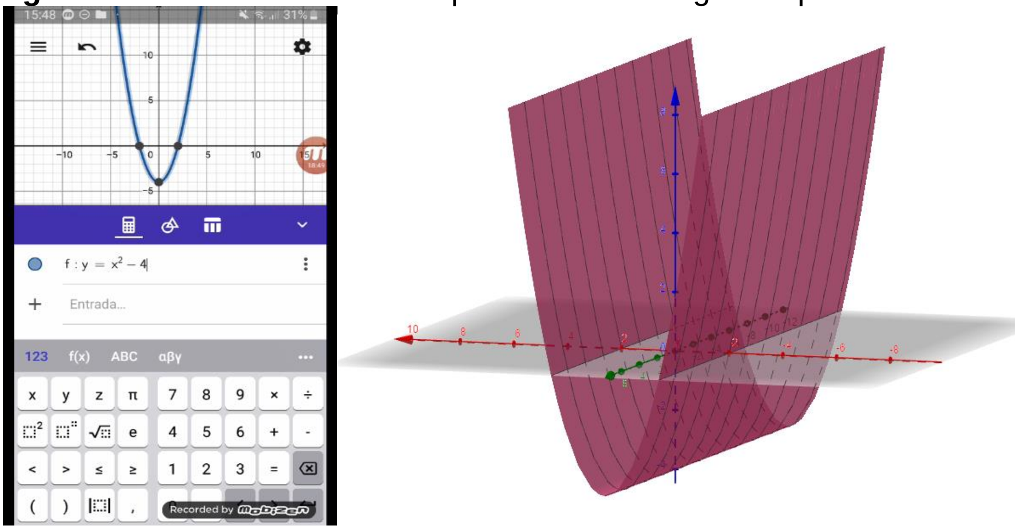
Quadro 7 – Perguntas norteadoras

a) *Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?* b) *Que relações, semelhanças e diferenças você nota entre ambos os gráficos?* c) *Como a ideia dos conceitos de partição e de pontos de amostragem poderia ser pensada para o domínio de funções de duas variáveis?*

Fonte: dados da pesquisa.

Na discussão sobre domínio os alunos decidiram por usar uma função quadrática, nesse caso $f(x) = x^2 - 4$ para o ambiente bidimensional e $f(x, y) = x^2 - 4$ para o GeoGebra 3D. Aparentemente temos que ambas as funções são iguais em termos de expressão algébrica, mas para o primeiro ambiente ela se torna uma "linha", enquanto para o ambiente tridimensional é como se fosse uma folha de papel côncava, como segue nas imagens:

Figura 35 – Print da tarefa feita pelos alunos e o gráfico pretendido



Fonte: Print da tarefa dos alunos e construção própria, respectivamente.

Na discussão[29] vemos algumas reflexões dos alunos sobre o domínio, como o diálogo que segue:

I: Como podemos discutir o domínio das funções? Semelhanças e diferenças que você destaca entre eles. Pega uma função que te agrade. Vamos pegar a parábola que é uma das mais fáceis que a gente tem e vamos jogar você no 2D e eu jogo no 3D.
D: Beleza!
I: Você não trouxe celular hoje?
J: Eu não tenho. Estou sem celular.
I: Te entendo. Já passei por isso.
D: Qual que é a parábola? X ao... Ah, não. Parábola, vamos por x ao quadrado menos...
I: É... Eu vou colocar ela, só que eu vou colocar ela diferente.
D: Y igual x ao quadrado.
I: Vou colocar ela...
D: Coloquei x ao quadrado menos quatro.
J: Deixa só x quadrado, mais bonitinho, mais fácil.
D: Melhor só x quadrado?
I: Não... Você colocou x quadrado menos quatro?
D: Arram...
I: Não tem problema não. f. De... (inaudível) colocar aqui... x, y, z é igual...
C (ao fundo): E aí?! Como tá a discussão? É... vocês querem que a gente sistematize? A gente já cancelou a terceira hoje, por conta do tempo. Aí a gente faz a terceira de hoje na segunda que vem. Aí a ideia é: terminar essa discussão, é... socializar as respostas e eu queria fazer uma fala final sobre esses quatro elementos: gráfico, domínio, partição e ponto de amostragem. A gente tá preparando o terreno para a discussão que seria hoje e a gente passou para a semana que vem.
I: Como eu coloquei só assim, ela tá de novo grudada lá. Ela não subiu.
D: Tá... Como podemos discutir os domínio... o domínio das funções? Que semelhan... que semelhanças você destaca entre elas? Elas são iguais!
J: Elas não formam uma concavidade?!

[29] Disponível em: https://youtu.be/xfLlM1dbWUw. Acesso em: 21 jun. 2020.

D: Como podemos discutir os domínios das funções? O domínio? Vamos colocar... vamos tirar o quatro porque o domínio fica todos os reais.
J: Oxi... aí também está.
D: Também está os reais?
J: Também está o domínio, todos os reais.
D: Opa...
I: É... o quatro só te interfere na imagem. Olhando aqui ó...
D: Como podemos discutir... Sim. Entendi. Isso que era pra fazer: pegar a mesma função para analisar o domínio.
C (ao fundo conversando com outro aluno): Mudou o que era domínio?
D: Mudou alguma coisa do domínio aí? Mudou o domínio?
I: Não.
D: Não?
I: Não. Não muda.

Ao discutirem a construção e o domínio os alunos chamam a minha atenção novamente para a estrutura, pois ao inserir “$f(x, y, z)$” o GeoGebra não entende que estamos no ambiente tridimensional e sim que procuramos uma imagem já em quatro dimensões, indo além do que o aplicativo pode fazer. O que pode explicar a fala de Íris ao se referir que a função “tá de novo grudada lá”, que “ela não subiu”.

Aparentemente os alunos entram em acordo que o domínio não muda, mas gostaria de chamar a atenção para a questão de duplas ordenadas, pois é nesse ponto que a intenção da primeira pergunta repousa. Quando estamos trabalhando com funções de uma variável, temos que o domínio, em geral, é o conjunto dos números reais, que pode ser representado por uma reta numérica. Ao trabalharmos com funções de duas variáveis temos a “adição” de uma outra dimensão ao domínio, isto é, passamos a usar um par ordenado.

A partir disso, esperávamos que os alunos buscassem explorar os gráficos, olhando para o domínio e chegassem à conclusão de que ao trabalhar no ambiente tridimensional, ao escrevermos a estrutura “$f(x, y)$”, eles estariam inserindo pontos do tipo: $(0, 1)$, $(-2, 3)$, $(0{,}2148, 9{,}21)$ etc. Com isso, poderiam pensar que, no caso, o domínio seria $\mathbb{R}^2$.

Como as discussões dos alunos continuaram sobre domínio, vamos a um novo diálogo[30] em que Cida (comunidade) também entra em atividade para resolver questões. O diálogo tem em torno de cinco minutos, por isso os principais pontos são: Cida instiga os alunos a investigarem quais pontos estariam presentes para que a imagem fosse tridimensional. Como esses pontos deveriam ser apresentados.

[30] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fdDkbEZtn1s. Acesso em: 21 jun. 2020.

Com Cida instigando e provocando reflexões nos alunos, eles começam a questionar se o que haviam concluído estava correto.

J: Mas aqui, então... é o domínio vai ser todos os reais.
D: Sim.
I: Sim.
J: Quando (inaudível) permanece os reais?
I: O domínio permanece o reais.
C: Me dá exemplo de um ponto que tá no domínio... dessa função.
J: É...
I: Da z igual x ao quadrado?
J: Um, dois, três, quatro...
D: Todos os reais.
I: O zero?
J: O zero...
C: E tem mais gente além de todos esses?
J: Mais gente que os reais?
I: Mais gente que os reais não dá...
D: Professora fez uma pegadinha com você e você caiu.
C: Mais gente que os reais dá...
I: Tem os imaginários, mas...
C: Mas tem outro sentido de ***ampliação****, é que eu não queria matar a discussão, mas é...*
I: Eu juro que não entendi a pergunta. Porque o domínio...
C: O Danilo falou assim que qualquer número... qualquer número aí faz parte da... vocês estão vendo aqui a...
I: Não, nem tudo. Porque você... o que a gente tem na função é o que tá contornado de verde, certo?
C: Isso... Esse é o gráfico da função. Essa é a folha.
I: Esse é o gráfico da função. Eu posso pegar pontos... eu vou fazer aqui, que assim eu sou mais...
J: Óh... esse eixo em verde é o x.
D: Sim.
I: Sim, mas a sua função é essa ***folha*** *verde que tá...*
C: O gráfico dela...
I: É isso aqui. Ela é isso! (provavelmente Iris se utilizou de uma folha sulfite para representar).
C: Então me dá um exemplo de um ponto que pertence a esse gráfico aqui óh... Por exemplo, um ponto que não 'tá nesse plano cinza aí que 'tá apresentado. Um ponto dessa parte aqui. Vocês conseguem pensar?
D: Um ponto que não 'tá dentro desse cinza?
I: É... deixa eu puxar aqui. A gente colocou aqui z igual a x ao quadrado menos quatro né?!
D: Um ponto que não 'tá aqui dentro desse cinza, professora? Mas 'tá tudo dentro do cinza...
C: É... que faz parte... o cinza que eu 'to falando é esse plano aqui, óh...
D: Sim, mas 'tá tudo dentro dele.

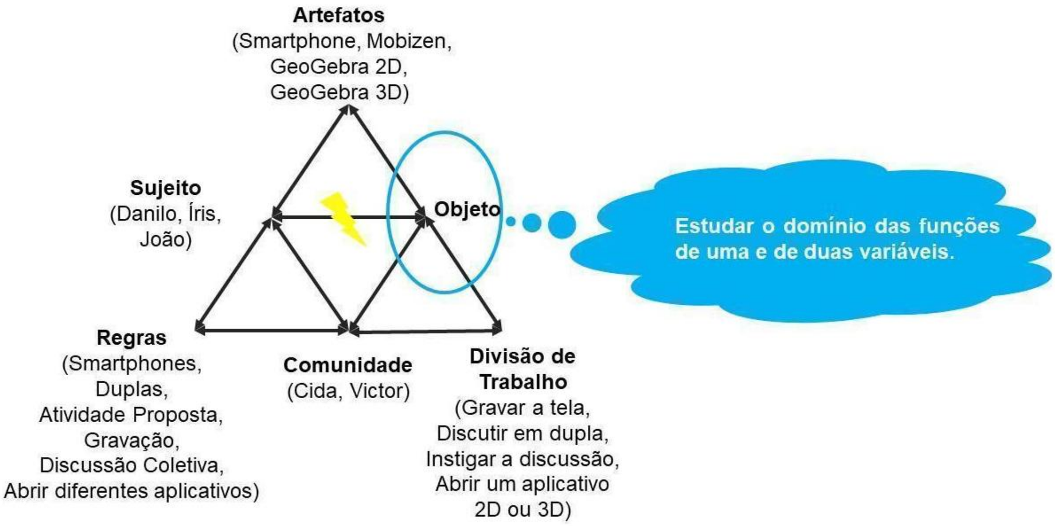
Os alunos, junto com Cida, começam a olhar para os gráficos e pensar que o domínio seriam todos os reais, influenciados pelas funções escolhidas. Veja que a reflexão dos alunos não estava totalmente errada, pois para ambas funções o domínio são os números reais, embora para a função $f(x,y) = x^2 - 4$ a "ampliação" que Cida cita é que para funções de duas variáveis necessita se pensar o domínio $\mathbb{R}^2$.

Nota-se ainda, que os alunos já estão discutindo o domínio no ambiente tridimensional com a construção da função quando Iris cita a "folha", ou seja, a tensão que ocorreu entre artefato e sujeitos já foi superada e o sistema foi movimentado.

Em alguns trechos decidimos por deixar palavras sublinhadas, tais realces no discurso dos alunos trazem algumas ideias que podem dar indícios de contradições. Ou seja, como Galleguillos (2016) constatou, as contradições podem ser manifestadas no discurso com algumas características.

As palavras sublinhadas "mas", "sim, mas" são potenciais traços de dilemas, uma vez que trazem "[...] uma expressão ou intercâmbio de avaliações incompatíveis entre pessoas [...]" (GALLEGUILLOS, 2016, p. 84) e "não" de conflitos, pois trazem discordância, resistência, segundo as categorias que Galleguillos (2016) observou. Por isso, nesse momento podemos estar diante de uma contradição interna. Para representar todos os movimentos feitos pelos alunos, construímos o seguinte Sistema de Atividade:

Figura 36 – Sistema de atividade "tensão sujeito-objeto"



Fonte: os autores, 2020.

Ao olharmos para a representação do sistema uma pergunta pode surgir: "Por que representamos uma tensão entre sujeitos e objetos?". Quando os dados nos revelam que os alunos não estão conseguindo fazer uma relação de extensão de domínio de funções com uma variável para as funções de duas varáveis, entendemos que os sujeitos ainda não perceberam essa relação.

Além disso, a compreensão dos alunos os leva a pensar que o domínio continua sendo apenas os reais, mas ao partirmos para o estudo das funções de duas variáveis precisamos repensar esse conceito e estendê-lo para os pares ordenados (x, y), ou seja, $\mathbb{R}^2$. Com as discussões a seguir[31], podemos ter uma noção de como os alunos continuaram discutindo essas relações.

I: Menos quatro quando x é igual a zero pertence à função, zero aqui, ele é o que corta...
C: Menos quatro sozinho é só um número.
I: Não, se x igual a zero.
C: Certo.
I: Aí eu vou ter x igual a zero, minha coordenada vai ser zero no x, vai ser y variando porque não tá falando nada pra mim e... vai ser menos quatro no z. Então esse ponto pertence ao meu gráfico...
C: Urrum...
I: E não está no meu plano x. Porque o meu plano... o plano cinza quem tá cortando é o x, porque o x 'tá... eu coloquei ele igual a zero.
C: Sim. Aqui você... quantos pontos você representou aqui? Quantos pontos do gráfico?
I: Na verdade, eu apresentei um monte por causa da minha variável y. Porque eu percorri o y.
C: É por isso que eu 'to falando se tem mais gente. É nesse sentido.
D: Mas qual ponto? Eu não entendi a sua explicação.
C: Com um e zero... só que você falou assim: "o zero é um ponto do domínio". Com um e zero você consegue produzir infinitos pontos que 'tão nessa folha.
I: Eu tinha pegado...
C: Variando todos os números possíveis para y, todos os reais porque y é o que dá profundidade ali.
I: É que nem se eu pegasse a folha de papel e falar que essa... essa sombra que vai dar aqui no meio é o meu y, e quando eu travei no menos quatro eu fiz isso aqui. Eu fiz a minha parábola e puxei aqui, então eu catei todos os y. Você pode ver que eu 'to com zero, menos um, menos dois, ele 'tá indo pra menos infinito e mais infinito. Então todo o eixo y.
C: Com um ponto que ele tinha falado "o zero 'tá no domínio" né?! Mas não é só o zero. É o zero com o zero, o zero com um, o zero com o pi, o zero com o menos pi.
J: Aí como que a gente ***chama isso****, professora?*
C: É isso que eu 'to chamando vocês para a discussão né?! Que domínio é esse? Que natureza é essa? Porque é diferente. ***Não é só os reais****.*
D: ***É diferente****.*
C: É mais gente. Porque para produzir esse menos quatro aqui, como imagem, porque eu usei a imagem ali né?! Eu posso colocar infinitas combinações aqui do tipo zero e alguém em y que eu vou produzir
I: A gente ***tem um plano*** *aqui. A gente não tem mais só...*
C: Então vê... eu tenho que... é... mudar... eu tenho que ***estender os conceitos****.*

É importante notar que Cida, agindo como comunidade, questiona a todo momento os alunos a respeito do domínio, principalmente a partir do questionamento de João, que tenta tirar alguma resposta, dando indícios de que é preciso ir além dos reais. Com a resposta de Cida de que "não é só os reais", os alunos percebem que existem outros pontos ali além do que estavam considerando. Isso é reforçado por Danilo que comenta "é diferente" e por Iris ao comentar que "[...] tem um plano aqui" e, Cida percebendo os movimentos dos alunos, fala em "[...] estender os conceitos".

