UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL - PROFMAT

ABORDAGEM DA LÓGICA MATEMÁTICA UTILIZANDO O *SOFTWARE* VISUALG

Juliano Ferreira de Lima

Orientador
Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade

TRÊS LAGOAS - MS
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ABORDAGEM DA LÓGICA MATEMÁTICA UTILIZANDO O *SOFTWARE* VISUALG

Juliano Ferreira de Lima

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador
Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade

TRÊS LAGOAS - MS
2021

TERMO DE APROVAÇÃO

Juliano Ferreira de Lima

ABORDAGEM DA LÓGICA MATEMÁTICA UTILIZANDO O *SOFTWARE* VISUALG

Dissertação APROVADA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre, pelo Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus Três Lagoas pela seguinte banca examinadora:

Allan Edley

Prof. Dr. Allan Edley Ramos de Andrade
Orientador

Renato César da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

Diogo Ramalho de Oliveira

Prof. Dr. Diogo Ramalho de Oliveira
Instituto Federal do Mato Grosso do Sul

TRÊS LAGOAS
2021

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer primeiramente a Deus e aos meus pais Eliana Aparecida Ferreira de Lima e Octávio de Lima, pois eles são minha base, sempre me apoiando e me incentivando a seguir em frente.

Agradecer a minha amiga, namorada e esposa Amanda Santos Silva, por estar do meu lado durante toda a graduação, durante o mestrado me motivando e me auxiliando nas disciplinas.

Agradeço a Rozeli, Elizabeth, Rejiéli, Edivaldo, Sivaldo, Christian, Thaís e os demais professores, colegas e amigos (que por um lápso de memória, não consigo recordar) por nunca medirem esforços em me ajudar.

A Letícia e Sabrina, meus novos amigos que fiz no curso de Engenharia de Controle e Automação.

Como diria Charles Chaplin: “A persistência é o menor caminho do êxito”.

A minha esposa
Amanda. . . .

RESUMO

Neste trabalho apresentaremos uma nova abordagem no ensino da lógica matemática, que faz uso de tabelas verdade, álgebra booleana e desafios de verdade ou mentira, além de diversos exemplos de aplicações com o objetivo de desenvolver algumas das habilidades contidas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Nosso objetivo é fornecer uma material de apoio aos professores que ministram aulas no ensino fundamental II e ensino médio disponibilizando um capítulo com atividades para cada etapa do ensino, que varia do 6^o até 3^o do ensino médio, através do uso de algoritmos executados no *software* VisuAlg.

Palavras-chave: Ensino de lógica, Programação, Circuito lógico.

ABSTRACT

In this work we will present a new approach in the teaching of mathematical logic, which makes use of truth tables, Boolean algebra and challenges of truth or lie, in addition to several examples of applications in order to develop some of the skills contained in the National Common Curricular Base (BNCC)). Our goal is to provide support material for teachers who teach classes in elementary and high school, providing a chapter with activities for each stage of education, ranging from 6^o to 3^o of high school, through the use of of algorithms run on VisuAlg *software*.

Keywords: Logic teaching, Programming, Logic circuit.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

Introdução

O conhecimento da matemática é necessário para todos os alunos da educação básica, pois dominar os conceitos e conseguir aplicá-los em sua vida cotidiana, a partir da resolução de problemas é de suma importância na formação de cidadãos conscientes com responsabilidades civis e sociais. Dessa forma, existem diversas habilidades que devem ser exploradas e desenvolvidas, visando uma interdisciplinaridade na resolução de problemas do cotidiano.

O uso da tecnologia cresce em larga escala tornando-se imprescindível para execução das atividades simples na vida moderna. Dessa forma, a tecnologia existe na nossa vida privada, no mundo do trabalho e no desenvolvimento do conhecimento gerado pela época em que vivemos[1]. Assim, para fortalecer essa relação, devemos refletir sobre a possível união entre tecnologia e trabalho desenvolvido na escola.

A princípio, a motivação desse tema veio a partir da experiência de seis anos como professor, ministrando aulas para diversas turmas de várias idades, com diferentes profissionais em diversas disciplinas, onde de forma interdisciplinar, foi possível notar uma defasagem dos alunos na resolução de problemas relacionados aos conectivos lógicos "e", "ou" e "se...então".

O objetivo dessa dissertação é sugerir uma nova abordagem para aplicações relacionadas à utilização de tabelas verdade e álgebra boolena com o intuito de servir como material de apoio aos professores e estudantes do fundamental II e ensino médio.

Pretendeu-se também trabalhar os conceitos da lógica proposicional por meio de raciocínio algorítmico expresso mediante o uso de pseudocódigo. Concomitante a este processo pretendeu-se utilizar o *software* VisuAlg para exercitar o raciocínio lógico. A facilidade de acesso e execução de pseudocódigos, bem como a acessibilidade, a gratuidade e a simplicidade de se programar foram os fatores determinantes na escolha do VisuAlg.

O trabalho está organizado da seguinte forma, no primeiro capítulo, abordaremos a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e suas alterações, no segundo capítulo, iremos apresentar um pouco sobre a história dos maiores filósofos[2] e sua contribuições que fundamentam esse trabalho, no terceiro capítulo, vamos expor os fundamentos da

[1] O ano de 2020 foi marcado pela pandemia da Covid-19, no qual diversos profissionais, em particular, da educação, tiverem que se adaptar ao ensino remoto por meio das tecnologias.

[2] O novo ensino médio, propiciaram alterações na matriz curricular do ensino médio de Mato Grosso do Sul, assim, a partir do ano de 2021 existe a formalização de um itinerário formativo cuja área de conhecimento será a história da matemática, fato esse que contempla a importância da mesma para a aprendizagem do aluno.

lógica proposicional, e no quarto será desenvolvida algumas aplicações no contexto de números binários, álgebra booleana e sistemas lógicos. No quinto, iremos apresentar algumas propostas para sala de aula, por meio de aplicações fazendo uso do VisuAlg. Por fim, no sexto deixamos sugestões de atividades.

Capítulo 1

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR - BNCC

Neste capítulo introduziremos um pouco dos conceitos da BNCC e as suas dez competências, dando ênfase no elo da BNCC com o referencial curricular de Mato Grosso do Sul. ´

1.1. A BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento que define o conjunto aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver durante toda educação básica, de forma que sejam assegurados seus direitos de aprendizagens/desenvolvimentos, em consonância com Plano Nacional de Educação (PNE). Vale ressaltar que ela não é um currículo, mas sim, um norteador político de estado, ou seja, cada estado tem a autonomia para utilizar a BNCC.

Alguns dos atributos da BNCC são:

- Desenvolvimento das competências e habilidades por meio dos conteúdos escolares;
- Formar o aluno crítico respeitando suas características individuais, regionais, entre outras;
- Garantir a continuidade e progressão ao longo dos segmentos da educação básica;
- A formação e desenvolvimento humano com ênfase em cidadãos justos, éticos, responsáveis entre outros.

Com base nesse pensamento, surgiu o **novo ensino médio**, no qual o ensino passou a ser orientado por competências, assim, podemos de forma simplificada, expor as 10 competências básicas da BNCC. Lembrando que ela ainda está em formação no ensino médio.

Figura 1.1: As 10 competências da BNCC.

Fonte: INEP, 2020.

1.2. A lógica no Ensino Fundamental no Estado de Mato Grosso do Sul

Em 2014, a Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul (SED), através do referencial curricular implantou em sua rede a disciplina Raciocínio Lógico em todas as séries da educação básica. Assim, além da disciplina de matemática, os alunos tinham 1 (uma) vez por semana aula de Raciocínio Lógico. Essa nova disciplina tem por objetivo instigar a atenção dos jovens para atividades lúdicas e situações problemas.

Em 2019, houve uma alteração no referencial curricular, e essa disciplina de raciocínio lógico não é mais ofertada, porém, ela permanece ativa na disciplina de matemática. Com a nova BNCC, a disciplina de matemática deixou de ser **conteudista** e passou a focar nas **habilidades** dos estudantes.

Segundo o Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul e a BNCC, são competências da matemática:

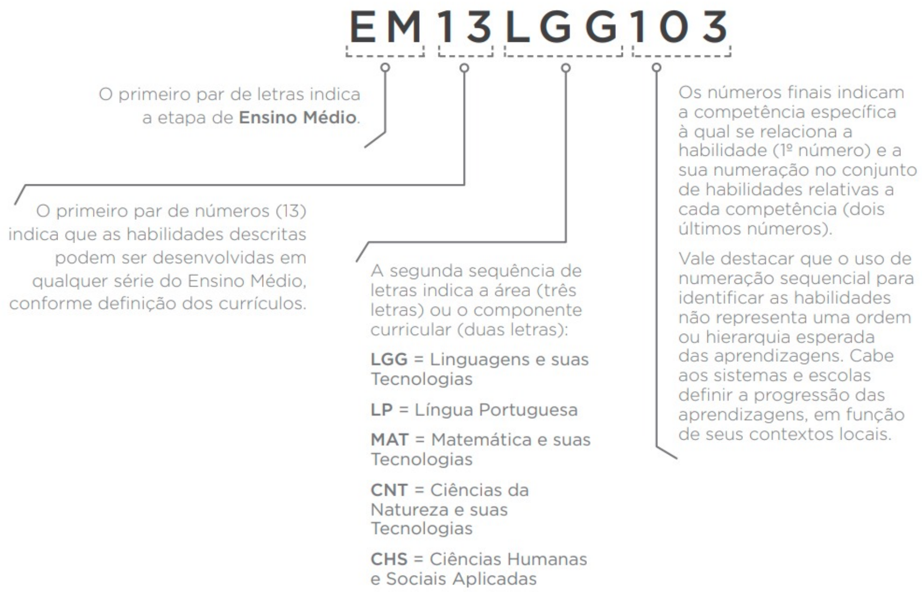
- Reconhecendo que a matemática é uma ciência humana, o resultado das necessidades e preocupações de diferentes culturas em diferentes momentos históricos, e uma ciência viva que ajuda a resolver problemas científicos e tecnológicos, apoia a descoberta e a construção, incluindo seu impacto no mundo, para a sociedade e para o mercado de trabalho;

- Use o conhecimento matemático para entender o mundo e agir, desenvolver o raciocínio lógico, pesquisar o espírito e produzir argumentos convincentes;
- Por meio das mídias digitais, construir processos de ensino com ênfase em resolver problemas do cotidiano.

Embora não exista mais uma disciplina específica, vemos que a mudança de **conteúdo** para **habilidade** propiciou um estudo mais profundo da lógica matemática, por meio de ações e situações problemas práticos.

A imagem a seguir mostra como interpretar uma habilidade através de códigos.

Figura 1.2: Código alfanumérico.



Fonte: BNCC, 2020.

Exemplo 1.2.1. *O código **EF06MA04** significa:*

EF - Ensino Fundamental.
06 - Indica que é uma habilidade do sexto ano.
MA - Indica que a disciplina é de Matemática.
04 - Indica ser a posição dessa habilidade.

Nós próximos capítulos, vamos apresentar alguns conceitos e habilidades da BNCC na lógica matemática.

Capítulo 2

Um pouco de História.

Segundo a BNCC e o novo ensino médio, compreender a História da Matemática faz parte de uma (re)construção do conhecimento alicerçada na investigação e contextualização. assim, neste capítulo mostraremos de forma cronológica, um pouco da história e contribuições na matemática dos seguintes filósofos e matemáticos: Tales, Pitágoras, Platão e Aristóteles, em seguida, apresentaremos um pouco da história dos seguintes filósofos e matemáticos da atualidade: Leibniz e Boole.

2.1. Tales de Mileto

Na primeira fase da filosofia, também intitulada como era Pré-Socrática, Tales de Mileto (vide Figura 2.1), nascido na Grécia por volta de 624 a.C, é apontado como um dos maiores filósofos de seu tempo e além da filosofia, ele apresentou diversas contribuições relevantes na matemática e astronomia.

Figura 2.1: Tales de Mileto.

Fonte: TASINAFO, 2008.

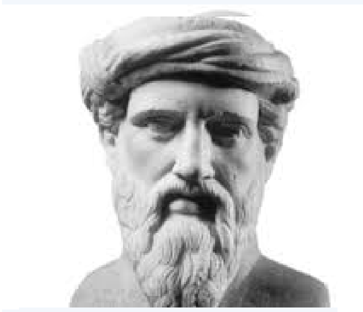
Frazão(2021) destaca que, Tales desempenhou funções políticas e desenvolveu obras em diversas áreas como filosofia, astronomia e geometria, nas quais destacam-se:

- “Demonstração de que ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais”;
- “Demonstração de que todo diâmetro divide um círculo em duas partes iguais;
- “Demonstração de que ao unir-se qualquer ponto de uma circunferência aos extremos de um diâmetro AB obtém-se um triângulo retângulo em C”.