[31]Disponível em: https://youtu.be/e3qneRle0Og. Acesso em: 21 jun. 2020.

Para vermos como os alunos se comportaram a partir da provocação de Cida, vamos ao próximo excerto[32]:

I: Aqui ó... aqui você vê ó... quando você vira ele assim ó... é que o meu plano tá cortando. 'Cê não percebe que... é como se ele tivesse uma reta aqui? ó... Aqui do lado você vê a reta ó... num tem uma reta?
D: Sim.
I: E ele, pra gente, 'tá cortando, se eu zerar tudo, ele tá cortando onde?
D e I: Em menos quatro.
I: Então quando eu fixei o x igual a zero, eu tirei esse cara aqui, certo? E tirei o restante. E aí eu só sobrei com o z igual a menos quatro. Então ele corta no eixo do z menos quatro. E aí lembra que... acho que eu 'to colocando errado, é xy. Eu 'to olhando errado ou não?
J: Não, tá certo.
I: Aí ele vai percorrer todo o eixo do y e menos quatro.
C: Porque y também equilibra ali para variar.
D: Entendi.
J: Meu Deus... agora eu não sei (inaudível).
I: É por isso que as vezes, quando... nas aulas de cálculo...
D: Professora, então os domínios... ***o domínio não permanece****...* ***o mesmo****.*
J: ***Tripla ordenada****... então ali seria... como que fala quando é referente a pares ordenados?*
C: Tripla.
J: Tripla? Então seria... sei lá como eu iria (não sei ao certo se ele fala referir, diferir, escrever).
I: É que ***do r dois passa para o r três****.*
C: Percebe que assim... que acontece... qual que é a nossa ideia nesse curso? A minha ideia, se até o final da semana que vem a gente conseguir definir integral dupla eu 'to contente. Que a minha ideia é atribuir significado a essas coisas. Porque a gente não tem tempo de fazer na aula né?! Então quando a gente... em cálculo dois, no semestre que vem, vocês vão começar a falar de funções de duas variáveis, mas vocês vão começar a fazer um monte de cálculo, um monte de técnica, então assim... o que que é isso? Vamos parar para pensar: o que que é domínio? O que que é imagem? O que que é o gráfico? O que que é a partição? Como é que a gente repensa esses elementos, que a gente constrói lá na integral definida, nesse outro contexto? Porque as nossas definições de integral, dupla, derivadas parciais, elas são construídas nesse contexto. Então é essa a ideia da discussão aqui, entendeu?
D: Entendi. Podemos discutir o domínio... podemos discutir... coloquei que o domínio... o... ***os domínios são diferentes****. Como é que eu posso chamar esse plano? Plano... pra diferenciar ele, eu esqueci como que se...*
I: (inaudível) cartesiano ou r dois. Esse é o r três.
D: ***R dois e r três****.*

Esse excerto todo foi escolhido pelo fato de os alunos partirem da visualização, como já dito, para fazer conjecturas sobre o domínio. Nesse trecho, quando Danilo percebe que o domínio não permanece o mesmo faz uma afirmação à Cida ao mencionar "o domínio não permanece" e complementa "o mesmo". Logo, já vemos que houve uma mudança no sistema, ele se desestabilizou ao ter uma tensão entre os sujeitos e o objeto.

A tensão fez o sistema permanecer estático por alguns momentos, até que a comunidade (Cida) juntamente com o artefato *smartphone*, por meio do GeoGebra, que tem característica de *feedback* instantâneo, moldou o pensamento dos sujeitos

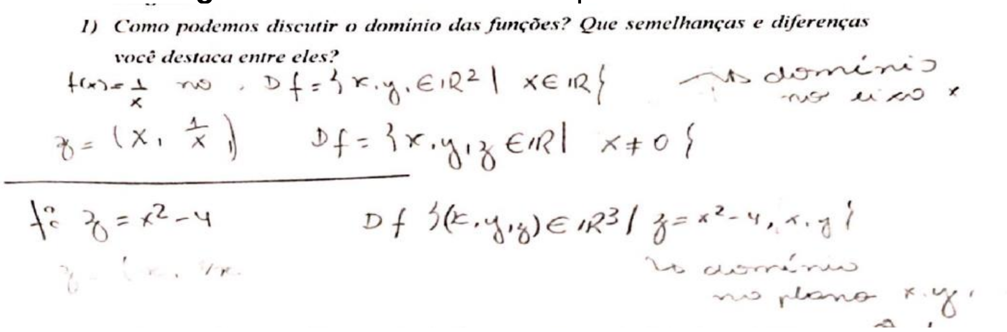
[32]Disponível em: https://youtu.be/Nh9EGyEq2U0. Acesso em: 21 jun. 2020.

estimulando a produção de conceitos sobre o domínio por parte dos alunos. Como Borba e Penteado (2010) ponderam que as mídias não apenas substituem ou complementam o pensamento humano, mas que estas reorganizam o pensamento.

A sistematização e resolução da tensão ocorrida começa a aparecer quando João esboça algo quando diz “tripla ordenada” e recorre a Cida para que ela o endosse. O indício mais forte de que houve solução aparece quando Íris comenta “do r dois passa para o r três”, sendo seguida pela reflexão de Danilo que diz “os domínios são diferentes” e finaliza com “r dois e r três”. Como não temos as imagens do vídeo no ambiente tridimensional só podemos dizer que nesse momento os alunos estão colocando essa sistematização em outra tecnologia: papel.

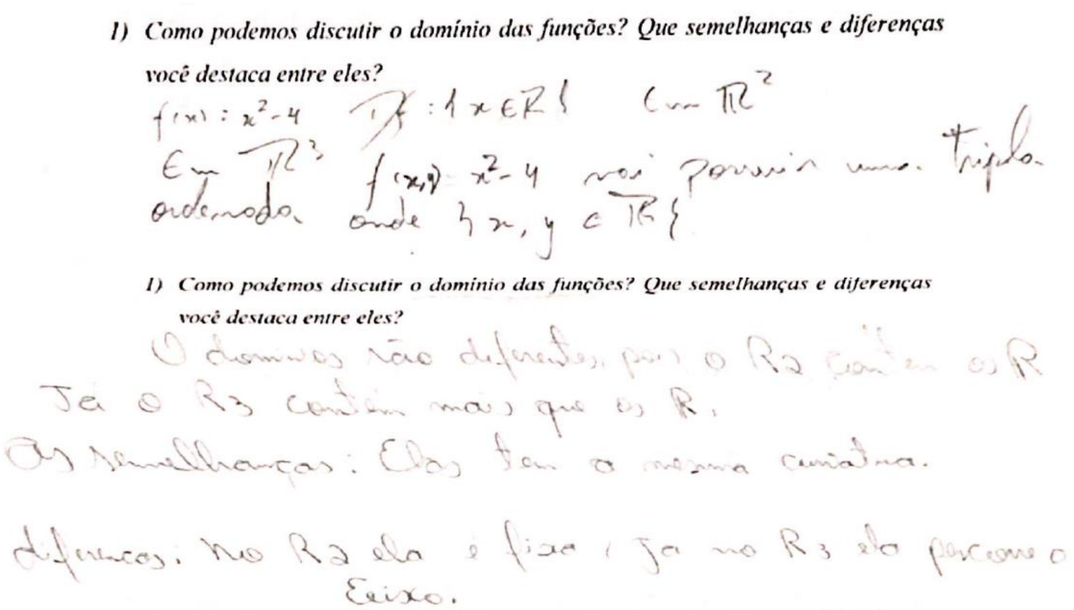
Para entender melhor a discussão vou em busca das respostas dos alunos quando organizaram as ideias, a partir das perguntas norteadoras, procurando vestígios do entendimento deles em relação ao domínio.

Figura 37 – Prints com a respostas dos alunos[33]



---

[33] $f(x) = \frac{1}{x}$ no $Df = \{x, y, \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}\}$ → domínio no eixo x
$z = (x, \frac{1}{x})$ $Df = \{x, y, z \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$
$f: z = x^2 - 4$ $Df = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 - 4, x, y\}$ → domínio no plano xy.
$f(x) = x^2 - 4$ $Df = \{x \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^2$
Em $\mathbb{R}^3$ $f(x, y) = x^2 - 4$ vai possuir uma tripla ordenada onde $\{x, y \in \mathbb{R}\}$
O domínio são diferentes, pois o R_2 contem os $\mathbb{R}$. Já o R_3 contém mais que os $\mathbb{R}$. As semelhanças: Elas tem a mesma curvatura. Diferenças: No R_2 ela é fixa, já no R_3 ela percorre o eixo.


1) Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?

$f(x) = x^2 - 4$ $D_f: \{x \in \mathbb{R}\}$ Em $\mathbb{R}^2$

Em $\mathbb{R}^3$ $f(x,y) = x^2 - 4$ vai possuir uma tripla ordenada onde $\{x, y \in \mathbb{R}\}$

1) Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?

O domínios são diferentes, pois o R2 contém os R. Já o R3 contém mais que os R.

As semelhanças: Elas tem a mesma curvatura.

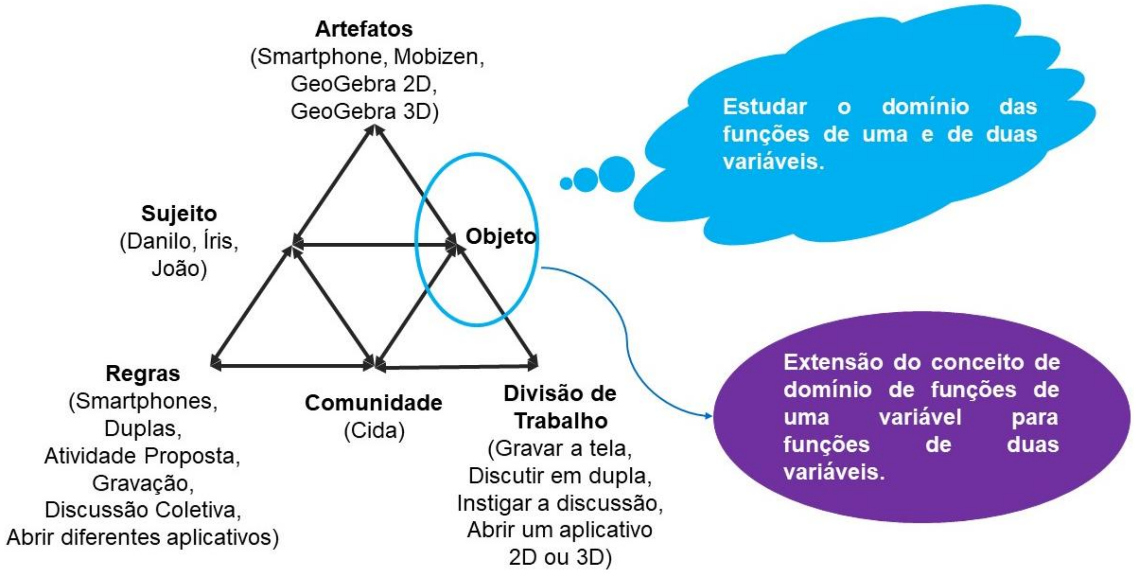
diferenças: No R2 ela é fixa, já no R3 ela percorre o Eixo.

Fonte: dados da pesquisa.

Vemos, a partir das respostas, que os alunos chegaram à conclusão de que o domínio de uma função $f(x)$ estará nos números reais, mais especificamente na própria reta numérica. Enquanto que, ao passar para uma função de duas variáveis, $f(x, y)$, o domínio se baseará no próprio plano cartesiano formado pelos eixos x e y, ou seja, além dos números reais que já faziam parte da função de uma variável, agora também “se tem os números reais do eixo y”, isto é, o $\mathbb{R}^2$.

A partir disso, temos como produto do sistema de atividade do encontro II a “extensão do conceito de domínio de funções de uma variável para funções de duas variáveis”, uma vez que o objeto nessa atividade era “estudar o domínio das funções de uma e de duas variáveis”. Isso se dá pela exploração de tarefas com caráter investigativo com construções próprias dos alunos nos ambientes 2D e 3D no *smartphone*.

Figura 38 – Sistema de atividade final do encontro II



Fonte: os autores, 2020.

É importante mencionar o papel do artefato *smartphone* (por meio do GeoGebra) de trazer a resposta imediata e visualização instantânea proporcionando reflexão e questionamentos que os levam a fazer testes recorrentes contestando os pensamentos que os alunos tinham até então, o que também leva o sistema se movimentar.

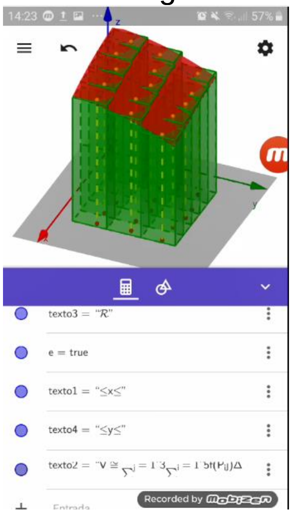
Além disso, destacamos que a comunidade, mesmo não tendo o poder de agir sobre o objeto, teve papel de destaque nessa atividade para que os sujeitos pudessem superar tensões.

Salientamos ainda outras tecnologias que se fizeram presentes durante todo o processo da atividade e que tiveram destaque, como o papel, o lápis e a linguagem. Esta última ainda se desdobra em alguns tipos, como linguagem escrita, falada, linguagem matemática e a linguagem utilizada pelo aplicativo, digital.

4.4 O terceiro panorama: últimas telas

Para a análise do terceiro e último encontro tivemos à nossa disposição apenas um vídeo, disponibilizado por Danilo. Esse encontro se iniciou ainda com a discussão do que era proposto na Tarefa IV, ou seja, os participantes estavam em um momento de exploração e investigação de um *applet* que discutia as funções de duas variáveis, suas partições e pontos de amostragem. Por isso, o vídeo se inicia com a figura a seguir:

Figura 39 – Imagem do *Applet*



Fonte: dados da pesquisa.

No vídeo anterior, os alunos discutiam o domínio, as semelhanças e diferenças que existiam entre funções de uma variável e de duas variáveis. Agora, nesse momento, as perguntas norteadoras foram:

Quadro 8 – Questões norteadoras do segundo momento da tarefa IV

a)	*No contexto do GeoGebra 3D, o que* $f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x\Delta y$ *representa?*
b)	*No mesmo contexto, o que o duplo somatório* $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x\Delta y$ *representa?*
c)	*Estabeleça relações entre o significado de* $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^{*})\,\Delta x$ *com o significado de* $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x\Delta y$*?*

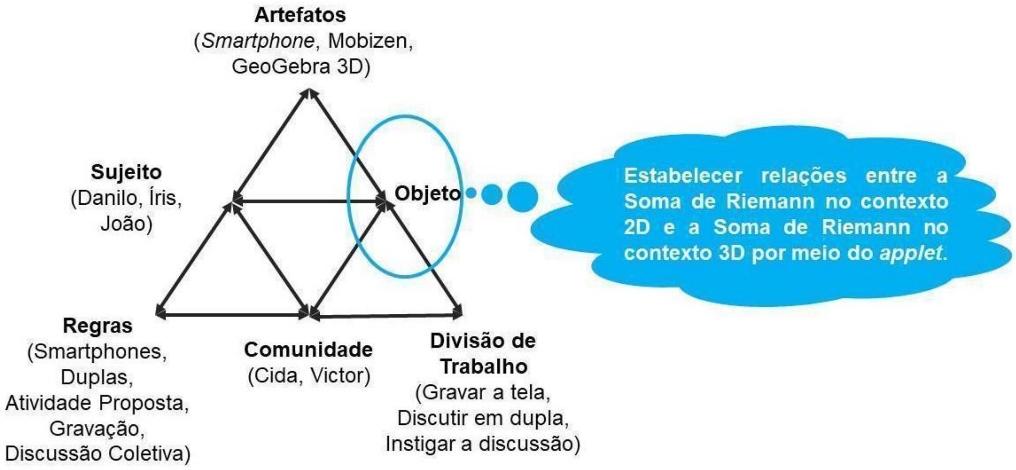
Fonte: dados da pesquisa.

Como foi a finalização da Tarefa IV, os alunos ainda discutiam as questões fazendo relações entre a Soma de Riemann para o contexto de funções de uma variável $\left(\sum_{i=1}^{n} f(x_i^{*})\,\Delta x\right)$ para o contexto de funções de duas variáveis $\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x\Delta y\right)$. Nesse *applet*[34] os alunos podiam visualizar os paralelepípedos em verde, pontos de amostragem em vermelho e o gráfico de uma função também em vermelho.

A opção por enviar um *applet* pronto aos alunos se deu pela dificuldade em construir uma função de duas variáveis que se utilizasse de paralelepípedos, demandando mais tempo, o que já podemos apontar como uma limitação de se trabalhar com o aplicativo GeoGebra no *smartphone*. Assim, com tais informações construímos o Sistema de Atividades Inicial do Terceiro Encontro, na figura a seguir.

[34] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/rwcrs3yv. Acesso em: 05 de mar. de 2021.

Figura 40 - Sistema de Atividades Inicial do Terceiro Encontro



Fonte: dados da pesquisa.

Em uma breve análise do SA inicial desse encontro, não vemos a inserção de novas regras, nem sujeitos e nem em outros nós, mas um objeto diferente para essa tarefa. Agora é necessário que os alunos olhem para o que foi estudado anteriormente e façam relações com o que foi apresentado por meio do *applet*. Para entender isso, vamos recorrer ao vídeo[35] e à discussão de Danilo, Íris e João, como pode ser visto no diálogo[36] a seguir.

J: Se x_{ij}^*, y_{ij}^* seriam...
I: As coordenadas?
D: Sim.
J: É... aquilo lá seriam a nossa altura em z.
I: Arram...
J: Aí tipo... se a gente tinha a altura e a gente tem que delta x, delta y é igual à base.
D: A base... a gente consegue... <u>debaixo do retângulo.</u>
J: A gente consegue área <u>debaixo do retângulo</u>.
I: Arram...
D: Eu coloquei aqui que o $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$ representam a altura do retângulo e delta x, delta y representam a <u>base do retângulo</u>.

Nesse diálogo, os alunos estão fazendo relações sobre a expressão $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x \Delta y$ a partir do que eles já tinham visto anteriormente. Isto é, eles afirmam que x_{ij}^*, y_{ij}^*, são as coordenadas (x, y), ou seja, o ponto de amostragem e que isso os daria a altura no eixo Z.

Além disso, os alunos consideram a parte $\Delta x \Delta y$ como a base do paralelepípedo e ainda permanece a imprecisão na linguagem que utilizam quando mencionam

[35] Disponível em: https://youtu.be/pYa0y8kDYPk. Acesso em: 31 jan. 2021.
[36] Os alunos fazem a discussão toda sem manipular efetivamente o *applet*, por esse motivo preferi não trazer imagens das ações nesse momento.

“retângulo”, como notamos nas frases sublinhadas do diálogo. Aqui podemos estar diante de uma tensão entre, algo que impede os alunos de estenderem os conceitos de integrais simples para integrais duplas.

Nesse momento, os alunos ainda não perceberam essa característica do ambiente 3D e da Soma de Riemann nesse contexto, isso pode ser percebido ao longo do diálogo e, também, na última frase quando Danilo faz a sistematização. Isto é, enquanto eles trabalhavam no 2D faziam retângulos para aproximar a área, agora o trabalho é com paralelepípedos. Assim, não somente o apelo visual da tecnologia é preciso, mas também o trabalho com a matemática expressa nos gráficos.

Em seguida, Danilo, Íris e João se engajam na segunda questão[37], em que o objetivo era a reflexão dos alunos acerca do duplo somatório. Enquanto Danilo e João iniciam uma discussão acerca da questão, ao fundo escutamos Íris conversando com a filha que estava presente nos encontros.

Aparentemente houve a exclusão do aplicativo Mobizen, que tem a função de gravação de tela e áudio. Isso nos leva a refletir sobre algumas coisas como, por exemplo, a capacidade de armazenamento dos *smartphones*, que ano após ano se modificam, e com isso se tornam incapazes de guardar vários aplicativos, sendo aqui apontado já como uma limitação. Além disso, também nos leva a refletir sobre a disponibilidade de uso desses dispositivos aos filhos, o que corrobora a nossa visão de que muitas as crianças nativas da era digital, nascem, vivem e já interagem com essas tecnologias tão cedo.

D: Agora, no contexto duplo, o somatório... E agora João?
J: Hã?!
D: No contexto duplo?
J: No contexto duplo? O somatório o que que vai ser? [incompreensível]...
O somatório de um, um, [incompreensível]. Seria a área da... de um desses retângulos só. Tá vendo?
D: Mas por quê?

Os alunos parecem estar pensando em algo, mas não chegam a falar claramente sobre o que estão refletindo, até que Danilo indaga:

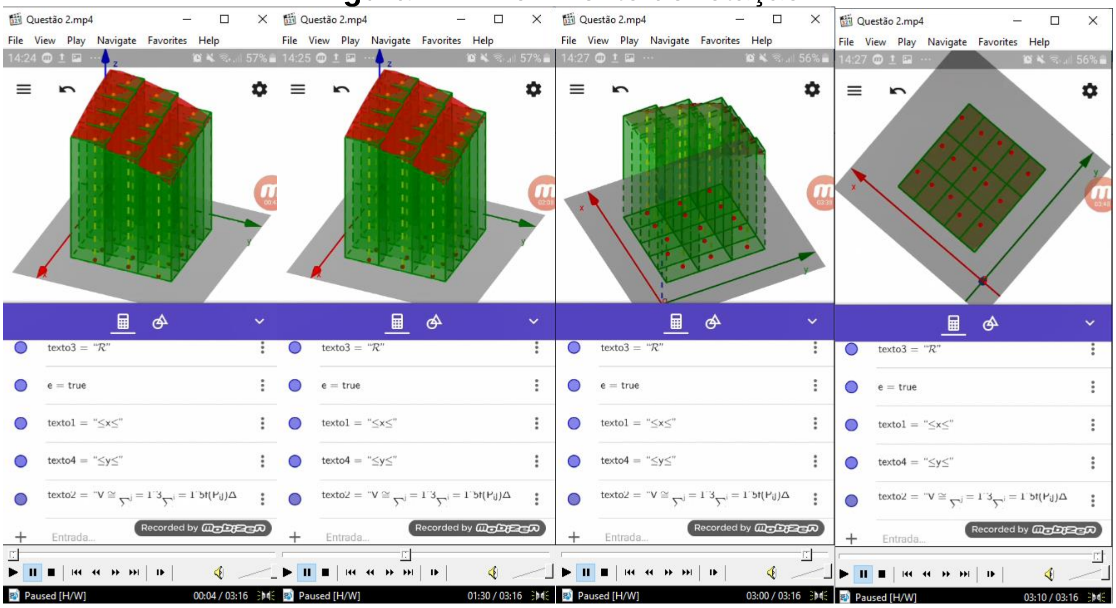
D: Será que vai representar...?
J: [incompreensível] a soma.
D: Seria a soma dos retângulos.
J: É... da quantidade de n. Seria n retângulos, aí quando fizesse limite seria a região do próximo domínio abaixo da superfície.
D: Soma da área dos retângulos que formam a [...], o que você falou? A superfície da parte de baixo?
J: É. Seria aproximadamente a... seria isso aqui, essa somatória é igual a todos esses retângulos.
D: É a soma da área dos retângulos que é... Representam a soma da área dos retângulos.

[37] Disponível em: https://youtu.be/0phPGee85Ow. Acesso em: 31 jan. 2021.

I: Deixa eu entender o que vocês estão falando. Porque quando a gente fez ali pro três, pro... dois d aqui, ela colocou a área né?! Então você fez a curva, aí você achou os retangulozinhos e aí você pegou os xi, aí quando colocou no três d, que você fez... é que eu não consegui montar. Agora que eu vou conseguir. Quando você projetou isso daqui que é o somatório de i a n, de i a n, você 'tá dando a área em três d, a projeção da área no plano (x, y).
D: Sim.
J: Sim... porque... f... Tá vendo aí... e esses pontos vermelhos aqui...
D: Representam delta x e delta y.
I: É a sua amostra.
J: É aqueles amostra lá. x... aí tipo...
D: Isso representa a base.
J: x e y, no três d que vira o domínio né?! Aplicado no pé da altura que é z. E vai chegar, basicamente, aqui. E aquele delta x e delta y seriam a base.
D: A base.
J: Seria esses quadradinhos aqui óh. Esse aqui e esse aqui.

Na sequência de prints a seguir, ao notarmos o tempo, vemos que os alunos ficam alguns minutos mais refletindo sobre a questão do que propriamente explorando o *applet*, sendo que os movimentos de rotação são feitos já quando Íris se envolve na discussão, ao final do vídeo.

Figura 41 - Movimento de rotação



Fonte: dados da pesquisa.

Nesse momento, notamos que os alunos se envolvem mais na discussão matemática que é proposta do que na visualização gráfica proporcionada por essa tecnologia, mas para exemplificar a sua fala, João recorre ao *applet* para mostrar. Além disso, vemos que o contexto 3D se tornou um disparador de discussão, mas não tomou o lugar central que era a extensão dos conceitos do 2D (funções de uma variável) para o 3D (funções de duas variáveis). Masetto (2012, p. 144) destaca que

> É importante não nos esquecermos de que a tecnologia possui um valor relativo: ela somente terá importância se for adequada para facilitar o alcance

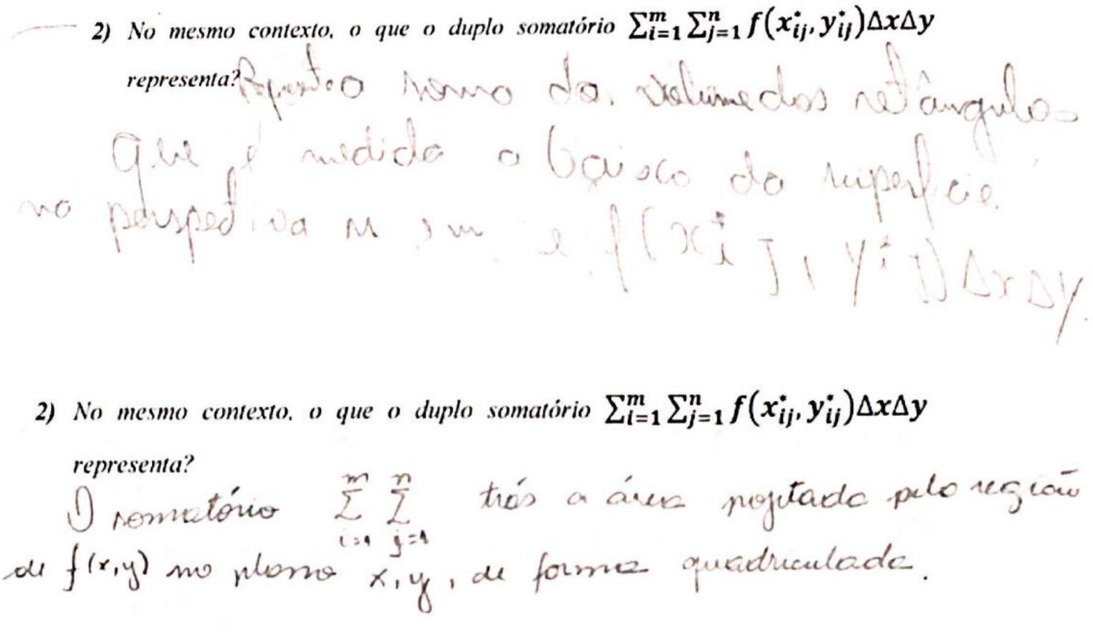
> dos objetivos e se for eficiente para tanto. As técnicas não se justificarão por si mesmas, mas pelos objetivos que se pretenda que elas alcancem, que no caso serão a aprendizagem.

Acreditamos que as tarefas abertas, de caráter investigativo e explorador, são possibilidades que se agregam às tecnologias digitais, dando destaque à produção de conhecimentos por parte dos alunos e ao ensino. Por isso, corroboramos Borba, Scucuglia e Gadanidis (2015, p. 48)

> [...] Além das potencialidades oferecidas, existem outros aspectos fundamentais a serem considerados com relação ao uso educacional de uma tecnologia como, por exemplo, o papel do professor, o *design* ou natureza da atividade proposta, dentre outros. A organização do cenário (imaginado) condiciona a natureza das interações, os diferentes tipos de negociações de significados e os conhecimentos produzidos no ambiente de aprendizagem construído.

Isto é, as tecnologias, a proposta metodológica, a comunidade são tão importantes nesse processo quanto o próprio sujeito enquanto produtor de seu conhecimento. Assim, para analisarmos a produção de conhecimento a partir da questão matemática, trazemos as sistematizações dos alunos a seguir.

Figura 42 – Respostas dos alunos à segunda questão[38]

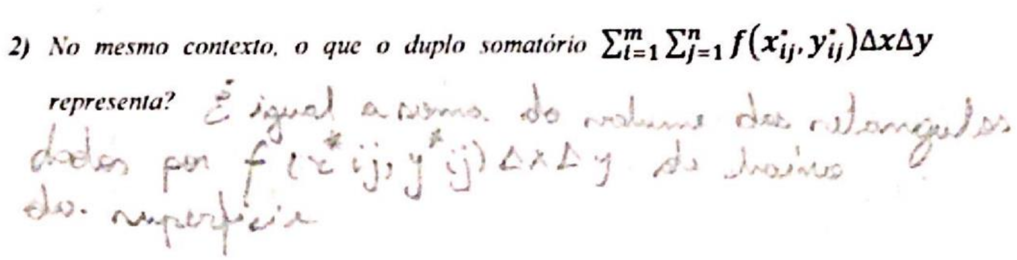


---

[38] Representa a soma do volume dos retângulos que é a medida abaixo da superfície na perspectiva *m* e *n* e $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y$.