2.2. Pitágoras

Pitágoras (vide Figura 2.2), nasceu na Jônia na Grécia por volta século VI a.C. Ele foi filósofo e matemático criador de diversas obras como na música na qual "descobriu" sons harmônicos, filosofia, na geometria entre outros, porém, ele é mundialmente conhecido pelo "Teorema de Pitágoras", no qual, dado um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual o quadrado da hipotenusa.

Figura 2.2: Pitágoras.



Fonte: MARCELO, 2020.

Segundo Frazão(2021), por se destacar com suas ideias, Pitágoras foi enviado para Mileto, continuando seus estudos com Tales, considerado o maior sábio da época, também viajando muitos países para obter conhecimento de suas culturas e ciência. O retorno para seu país natal, é marcado pelo início da escola pitagórica, conhecida por sua teoria em que o mundo, os elementos e os seres vivos podem ser expressos por números.

Vieira(2018) destaca que, além das diversas contribuições para a matemática, Pitágoras, deixou um legado importante para a filosofia, na qual, se salienta algumas frases.

- "Eduquem as crianças e não será necessário castigar os homens".
- "Escuta e serás sábio. O começo da sabedoria é o silêncio".
- "A razão é imortal, todo o resto é mortal".
- "Todas as coisas são números".
- "Pensem o que quiserem de ti, faz aquilo que te parece justo".
- "Há geometria no som das cordas, há música no espaçamento das esferas".

2.3. Platão

Platão (vide Figura 2.3) é considerado um dos principais filósofos da história. Ele nasceu em Atenas em meados de 428 a.C. Vieira(2018) afirma que, Platão é considerado um dos principais filósofos da história, que aplicava a dialética para desenvolver os seus trabalhos, ou seja, buscava pela descoberta por meio de argumentações. Tal argumentação é exposta em princípios lógicos, hipóteses pré-determinadas como verdadeiras até chegar a uma conclusão.

Figura 2.3: Platão.

Fonte: VIERA, 2018.

O pensamento de Platão inspirou diversos filósofos e matemáticos, ou seja, sua forma de raciocínio é utilizada até os dias atuais. Ele tinha uma forma de pensar que separava o chamado "Mundo das Ideias", ou também chamado de "Mundo sensível".

Segundo Gomes(2020), a *Academia* de Platão, reuniu diversos matemáticos e filósofos, formando um elo entre a matemática pitagórica e a escola de Alexandria de Euclides, com o seguinte lema: **"Que não entre aqui aqueles que ignorem a Geometria"**. O autor destaca que fizeram parte dessa escola:

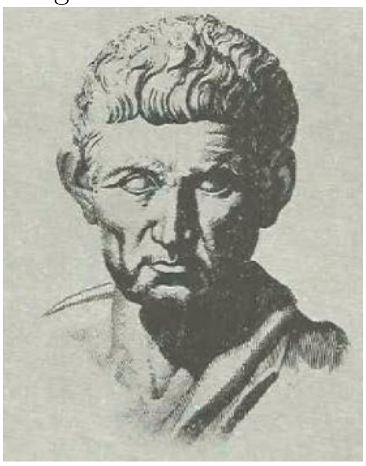
- Teodoro de Cirene: o primeiro a demostrar que $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ é irracional;
- Eudoxo de Cnidos: utilizando a existência números irracionais, reformulou a teoria da proposições;
- Menaecmo: desenvolveu estudos que levou a criação das cônicas (elipse, hipérbole e parábola);
- Aristóteles: considerado um dos principais colaboradores para o desenvolvimento da lógica matemática.

2.4. Aristóteles

Segundo Pessanha(1991), Aristóteles (vide Figura 2.4) viveu entre 384-322 a.C, se destacou por lidar com quase todas as disciplinas que existiam na época, como geometria física, metafísica, botânica, zoologia, astronomia, medicina, psicologia, ética, drama, poesia, retórica, matemática e principalmente lógica. Com sua fama de ser extremamente participativo e por ser o discípulo de Platão, Aristóteles tornou-se o tutor do filho do Rei Filipe II da Macedônia. Ele agora é conhecido como "Alexandre, o Grande".

Voltando para a Grécia, fundou sua própria escola, chamando-a de Liceu. Pessanha(1991) reitera que hoje Aristóteles é tido como pai da lógica, fundador da biologia, organizador da psicologia, professor de política e iniciante à retórica, deixando diversas obras, como o conjunto de obras Organon, oito livros de lições de "Física", "Ética a Nicômaco", "Ética a Eudemo", "Política", entre outros.

Figura 2.4: Aristóteles.



Fonte: PESSANHA, 1991.

De acordo com Carnielli(2019), dentre as inúmeras contribuições para a sociedade, uma das maiores foi a criação do silogismo, onde, segundo o filósofo, era uma ferramenta lógica para expressar um pensamento claro com argumentos confiáveis. Um silogismo é um tipo de argumento simples que consiste em três proposições: as duas primeiras proposições são as premissas e a terceira é a conclusão.

Exemplo 2.4.1. *Observe o exemplo a seguir:*

1. Premissa 1: Todos os homens são mortais. (Premissa verdadeira).

2. Premissa 2: Juliano é homem. (Premissa verdadeira).

3. Conclusão: Juliano é mortal.(Conclusão verdadeira).

Exemplo 2.4.2. *Observe o exemplo a seguir de Janguas(2019):*

1. Premissa 1: Todos os gatos são animais.(Premissa verdadeira).

2. Premissa 2: Todos os pássaros são animais.(Premissa verdadeira).

3. Conclusão: Todos os gatos são pássaros.(Conclusão falsa).

2.5. Gottfried Wilhelm Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz (vide Figura 2.5) nasceu em Leipzig, Alemanha, em 1 de julho de 1646, desde criança ele possuía um amplo interesse na leitura, nessa época começou a discordar das filosofias de Aristóteles então originou suas próprias idéias. Em 1661 (aos 14 anos), ingressou na Universidade de Leipzig onde estudou Filosofia graduando-se em 1663.

O autor Marconatto(2008) afirma que, Leibniz produziu diversos trabalhos, porém, não os expôs devido seu pensamento filosófico sistemático.

Figura 2.5: Leibniz.

Fonte: Biblioteca virtual UNICAMP.

Segundo Cantão(2020), dentre suas principais contribuições para a matemática estão:

- O desenvolvimento do sistema binário de aritmética[3];
- Reduzir o raciocínio a uma álgebra do pensamento;
- Teorias voltadas para o cálculo diferencial e integral.

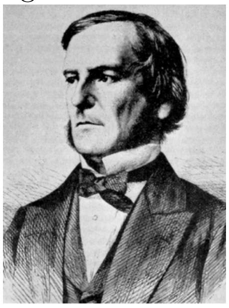
2.6. George Boole

Conforme Janguas(2019), George Boole (vide Figura 2.6) nasceu em 2 de novembro de 1815 na Inglaterra, em plena revolução inglesa. Filho de família humilde, George teve que frequentar a escola primária comum, entretanto, recebia em casa um ensino informal de seu pai, no qual teve contato com óptica, astronomia. Ele obteve ensino prático ao auxiliar seu genitor ao consertar objetos como câmeras, microscópios e etc.

Durante o conturbado período da revolução inglesa (1760 - 1840), o comércio de seu pai foi forçado a encerrar as atividades, logo, aos 16 anos, Boole se sente "obrigado" a ajudar nas despesas da casa, assim, ele conseguiu seu primeiro emprego como professor. Entretanto, somente entre 1841 - 1845, que ele entrou em uma fase produtiva, onde escreveu diversos artigos relacionando a Análise matemática, ao Cálculo e à Álgebra.

[3]Conforme Janguas(2019), Boole utilizou desse sistema binário para a elaboração da álgebra booleana.

Figura 2.6: Boole.



Fonte: EL PAÍS, 2015.

Segundo Janguas(2019), embora a lógica tradicional (lógica de Aristóteles) vigorava fortemente no século XIX, Boole defendia que ela era uma ciência séria e em ascensão. Em 1847 escreveu a obra *The Mathematical Analysis of Logic: Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning.* Nessa obra, definiu as teorias matemáticas da lógica, combinando a lógica "formal" com uma nova álgebra atualmente denominada "Álgebra Booleana".

No próximo capítulo abordaremos a lógica proposicional visando a construção de argumento (silogismo de Aristóteles) e suas análises por meio de tabela verdade.

Capítulo

3

LÓGICA PROPOSICIONAL

Neste capítulo fixaremos algumas notações e introduziremos alguns conceitos básicos da lógica proposicional matemática, fazendo uso dos conectivos lógicos e tabelas verdade.

3.1. Proposições e tabela verdade

O que é lógica? No dicionário Aurélio: "lógica é a parte da filosofia que trata das formas do pensamento em geral (dedução, indução, hipótese, inferência etc.) e das operações intelectuais que visam à determinação do que é verdadeiro ou não".

Definição 3.1.1. Uma proposição é uma declaração **afirmativa** que expressa um pensamento completo que só pode receber os seguinte valores lógicos **verdadeiro** ou **falso**.

Designaremos as proposições por letras minúsculas: p, q, r, etc.

Exemplo 3.1.2. *Observe as proposições a seguir:*
p : *Juliano é rico.*
q : *3+3=7*
$r : \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$
s : *A terra é plana.*

Observação 3.1.3. Sentenças imperativas, interrogativas e exclamativas não são proposições, pois, não é possível atribuir o valor lógico **verdadeiro** ou **falso**.

Exemplo 3.1.4. *Observe as sentenças a seguir:*
p : *Você estudou?*
$t : \sqrt{3} + \pi$

A lógica proposicional seguem dois princípios:
Princípio da Não Contradição: nenhuma proposição é verdadeira e falsa simultaneamente.
Princípio do Terceiro Excluído: a proposição só pode ser verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira opção.

Definição 3.1.5. Dadas duas proposições p e q, podemos uni-las através de um conectivo lógico formando uma nova proposição.

Os principais conectivos lógicos são:

- "negação" ($\sim$);
- Conjunção "e" ($\wedge$);
- Disjunção "ou" ($\vee$);
- Condicional "Se...então" ($\rightarrow$);
- Bicondicional "Se, e somente se" ($\leftrightarrow$).

3.1.1 Negação

O conectivo **negação** tem a função de inverter o valor lógico de uma proposição.
Notação: $\sim p$ (lê-se: "não p").

Exemplo 3.1.6. *Observe as proposições a seguir:*
$p : 3 + 3 = 6$
$\sim p : 3 + 3 \neq 6$
q : *Juliano é rico.*
$\sim q$:*Juliano **não** é rico.*

3.1.2 Conjunção

O conectivo **conjunção** tem a função de unir duas proposições obtendo uma terceira.
Notação: $p \wedge q$ (lê-se: "p e q").

Exemplo 3.1.7. *Observe as proposições:*
p : *Sabrina é estudante.*
q : *Juliano é professor.*
$p \wedge q$: *Sabrina é estudante **e** Juliano é professor.*
$q \wedge p$: *Juliano é professor **e** Sabrina é estudante.*

Observação 3.1.8. As proposições $p \wedge q$ é equivalente a proposição $q \wedge p$, logo, $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

Exemplo 3.1.9. *Observe as proposições a seguir:*
$p : 2 < 3$
$q : 3 > 5$
$p \wedge q : 2 < 3$ ***e*** $3 > 5$.

No exemplo anterior, vemos que $3 > 5$ é uma afirmação falsa, porém, nesse momento, não estamos julgando o valor lógico das proposições, mas sim, expondo o funcionamento dos conectivos.

3.1.3 Disjunção

O conectivo **Disjunção** tem a função de unir duas proposições obtendo uma terceira.
Notação: $p \vee q$ (lê-se: "p ou q").

Exemplo 3.1.10. *Observe as proposições a seguir:*
p : *Sabrina é estudante.*
q : *Juliano é professor.*
$p \vee q$: *Sabrina é estudante* ***ou*** *Juliano é professor.*
$q \vee p$: *Juliano é professor* ***ou*** *Sabrina é estudante.*

Observação 3.1.11. As proposições $p \vee q$ é equivalente a proposição $q \vee p$, logo, $p \vee q \equiv q \vee p$.

Exemplo 3.1.12. *Observe as proposições a seguir:*
$p : 2 + 5 = 7$
$q : 2 - 5 > 0$
$p \vee q : 2 + 5 = 7$ ***ou*** $2 - 5 > 0$.