O somatório $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}$ traz a área projetada pela região de $f(x,y)$ no plano x, y, de forma quadriculada.

É igual a soma do volume dos retângulos dados por $f(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\Delta x\Delta y$ de baixo da superfície.

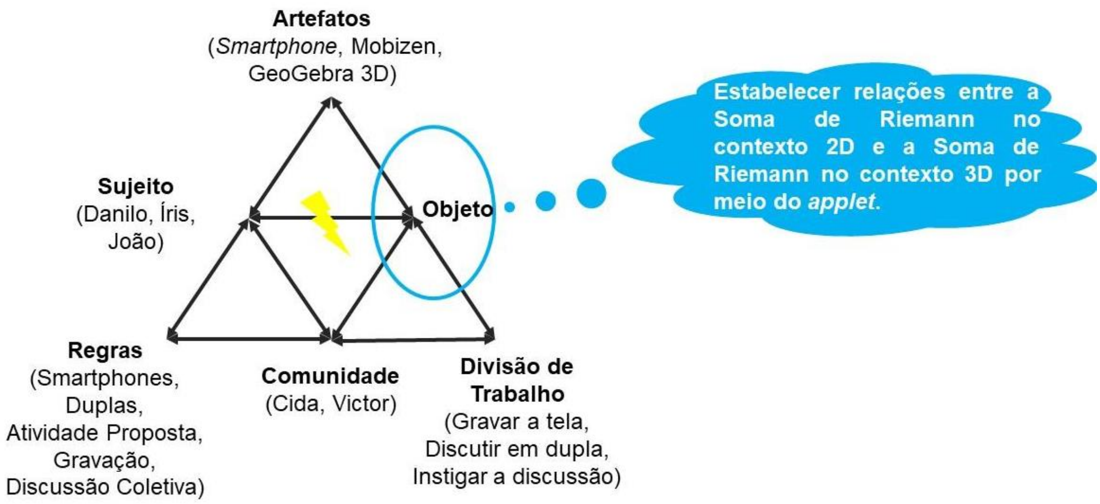


2) No mesmo contexto, o que o duplo somatório $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*})\Delta x\Delta y$ representa? É igual a soma do volume dos retângulos dados por $f(x^{*}ij, y^{*}ij)\Delta x\Delta y$ do desenho da superfície

Fonte: dados da pesquisa.

Aqui precisamos trazer para a discussão que quando partimos para as funções de duas variáveis, o domínio passa a ser todo o plano representado pelo $\mathbb{R}^2$, deixando de se formar retângulos e passando a ter paralelepípedos ao representarmos graficamente o somatório duplo. Essa característica os alunos ainda não haviam percebido, mesmo com a visualização do *applet*. Podemos estar nesse momento diante de uma contradição interna. A partir das respostas, vemos Íris falar em área e que Danilo e João falam em “volume dos retângulos”, quando deveriam concluir sobre volume do paralelepípedo. Além disso, poderiam mencionar que $\Delta x\Delta y$ é a área do retângulo formado no plano gerado pelos eixos x e y. A seguir, a figura representa o SA com a tensão sendo representada entre sujeito e objeto.

Figura 43 – Sistema de atividade com tensão entre sujeito e objeto



Fonte: dados da pesquisa.

Há um erro na comparação entre retângulos e paralelepípedos, mas os alunos já perceberam que não tratamos mais de áreas e sim de volume. Para Lorenzato (2010, p. 50) “o erro pode ter distintas causas: falta de atenção, pressa, chute, falha de raciocínio, falta de estudo, mau uso ou má interpretação da linguagem oral ou escrita da matemática, deficiência de conhecimentos da língua materna ou de conceitos matemáticos". Por isso, entendemos que há um erro de falta de atenção nesse momento.

Ainda, para explicar o conceito da dupla soma inicio falando sobre cada "componente" dela: $\Delta x \Delta y$ é a área da base retangular de cada paralelepípedo, em que Δx é o comprimento do lado no eixo x e Δy é o comprimento do lado no eixo y. $f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)$ é o valor da função aplicada no ponto de amostragem (x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}), isto é, em termos geométricos temos a altura de cada paralelepípedo.

Já temos então a expressão: $f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x \Delta y$, que significa o volume de um paralelepípedo, uma vez que estamos multiplicando a área de sua base, que é fixa em todos, pois temos bases retangulares congruentes, pela altura, que é variável. Então cada paralelepípedo tem seu volume.

Ao fazermos o somatório em i e j, $\sum_i \sum_j f\left(x_{ij}^{*}, y_{ij}^{*}\right)\Delta x \Delta y$, consideramos todos os paralelepípedos e somamos seus volumes, nos aproximando do valor numérico da integral dupla considerada. Quanto menor a base dos paralelepípedos e consequentemente maior a quantidade deles, mais próximos estarão esses dois valores, de modo que consideramos que são iguais quando a quantidade de paralelepípedos tende a infinito.

Após isso, os alunos pausam a gravação do vídeo e não há discussão da terceira questão, mas durante a sistematização[39] com a professora Cida, há comentários como

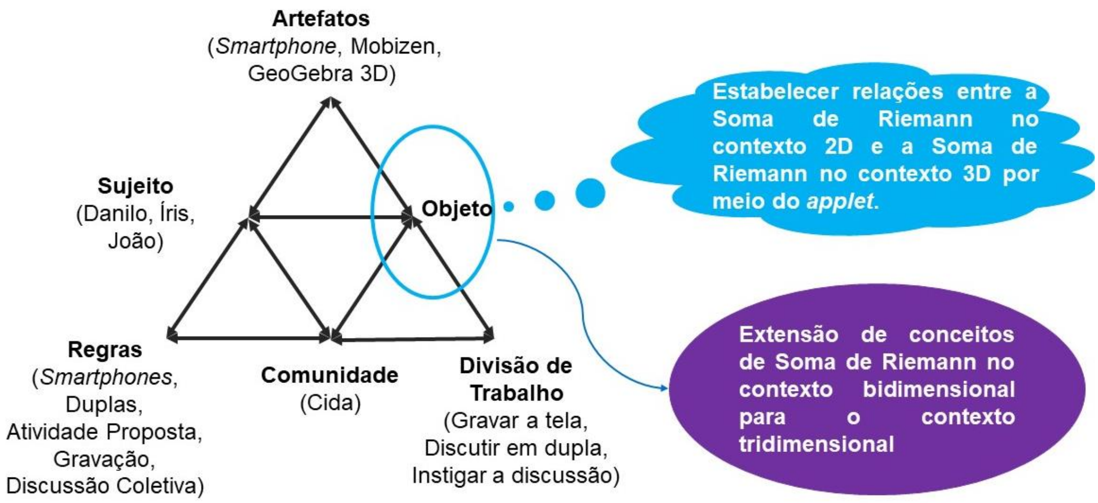
C: Vocês conseguem enxergar uma certa expansão de conceitos?
D: Sim. A área, volume.
C: Domínio. Eu expando a ideia de domínio. Eu expando a ideia do que é gráfico. Eu expando, agora, a ideia do que é um somatório. Né?! Aqui eu to somando áreas e eu estou me aproximando de uma área que eu quero calcular, uma área irregular. Aqui eu to construindo volumes e, ao reunir todos esses volumes dos paralelepípedos, eu também estou me aproximando de um volume que eu quero calcular. Então, embora eu esteja falando de uma outra grandeza, que é a grandeza do volume, o processo de raciocínio tem várias semelhanças, né?! Mas é preciso fazer as adaptações necessárias no novo contexto, que é o contexto tridimensional. E assim, a gente acha que o GeoGebra, a gente vê o GeoGebra dando, principalmente o 3D, dando um retorno visual pra gente muito importante para a produção de interpretações, porque a gente visualizar qual é o parâmetro, a gente consegue ter essa ideia de profundidade, a gente consegue rotacionar ali e olhar aquela construção.

Com isso, concluímos que apesar da confusão entre retângulos e paralelepípedos, nota-se que houve uma possível extensão de conceitos de área para

[39] Disponível em: https://youtu.be/b7b3H8AK1VQ. Acesso em: 31 jan. 2021.

volume. Vemos ainda que a especificidade da tecnologia em proporcionar visualização, profundidade e rotação da construção é uma facilidade, mas que conceitos matemáticos eram necessários para os alunos estabelecer relações, com a mediação dos professores uma vez que a tecnologia sozinha não é capaz de ensinar, nesse momento percebemos o papel fundamental dos professores.

Figura 44 – Sistema de atividade com os conceitos estendidos



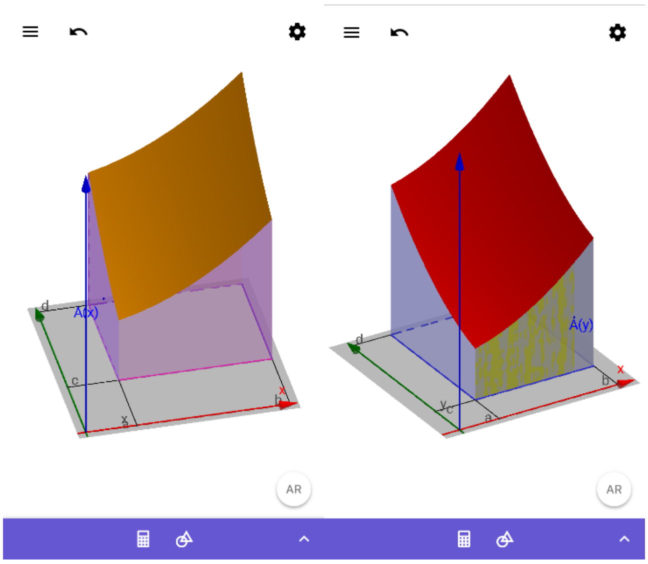
Fonte: dados da pesquisa.

Vistos sob a ótica da teoria, a comunidade representada aqui por Cida tem papel de extrema importância no desenvolver da tarefa, uma vez que também fazem a mediação entre sujeitos e objeto. Artefatos, como o *smartphone*, o *applet*, o lápis, o papel fazem a função de mediar, assim como a comunidade, a relação sujeitos-objeto.

Finalizada a quarta tarefa, os alunos se engajam na quinta tarefa que tem como objetivos a observação e manipulação de *applets*[40] sobre iteração e a apresentação do Teorema de Fubini. Essa tarefa também é dividida em dois momentos, os quais também são norteados por questões disparadoras de discussões. No primeiro momento, os alunos tinham que explorar os *applets* e, para isso, precisavam manipular os controles deslizantes disponíveis em dois *smartphones* distintos. Essa tarefa já iniciou com uma regra nova: abrir os dois *applets* em distintos dispositivos. A seguir, temos imagens do que seriam os *applets* utilizados.

Figura 45 – *Applets* $A(x)$ e $A(y)$, respectivamente

[40] Disponível em: https://www.geogebra.org/m/ktgwgasg. Acesso em 05 de mar de 2021. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/u2yp9xch. Acesso em 05 de mar de 2021.



Fonte: prints dos autores.

Novamente precisamos alertar sobre a indisponibilidade do vídeo gravado no *smartphone* de Íris, portanto, temos apenas as imagens de um *applet*, no caso o vídeo que foi gerado por Danilo. A ideia nesse momento era que os alunos manipulassem os controles deslizantes *m* e *n* em *smartphones* diferentes para que pudessem discutir sobre o “preenchimento” da superfície apresentada. Com isso, no final, os alunos poderiam chegar à conclusão de que se iniciar a exploração em *x* ou em *y* o resultado seria o mesmo, matematicamente chamamos isso de iteração.

Muitas vezes não é fácil integrar uma função de duas variáveis, visto que a definição envolve um duplo somatório e o conceito de limite. Assim, quando temos que integrar uma função de duas variáveis em um retângulo $R = [a, b] \times [c, d]$ nos utilizamos da iteração para facilitar, pois esse processo, ancorado em um teorema, garante que o resultado da integral dupla é o mesmo que da integral iterada (que consiste no cálculo de duas integrais simples). Por exemplo, seja f uma função de duas variáveis, integrável no retângulo mencionado e queremos fazer a integração parcial em relação a y, isto é, integrar $f\,(x, y)$ no intervalo (c, d) deixando x fixo. Em linguagem matemática escrevemos:

$$\int_c^d f(x, y)\, dy$$

Após isso, integramos a função em relação a x, no intervalo (a, b). Resumidamente, teremos integrado primeiro no intervalo (c, d) que está dentro do colchete e, com o resultado, integramos no intervalo (a, b). A seguir, temos em linguagem matemática como podemos representar.

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$$

Cada membro que compõe a igualdade anterior possui sentidos diferentes, mas dão o mesmo resultado, o que é garantido pelo Teorema de Fubini, não necessitando calcular um somatório duplo e um limite, presentes na definição de integrais duplas. Basta calcular duas integrais simples, por meio do processo de integrais iteradas.

Para esse primeiro momento, colocamos como perguntas norteadoras:

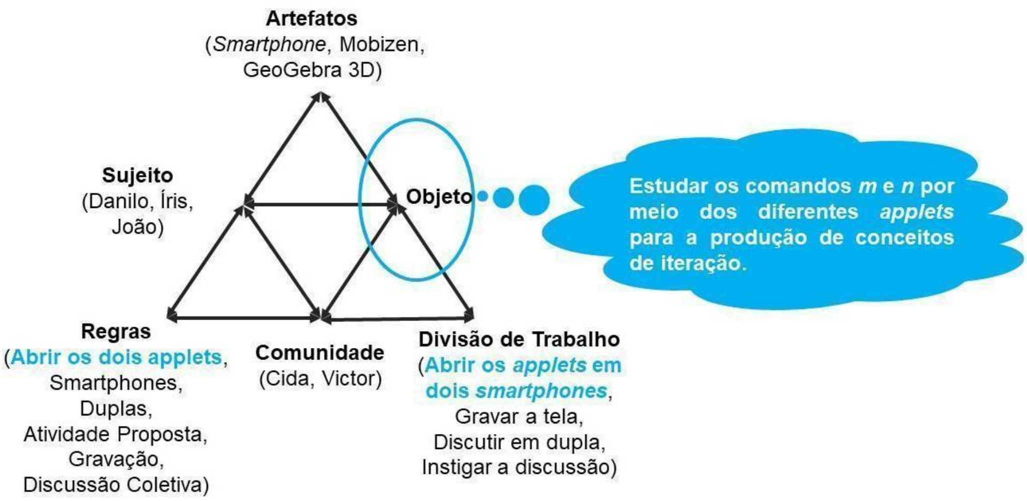
Quadro 9 – Pergunta norteadora da Tarefa V

a) Que semelhanças e diferenças você percebe ao manipular os controles "m" e "n" em cada applet? Que conjectura você formula?

Fonte: dados da pesquisa.

Além da nova regra, entendemos que também há uma nova divisão do trabalho, ou seja, abrir os *applets* em diferentes *smartphones*. Para mostrar o que mudou, temos o Sistema de Atividade Inicial da Tarefa V, a seguir.

Figura 46 – Sistema de Atividade Inicial da Tarefa V



Fonte: dados da pesquisa.

Inicialmente Danilo começa com as explorações do *applet* e dos comandos, fazendo algumas considerações. Logo no início do vídeo[41] ele já comenta sobre o preenchimento dos paralelepípedos, por isso consideramos que a questão de

[41] Disponível em: https://youtu.be/uNz49ukfibw. Acesso em: 31 jan. 2021.

confusão ocorrida com os retângulos, o que foi marcante na tarefa anterior, foi superada, mesmo que parcialmente.

D: Aí João. João. Aqui João, oh... aqui ele tá percorrendo toda a área. Como se fosse um monte de... nossa... oh... m tá percorrendo o... tá percorrendo toda a área. <u>A área abaixo da superfície</u>. Vamo ver o n. n tá percorrendo... como se fosse cada paralelo... cada paralelepípedo. Cê vê aqui óh... O n tá percorrendo cada paralelepípedo. O n tá percorrendo o volume de cada paralelepípedo oh...
J: Não to conseguindo ver... E mexer no... pelo menos no n... Aí oh, tá...

Nesse diálogo, João e Íris pouco se envolvem no começo. Notamos que Danilo faz as explorações enquanto os outros dois estão trabalhando em algo. Mas por parte de Danilo é perceptível que ele já considera o preenchimento do volume de cada paralelepípedo, mas ainda considera a "área" da superfície, o que nos deixa ainda com a impressão de estarmos diante de uma contradição interna em processo de uma possível movimentação.

Outra coisa a se dar destaque é a questão do final do vídeo em que João não consegue manipular o *applet* devido aos travamentos que ocorrem. Construções como a utilizada possuem várias etapas, desde a inserção de controles deslizantes (*m* e *n*), a comandos mais elaborados. Por isso, consideramos que esses *applets* são muito grandes e demandam desempenho do aplicativo e, consequentemente, do *smartphone* acima da média, resultando no travamento e necessitando encerrar o GeoGebra e iniciar novamente[42].

Em seguida, ao abrir novamente o applet, Íris se envolve na discussão[43].

I: eu to com o tipo dois. Você tá com o tipo um. Porque quando é integral dupla, quando é tipo um, a gente tá passando... a gente sobe ela né?! Passa por z igual... o x igual a zero e aí você bate lá no y. Você pega de x_1 a x_2 e a variação aqui. Quando você integra do tipo dois, você pega do eixo y. Você passa pelo y, então vem y_1, y_2 e a função que tá... que tá dita aqui. É isso que eles estão fazendo. É a mesma coisa só que representado por... pelo gráfico. Você tá com... o gráfico muda.
D: Ele tá transformando num monte de óh... o que eu entendi no n... no n é como se tivesse preenchendo o... isso dentro dessa área. Agora o m, quando eu balancei ele aqui óh... Cadê o m? Quando eu balancei o m, ele tava... é como se adicionando um monte de...
J: Ah... agora eu vi.
I: Asinhas. Asinhas preenchendo.
D: Sim. É pra chamar ela... Tipo... eu vou colocar aqui que é construção... é... como se o paralelepípedo tivesse crescendo.
J: Cara, mas...
D: Com valor quase nulo. Ele tá só... crescendo. Aí o m ele tá expandindo esses paralelepípedos.

[42] Preferimos cortar essa parte do vídeo para preservar a intimidade do participante.
[43] Disponível em: https://youtu.be/TVDkTZqpRnc. Acesso em: 31 jan. 2021.

I: Eu entendi a sua visão. O que eu to querendo te dizer oh... por exemplo, é a mesma coisa. Óh... é a mesma função, num é?!
D: Sim.
I: Aí oh... vamo manipular só uma letra por vez. Óh...vamo colocar o seu n pra mexer e eu vou colocar o meu e a gente vê onde vai percorrer. Pode ser?
D: Então ele...
I: É que o seu tem que percorrer diferente do meu.
D: Ele não tá... ele não tá voltando.
I: Aqui óh...Mesma coisa óh... o meu tá variando lá no A(y) e o seu? No A(x).
D: Num tá voltando.
I: Mas olha onde que ele tá mostrando pra você? No A(x). O meu tá no A(y). É isso que eu to te falando. É os eixos que ele tá movimentando.
D: Movimenta o seu pra ver.
I: Oh... o meu quando movimento, ele tá movimentando aonde? No A(y).
D: Sim.
I: Quando você movimenta o seu, olha aonde que ele tá movimentando?
D: No A(x).
I: Entendeu o que eu tava tentando te dizer?
D: Entendi.

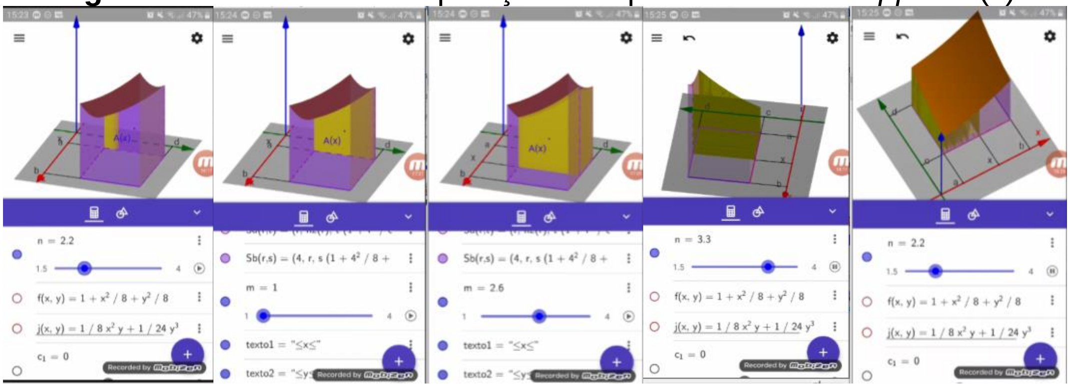
Algumas coisas precisam ser destacadas, quando Íris destaca a questão de integral tipo 1 ou tipo 2, ela quer dizer que a região de integração é delimitada por duas funções contínuas. No tipo 1, se for duas funções contínuas em x, se for do tipo 2 duas funções contínuas em y. Nos casos dos *applets* isso não se aplica, uma vez que os controles deslizantes (m, n) se referem a constantes. Apesar disso, informalmente podemos classificar esses *applets* como tipo 1 e tipo 2 para diferenciá-los.

Ao comentar “o meu tá variando lá no $A(y)$ e o seu? No $A(x)$” Íris faz a diferença em como volume está sendo preenchido. Sendo que, no *applet* em que ela manipula faz o preenchimento segundo o eixo y e o de Danilo no eixo x, isso é garantido pelo Teorema de Fubini, que será sistematizado por meio da discussão coletiva. Por isso, concordamos com Moran (2007, p. 52) que

> As tecnologias também podem ajudar a desenvolver habilidades espaçotemporais sinestésicas, criadoras. [...] São diferentes formas de representação da realidade, mais abstratas ou concretas, mais estáticas ou dinâmicas, mais lineares ou paralelas, mas todas elas, combinadas, integradas, possibilitam uma melhor apreensão da realidade e desenvolvimento de todas as potencialidades do educando, dos diferentes tipos de inteligência, habilidade e atitudes.

Esse mesmo autor, ainda considera que as tecnologias “permitem, ademais, expor várias formas de captar e mostrar o mesmo objeto, representando-o de ângulos e meios diferentes: por movimentos, cenários, [...], o concreto e o abstrato” (MORAN, 2007, p. 52). A seguir temos prints da exploração do *applet*, mostrando os movimentos feitos pelos alunos, sendo mostrado ao final outros ângulos da superfície, assim como o comando *m* que não apaga o rastro deixado pela sua manipulação.

Figura 47 – Prints da manipulação feita pelos alunos no *applet* A(x)



Fonte: dados da pesquisa.

O que notamos até o momento é a limitação da tecnologia GeoGebra em poder executar com precisão *applets* mais implementados e mais pesados, o que também pode se aliar a uma questão de capacidade de processamento do próprio *smartphone*, com a quantidade de dados armazenados, quantidade de aplicativos ativos, vida útil do dispositivo que podem influenciar nesse momento.

Além disso, Danilo alerta sobre o *applet* não apagar o rastro ao manipular o controle deslizante, o que pode ser intencional para dar a impressão de "preenchimento" do volume. Vemos isso como um elemento que pode influenciar o pensamento dos alunos.

Em seguida, os alunos continuam explorando e discutindo sobre os *applets*. Nesse momento, alertamos para a extensão do vídeo[44] que dura aproximadamente cinco minutos e que envolvem o trio e outra dupla (José Ivan e Rebeca).

J: Lá deu pra ver, no celular não dá, aí óh...
I: Não, mas quer ver óh... o que eu tava explicando pra ele foi a mesma coisa que... óh... vê se a gente consegue colocar aparecendo...
D: Deixa só eu voltar de novo aqui pra...
I: Quando a gente trabalha com integral dupla... 'Cê já fez cálculo dois?
D: Aí, João...
I: Quando a gente faz cálculo dois, tem umas integrais que são uns infernos pra calcular, praticamente você não consegue. Então se você muda a área de integração, você deixa de ver ela no x, passa a ver ela no y, você torna a integral fácil de fazer. Por isso que quando você... ele movimenta o n dele, movimenta o $A(x)$, quando eu movimento o meu n, eu to movimentando o $A(y)$. Então o meu eu to integrando como se fosse é... x é igual a minha f, e o seu, seu y é igual a sua f.
D: Não, ao contrário.
I: Ao contrário, desculpa. x é... Vocês entenderam?

[44] Disponível em: https://youtu.be/OkI6y5Aa70Q. Acesso em: 31 jan. 2021.

D: Entendi.

I: Você deixa de integrar é... nesse sentido, que é do tipo um e a gente passa a integrar nesse sentido. A área é a mesma só que ela fica mais fácil as vezes de integrar quando a função é lida assim. Por isso que o meu y aqui e o dele é o x. Quer ver? Vamos pegar o m, você vai ver que é o contrário. Eu vou dar pause aqui. Aí vai lá no m agora.

JI: O m tá no y e no outro o m tá no x não é?!

I: É.

D: Sim.

I: Tem que ser o oposto, porque se não... é o tipo de integração senão não dá certo. Óh... o meu aqui já...

D: Aí ele já vai vim agora...

I: É... o...

D: Tá preenchendo o volume, com todos os paralelepípedos.

I: O seu tá no x, agora deixa eu colocar o meu.

D: O meu tá no x.

I: Agora pra ver aqui, o meu tá no y.

J: É porque eu não tava entendendo, porque no slide tava andando... tá vendo lá? Porque quando ele se locomove o amarelo tá vindo de aqui e do jeito que a professora tinha passado ali como que eu via o m e o n eram os quadradinhos realmente de baixo. Aí tipo... quando o amarelo não tá totalmente... preenchido, eu vejo que tipo: Ah... não tá calculando toda a área porque se eu tenho... cadê? x aqui e o n seria em x, se eu tenho n partições eu teria n até aqui, mas seria três maiores. Aí se eu tenho n partições tipo: dez. Eu teria dez pequenininhos e... aqui. Só que seriam todas as áreas. Aqui no celular quando eu to movendo m e n tá andando esse negócio amarelo.

V: E... você tá me falando que não tá aparecendo os...

I: Os retângulos.

V: Os paralelepípedos né?! Entendi...

D: É porque eles tão muito... eles tão muito reduzido.

I: Eles tão vestidos de linha. Que é o que ele tinha falado. É como se fosse um ponto.

D: Nulo. Que é o que ela fala quase nulos, entendeu?

V: Aham...

I: Ele tende a infinito.

D: Aí ele preenche nessa... preenche a cor só.

I: Mas você entendeu por que que ele muda? É pelo cálculo da integral. Quando a gente coloca o x, que é nesse daqui é mais fácil você calcular a integral quando você faz a integração tipo um. Aí você parte de... passa pelo eixo x a variação dela e a $f(x)$. Quando a integral não dá pra ser calculada desse jeito a gente muda a função. A gente lê de... passando por y.

D: De y.

I: É basicamente é... é isso. É uma das primeiras aulas de integral dupla.

D: Vou dar uma girada aqui só pra...

I: É... tem que dar uma girada bonitinha do jeito que aparece. Eu ainda não... ah lá óh...

D: Óh lá...

I: Só apareceu o y. [incompreensível] preenchendo aqui delta y delta...

J: [incompreensível] o que aconteceu... Porque aqui ela tá perguntando óh...

D: Óh João... tá quase tudo preenchido aqui óh... quase tudo preenchido. Ele vai até preenchendo. Tá... Então o que que a gente pode concluir? Pera aí... Opa... O que se pode concluir? Que no um o m... que?

JI: Vamo ver. Fala aí o que você pode concluir?

D: Cara... eu concluí o seguinte: que... o... no um vai ser no caso partindo do eixo x, do eixo x ali... e... pelo o que eu entendi, é como se fosse vários paralelepípedos com a área tão pequena que chegasse a nulo aí vai preenchendo a cor, no caso no n ele vai preenchendo... ele vai preenchendo como se fosse essas... esses paralelepípedos até dá a altura do... até dar a...

JI: Hum...

D: É como se fosse uma área da lateral. Da área da lateral dessa base e no m ele vai expandindo ela pra pegar toda o volume dessa figura.

JI: É... eu acho que é... hã?!

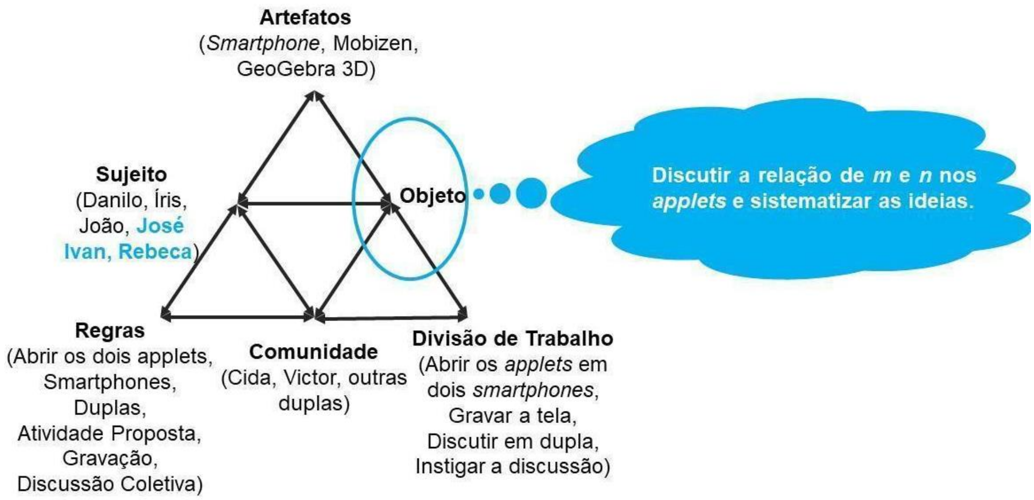
D: Que que você entendeu, Rebeca?

JI: Ah... foi isso que a gente tava... que o m no um ele se movimenta no x e o m no dois ele se movimenta no y e é basicamente isso que você falou. Se eu aumento aquela parte ali do intervalo ele vai calcular aquela... aquele volume, mas se for até o final lá da função ele vai calcular o volume inteiro.

Nesse diálogo os alunos se enveredam pela discussão da relação entre os dois *applets*. Embora o vídeo e o debate tenham se estendido vemos a sua importância quando temos João buscando entender as relações existentes entre m e n e Íris e Danilo tentando explicar. Nesse sentido, compreendemos que o fato dos três estarem em fases diferentes da graduação só enriqueceu esse momento, tendo cada um a sua vivência e a sua experiência com conceitos matemáticos.