3.1.4 Condicional

O conectivo **Condicional** tem a função de unir duas proposições obtendo uma terceira.
Notação: $p \to q$ (lê-se: "se p, então q").

Exemplo 3.1.13. *Observe as proposições a seguir:*
p : *Carlos estuda.*
q : *Carlos passará de ano.*
$p \to q$: ***Se*** *Carlos estuda,* ***então*** *Carlos passará de ano.*
$\sim p \to \sim q$: ***Se*** *Carlos* ***não*** *estuda,* ***então*** *Carlos* ***não*** *passará de ano.*

Exemplo 3.1.14. *Observe as proposições a seguir:*
$p : 5 + 5 = 25.$
q : *A terra é plana.*
$p \to q$: ***Se*** *5+5=1,* ***então*** *A terra é plana.*

Observação 3.1.15. A negação da condicional é chamado de contra-positiva, ou seja, $\sim (p \to q) \equiv \sim q \to \sim p$.

3.1.5 Bicondicional

O conectivo **Bicondicional** tem a função de unir duas proposições obtendo uma terceira.
Notação: $p \leftrightarrow q$ (lê-se "p se, e somente se, q").

Exemplo 3.1.16. *Observe as proposições a seguir:*
p : *n é um número ímpar.*
q : *n é divisível por 2.*
$p \leftrightarrow q$: *n é um número ímpar* ***se, e somente se*** *n é divisível por 2.*
r : *A terra é plana.*
s : $\sqrt{13}$ *é um número racional.*
$r \leftrightarrow s$: *A terra é plana* ***se, e somente se*** $\sqrt{13}$ *é um número racional.*

3.1.6 Tabela verdade

A tabela verdade é um mecanismo prático que consiste em organizar os valores lógicos da proposições por meio de linhas e colunas. Para uma única proposição, temos apenas os valores lógicos verdadeiro (V) e falso (F).

Tabela 3.1: Tabela verdade de uma única proposição.

p
V
F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que dadas duas proposições p e q, ambas podem ser verdadeiras ou falsas, assim, obtemos as seguintes combinações:

Tabela 3.2: Tabela verdade de duas proposições.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

O número de linhas está diretamente ligado ao número de proposições. Nas tabelas 3.1 e 3.2 temos 2 e 4 linhas respectivamente, isso ocorre pois, cada proposição assume dois valores lógicos, assim, o número de linhas é dado por 2^n, onde n é o número de proposições.

Dadas 3 proposições, p, q e r, teremos $2^3 = 8$ linhas.

Tabela 3.3: Tabela verdade de três proposições.

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma vez que p possuí dois valores lógicos, $\sim p$ também possuirá os mesmos valores lógicos, porém, invertidos.

Tabela 3.4: Tabela verdade de negação de uma proposição.

p	$\sim p$
V	F
F	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma análoga, temos para duas proposições p e q.

Tabela 3.5: Tabela verdade de negação de duas proposições.

p	q	$\sim p$	$\sim q$
V	V	F	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Vamos analisar a tabela verdade dos conectivos lógicos expostos acima.

Tabela verdade da conjunção

Dadas duas proposições p e q, sua conjunção $p \wedge q$ é verdade sempre que p e q forem verdadeiras, do contrário, será falsa.

Tabela 3.6: Tabela verdade da conjunção.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela verdade da disjunção

Dadas duas proposições p e q, sua disjunção $p \vee q$ é verdade sempre que p ou q forem verdadeiras, do contrário, será falsa.

Tabela 3.7: Tabela verdade da disjunção.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela verdade da condicional

A condicional $p \rightarrow q$ será falsa, sempre que p for verdadeira e q for falsa.

Tabela 3.8: Tabela verdade da condicional.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Devemos nos atentar que $(p \rightarrow q) \neq (q \rightarrow p)$. Observe a tabela a seguir:

Tabela 3.9: Tabela verdade da condicional.

p	q	$p \to q$	$q \to p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela verdade da bicondicional.

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ será verdadeira, sempre que p e q forem verdadeiras ou p e q forem falsas.

Tabela 3.10: Tabela verdade da bicondicional.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra maneira de apresentar a tabela verdade da bicondicional é analisar a equivalência:

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p). \tag{3.1}$$

Tabela 3.11: Tabela verdade da bicondicional.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que as Tabelas 3.10 e 3.11 comprovam a equivalência (3.1).

Definição 3.1.17. Chamamos Tautologia a proposição cujo valor lógico sempre seja verdadeiro.

Tabela 3.12: Tabela verdade da tautologia.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 3.12 exibe um caso onde temos uma tautologia, pois, $p \vee \sim p$ sempre é verdadeiro.

Definição 3.1.18. Chamamos de Contradição a proposição cujo valor lógico sempre seja falso.

Tabela 3.13: Tabela verdade da contradição.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Tabela 3.13 exibe um caso onde temos uma contradição, pois, $p \wedge \sim p$ sempre é falso.

Definição 3.1.19. Chamamos de Contingente uma proposição que não seja nem uma tautologia e nem uma contradição.

Exemplo 3.1.20. *Determine se a proposição $(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee \sim r)$ é uma contradição, contingente ou tautologia.*

Solução: Observe que temos três proposições p, q e r, assim, temos $2^3 = 8$ linhas.

Tabela 3.14: Exemplo 3.1.20

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge q$	$r \vee \sim r$	$(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee \sim r)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	F	V	F
F	V	V	F	F	F	V	F
F	V	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	F	V	V	F	V	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como $(p \wedge \sim q) \wedge (r \vee \sim r)$ possui linhas com valores lógicos verdadeiros e falsos, então, concluímos que ela é uma contingência.

Exemplo 3.1.21. *Determine se a proposição* $(p \wedge \sim q) \vee (r \vee \sim r)$ *é uma contradição, contingente ou tautologia.*

Solução: Observe que temos três proposições p, q e r, assim, temos $2^3 = 8$ linhas.

Tabela 3.15: Exemplo 3.1.21

p	q	r	$\sim q$	$\sim r$	$p \wedge q$	$r \vee \sim r$	$(p \wedge \sim q) \vee (r \vee \sim r)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como $(p \wedge \sim q) \vee (r \vee \sim r)$ possui apenas o valor lógico verdadeiro, concluímos que ela é uma tautologia.

Após análise sistemática de todos os conectivos lógicos e tabelas verdade, e absorção dos conceitos da lógica proposicional, se faz necessário apresentar situações do cotidiano onde elas são aplicadas, visando uma maior compreensão dos educandos. Assim, no próximo capítulo será exposto as aplicações da lógica matemática utilizando a álgebra booleana.

Capítulo 4

APLICAÇÕES DA LÓGICA MATEMÁTICA

Neste capítulo iremos apresentar algumas aplicações da lógica matemática na computação e nas engenharias, com o objetivo de incentivar e ampliar a visão dos alunos referente a lógica matemática. Inicialmente será apresentado os números binários, em seguida sua notação simbólica e uma breve introdução à álgebra booleana.

4.1. Números Binários

Desde o início dos tempos, o homem sente a necessidade de se comunicar, de se expressar e de contar. Para isso, nossos ancestrais utilizaram de imagens nas cavernas denominadas pinturas rupestres. Outros mecanismos de contagem eram:

- Marcações em ossos;
- Nós em cordas;
- Marcas em madeiras;
- Lascas de pedras;
- Pedras;
- Gravetos.

Com o passar do tempo, houve a necessidade de otimizar esse processo de contagem para representar quantidades cada vez maiores.

Entre os principais sistemas de numeração está o egípcio, romano e o indo-arábico.

Os egípcios criaram um dos primeiros sistemas de numerações que consistia em 7 símbolos que representavam determinados valores, conforme Figura 4.1. Cada um desses símbolos poderiam ser utilizados no máximo 9 vezes.

Figura 4.1: Números egípcios.

Fonte: DANTE, 2018.

Na Roma antiga, também utilizavam 7 símbolos conforme Imagem a seguir.

Figura 4.2: Números romanos.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Fonte: GIOVANNI, 2018.

Para representar determinados números, seguindo as seguintes regras:

- Os símbolos I, X, C e M podem ser repetidos até três vezes;
- O símbolo de maior valor colocado a direita de um de menor valor representa uma subtração;
- O símbolo de maior valor colocado a esquerda de um de menor valor representa uma soma;
- I só pode ser colocado antes de V e X;
- X só pode ser colocado antes de L e C;
- C só pode ser colocado antes de D e M.

Exemplo 4.1.1. *Representar o número 2021 em números romanos.*

Solução: $2021 = 2000 + 21 = MM + XXI = MMXXI$.

O sistema numérico usual é o indo arábico, que utilizam números de 0 até 9, organizando os valores através de ordens de classes, conforme Imagem 4.3.

Figura 4.3: Ordens de classes.

Fonte: DANTE, 2018.

Esse sistema numérico está na base 10 conforme a equação a seguir:

$$x = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 10^0, x \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

Notação: x_{10} representa um número na base 10.

Exemplo 4.1.2. *Escrever o número 1237 na base 10.*

Solução:
$1237 = 1000 + 200 + 30 + 7$
$1237 = 1.10^3 + 2.10^2 + 3.10^1 + 7.10^0$

Exemplo 4.1.3. *Escrever o número 1434321 na base 10.*

Solução:
$1434321 = 1000000 + 400000 + 30000 + 4000 + 300 + 20 + 1$
$1434321 = 1.1000000 + 4.100000 + 3.10000 + 4.1000 + 3.100 + 2.10 + 1$
$1434321 = 1.10^6 + 4.10^5 + 3.10^4 + 4.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 1.10^0$

Definição 4.1.4.

Dizemos que um número inteiro y está na base 2 se ele for decomposto por:

$$y = b_m 2^m + ... + b_2 b2 + +b_1 2^1 + b_0 2^0, y \in \mathbb{Z} \text{ e } m \in \mathbb{N}.$$

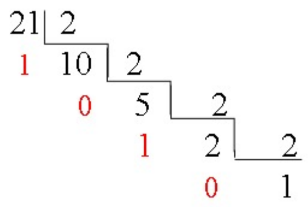
Os números binários, são números escritos na base 2, ou seja, cada digito pode assumir apenas os valores 0 ou 1, assim, cada $b_i, i \in \mathbb{N}$ só pode ser 0 ou 1.

Notação: y_2 representa um número na base 2.

Exemplo 4.1.5. *Converter* 21_{10} *para base 2.*

Solução: Para converter 21 para base 2, devemos fazer algumas divisões conforme imagem a seguir:

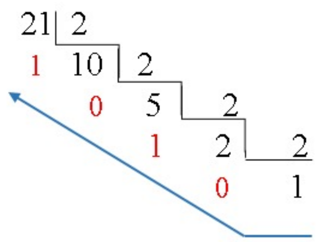
Figura 4.4: Converter 21_{10} para binário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O resultado desta conversão para números binários será a última divisão seguida dos valores dos restos (de baixo para cima), conforme imagem a seguir.

Figura 4.5: Converter 21_{10} para binário.



Fonte: Elaborado pelo autor.

$21_{10} = 10101_2$.

Podemos converter de números binários para números decimais, para isso, basta usar a definição 4.1.4.

Exemplo 4.1.6. *Converter* 10011_2 *para a base 10.*

Solução:

$$\begin{aligned}
10011 &= 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 \\
10011 &= 1.16 + 0.8 + 0.4 + 1.2 + 1.1 \\
10011 &= 16 + 0 + 0 + 2 + 1 \\
10011 &= 19
\end{aligned}$$

Assim: $10011_2 = 19_{10}$.

Podemos tirar a prova real, para isso, basta dividir 19 por 2 e analisar os resultados conforme exemplo anterior.

Podemos utilizar as propriedades da soma e da subtração nos números binários através das regras a seguir:

- $0+0=0$;
- $0+1=1$;
- $1+0=1$;
- $1+1=0$ e "vai" 1 para a ordem superior;
- $1+1+1=1$ e "vai" 1 para a ordem superior;

Exemplo 4.1.7. *Qual o valor da soma:* 10011_2 *com* 11101_2*?*

Solução:
Primeiramente, vamos montar a soma.

$$\begin{array}{cccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Usando as regras dos números binários temos:

$$\begin{array}{cccccc} \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Assim, a soma de 10011_2 com 11101_2 é 110000_2.
Prova real

$$10011 = 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 16 + 2 + 1 = 19_{10}. \tag{4.1}$$

e

$$11101 = 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29_{10}. \tag{4.2}$$

Somando as igualdades 4.1 e 4.2 temos 48_{10}.
Por outro lado:
$110000 = 1.2^5 + 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 32 + 16 = 48_{10}$.
Portanto, $10011_2 + 11101_2 = 110000_2$.

4.2. Álgebra Booleana

O sistema binário utiliza apenas dois valores 0 e 1, por isso, ele é perfeito para as relações lógicas que possuam apenas duas condições, entrada ou saída, verdadeiro ou falso. Conforme Mendes(2015), esse sistema surgiu por volta de 1854 quando George Boole, publicou a álgebra booleana, com apenas três operadores **NOT (não)**, **AND (e)** e **OR (ou)** na utilização de circuito lógicos. Essas representações podem ser por meio de tabelas verdade, algébrica ou simbólica.

Observe as relações a seguir:

Tabela 4.1: Designações lógicas.

Lógico 0	Lógico 1
Falso	Verdadeiro
Não	Sim
Aberto	Fechado
Desligado	Ligado
Baixo	Alto

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para compreender seu funcionamento precisamos conhecer algumas notações:

- "A" e "B" são entradas tabela 4.1;
- "S" será a saída.

Operador NOT

- Também denominado como inversão porque resulta no complemento, vide Tabela 4.1;
- O operador NOT será representado por uma barra $\overline{A}$.

Seja A uma entrada, logo, seus possíveis valores lógicos são 0 ou 1. Para negar esse operador, devemos utilizar $\overline{A}$.

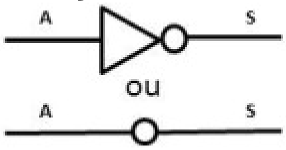
Tabela 4.2: Operador NOT.

A	$S = \overline{A}$
0	1
1	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

A representação simbólica do operador NOT é dado por uma bolinha aberta, conforme Imagem a seguir:

Figura 4.6: Representação simbólica do operador NOT.



Fonte: FARIAS, 2013.

Observação 4.2.1. É extremamente importante conhecer as representações algébricas, simbólica e da tabela verdade de todos os operadores lógicos, pois em cada um deles haverá uma particularidade.

Operador AND

- A saída será 1 sempre que ambas entradas forem 1;
- Sua operação consiste na multiplicação convencional de 0 e 1;
- A expressão saída $S = A.B$ deve ser lida S é igual a A e B.

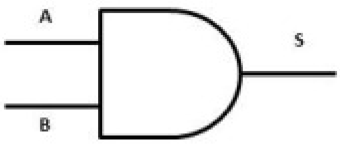
Tabela 4.3: Operador AND.

A	B	$S = A.B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, temos a representação simbólica do operador AND.

Figura 4.7: Representação simbólica do operador AND.



Fonte: FARIAS, 2013.

Operador OR

- Gera a saída 1 sempre que uma das entradas for 1;
- Sua operação consiste na soma convencional de 0 e 1;
- A expressão saída $S = A + B$ deve ser lida como S é igual a A ou B.

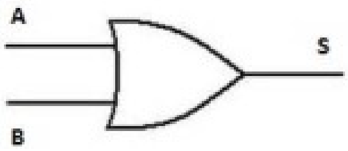
Tabela 4.4: Operador OR.

A	B	$S = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir, temos a representação simbólica do operador OR.

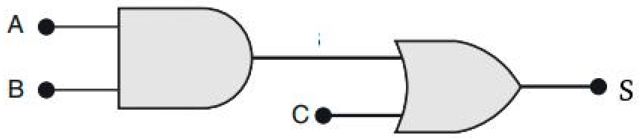
Figura 4.8: Representação simbólica do operador OR.



Fonte: FARIAS, 2013.

Exemplo 4.2.2. *Dado o circuito a seguir, determine utilizando a álgebra boolena sua expressão lógica e em seguida, represente sua tabela verdade.*

Figura 4.9: Exemplo AND e OR.

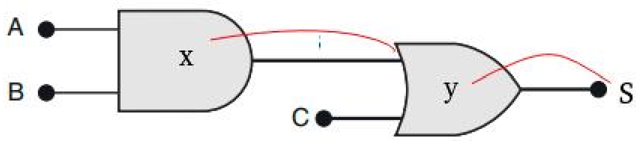


Fonte: WIDMER, 2011.

Solução:

Analisando o circuito vemos duas ligações lógicas, AND ($x = A.B$) e OR ($y = x + C$).

Figura 4.10: Exemplo AND e OR.



Fonte: WIDMER, 2011 - Adaptado.

Assim:
$S = y$
$S = C + x$

$S = C + A.B$

Logo, a expressão lógica é dada por: $S = C + A.B$.

Para a construção da Tabela Verdade devemos notar que existem três entradas A, B e C, logo, temos $2^3 = 8$ linhas.

Tabela 4.5: Tabela verdade do exemplo 4.2.1

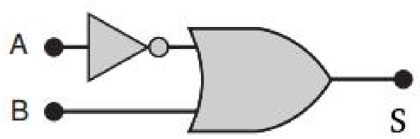
A	B	C	x=A.B	y=x+C	S
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a tabela 4.1, vemos que para o circuito lógico exposto na tabela 4.5 estará ligado se C estar ligado (1) ou A e B estarem ligados simultaneamente.

Exemplo 4.2.3. *Determine a expressão lógica do circuito a seguir e faça sua tabela verdade.*

Figura 4.11: Exemplo NOT e OR.



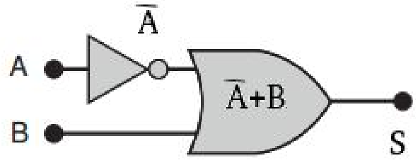
Fonte: WIDMER, 2011.

Observe que:

- Temos duas entradas A e B;
- Que existem uma NOT em A, ou seja, temos um $\overline{A}$;
- Temos uma OR, entre $\overline{A}$ e B;

Assim, reescrevendo nosso circuito temos:

Figura 4.12: Exemplo NOT e OR.



Fonte: WIDMER, 2011 - Adaptado.

$S = \overline{A} + B$

Para a construção da tabela verdade, devemos observar que existem apenas duas entradas A e B, logo teremos $2^2 = 4$ linhas.

Tabela 4.6: Tabela verdade do exemplo 4.2.2

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} + B$	S
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com a Tabela 4.1, concluímos que o circuito lógico exposto na tabela 4.6 estará **desligado** sempre que A estiver ligado e B estiver desligado. Do contrário, o circuito estará ligado.

Exemplo 4.2.4. *Crie um circuito de 4 (quatro) entradas, na qual, cada uma dessas entradas sejam números inteiros. Determine quando a soma desses números será par ou ímpar, no qual, se a saída for "0" então representa um número par, se for "1" representa um número ímpar.*

Solução:

Primeiramente devemos analisar o circuito e observar que são 4 entradas A, B, C e D. S representará o resultado das operações lógicas tal que $S = A + B + C + D$. Se $S = 0$ representa um número par e $S = 1$ representa um número ímpar.

Como temos 4 entradas, então teremos $2^4 = 16$ linhas.

Para facilitar a compreensão da tabela, deixaremos os resultados pares e ímpares de azul e vermelho respectivamente.

Tabela 4.7: Tabela verdade do exemplo 4.2.3

Linha	A	B	C	D	S
1ª	0	0	0	0	0
2ª	0	0	0	1	1
3ª	0	0	1	0	1
4ª	0	0	1	1	0
5ª	0	1	0	0	1
6ª	0	1	0	1	0
7ª	0	1	1	0	0
8ª	0	1	1	1	1
9ª	1	0	0	0	1
10ª	1	0	0	1	0
11ª	1	0	1	0	0
12ª	1	0	1	1	1
13ª	1	1	0	0	0
14ª	1	1	0	1	1
15ª	1	1	1	0	1
16ª	1	1	1	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando a tabela

Um número é dito par se ele for da forma $x = 2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Um número é dito ímpar se ele for da forma $x = 2\alpha + 1$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Como temos 4 entradas, então podemos ter as seguintes configurações:

i. 4 entradas pares;

ii. 3 entradas pares e uma ímpar;

iii. 2 entradas pares e 2 entradas ímpares;

iv. 1 entrada par e 3 entradas ímpares;

v. 4 entradas ímpares.

Análise *i*:

Sejam x, y, z e w números inteiros pares, logo $x = 2k_1$, $y = 2k_2$, $z = 2k_3$ e $w = 2k_4$ para $k_i \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} S &= x + y + z + w \\ S &= 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_4 \\ S &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ S &= 2l \end{aligned}$$

onde $l = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$.

Assim, concluímos que S é par. Esse caso se aplica apenas a linha 1.

Análise *ii*:

Sejam x, y, z números inteiros pares e w ímpar, logo $x = 2k_1$, $y = 2k_2$, $z = 2k_3$ e $w = 2k_4 + 1$ para $k_i \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} S &= x + y + z + w \\ S &= 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 2k_4 + 1 \\ S &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 1 \\ S &= 2l + 1 \end{aligned}$$

onde $l = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$.

Assim, concluímos que S é ímpar. Esse caso se aplica nas linhas 2, 3, 5 e 9.

Análise *iii*:

Sejam x e y números inteiros pares e z e w números inteiros ímpares, logo $x = 2k_1$, $y = 2k_2$, $z = 2k_3 + 1$ e $w = 2k_4 + 1$ para $k_i \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} S &= x + y + z + w \\ S &= 2k_1 + 2k_2 + 2k_3 + 1 + 2k_4 + 1 \\ S &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 2 \\ S &= 2l + 2 \\ S &= 2(l + 1) \end{aligned}$$

onde $l = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$.

Assim, concluímos que S é par. Esse caso se aplica apenas nas linhas 4, 6, 7, 10, 11 e 13.

Análise *iv*:

Sejam x número inteiro par, y, z e w números inteiros ímpares, logo $x = 2k_1$, $y = 2k_2 + 1$, $z = 2k_3 + 1$ e $w = 2k_4 + 1 + 1$ para $k_i \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned} S &= x + y + z + w \\ S &= 2k_1 + 2k_2 + 1 + 2k_3 + 1 + 2k_4 + 1 \\ S &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 2 + 1 \\ S &= 2l + 2 + 1 \\ S &= 2(l + 1) + 1 \end{aligned}$$

onde $l = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$.

Assim, concluímos que S é ímpar. Esse caso se aplica apenas nas linhas 8, 12, 14 e 15.

Análise *v*:

Sejam x, y, z e w números inteiros ímpares, logo $x = 2k_1+1$, $y = 2k_2+1$, $z = 2k_3+1$ e $w = 2k_4 + 1 + 1$ para $k_i \in \mathbb{Z}$ e $i = 1, 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
S &= x + y + z + w \\
S &= 2k_1 + 1 + 2k_2 + 1 + 2k_3 + 1 + 2k_4 + 1 \\
S &= 2(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) + 2 + 2 \\
S &= 2l + 2 + 2 \\
S &= 2(l + 1 + 1) \\
S &= 2(l + 2)
\end{aligned}$$

onde $l = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$.

Assim, concluímos que S é par. Esse caso se aplica apenas na linha 16.

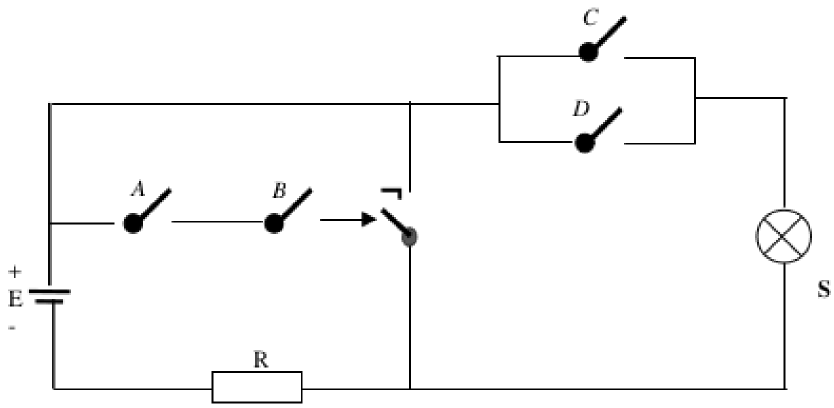
A álgebra booleana possui diversas aplicações práticas no cotidiano, principalmente nas engenharias. Observe o exemplo a seguir:

Exemplo 4.2.5. *Construa o circuito de chaveamento que simule a equação:*

$$S = \{[(\overline{A.B})].[(C + D)]\}$$

onde A, B, C e D são sensores e S uma lâmpada conforme imagem a abaixo.

Figura 4.13: Circuito de chaveamento.



Fonte: ABE, 2001.

Solução:

Observe que temos 4 sensores A, B, C e D, logo, teremos 2^4 linhas em nossa tabela verdade. Vamos considerar 1 como ligado e 0 como desligado.