Vemos que José Ivan e Rebeca se envolvem na discussão da sistematização. Nessa hora, percebemos que eles se tornam sujeitos também, visto que eles compartilham do objeto e têm o poder de ação também, pois o objeto foi modificado para “discutir a relação de m e n nos applets e sistematizar as ideias”. Logo, temos algumas mudanças em relação ao Sistema de Atividade Inicial: participação de José Ivan e Rebeca na discussão, tornando-se sujeitos e uma pequena modificação do objeto. Como pode ser visto na figura a seguir:

Figura 48 – Sistema de Atividade com participação de novos sujeitos



Fonte: dados da pesquisa.

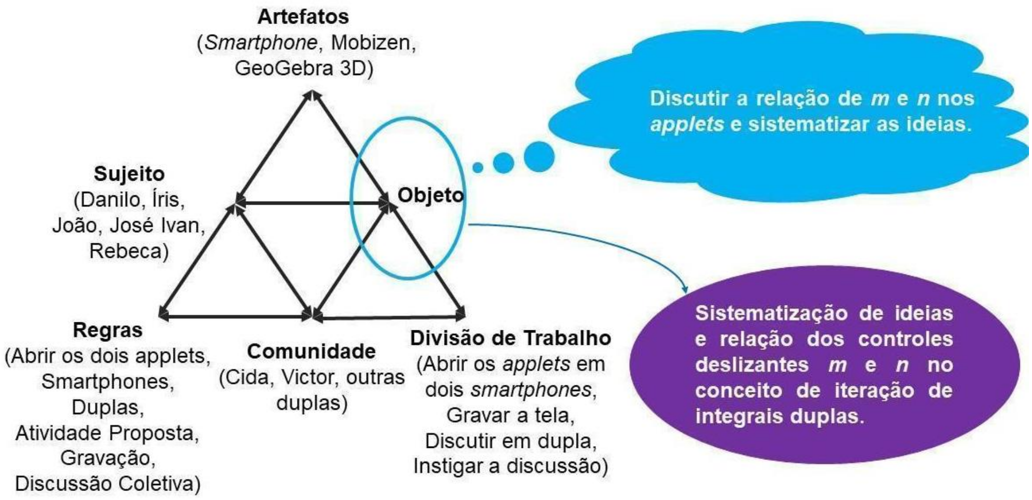
Para nós, esse diálogo é mais importante para o momento de sistematização das ideias do que para discutir mais conceitos de cálculo, uma vez que esse processo “[...] possibilita evidenciar para o sujeito o conceito que ele está trabalhando, as relações que está percebendo, as regularidades que podem ser observadas, a constatação de suas hipóteses e a possível aplicação de tais idéias a outras situações” (GRANDO, 2000, p. 43).

Isso pode ser notado quando Danilo menciona “Tá preenchendo o volume, com todos os paralelepípedos”, entendemos que o aluno percebeu relações entre conceitos de integrais simples para integrais duplas como é o caso de área e volume, retângulos e paralelepípedos.

Em sua fala, João aparentemente gostaria de observar os paralelepípedos quando ele menciona “se eu tenho n partições eu teria n até aqui, mas seria três maiores. Aí se eu tenho n partições tipo: dez. Eu teria dez pequenininhos”, mas ao terminar sua explicação os próprios colegas intervêm junto com Victor como aparece nas falas de Danilo “É porque eles tão muito... eles tão muito reduzido” e Íris complementa “Eles tão vestidos de linha. Que é o que ele tinha falado. É como se fosse um ponto”.

Mesmo assim, João não se convence do que os colegas estão falando e continua “[incompreensível] o que aconteceu... Porque aqui ela tá perguntando óh...” em uma tentativa mencionar a pergunta norteadora, acreditamos nós. Assim, Danilo complementa “Óh João... tá quase tudo preenchido aqui óh... quase tudo preenchido. Ele vai até preenchendo”. A partir daí, Danilo junto com José Ivan começam a esboçar uma conclusão do que seriam as relações existentes entre os *applets*. Assim, apresentamos o Sistema de Atividades Final do terceiro encontro a seguir.

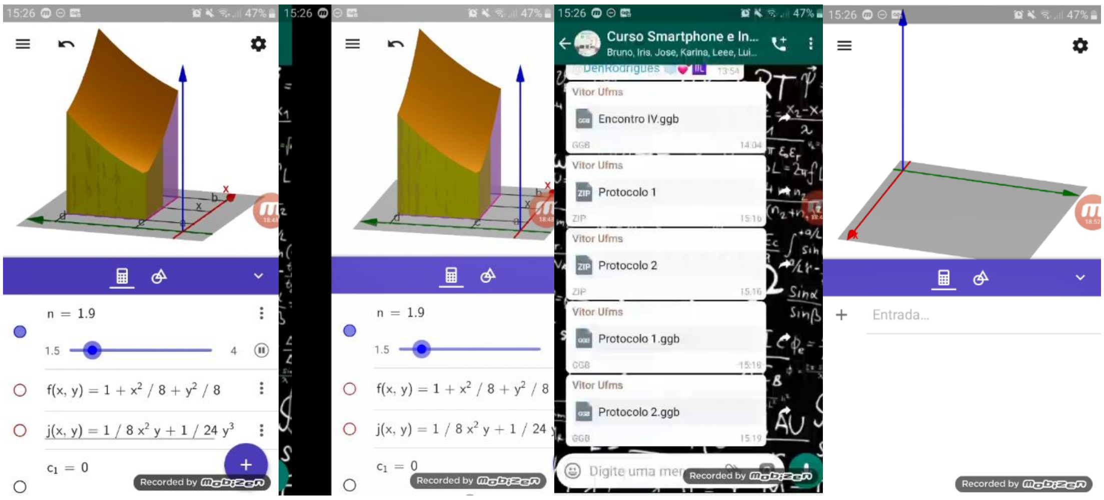
Figura 49 – Sistema de Atividades Final do terceiro encontro



Fonte: dados da pesquisa.

Ainda notamos que ao desenrolar da tarefa, o *applet* continua com os problemas já mencionados, novamente sendo necessário que Danilo encerre o aplicativo e abra novamente, quando ele fala “Deixa só eu voltar de novo aqui pra...”. O que pode ser notado na sequência de *prints* a seguir:

Figura 50 – *Applet* sendo reiniciado



Fonte: dados da pesquisa.

Após isso, é feita a discussão coletiva e a sistematização dos conceitos de iteração. Com a culminância na apresentação do Teorema de Fubini. Tal teorema garante que é possível iniciar a integração, em relação a x ou a y primeiramente, por meio das integrais iteradas e teremos a mesma resposta, sempre quando a função f for contínua no retângulo. Isso pode ser sistematizado em linguagem matemática como se segue:

Se f for contínua no retângulo $R = \{(x,y)|a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy.$$

Além disso, é pedido aos alunos que façam o cálculo da integral de uma função utilizando-se do Teorema de Fubini das duas formas. Primeiramente em relação a x e depois em relação a y, ou vice-versa. A intenção é a verificação das integrais iteradas e do teorema.

Assim, nos perguntamos como o Sistema de Atividade evoluiu com o nosso curso?

Ao finalizarmos a análise dos vídeos dos três encontros, notamos que o Sistema de Atividade evoluiu historicamente movido por tensões, estagnações e movimentos dos sujeitos. Inicialmente pensamos em um Sistema de Atividade Idealizado orientado a um objeto, o qual foi resultado de motivos dos sujeitos e dos proponentes do curso (SOUTO, 2014), que tinha artefatos, regras, divisões de trabalho e comunidade.

Iniciamos a análise do primeiro vídeo com o SAI em que os motivos dos proponentes do curso foram se distanciando do sistema de atividade e novos motivos dos sujeitos, agora apenas Danilo e Íris, apareceram. Alguns artefatos, comunidades e divisões de tarefas foram se distanciando do mesmo modo que outros componentes surgiram nesses nós.

A partir daí, tivemos uma estagnação no sistema com uma tensão entre o sujeito (Danilo) e o artefato. Íris, que estava até esse momento no nó dos sujeitos passa a ser comunidade, visto que compartilha do mesmo objeto, mas não age sobre ele.

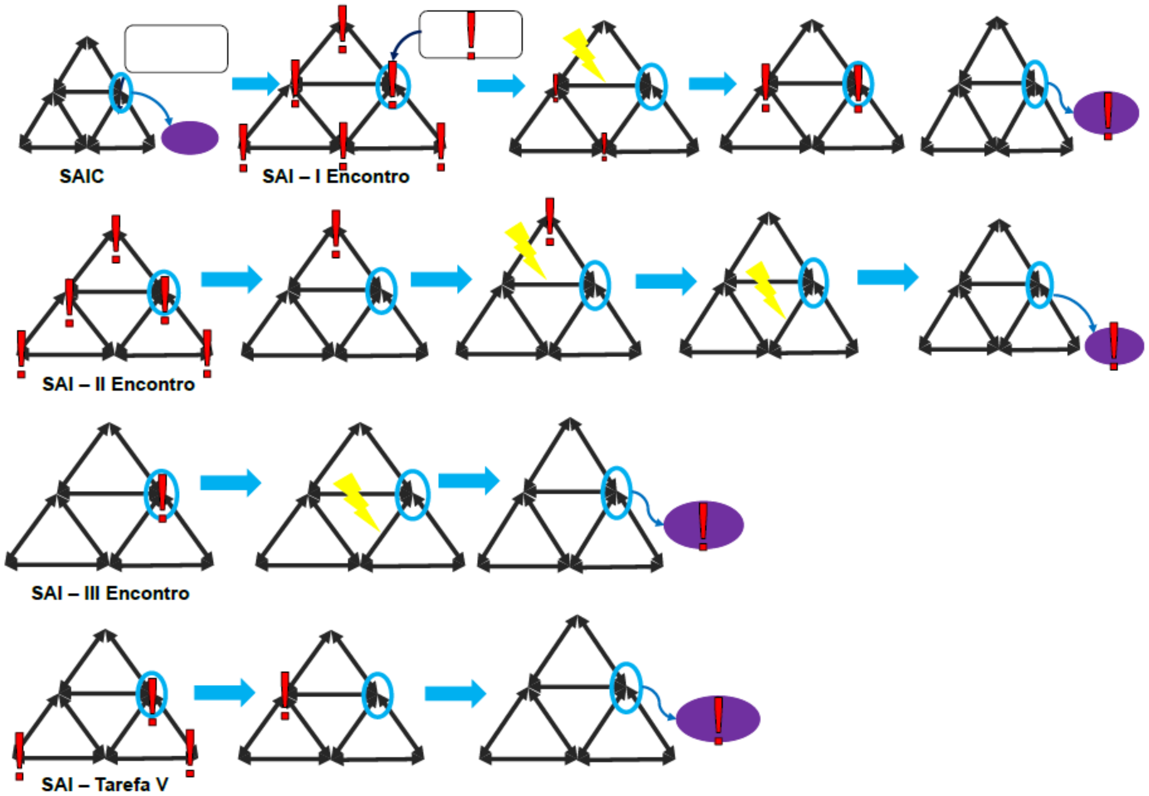
Com o esforço feito para resolver essa tensão, com a ajuda da comunidade o objeto foi transformado de “estudar uma função por meio da Soma de Riemann inferior associada a ela em um certo intervalo por meio do *smartphone*” para “estudar uma função por meio da Soma de Riemann inferior **e superior** em um certo intervalo com o *smartphone*”. Damos destaque à palavra “superior” uma vez que não era pedido que os alunos plotassem o comando no GeoGebra. Indo em direção à finalização do encontro o produto resulta em “construção do conceito de Integral definida por meio da Soma de Riemann Inferior e superior”.

No segundo encontro o SA sofre alterações com a inserção de um novo artefato, novo sujeito (João), nova regra e nova divisão do trabalho e, para essa tarefa, o objeto é outro também. Logo no início os alunos já encontram uma dificuldade, que é a construção de um gráfico no GeoGebra 3D (novo artefato). Isso acarreta em uma tensão produzida entre sujeitos e artefato, estagnando o sistema.

Embora esteja quase parado, mas ainda em movimento, os sujeitos se mobilizam na discussão do domínio das funções de duas variáveis, no qual temos uma nova tensão entre sujeitos e objeto. Ao observar o SA final desse encontro, vemos que as tensões são superadas e temos como produto a “extensão do conceito de domínio de funções de uma variável para funções de duas variáveis”.

Para o último encontro o objeto era “estabelecer relações entre a Soma de Riemann no contexto 2D e a Soma de Riemann no contexto 3D por meio do *applet*”. Ao observarmos o SA não notamos diferença em questão a outros sistemas com relação aos outros nós. A ideia nesse encontro era que os alunos sistematizassem as ideias observadas anteriormente, logo como produto temos a “extensão de conceitos da Soma de Riemann no contexto bidimensional para o contexto tridimensional”.

Figura 51 – Constelação de sistemas



Fonte: os autores, 2020.

Na constelação de sistemas da figura anterior vemos como os sistemas evoluíram conforme a sua história. Os pontos de exclamação em vermelho indicam que houve alguma mudança no *nó*, isto é, distanciamento ou aproximação de motivos, sujeitos, inserção de novas regras.

Os raios amarelos indicam onde houve as tensões entre sujeitos e objeto e entre sujeitos e artefatos. Vemos nas tensões entre sujeito e artefatos um acúmulo histórico em que os alunos tiveram dificuldade em *plotar* gráficos, em se relacionar com a tecnologia. Isso pode indicar a ocorrência de uma contradição interna no sistema de atividade.

Por fim, vemos um esforço dos alunos ao entrarem em atividade para realizar as tarefas solicitadas que, com suas diferenças, estiveram diante de dificuldades e tensões os fazendo se movimentarem e buscarem soluções, assim como a comunidade em vários momentos teve de intervir para criar diferentes saídas. Nesse sentido, destacamos o momento em que os alunos transformaram o objeto do encontro dois para observar as Somas de Riemann Superior e Inferior. Além disso, destacamos que a inserção de novas regras e artefatos trouxe aos alunos tensões, mas também movimentos de superação dessas dificuldades.

5 ~~FECHANDO~~ TELAS ABERTAS: COLOCANDO EM *STANDBY*

Ao nos propormos essa pesquisa, nos desafiamos a responder a indagação “Como ocorre a produção de conhecimentos de integrais duplas com *smartphone* e o aplicativo GeoGebra?”.

O conhecimento pode emergir de várias formas, por isso a nossa expectativa era a sua produção aliando as tecnologias digitais, mas ao analisarmos os dados podemos perceber que não só isso é preciso. Vemos a importância da comunidade, na perspectiva da Teoria da Atividade, em ter o papel de mediar a relação dos sujeitos com o objeto para que os indivíduos possam produzir seus próprios conhecimentos, trazendo questionamentos e considerações ao processo, necessitando reflexão por parte dos sujeitos.

Além da comunidade, temos os artefatos como vínculo mediacional entre sujeitos e objeto. As tecnologias digitais presentes nesse nó, citamos o *smartphone* e o aplicativo GeoGebra, trouxeram outras oportunidades para os sujeitos visualizarem, manipularem, explorarem cada *applet* disponibilizado, cada construção feita pelos alunos.

Os dados apontaram que variadas tecnologias se fizeram presentes nessa produção de dados, em que os alunos se apropriaram destas para produzir seus conhecimentos. Isto é, vários tipos de linguagem foram usadas por eles, desde a fala, a escrita, até a linguagem matemática.

Deixando-os no papel de sujeitos do processo de produção de seu conhecimento, os alunos precisaram criar estratégias, mesmo que em momentos sendo mediados pela comunidade, para resolver as tensões que foram surgindo ao longo da produção de dados. Tais tensões sendo provocadas pela inserção de novas regras, novos artefatos e até mesmo de um novo objeto geraram movimentos em busca da superação de “choques” entre *nós* do sistema de atividade dos alunos.

É pertinente comentar que a proposta pedagógica, colocando o aluno como ator central, as questões abertas, disparadoras de diálogos e estimuladoras de movimentos, tiveram papel importante para a produção dos conceitos de integrais duplas. Tais questionamentos mobilizaram os alunos no sentido de não os levar a responder apenas sim ou não, mas a pensar em respostas que iam além disso, necessitando a justificativa de *feedback*. E, nessas soluções, por meio do diálogo, das tensões que envolviam a tarefa realizada, havia o estabelecimento de conceitos. Podendo ressignificar, discutir e, até mesmo, produzir novos conceitos.

Ao trabalharmos com duas formas de interação sujeito-artefato tivemos um amplo leque de possibilidades. Na primeira forma em que os alunos construíam o que seria manipulado e explorado vemos que a linguagem utilizada no aplicativo se tornou um ponto de tensão entre sujeito e artefato no caso dos sujeitos analisados. Mas o potencial para a discussão matemática que ali se envolveu foi muito expressiva no sentido de explorar as partições de uma função, a própria Soma de Riemann e a produção dos conceitos de integral simples. E, ainda, no momento de discussão dos conceitos de imagem e domínio de integrais duplas, quando os sujeitos tiveram problema em plotar o gráfico no ambiente tridimensional.

Na segunda forma de interação, provocada pelo uso de um artefato diferente, em que os alunos já tinham acesso a applets previamente disponibilizados temos uma ampla discussão de pontos de amostragem, do que significava os símbolos que compõe a linguagem matemática $\iint_R f(x,y)dxdy$, fazendo relação com o somatório duplo $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta x \Delta y$.

Nosso objetivo na pesquisa foi o de analisar processos de produção de conhecimento sobre integrais duplas com *smartphone* e GeoGebra e, para que fosse possível atender o objetivo geral estipulamos objetivos específicos i) Analisar movimentos e alterações no sistema de atividade ao trabalhar no ambiente GeoGebra com o *smartphone* em estudos sobre integrais; ii) Analisar possíveis contribuições e limitações do *smartphone* e do GeoGebra na extensão de conceitos de integrais simples para integrais duplas; iii) Analisar possíveis transformações expansivas ocorridas no sistema de atividade durante o estudo dos conceitos de integrais duplas por meio do *smartphone*.

Nos apoiamos em uma corrente teórica que ainda tem conceitos sendo discutidos por autores contemporâneos, como é o caso de objeto, mas que nos dá variadas oportunidades de analisarmos os dados produzidos. Nessa pesquisa optamos por ampliar o foco no que os alunos estavam fazendo e em que estes queriam chegar a cada encontro.

Por meio do primeiro objetivo específico, o qual trata da análise dos movimentos e das alterações do sistema de atividade quando alunos os trabalham com o *smartphone*, notamos que os alunos, ao manipularem o GeoGebra, precisaram ter familiaridade com a linguagem usada no aplicativo. Além disso, a linguagem matemática se tornou um ponto de tensão quando houve a necessidade de extensão dos conceitos de integral simples para integrais duplas.

A linguagem matemática é importante para a extensão dos conceitos, uma vez que quando saímos do plano bidimensional para o tridimensional vamos para um campo de volumes. O aplicativo GeoGebra leva em consideração a matemática utilizada nesses planos, ou seja, para funções com uma variável é preciso a entrada $f(x)$ enquanto que para funções de duas variáveis é preciso $f(x,y)$.

O SA evoluiu historicamente, conforme a constelação de sistemas (Imagem 51). Foram introduzidos novas regras, novos artefatos, os alunos se movimentaram e se engajaram em uma outra atividade em que o objeto era construir um gráfico no ambiente 3D. Notamos ainda alterações na comunidade, nos sujeitos, em momentos cujos alunos alternavam de papel na atividade.

Olhamos ainda para as tensões que estiveram presentes em vários estágios do SA e que foram se acumulando historicamente como no caso dos choques entre sujeitos e artefatos e sujeitos e objeto. Isso pode nos levar a uma possível contradição interna.

O segundo objetivo, o qual considera analisar possíveis contribuições e limitações do *smartphone* e do GeoGebra na extensão de conceitos de integrais simples para integrais duplas, vemos que há coisas inerentes de cada modelo de dispositivo, como capacidade de memória e desempenho. Para a produção de dados os alunos precisavam executar dois aplicativos ao menos, o GeoGebra e o Mobizen. Em outros momentos, era necessário o aplicativo de mensagens para ter acesso aos *applets* disponibilizados.

Ainda chamamos atenção para a possibilidade de todos os alunos trabalharem em duplas, mas cada um manipulando o arquivo no seu dispositivo, em que alguns momentos eram iguais e em outros eram diferentes. Mesmo no trio analisado em que um dos sujeitos não possuía o *smartphone*, percebemos que houve a oportunidade de se manipular e até mesmo a troca dessa tecnologia. Consideramos isso como uma prática que o *smartphone* pode possibilitar.

Ao manipularem os *applets* foi notório a quantidade de construções e comandos neles existentes, o que demanda maior desempenho dos *smartphones*. Nesse sentido, vemos que há uma limitação, uma vez que tanto o GeoGebra, quanto os dispositivos inteligentes, demoravam para executar os *applets* e, ao executar, muitas vezes travava e era necessário reiniciá-lo.

Vemos um potencial nos *smartphones* aliado ao GeoGebra na produção de conceitos de integrais quando esses dispositivos trazem em si o caráter portátil, o manejo fácil e a versatilidade, no sentido de que é fácil de carregar aos espaços educativos, é acessível e, mesmo em momentos que não se tem a possibilidade de ter um *smartphone* para todos os alunos, como foi o caso de um dos sujeitos do grupo analisado, notamos não haver impedimento para participar das tarefas. Não queremos estender aqui a discussão para um campo social importantíssimo que demanda pesquisas, mas colocar possibilidades vistas no nosso estudo.

O *smartphone*, por meio do GeoGebra, trouxe o apelo visual, o *feedback* instantâneo, a possibilidade de rotação, expansão e redução das construções dos próprios alunos e dos *applets* disponibilizados. Trouxe também a oportunidade de exploração, a partir dos comandos, pelos alunos para fazer relações com os conceitos de cálculo integral.

O terceiro objetivo, mais voltado para a teoria, proclama a análise de possíveis transformações expansivas ocorridas no sistema de atividade durante o estudo dos conceitos de integrais múltiplas com o do *smartphone*.

Ao olharmos para a constelação dos SA notamos que há tensões recorrentes entre os nós Sujeito-Artefato, o que pode nos dar indícios de uma contradição interna de nível dois. Tais tensões podem se explicar pela não familiaridade pela linguagem utilizada pelo GeoGebra, mas também pode ter uma raiz nos conceitos matemáticos, uma vez que os alunos insistiam em colocar o comando $f(x)$ no campo de entrada do aplicativo e mantiveram de modo recorrente, em determinado período, a referência a conceitos associados a funções de uma variável mesmo quando já trabalhavam com funções de duas variáveis.

O que queremos colocar em evidência é a extensão dos conceitos de domínio, imagem, gráfico, somatório. Em integrais simples, trabalhamos com os conceitos relacionados ao ambiente bidimensional, com funções de uma variável, em que o domínio se apresenta nos números reais. Ao estendermos esse conceito para integrais duplas, trabalhamos com funções de duas variáveis, com elementos do domínio sendo representados em pares ordenados, levando-nos ao ambiente tridimensional.

Com o passar do tempo percebemos que os sujeitos deixaram de falar em termos de integrais simples, como área, domínio dos reais, as partições sendo retângulos, isto é, dos conceitos relacionados a essas integrais e começaram um movimento de se expressar com conceitos de integral dupla. Ou seja, passaram a falar de elementos associados às integrais duplas, como funções de duas variáveis, domínio no $\mathbb{R}^2$, as partições agora são os paralelepípedos, o gráfico.

Inicialmente pensamos que os sujeitos não enxergavam as mudanças, quando expressavam “retângulos” ao invés de paralelepípedos, mas no decorrer da análise foi percebido que houve uma transformação no expressar dos alunos. Por isso, consideramos que ocorreu uma transformação expansiva relacionada à extensão do conceito de integral simples para integrais duplas. Percebemos, por exemplo, que os alunos, em suas falas, modificaram o seu jeito de observar e relatar relações, como pode ser observado no terceiro encontro, no sentido de que conceitos associados à noção de integrais foram estendidos para abraçar outros novos dando possibilidade de um horizonte mais amplo.

Vimos na Teoria da Atividade um convite a colocar o aluno no papel de sujeito de sua produção de conhecimentos, colocando o professor dentro da comunidade como mediador desse processo, o *smartphone* e as outras tecnologias, sejam elas signos, como a linguagem matemática, a escrita e a fala, como outro *nó* do sistema que faz essa mediação. Ainda temos as regras e a divisão do trabalho como movimentadoras desse processo em que se coloca o estudo de conceitos de integrais com o *smartphone* como objeto do sistema de atividade visando um produto final que é a produção de conhecimento matemático.

Ao colocarmos que a TA nos chama a posicionar o aluno como sujeito, temos de adotar uma metodologia de sala de aula que privilegie esse processo. Por isso, o processo de construção de funções no aplicativo e as questões abertas foram essenciais, assim como as entrevistas para esclarecermos pontos levantados durante as discussões em grupo.

Para analisar o processo de produção de conhecimentos aliamos a TA com todos esses procedimentos metodológicos da pesquisa e foi possível notar que o *smartphone* trouxe possibilidades, mas também trouxe limitações, anteriormente mencionadas. Os movimentos feitos pelos alunos, ao explorarem o GeoGebra com o *smartphone*, foram importantes para observarem relações do cálculo integral, que com outras mídias seria diferente.

Ainda nos mostrou que a interação entre indivíduos que produzem seus conhecimentos e os sujeitos que estão ao seu redor, como outros alunos e professores, são essenciais ao desenvolvimento. A troca de informações, discussões e análises os possibilitou (re)pensar e estender conceitos antes discutidos apenas com as tecnologias lápis e papel. Uma outra tecnologia trouxe outras possibilidades de produção de conhecimento.

Nesse estudo as tecnologias digitais, presentes do início ao fim, caracterizaram um modo particular de produzir conhecimento. Dentro do campo do cálculo há ainda aspectos a serem pesquisados e analisados como é o caso das integrais que trabalham com regiões de integração delimitadas por funções contínuas com o *smartphone*.

No que tange ao campo das tecnologias digitais, é preciso ainda muita reflexão e discussão sobre o *smartphone* e qual lugar ele pode ocupar numa sala de aula. Como os alunos estão usando-o nessa pandemia? Que limitações um *smartphone* tem enquanto os alunos estão em casa? No que ele contribui? Como o professor pode usar essa tecnologia para ensinar quando não podemos ter aulas presenciais? São questões que surgiram enquanto esse trabalho era escrito no meio de uma pandemia.

Quanto à questão de pesquisa, nos perguntamos: que outros conhecimentos podem ser produzidos com o *smartphone* e o GeoGebra, por exemplo, em geometria? Em estatística? Em análise matemática? Que outros aplicativos podem ser usados pelo professor para auxiliar os alunos a produzir conhecimentos?

E, por isso, esperamos contribuir de modo qualitativo para que estudos posteriores que trabalhem com o campo matemático aqui investigado, com as tecnologias digitais, a Teoria da Atividade e a Educação Matemática sejam desenvolvidos.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. de L.; BORBA, M. de C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 5ª ed. Belo Horizonte - MG: Autêntica, 2013. p. 31–51.

ASSMANN, H. A metamorfose do aprender na sociedade da informação. **Ciência da Informação**, v. 29, n. 2, p. 07–15, ago. 2000.

BARUFFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. 1999. 195 f. **Tese** (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 1999.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pró-posições**, v. 4, p. 18–23, 1993.

BORBA, M. de C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** Sala de aula e internet em movimento. 1ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

BORBA, M. de C.; ALMEIDA, H. R. F. L. de; GRACIAS, T. A. de S. **Pesquisa em ensino e sala de aula:** diferentes vozes em uma investigação. Belo Horizonte: AUTENTICA EDITORA, 2018.

BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BORBA, M. de C.; VILLARREAL, M. E. Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. New York: **Springer**, 2005. v. 39.

CHIARI, A. S. de S. Tecnologias Digitais e Educação Matemática: relações possíveis, possibilidades futuras. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 11, n. 26, p. 351–364, 2018.

CHIARI, A. S. de S. O papel das tecnologias digitais em disciplinas de Álgebra Linear a distância: possibilidades, limites e desafios. 2015. 200 f. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.

DANIELS, H. **Vygotsky e a Pesquisa**. São Paulo: Loyola, 2011.

DOMINGUES, N. S. Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática: uma complexa rede de Sistemas Seres-Humanos-Com-Mídias. 2020. 279 f. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro - SP, 2020.

ENGESTRÖM, Y. Activity Theory and Individual and Social Transformation. In: ENGESTRÖM, Y.; MIETTINEN, R.; PUNAMÄKI, R. L. **Perspectives on Activity Theory**. UK-USA-Australia: Cambridge University Press, 1999. p. 19–38.

ENGESTRÖM, Y. Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. **Journal of education and work**, v. 14, n. 1, p. 133-156, 2001.

ENGESTRÖM, Y. **Learning by expanding:** an activity-theoretical approach to developmental reasearch. Helsinki: Orienta-Konsultit, 1987.

ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Discursive manifestations of contradictions in organizational change efforts. **Journal of Organizational Change Management**, v. 24 n. 3 p. 368 - 387, 2011.

ENGESTRÖM, Y.; SANNINO, A. Studies of expansive learning: Foundations, findings and future challenges. **Educational Research Review**, v. 5, n. 1, p. 1–24, 1 jan. 2010.

GALLEGUILLOS, J. E. B. Modelagem Matemática na Modalidade Online: análise segundo a Teoria da Atividade. 2016. 215 f. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro - SP, 2016.

GOLDENBERG, M. **A arte de pesquisar:** como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. 15ª ed. Rio de Janeiro; RJ: Record, 2018.

GRANDO, R. C. O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula. 2000. 239 f. **Tese** (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas - SP, 2000.

HENRIQUE, M. P.; BAIRRAL, M. O *smartphone* na e com a pesquisa em educação matemática. **Dispositivos móveis no ensino de matemática:** tablets e smartphones. São Paulo - SP: Editora Livraria da Física, 2019. p. 113–130.

JAVARONI, L. J.; SANTOS, S. C.; BORBA, M. de C. Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 13, n. 1, p. 197–218, 2011.

JORDÃO. F. **História:** a evolução do celular. 2009. Disponível em: <https://www.tecmundo.com.br/celular/2140-historia-a-evolucao-do-celular.htm>. Acesso em: 31 de jan. de 2021.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias:** o novo ritmo da informação. 8ª ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo**. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LÉVY, P. **Cibercultura**. 1ª ed. São Paulo (SP): Ed. 34, 1999.