Tabela 4.8: Tabela verdade do exemplo 4.2.5

	A	B	C	D	A.B	$(\overline{A.B})$	$C+D$	S
1	0	0	0	0	0	1	0	0
2	0	0	0	1	0	1	1	1
3	0	0	1	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	0	1	1	1
5	0	1	0	0	0	1	0	0
6	0	1	0	1	0	1	1	1
7	0	1	1	0	0	1	1	1
8	0	1	1	1	0	1	1	1
9	1	0	0	0	0	1	0	0
10	1	0	0	1	0	1	1	1
11	1	0	1	0	0	1	1	1
12	1	0	1	1	0	1	1	1
13	1	1	0	0	1	0	0	0
14	1	1	0	1	1	0	1	0
15	1	1	1	0	1	0	1	0
16	1	1	1	1	1	0	1	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim, concluímos que a lâmpada S do circuito só será ligada quando acontecer a seguinte situação: um dos sensores (A ou B) estiver desligado (0) **e** quando pelo menos um dos sensores C e D estiver ligado (1), lembrando, que C e D podem estar ligados simultaneamente.

Observação 4.2.6. O objetivo dessa situação problema foi expor uma aplicação da álgebra boolena na engenharia, ou seja, não temos interesse em analisar a resistência (R), a fonte de tensão (E) e se os sensores estão em séries ou paralelos.

A seguir, vamos expor aplicações da lógica matemática que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

Capítulo 5

ATIVIDADES PROPOSTAS PARA SALA DE AULA

Nesse capítulo apresentaremos aplicações da lógica matemática que podem ser utilizadas em sala de aula por meio de situações problemas, fluxograma e da programação utilizando o VisuAlg.

5.1. Verdade ou Mentira?

Na BNCC, a resolução de problemas está diretamente ligada com o ensino da matemática, essa habilidade está indicada a partir de **EF06MA03**: "Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.". Conhecendo tal habilidade, vemos a importância de expor métodos utilizando a lógica matemática para resolver problemas.

A seguir veremos dois exercícios de lógica matemática:

Exemplo 5.1.1. *(Canal Folha Dirigida) Sou pai de Ana ou sou pai de Osmar. Sou pai de Nely ou não sou pai de Ana. Sou pai de Cláudia ou não sou pai de Osmar. Ora, não sou pai de Claúdia, assim:*

(a) Não sou pai de Nely e sou pai de Ana.

(b) Sou pai de Nely e pai de Ana.

(c) Não sou pai de Cláudia e não sou pai de Nely.

(d) Sou pai de Osmar e pai de Nely.

(e) Sou pai de Osmar e não sou pai de Cláudia.

Solução:

Inicialmente devemos observar os conectivos lógicos **ou** ($\vee$) e a **negação** ($\sim$), em seguida, vamos supor verdadeiras todas as proposições do enunciado.

Vamos definir as proposições como:

- p: "Pai de Ana";
- q: "Pai de Osmar";

- r: "Pai de Cláudia";
- s: "Pai de Nely".

Logo, nosso enunciado fica:
$p \vee q$, $s \vee \sim p$, $r \vee \sim q$, $\sim r$.

Tabela 5.1: Exemplo 5.1.1- parte I.

p	q	r	s	$p \vee q$	$s \vee \sim p$	$r \vee \sim q$	$\sim r$
				V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como $\sim r$ é verdadeiro, então r é falso.

Tabela 5.2: Exemplo 5.1.1- parte II.

p	q	r	s	$p \vee q$	$s \vee \sim p$	$r \vee \sim q$	$\sim r$
		F		V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para $r \vee \sim q$ ser verdadeiro sabendo que r é falso, devemos ter que $\sim q$ seja verdadeiro. Ora, como $\sim q$ é verdadeiro, podemos afirmar que q é falso.

Tabela 5.3: Exemplo 5.1.1- parte III.

p	q	r	s	$p \vee q$	$s \vee \sim p$	$r \vee \sim q$	$\sim r$
	F	F		V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sabendo que q é falso, para $p \vee q$ ser verdadeiro, p deve ser verdadeiro.

Tabela 5.4: Exemplo 5.1.1- parte IV.

p	q	r	s	$p \vee q$	$s \vee \sim p$	$r \vee \sim q$	$\sim r$
V	F	F		V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como p é verdadeiro, então $\sim p$ é falso, logo, para $s \vee \sim p$ ser verdadeiro, s é verdadeiro.

Tabela 5.5: Exemplo 5.1.1- parte V.

p	q	r	s	$p \vee q$	$s \vee \sim p$	$r \vee \sim q$	$\sim r$
V	F	F	V	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ora, da tabela 6.5, vemos que p e s são verdadeiras, assim:

- p: "Pai de Ana" **VERDADEIRO**.
- q: "Pai de Osmar" **FALSO**.
- r: "Pai de Cláudia" **FALSO**.
- s: "Pai de Nely" **VERDADEIRO**.

Logo, concluímos que Pai de Ana e Pai de Nely são verdadeiros, alternativa *b*.

Exemplo 5.1.2. *(IDAF-AC 2020) Como ou durmo. Bebo ou não como. Jogo ou não durmo. Ora, não jogo. Portanto:*

(a) Não bebo e como.

(b) Durmo e bebo.

(c) Como e bebo.

(d) Durmo e não bebo.

(e) Não jogo e não bebo.

Solução:

Inicialmente devemos observar os conectivos lógicos **ou** ($\vee$) e a **negação** ($\sim$), em seguida, vamos considerar verdadeiro todas as proposições do enunciado.

Vamos definir as proposições como:

- p: "Bebo";
- q: "Como";

- r: “Durmo”;
- s: “Jogo”.

Logo, do enunciado temos:
$q \vee r$, $p \vee \sim q$, $s \vee \sim r$ e $\sim s$.

Tabela 5.6: Exemplo 5.1.2- parte I.

p	q	r	s	$q \vee r$	$p \vee \sim q$	$s \vee \sim r$	$\sim s$
				V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Note que $\sim s$ é verdadeiro, assim, podemos afirmar que s é falso.

Tabela 5.7: Exemplo 5.1.2- parte II.

p	q	r	s	$q \vee r$	$p \vee \sim q$	$s \vee \sim r$	$\sim s$
			F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sabendo que s é falso, para $s \vee \sim r$ ser verdadeiro, $\sim r$ deve ser verdadeiro. Logo, concluímos que r é falso.

Tabela 5.8: Exemplo 5.1.2- parte III.

p	q	r	s	$q \vee r$	$p \vee \sim q$	$s \vee \sim r$	$\sim s$
		F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Sabendo que r é falso, para $q \vee r$ ser verdadeiro, q deve ser verdadeiro.

Tabela 5.9: Exemplo 5.1.2- parte IV.

p	q	r	s	$q \vee r$	$p\vee \sim q$	$s\vee \sim r$	$\sim s$
	V	F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como q é verdadeiro, então, $\sim q$ é falso, assim, para $p\vee \sim q$ ser verdadeiro, p deve ser verdadeiro.

Tabela 5.10: Exemplo 5.1.2- parte V.

p	q	r	s	$q \vee r$	$p\vee \sim q$	$s\vee \sim r$	$\sim s$
V	V	F	F	V	V	V	V

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ora, da tabela 6.10, vemos que p e q são verdadeiras, assim:

- p: "Bebo" **VERDADEIRO**.
- q: "Como" **VERDADEIRO**.
- r: "Durmo" **FALSO**.
- s: "Jogo" **FALSO**.

Logo, concluímos que Bebo e Como são verdadeiros, alternativa *c*.

Embora os exemplos 5.1.1 e 5.1.2 sejam semelhantes, seus resultados foram obtidos pela utilização da tabela verdade, assim, compreender os conectivos lógicos e suas aplicações resolvem diversos problemas.

5.2. Algoritmos e o Fluxograma

Na BNCC: "Fluxograma para determinar a paridade de um número natural", é uma habilidade que deve ser desenvolvida a partir do 6^0 ano, ela está indicada por **EF06MA04**: "Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par)". Assim, vemos a importância de introduzir os conceitos de fluxogramas, entrada de dados, saída de dados e dos conectivos, para resolução de problemas.

Com o objetivo de resolver problemas, precisamos de algum mecanismo estruturado que por meio de determinadas sequências devidamente organizadas, seja capaz de executar com êxito a resolução do problema. A partir desses conceitos, surgem os **algoritmos**.

Na matemática e na ciência da computação um algoritmo é formalmente definido como "uma sequência finita e bem definida de instruções implementáveis para resolver um conjunto específico de problemas computáveis" e como característica principal "recebe um número finito de entradas, processa-as de maneira não ambígua e retorna saídas num período finito de tempo"(ALGORITMO, 2021, tradução[3] nossa).

De forma introdutória, podemos dizer que um algoritmo é uma forma estruturada de resolver problemas, lembrando, que não existe uma única solução, ou seja, o mesmo problema pode ser resolvido por "caminhos diferentes", em outras palavras, a sequência de passos visa atingir um objetivo definido. Com o objetivo de aplicar os conceitos introdutórios de algoritmos para alunos do fundamental II e ensino médio, devemos trazer exemplos práticos adequados à sua realidade, ou seja, em sala de aula, os exemplos devem ser lúdicos de forma simples e prática. Observe o exemplo a seguir da Facom(2021).

Exemplo 5.2.1. *Desenvolva um algoritmo para trocar uma lâmpada queimada.*

Solução:

Vamos descrever por meio de passos cada parte do nosso algoritmo:

1. Pegar a escada;
2. Posicioná-la embaixo da lâmpada;
3. Buscar uma lâmpada nova;
4. Subir na escada;
5. Retirar a lâmpada velha;
6. Colocar a lâmpada nova;
7. Descer da escada;
8. Verificar se a lâmpada acendeu.

Embora esses conceitos sejam "óbvios", devemos observar os "pequenos detalhes" na execução da sequência. Observe que seria complicado retirar a lâmpada velha *(linha 5)* e colocar a lâmpada nova *linha (6)* sem o auxilio de uma escada (cadeira, banco ou qualquer outro objeto que garanta a segurança de quem for trocar a lâmpada).

Vamos supor que não tenha funcionado, ou seja, que por ventura, a lâmpada nova esteja queimada. Então, podemos afirmar que o nosso algoritmo anterior não conseguiu resolver o problema, logo, precisamos repensá-lo de modo que ele resolva nosso problema.

Assim, vamos retornar no exemplo de Facom(2021).

---

[3] No original: "A finite series of well-defined, computer-implementable instructions to solve a specific set of computable problems. It takes a finite amount of initial input(s), processes them unambiguously at each operation, before returning its outputs within a finite amount of time."

Exemplo 5.2.2. *Desenvolva um algoritmo para trocar uma lâmpada queimada.*

Solução:

Vamos descrever por meio de passos cada parte do nosso algoritmo:

1. Pegar a escada;
2. Posicioná-la embaixo da lâmpada;
3. Buscar uma lâmpada nova;
4. Subir na escada;
5. Retirar a lâmpada velha;
6. Colocar a lâmpada nova;
7. Descer da escada;
8. Verificar se a lâmpada acendeu.
9. Se a lâmpada não acendeu, então:
   - Buscar a lâmpada nova;
   - Subir na escada;
   - Retirar a lâmpada queimada;
   - Colocar a lâmpada nova.
   - Descer da escada;
10. Verificar se a lâmpada acendeu.

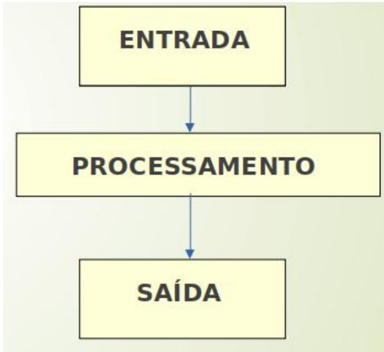
Nesse novo algoritmo, embora esteja sendo executado em mais passos, temos uma maior segurança de que a lâmpada irá funcionar, ou seja, que conseguimos resolver nosso problema. Devemos observar os conectivos lógicos *(linha 9)* **Se, então** ($\rightarrow$) e a **negação** ($\sim$), assim, os conceitos da lógica matemática, os conceitos da tabela verdade estão diretamente ligados aos conceitos de algoritmos.

Para elaborar um algortimo, basta seguir alguns passos básicos:

1. Identificar no problema todos os dados de forma simples evitando ambiguidades;
2. Distinguir as entradas e saídas de dados;
3. Definir os passos de forma ordenada;
4. Construir o algoritmo;
5. Testar a solução.

Na figura 5.1 temos uma estrutura simplificada das etapas fundamentais de um algoritmo **entrada**, **processamento** e **saída**.

Figura 5.1: Etapas fundamentais de um algoritmo.



Fonte: Elaborado pelo autor.

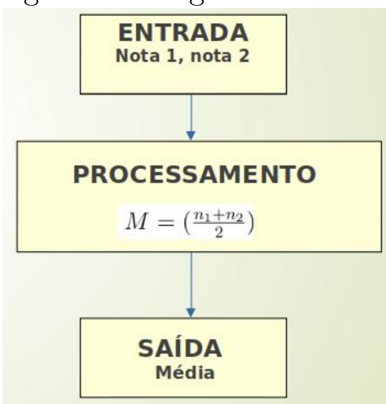
Exemplo 5.2.3. *Construir um algoritmo que calcule a média de duas notas de um aluno.*

Solução:

Inicialmente, temos que observar que as duas notas n_1 e n_2 são valores dados, que a média (M) será o resultado final da operação $M = \frac{(n_1+n_2)}{2}$.

Logo, nosso algoritmo será:

Figura 5.2: Algoritmo média.

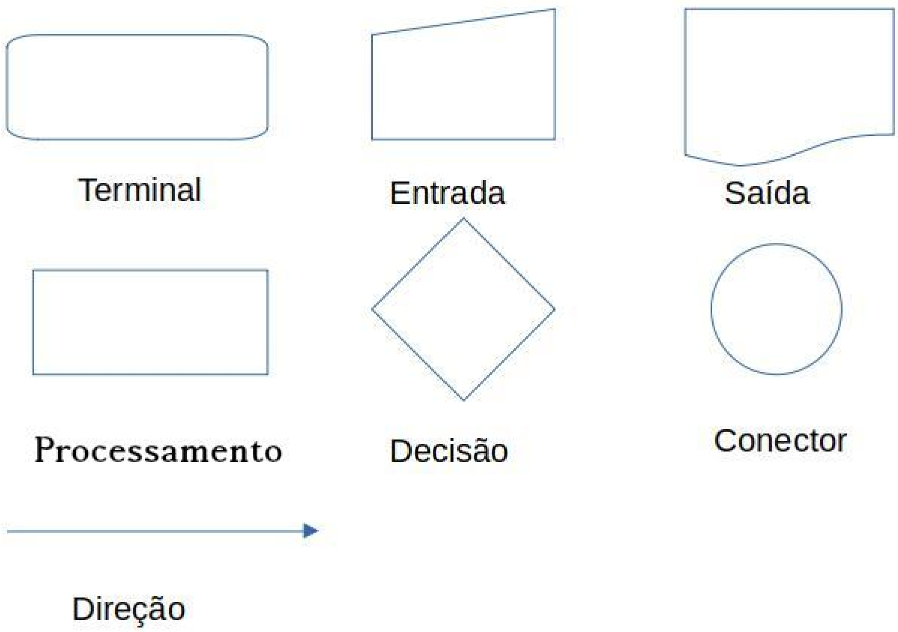


Fonte: Elaborado pelo autor.

Observe que a resolução do exemplo 5.2.3 foi realizada por meio de imagens, esse tipo de algoritmo recebe o nome de fluxograma, nele, cada ação é representada por uma caixa específica, onde cada imagem indica um passo a ser seguido.

Para Puga(2008), os principais elementos de um fluxograma são: terminal, entrada, saída, atribuição, decisão, conector e direção, onde cada um é representado por uma figura geométrica. A Figura 5.3 representa todos esses elementos e em seguida, temos suas definições.

Figura 5.3: Elementos de um Fluxograma.

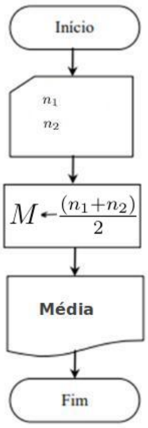


Fonte: Elaborado pelo autor.

- **Terminal:** Representa o início e o fim do fluxograma;
- **Entrada:** Representa a entrada dos dados;
- **Saída:** Representa a saída dos dados após determinada ação;
- **Atribuição:** Representa o processamento, ou seja, onde serão realizadas operações matemáticas e/ou atribuição de valores;
- **Decisão:** Representa uma ação lógica a partir de determinadas instrução "Se ... então";
- **Conector:** Representa o fluxo ou desvio do fluxograma;
- **Direção:** Representa a orientação do fluxo (vertical ou horizontal).

Voltando no exemplo 5.2.3, sua representação seria:

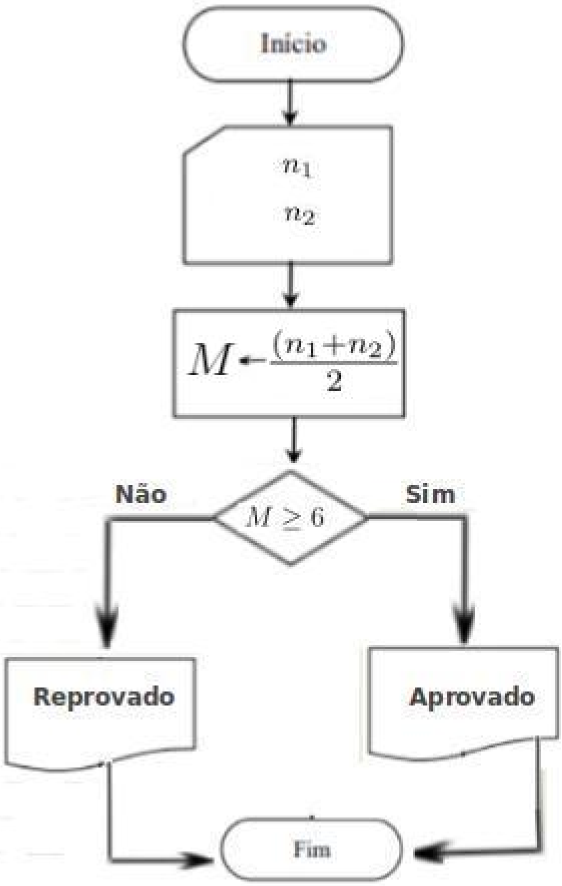
Figura 5.4: Fluxograma para cálculo da média de dois números.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Exemplo 5.2.4. *Faça um fluxograma que calcule a média aritmética de duas notas dadas de um aluno, onde, se a média* ≥ 6 *apareça aprovado caso contrário, apareça reprovado.*

Figura 5.5: Fluxograma da Média.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a compreensão desses elementos, o aluno será capaz de resolver problemas que envolvam o estudo dos fluxogramas, ou seja, a habilidade **EF06MA04** será obtida com êxito.

5.3. Programação em VisuAlg

Segundo Puga(2008), um **pseudocódigo** utiliza linguagem estruturada e assemelha-se, na forma, a um programa escrito na linguagem de programação Pascal. Ele é bastante utilizado para representação da resolução de problemas computacionais.

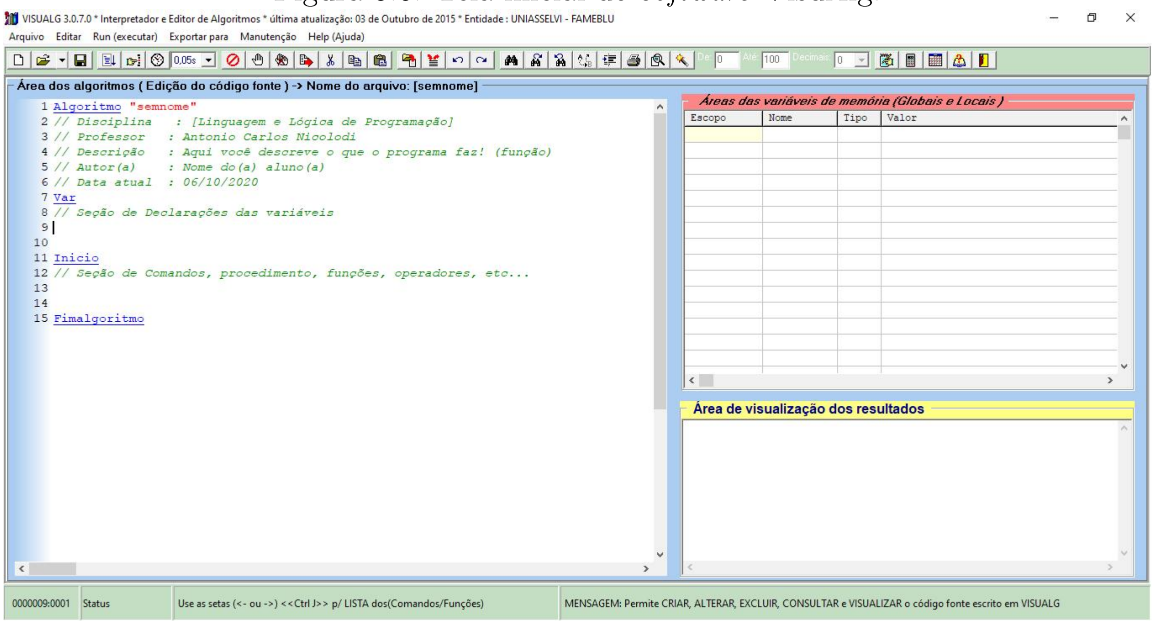
Com base no conceito de pseudocódigo e na definição de algoritmos, vamos utilizar o *software* VisuAlg para resolver determinados problemas que envolvam a lógica matemática e temas da matemática básica do ensino fundamental e do ensino médio.

O VisuAlg é um *software* (programa) *free* (gratuito) que permite elaborar e executar algoritmos em portugol (estruturado português) de formar a simular um "programa de computador". Em sua estrutura, temos uma simulação por meio do MS-DOS que executa o algoritmo e um *breakpoints* (pontos de interrupção) que auxilia na compreensão do passo-a-passo na execução do algoritmo.

Sua instalação é simples, basta descompactar o arquivo. Seu download está disponível no site oficial.

Observação 5.3.1. Para seu funcionamento em sistema operacional Linux, é necessário a instalação de um emulador (como o wine), em seguida, descompactar e executar normalmente.

Figura 5.6: Tela inicial do *software* VisuAlg.



Fonte: Manual do VisuAlg.

Na tela inicial temos:

- Área dos algoritmos;
- Área das variáveis de memória;
- Área de visualização dos resultados.

Área dos algoritmos

Nela é inserida todo o nosso pseudocódigo, ou seja, onde serão declaradas nossas variáveis, o início e o fim do nosso algoritmo.

Uma variável pode ser:

- Inteiro: armazena qualquer valor do tipo x, tal que $x \in \mathbb{Z}$;
- Real: armazena qualquer valor do tipo x, tal que $x \in \mathbb{R}$;
- Caractere: armazena caracteres alfanuméricos, símbolos especiais e/ou a combinação deles;
- Booleno: armazena valores lógicos verdadeiro (V), falso (F), 0 ou 1.

Observação 5.3.2. O símbolo $\longleftarrow$: representa um operador de atribuição, ele será representado pelos sinais “$<$”, “$-$” da seguinte forma $< -$ em todo o pseudocódigo.

Área das variáveis de memória

Funciona de forma semelhante ao editor de planilha, com linhas e colunas. Nessa área, será possível observar o passo a passo da execução do algoritmo.

Área de visualização dos resultados

Nessa área aparecer uma tela preta de *prompt* de comandos, análogo a que existia no MS-DOS, onde será possível a interação usuário-máquina.

Os principais comandos do VisuAlg são:

- escreva - funciona como uma saída de dados, ou seja, uma mensagem que irá aparecer para o usuário;
- leia - funciona como uma entrada de dados, ou seja, um valor que a máquina irá receber para executar o algoritmo;
- se ... então - executa um bloco de comandos se for avaliada como verdadeira;
- senão - se a condição anterior não for verdadeira então o(s) comando(s) apresentado(s) após o senão será(ão) executado(s).

Para esses conceitos ficarem claros para os alunos, sugere-se a criação de diversos algoritmos que executem tarefas simples, como: dizer bom dia, ler seu nome, ler o nome do seu pai e da sua mãe e etc.