LOPES, V. R. AÇÕES EM UM AMBIENTE CONSTRUCIONISTA COM USO DE SMARTPHONE: UMA PROPOSTA BIMODAL PARA ESTUDAR CONCEITOS DE CÁLCULO. 2020. 170 f. **Tese** (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal De Mato Grosso do Sul, Campo Grande - MS, 2020.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3ª ed. Campinas - SP: Autores Assoc., 2010.

MASETTO, M. T. Mediação Pedagógica e o Uso da Tecnlogia. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 19ª ed. Campinas - SP, Editora Papirus, p. 133–173, 2012.

MATHIAS, D. G. A INTEGRAÇÃO DO GEOGEBRA NO ESTUDO DE FUNÇÕES. 2018. 109 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pelotas, Pelotas - RS, 2018.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos:** Novos desafios e como chegar lá. Campinas: Papirus, 2007.

MORAN, J. M. Ensino e Aprendizagem Inovadores com Tecnologias Audiovisuais e Telemáticas. In: MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas tecnologias e mediação pedagógica**. 19ª ed. Campinas - SP, Editora Papirus, p. 11–65, 2012.

NASSER, L.; SOUSA, G. A. de; TORRACA, M. A. A. Desempenho em cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior. **Boletim GEPEM**, v. 70, n. 1, p. 43–55, 2017.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma Abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Idéias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. **Bolema - Boletim de Educação Matemática**, 21. v. 17, p. 81–140, 2004.

PRENSKY, M. Digital Natives Digital Immigrants. In: PRENSKY, M. **On the Horizon**. NCB University Press, 2001. v. 9.

REZENZE, W. M. O ensino de Cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica. 2003. 450 f. **Tese** (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo - SP, 2003.

ROCHA, M. D. da. Desenvolvendo Atividades Computacionais na Disciplina Cálculo Diferencial e Integral I: estudo de uma proposta de ensino pautada na articulação entre a visualização e a experimentação. 2010. 172 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto - MG, 2010.

ROSA DE SARON, **Monte Inverno**. Direção artística: Guilherme de Sá. São Paulo: Codimuc. Disco sonoro. 2007.

SALMASIO, J. L. Desbloqueando Telas para produzir matemática(s): possibilidades e limites envolvendo Álgebra Linear e *smartphone*. 2020. 126 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande - MS, 2020.

SANCHO, J. M. De tecnologias da informação e comunicação a recursos educativos. In: SANCHO, J. M. [et al]. **Tecnologias para transformar a educação**. Porto Alegre - RS: Artmed, p. 15–41, 2006.

SOARES, D. S.; SOUTO, D. L. P. Tensões no processo de Análise de Modelos em um curso de Cálculo Diferencial e Integral. **REMATEC - Revista de Matemática**, Ensino e Cultura. v. 17, p. 44–74, 2014.

SOUTO, D. L. P. Aprendizagem matemática on-line: quanto tensões geram conflitos. **Educação Matemática Pesquisa**: A Pesquisa em Tecnologias Digitais e Educação Matemática: rumos e perspectivas. v. 17, p. 942–972, 2015.

SOUTO, D. L. P.; BORBA, M. de C. Seres humanos-com-internet ou internet-com-seres humanos: uma troca de papéis? **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 19, n. 2, p. 217–242, 31 jul. 2016.

SOUTO, D. L. P. **Transformações expansivas na produção matemática online**. Coleção PROPG Digital (UNESP), 2014.

STEWART, J. **Cálculo**. vol. 2. 3ª ed. São Paulo - SP: Cengage Learning, 2013. Tradução: EZ2 Translate.

VALENTE, J. A. (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, 1999.

WIKIPÉDIA. **Sistema Operativo**. 2020. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_operativo#:~:text=Sistema%20operativo%20ou%20operacional%20(em,entre%20o%20computador%20e%20o>. Acesso em: 25 de jun. 2020.

APÊNDICES

APENDICE A - Tarefas

<table>
<tr><th colspan="2">TAREFA I</th></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Contato inicial com os participantes do curso;</td></tr>
<tr><td>Duração: 2 hs/aula, em torno de 100 minutos.</td><td>Materiais utilizados: Projetor; Giz; Quadro;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos: Explicação do decorrer do curso, objetivos do curso, apresentação dos aplicativos e porquê/para que o curso será desenvolvido.</td></tr>
<tr><td colspan="2">INTRODUÇÃO (25 minutos)
Para a introdução deixamos um momento para nos apresentar, apresentação dos participantes para que possamos conhece-los.
DESENVOLVIMENTO (50 minutos)
1º momento: Será explicado os objetivos do curso, onde apresentaremos o porquê de fazer esse curso. Quais aplicativos serão usados, por que serão usados, para que finalidades o que for produzido no curso será utilizado.
2º momento: Nesse momento, trataremos dos downloads dos aplicativos (GRAPHING CALC, 3D CALCULATOR E MOBIZEN). Além disso, passaremos um questionário com algumas questões para os alunos responderem.
Apresentação de um tutorial do GeoGebra.
DISCUSSÃO FINAL (25 minutos)</td></tr>
</table>

TAREFA II

Tema: Atividade de exploração do GeoGebra Graphing Calculator;

Duração: 2 hs/aula, em torno de 100 minutos.	**Materiais utilizados:** Celular com o aplicativo GeoGebra Graphing Calculator instalado; Mobizen; *Applet*; Projetor; Giz; Quadro;

Objetivos: Apresentação e exploração do GeoGebra; Construção de uma função e cálculo da área abaixo da função com a Soma de Riemann;

INTRODUÇÃO (25 minutos)

Nesse encontro, buscaremos deixar os participantes a vontade para exploração do aplicativo GeoGebra Graphing Calculator. Portanto, falaremos nessa introdução, sobre a atividade deste dia, que é explorar o aplicativo, construir funções e calcular a área abaixo da função, comparando a partir da Soma de Riemann com os resultados de Integral.

DESENVOLVIMENTO (50 minutos)

1º momento: Para esse momento falaremos sobre a soma de Riemann para o cálculo de integral e uma rápida explicação para que os alunos se situem em que espaço dos conteúdos matemáticos se passará o curso.

Antes de tudo, vamos relembrar os fatos básicos relativos à integral definida de funções de uma variável real. Se $f(x)$ é definida em $a \leq x \leq b$, começamos subdividindo o intervalo $[a, b]$ em *n* subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, sendo que o índice **i** varia de **1** até **n**, isto é, $1 \leq i \leq n$, e comprimento igual $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$ e escolhemos pontos de amostragem x_i^* em cada um desses subintervalos. Assim, formamos a soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Em seguida, enviaremos um tutorial de como construir uma função e como colocar no aplicativo a função "SomaDeRiemannInferior".

Perguntas:

a) O que esta soma representa? O que podemos tirar de informação dela?

b) O que vocês percebem quando a quantidade de retângulos aumenta?

c) Por que acredita que isso acontece?

d) Se mudasse a função, o que aconteceria? Como ficariam os retângulos?

DISCUSSÃO FINAL (25 minutos)

TAREFA III

Tema: Explorando Integrais Definidas;

Duração: 2 hs/aula, em torno de 100 minutos.

Materiais utilizados: Celular com o aplicativo GeoGebra Graphing Calculator instalado; Projetor; Giz; Quadro;

Objetivos: Explorar a área sob funções a partir da Soma de Riemann e Integrais Definidas.

INTRODUÇÃO (25 minutos)

Fazer um breve retrospecto das atividades desenvolvidas no último encontro fazendo um *link* e introduzir o que debateremos nesse encontro.

DESENVOLVIMENTO (50 minutos)

1º momento: Traremos em um *slide* o conceito de integral definida a partir da soma de Riemann; e tomamos o limite dessa soma quando $n \to \infty$ para obter a integral definida de *a* até *b* da função *f*:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

Após a rápida explicação sobre o conceito de integral definida, entregaremos um protocolo de construção e solicitaremos que os alunos plotem um gráfico no GeoGebra com quatro controles deslizantes. Solicitar a inserção do comando Soma de Riemann e fazer explorações. Por último, inserir o comando “IntegralNumérica”. Além disso, faremos algumas perguntas afim de suscitar reflexões e discussões entre os alunos.

Perguntas:

1) Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?

2) Que relações, semelhanças e diferenças você nota entre ambos os gráficos?

3) Como a ideia dos conceitos de partição e de pontos de amostragem poderia ser pensada para o domínio de funções de duas variáveis?

DISCUSSÃO FINAL (25 minutos)

<table>
<tr><th colspan="2">TAREFA IV</th></tr>
<tr><td colspan="2">Tema: Explorando o aplicativo GeoGebra 3D Graphing Calculator;</td></tr>
<tr><td>Duração: 2 hs/aula</td><td>Materiais utilizados: Smartphone com o aplicativo GeoGebra 3D Graphing Calculator instalado; Applet; Projetor; Giz; Quadro;</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos: Deixar que os alunos se ambientem com o GeoGebra 3D; Construção de uma função de duas variáveis; Manipulação da função.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Introdução (25 minutos)
Para esse encontro disponibilizaremos o tempo para que os alunos possam baixar, caso não tenham, o GeoGebra 3D. Se ambientem com o aplicativo e explorem as ferramentas.
Desenvolvimento (50 minutos)
1º momento: Nesse primeiro momento os alunos serão levados a pensar e explorar o domínio das funções. Um membro da dupla ficará responsável em colocar uma função de uma variável no GeoGebra 2D e o outro ficará responsável em criar uma função de duas variáveis no GeoGebra 3D.
Perguntas:
a) Como podemos discutir o domínio das funções? Que semelhanças e diferenças você destaca entre eles?
b) Que relações, semelhanças e diferenças você nota entre ambos os gráficos?
c) Como a ideia dos conceitos de partição e de pontos de amostragem poderia ser pensada para o domínio de funções de duas variáveis?
2º momento: Nesse momento, enviaremos um applet para exploração dos alunos.
Perguntas:
a) No contexto do GeoGebra 3D, o que $\boldsymbol{f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta x \Delta y}$ representa?
b) No mesmo contexto, o que o duplo somatório $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta x \Delta y}$ representa?
c) Estabeleça relações entre o significado de $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$ com o significado de $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_{ij}^*, y_{ij}^*\right)\Delta x \Delta y}$
Discussão final: Para a discussão final, procuraremos fazer um apanhado geral com os alunos para que eles discutam entre si estratégias que pensaram para achar o volume e o que poderia ajudar ou atrapalhar na sua aprendizagem de integrais múltiplas.</td></tr>
</table>

APÊNDICE B – Questionário Inicial

Integrais múltiplas e o *smartphone*: o que podemos?

Questionário inicial

Nome: ____

1) Você é de qual curso?
2) Em qual semestre você se encontra?
3) Já cursou a disciplina de Cálculo II?

   ( ) Sim. Já cursei e fui aprovad@.

   ( ) Sim. Já cursei, mas fui reprovad@.

   ( ) Não cursei ainda.
4) Liste alguns de seus motivos que te levaram a se inscrever no curso.
5) Já trabalhou com algum *software* ou aplicativo para estudar ou aprender conteúdos da graduação? Se sim, relate um pouco da sua experiência.
6) O que espera do curso?
7) Cite alguma experiência que considera boa com o cálculo e uma que considera ruim.

APÊNDICE C – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Serviço Público Federal
Ministério Da Educação

Fundação Universidade Federal Do Mato Grosso Do Sul

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO/UFMS

Você está sendo convidado a participar de uma pesquisa, chamada "**DA SENSIBILIDADE DO TOQUE À CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO: O *SMARTPHONE* E A APRENDIZAGEM DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS**", cujo objetivo é analisar processos de produção de conhecimento envolvendo smartphones referentes ao estudo de volume de sólidos a partir do conceito de integrais múltiplas. O material a ser analisado nesta pesquisa resultará da produção de dados dos alunos durante um curso desenvolvido pelos pesquisadores com a duração de 20 horas. A pesquisa se dá, pelas inquietações das responsáveis do estudo, em investigar como trabalhar a articulação de smartphones e a aprendizagem de conceitos de integrais múltiplas.

Você precisa decidir se quer participar ou não. Por favor, não se apresse em tomar a decisão. Leia cuidadosamente o que se segue e pergunte ao responsável pelo estudo qualquer dúvida que você tiver.

A participação no referido estudo será no sentido de participar de atividades que vão envolver desenvolvimento de tarefas propostas, discussões e registros escritos e digitais. Serão necessárias gravações de áudios e vídeos e realização de registros escritos durante todo o desenvolvimento do curso e este material será utilizado como dados da pesquisa. Esclarecemos de que não haverá possíveis desconfortos e/ou riscos decorrentes desse estudo, mesmo levando-se em conta que é uma pesquisa, e os resultados somente serão obtidos após a sua realização. A pesquisa está sendo coordenada pela Profa. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari (UFMS) e o pesquisador que desenvolverá a pesquisa é o Prof. Victor Ferreira Ragoni, mestrando do programa de pós-graduação em Educação Matemática – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Participarão deste estudo discentes do curso de Licenciatura em Matemática, da UFMS, situada no município de Campo Grande – MS. Não poderão participar desta pesquisa menores de idade sem a autorização de pais ou responsáveis. Participarão, no total, vinte graduandos do referido curso.

Você será informado periodicamente de qualquer nova informação que possa modificar a sua vontade em continuar participando do estudo.

Em caso de dúvidas, entre em contato com Victor Ferreira Ragoni, telefone (67) 9 9937-3679, e-mail: ragonivictor@hotmail.com. Em caso de reclamação ou qualquer tipo de denúncia sobre este estudo deve ligar para o PPGEduMat/UFMS (67) 3345-7139/7146 ou mandar um e-mail: edumat.inma@ufms.br.

Sua participação no estudo é voluntária. Você pode escolher não fazer parte do estudo, ou pode desistir a qualquer momento. Você não será proibido de participar de novos estudos.

Declaro que li e entendi este formulário de consentimento, todas as minhas dúvidas foram esclarecidas e que sou voluntário a tomar parte neste estudo. Desta forma, firmo que

( ) Desejo ter minha identidade preservada

( ) Não desejo ter minha identidade preservada

( ) Não me importo se minha identidade for preservada

Nome do aluno (a):____RGA:____________

Assinatura do aluno (a): ____data___/___/_____

Assinatura do responsável*: ____data__/__/_____

Telefone: ( ) ________-________

Endereço: ____

Assinatura da pesquisadora ____data __/__/_____

Uso de imagens: ( ) Sim

( ) Não

**Será necessária a assinatura do responsável legal, caso o discente seja menor de idade.*

APÊNDICE D – Questionário Final

Integrais múltiplas e o *smartphone*: o que podemos?

Questionário final

Nome: ____

1) O curso desenvolveu o que você esperava? Por quê?
2) Liste pontos que você considera importantes abordados durante o curso.
3) Quais dificuldades encontrou para desenvolver tarefas com o smartphone?
4) Como você utilizaria o seu smartphone para potencializar sua aprendizagem?
5) Como futuro professor(a), que possibilidades você vislumbra em relação do uso do smartphone para o ensino de matemática?
6) Comente pontos positivos e negativos sobre o smartphone para a aprendizagem de integrais, segundo a sua visão.
7) Como você acha que esse curso ajudou na sua aprendizagem?