Exemplo 5.3.3. *Construir um algoritmo que pergunte seu nome e sua idade.*

Solução:

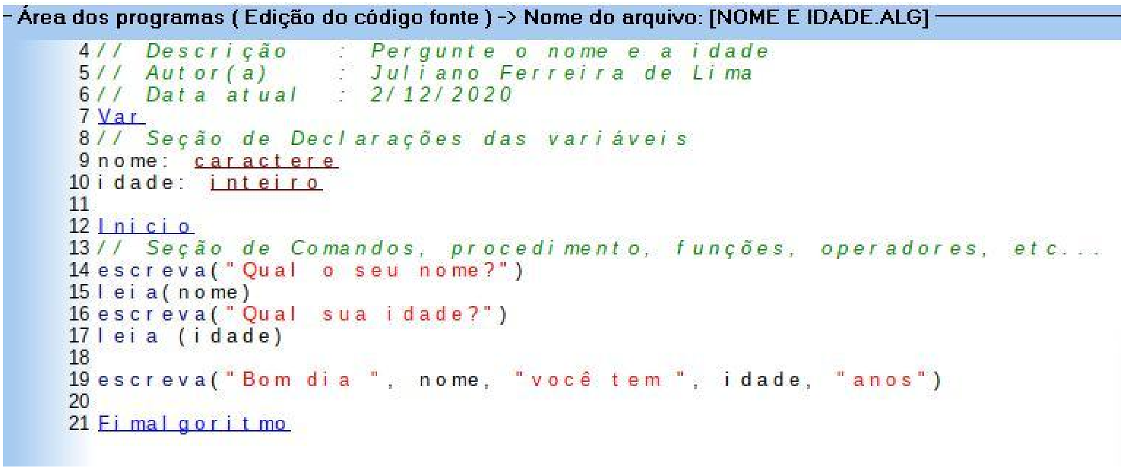
Antes de iniciar a construção do algoritmo, devemos observar nosso problema, nesse caso, queremos apenas saber o nome (caractere) e a idade (inteiro).

Solução - pseudocódigo:

Var
  nome: caractere
  idade: inteiro
Inicio
  escreva("Qual o seu nome?")
  leia(nome)
  escreva("Qual sua idade?")
  leia (idade)
  escreva("Bom dia ", nome, " você tem ", idade, "anos")
Fimalgoritmo

A imagem a seguir mostra como deve ficar esse código no VisuAlg.

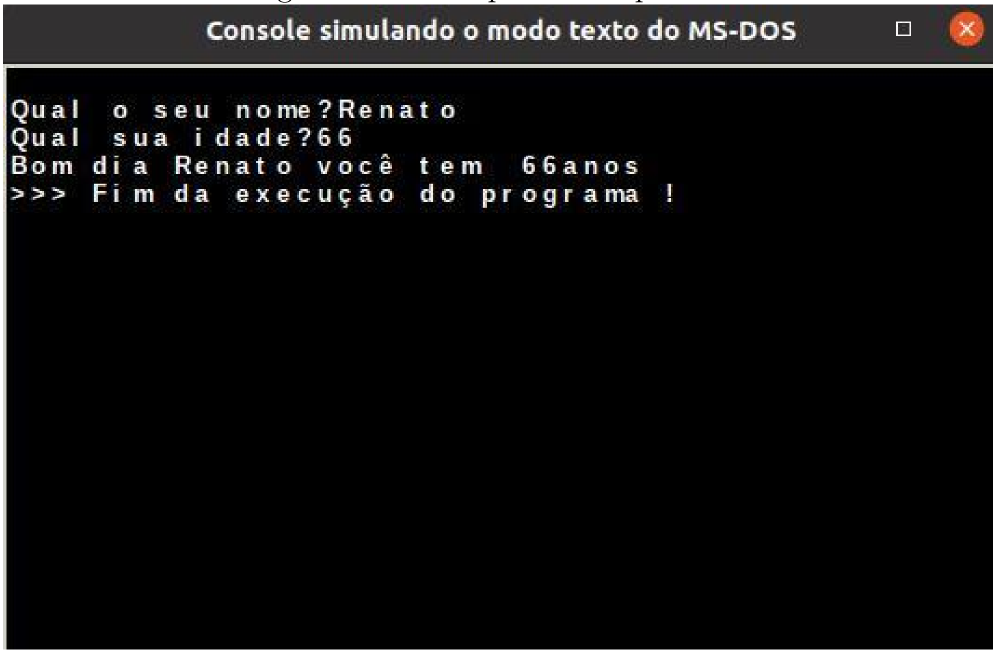
Figura 5.7: Exemplo 5.3.2 - parte I.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A imagem a seguir, mostra o algoritmo executado.

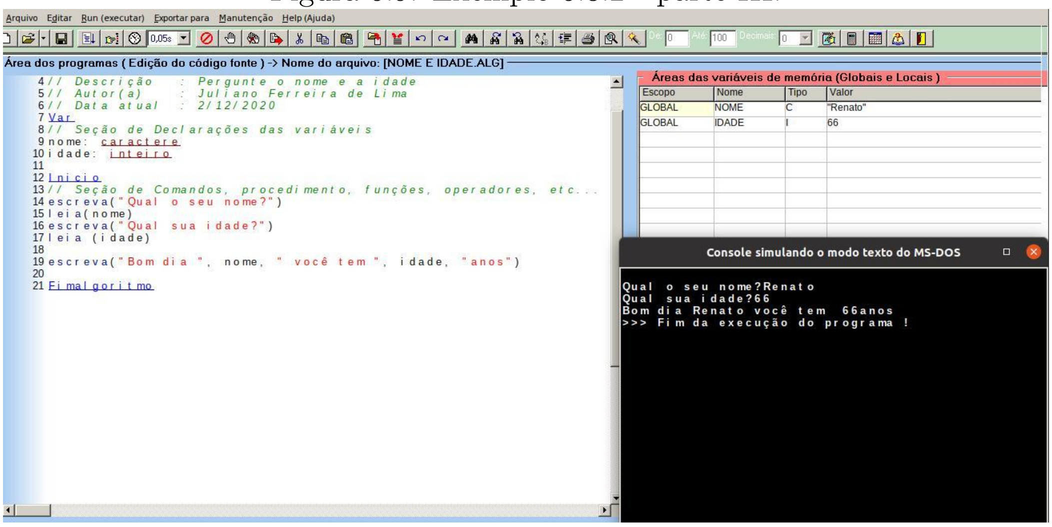
Figura 5.8: Exemplo 5.3.2 - parte II.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao término de todas as etapas, o VisuAlg deve exibir a imagem a seguir:

Figura 5.9: Exemplo 5.3.2 - parte III.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já conhecemos o VisuAlg e seu funcionamento, então, a partir desse momento iremos apenas apresentar o pseudocódigo e o modo texto do *prompt* de comandos.

Exemplo 5.3.4. *Faça um algoritmo que pergunte a idade de dois alunos e mostre quem é o mais velho.*

Solução:

Analisando o enunciado, vemos que são dois alunos, logo, cada aluno possui um nome, e cada aluno possui uma idade. Vamos assumir as seguintes variáveis.

- aluno1, aluno2: caractere;
- idade1, idade2: inteiro.

Observe que existem três casos:

- idade1 = idade 2;
- idade1 > idade 2;
- idade1 < idade 2.

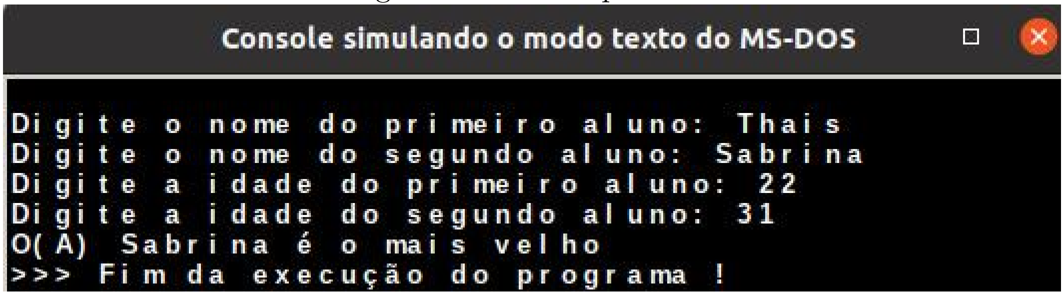
Como existem três casos, precisamos de alguma *condição* para conseguir descobrir quem é o mais velho.
Se idade1>idade2, então, aluno1 é mais velho.
Se idade1<idade2, então, aluno2 é mais velho.
Se idade1=idade2, então, eles têm a mesma idade.

Solução - pseudocódigo

```
Var
  idade1, idade2: inteiro
  nome1, nome2: caractere
Inicio
  escreva("Digite o nome do primeiro aluno: ")
  leia(nome1)
  escreva("Digite o nome do segundo aluno: ")
  leia(nome2)
  escreva("Digite a idade do primeiro aluno: ")
  leia(idade1)
  escreva("Digite a idade do segundo aluno: ")
  leia(idade2)
    se idade1>idade2 então
      escreva("O(A) ", nome1," é o mais velho")
    fimse
    se idade1<idade2 então
      escreva("O(A) ", nome2," é o mais velho")
    fimse
    se idade1=idade2 então
      escreva("Os alunos têm a mesma idade")
    fimse
Fimalgoritmo
```

O exemplo anterior é importante para mostrar uma aplicação direta dos conectivos lógicos e da tabela verdade.

Figura 5.10: Exemplo 5.3.3



Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 5.11: Analise do exemplo 5.3.3

	idade1	idade2	comparação	valor lógico
1^o caso	22	31	$22 > 31$	F
2^o caso	22	31	$22 < 31$	V
3^o caso	22	31	$22 = 31$	F

Fonte: Elaborado pelo autor.

Como apenas o 2^o caso é verdadeiro, então, podemos concluir que o segundo aluno (Sabrina) é o aluno mais velho.

Exemplo 5.3.5. *Faça um algoritmo que some dois números inteiros e verifique se o resultado é par ou ímpar.*

Solução:

Inicialmente, devemos somar dois números inteiro x e y, assim, $soma = x + y$.

Um número w é dito par se $w = 2k, k \in \mathbb{Z}$.

Note que nesse caso, o número w é par ou ímpar, ou seja, pelo princípio do terceiro excluído, não existe outra possibilidade para esse número e pelo princípio da não contradição, w não pode ser par e ímpar simultaneamente.

Solução - pseudocódigo:

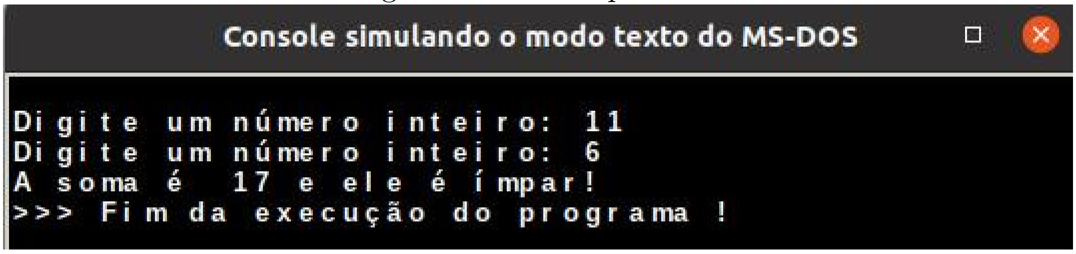
```
Var
  x, y, soma: inteiro
Inicio
  escreva("Digite um número inteiro: ")
  leia(x)
  escreva("Digite um número inteiro: ")
  leia(y)
  soma<-x+y
    se soma mod 2 = 0 então
      escreva("A soma é ", soma, " e ele é par!")
    senão
```

escreva("A soma é ", soma, " e ele é ímpar!")

fimse

Fimalgoritmo

Figura 5.11: Exemplo 5.3.4



Fonte: Elaborado pelo autor.

A BNCC sugere fortemente que as atividades sejam feitas de forma interdisciplinar, ou seja, que duas ou mais disciplinas desenvolvam atividades que propicie a interação entre campos de conhecimentos distintos tornando o aprendizado prazeroso e concreto para os educandos. Assim, o exemplo a seguir visa uma interdisciplinaridade entre matemática, educação física, ciências e geografia.

Exemplo 5.3.6. *Faça um algoritmo que calcule o IMC de um aluno.* $IMC = \frac{peso}{m^2}$.

Solução:

Segundo a Organização Mundial da Saúde [11] (OMS) o Índice de Massa Corporal (IMC) é dado por $IMC = \frac{peso}{m^2}$.

Tabela 5.12: Analise do exemplo 5.3.5

IMC	Classificação
Abaixo de 18,5	Abaixo do peso
Entre 18,5 e 24,9	Peso ideal
Entre 25 e 29,9	Levemente acima do peso
Entre 30 e 34,9	Obesidade grau I
Entre 35 e 39,9	Obesidade grau II (severa)
Acima de 40	Obesidade grau III (mórbida)

Fonte: Prevenção da obesidade.

Solução - pseudocódigo:

Var

IMC, peso, altura: real

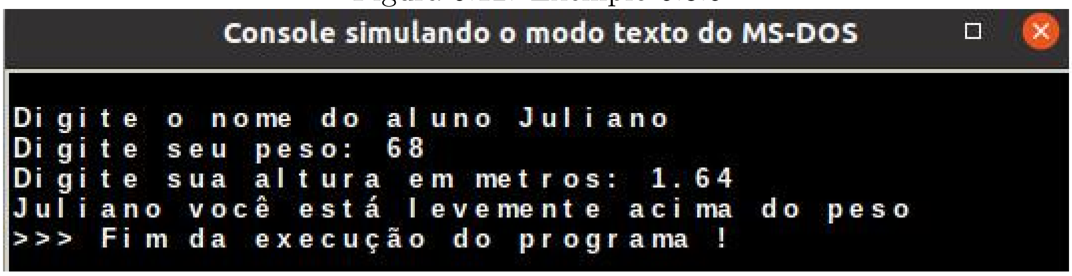
aluno: caractere

Inicio

escreva("Digite o nome do aluno ")

```
  leia (aluno)
  escreva("Digite seu peso: ")
  leia(peso)
  escreva("Digite sua altura em metros: ")
  leia(altura)
  IMC<-peso/(altura*altura)
    se (IMC < 18.5) então
      escreva(aluno, " você está abaixo do peso.")
    fimse
    se (18.5<=IMC) e (IMC<25) então
      escreva(aluno, " você está no peso ideal")
    fimse
    se (25<=IMC) e (IMC<30) então
      escreva(aluno, " você está levemente acima do peso")
    fimse
    se (IMC>=30) então
      escreva(aluno, " voce está acima do peso, procure um médico.")
    fimse
Fimalgoritmo
```

Figura 5.12: Exemplo 5.3.5



Fonte: Elaborado pelo autor.

Capítulo 6

Sugestões de atividades

Neste capítulo vamos sugerir algumas atividades que podem ser desenvolvidas em sala de aula com os alunos do ensino fundamental II e ensino médio. Os algoritmos a seguir podem ser executados no VisuAlg. Essas atividades são sugestões da BNCC. O professor pode aproveitar os problemas propostos e elaborar seus fluxogramas.

Para o correto funcionamento dos algoritmos, deve-se copiar as linhas dos códigos dessa dissertação, colar no VisuAlg e em seguida, deve-se reescrever todas as aspas.

Para o 6^o ano.

Segundo a BNCC, pela habilidade EF06MA04, devemos construir um algoritmo em linguagem natural que determine se um número é par ou ímpar.

Exemplo 6.0.1. *Faça um algoritmo que determine se um número é par ou ímpar.*

Solução:

```
Var
  x: inteiro
Inicio
  escreva("Digite um número inteiro: ")
  leia(x)
    se x mod 2 = 0 então
      escreva("O número ", x, "é par!")
    senão
      escreva("O número ", x, "é ímpar!")
    fimse
Fimalgoritmo
```

Para o 7^o ano.

Na BNCC, a habilidade EF07MA18 trata da capacidade de resolver problemas envolvendo as equações do 1^o grau por meio das propriedades de igualdade. Lembrando que uma equações do primeiro grau é do tipo:

$$ax + b = c, a \neq 0.$$

$$\begin{aligned} ax + b &= c \\ ax &= -b + c \\ x &= \frac{-b + c}{a}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.0.2. *Faça um algoritmo que resolva qualquer equação do* 1^o *grau.*

Solução:

Var
  a, b,c, x: real
Inicio
  escreva("Uma equação do 1º grau é dada por: $ax + b = c$")
  escreva("Digite o valor de a")
  leia(a)
  escreva("Digite o valor de b")
  leia(b)
  escreva("Digite o valor de c")
  leia(c)
    se ($a = 0$) então
      escreva("Não tem solução para $a = 0$.")
    senão
      x<-(c-b)/a
      escreva("A solução da equação", a, "x ",b, "=",c, " é: ", x)
    fimse
Fimalgoritmo

Para 8^o **ano.**

Uma das habilidades do 8^o é a utilização das áreas. A habilidade EF08MA19 determina a resolução de problemas envolvendo a área de quadriláteros, triângulos e círculos, em situações que envolvam medidas de terrenos, ou seja, é uma boa oportunidade de relembrar conceitos básicos como o cálculo de perímetro.

Exemplo 6.0.3. *Faça um algoritmo que calcule o perímetro de um polígono convexo.*

Solução:

Var
  x, j: inteiro
  l, $soma$: real
Inicio
  soma<-0
  escreva("Digite quantos lados tem o seu polígono: ")
  leia(x)

para j de 1 até x faça
escreva("Digite o valor do lado: ")
leia(l)
j<-(j+1)
soma<-(soma+l)
fimpara
escreva("O perímetro do polígono é: ", $soma$)
Fimalgoritmo

Observação 6.0.4. Essa resolução é para um polígono qualquer, a sugestão é fazer um algoritmo para um polígono de 3 lados, 4 lados, 5 lados até n lados.

Para 9^o **ano.**

No 9^o os alunos já estão habituado com as expressões algébricas, assim, a habilidade EF09MA09 sugere a compreensão da fatoração das expressões algébricas, nas relações com os produtos notáveis e na fórmula resolutiva de uma equação do 2^o grau com uma incógnita.

Uma equação do 2^o grau é do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0. \tag{6.1}$$

Dividindo ambos lados da igualdade 6.1 por a temos:

$$\begin{aligned} \frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} &= 0 \\ x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} &= 0 \end{aligned}$$

$\frac{c}{a}$ em ambos lados da igualdade anterior temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \tag{6.2}$$

Somando $\left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$ em ambos lados na igualdade 6.2 temos:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 \\ x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \end{aligned}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \tag{6.3}$$

Observe que na primeira igualdade da equação 6.3, a expressão $x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$ é um quadrado perfeito, ou seja, nesse momento temos uma aplicação direta da habilidade **EF09MA09** sobre produtos notáveis, assim:

$$\begin{aligned}(x + \frac{b}{2a})^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}\\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Subtraindo $\frac{b}{2a}$ em ambos lados da igualdade anterior temos:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} - \frac{b}{2a}\\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\end{aligned}$$

Chamando $\Delta = b^2 - 4ac$ temos que:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \tag{6.4}$$

Na equação (6.4) vemos que:

- Se $\Delta < 0$ não existe solução real;
- Se $\Delta = 0$ então x possuirá apenas uma única solução;
- Se $\Delta > 0$ então x possuirá dois valores distintos.

Exemplo 6.0.5. *Faça um algoritmo que resolva uma equação do* 2^o.

Solução:

Var
  $x1$, $x2$, a, b, c, $delta$: real
Inicio
  escreva("Uma equação do 2^0 é dada por: $ax^2 + bx + c = 0$.")
  escreva("Digite o valor de a: ")
  leia(a)
  escreva("Digite o valor de b: ")
  leia(b)
  escreva("Digite o valor de c: ")
  leia(c)
   se $a = 0$ então

```
    escreva("Impossível calcular a equação para a = 0")
  fimse
 delta<-(b*b-4*a*c)
  se delta < 0 então
    escreva("Não existe solução real")
  fimse
  se delta = 0 então
    x1<-(-b+raizq(delta))/(2*a)
    escreva("Os valores da equação são iguais a ", x1)
  fimse
  se delta > 0 então
    x1<-(-b+raizq(delta))/(2*a)
    x2<-(-b-raizq(delta))/(2*a)
    escreva("Os valores da equação são: ", x1, " e ",x2)
  fimse
Fimalgoritmo
```

Observação 6.0.6. Salientamos que para o novo ensino médio, nas demonstrações que se seguem, as habilidades estão construção, portanto, não temos as como descreve-las.

Para o 1^o **ano do ensino médio.** Um dos conteúdos do 1^o é o Teorema de Pitágoras. Sabendo que:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Exemplo 6.0.7. *Faça um algoritmo que calcule a hipotenusa ou o valor de um dos catetos usando o teorema de Pitágoras.*

Solução:

```
Var
 a, b, c: real
 x: inteiro
Inicio
 escreva("Digite 1 para hipotenusa ou 2 para o cateto: ")
 leia(x)
  se x = 1 então
    escreva("Digite o valor do primeiro cateto")
    leia(b)
    escreva("Digite o valor do segundo cateto")
    leia(c)
    a<-raizq(b^2 + c^2)
    escreva("O valor da hipotenusa é: ", a)
  fimse
```

se $x = 2$ então
escreva("Digite o valor da hipotenusa")
leia(a)
escreva("Digite o valor do cateto")
leia(b)
c<-raizq(a$^2 - b^2$)
$escreva(\text{"}Ovalordocateto:\text{"}$,c)
$fimse$
$Fimalgoritmo$

Para o 2^o ano do ensino médio

No 2^o ano do ensino médio, os alunos se deparam com progressões geométricas (P.G), compreende-las é de extrema importância, principalmente para perceber a velocidade de seu crescimento (ou decaimento).

Lema 6.0.8. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão $q \neq 1$ é $S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.

Seja $(a_1, a_2, ..., a_n)$ uma progressão geométrica de n termos, assim, sua soma será:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \tag{6.5}$$

Multiplicando a igualdade (6.5) pela razão q temos:

$$qS_n = q(a_1 + a_2 + ... + a_n) \tag{6.6}$$
$$qS_n = a_2 + a_3 + ... + a_{n+1} \tag{6.7}$$

Subtraindo as igualdades (6.5) e (6.7) temos:

$$S_n - qS_n = (a_1 + a_2 + ... + a_n) - (a_2 + a_3 + ... + a_{n+1}) \tag{6.8}$$

Colocando S_n em evidência e subtraindo os semelhante temos:

$$\begin{aligned} S_n(1-q) &= a_1 - a_{n+1} \\ S_n(1-q) &= a_1 - a_1 q^n \\ S_n(1-q) &= a_1(1-q^n) \\ S_n &= a_1 \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

Exemplo 6.0.9. *Faça um algoritmo que calcule a soma da P.G*

Solução:

Var
Sn, q, $a1$, x: real
i, n: inteiro
Inicio

```
  escreva("Digite o primeiro termo da P.G: ")
  leia(a1)
  escreva("Digite a razão da P.G: ")
  leia(q)
  escreva("Quantos termos tem a P.G: ")
  leia(n)
  x <- a1
    para i de 1 ate n faca
      escreva("Os termos da P.G são: ", x)
      x <- x * q
    fimpara
  Sn<- a1*((1-q^n)/(1-q))
  escreva("A soma da P.G é: ", Sn)
Fimalgoritmo
```

Para o 3^o ano do ensino médio

O ensino da matemática financeira tem por objetivo formar cidadãos que saibam analisar criticamente as transações financeiras que utilizam no dia a dia, tenham o direito de escolher e decidir o que mais se adequa às suas expectativas, e explicar e refletir sobre as opções que o mercado oferece. A partir desses princípios, no 3^o do ensino médio os alunos aprendem os conceitos da matemática financeira, por meio de aplicações dos juros compostos.

$$M = C(1+i)^n \tag{6.9}$$

onde:

- M = montante;
- C = Capital;
- i = taxa;
- n = tempo;
- $R = \frac{M}{C}$.

Em todos os casos, basta usar a fórmula (6.9).

Cálculo do capital.

$$\begin{aligned} M &= C(1+i)^n \\ C &= \frac{M}{(1+i)^n} \end{aligned}$$

Cálculo do tempo

$$
\begin{aligned}
M &= C(1+i)^n \\
\frac{M}{C} &= (1+i)^n \\
R &= (1+i)^n \\
log(R) &= log(1+i)^n \\
log(R) &= nlog(1+i) \\
n &= \frac{log(R)}{log(1+i)}
\end{aligned}
$$

Cálculo da taxa

$$
\begin{aligned}
M &= C(1+i)^n \\
\frac{M}{C} &= (1+i)^n \\
R &= (1+i)^n \\
\sqrt[n]{R} &= (1+i) \\
i &= \sqrt[n]{R} - 1
\end{aligned}
$$

Exemplo 6.0.10. *Faça um algoritmo que calcule o montante, capital, taxa ou tempo através dos juros compostos.*

Solução:

Var
  M, C, n, i, R: real
  x: inteiro
Inicio
  escreva("Escolha uma das opções a seguir:")
  escreva("1 para Montante, 2 para capital ")
  escreva("3 para taxa , 4 para o tempo .")
  leia(x)
    se ($x = 1$) então
      escreva("Digite o valor do capital: ")
      leia(C)
      escreva("Digite o valor da taxa: ")
      leia(i)
      i<-i/100
      escreva("Digite o valor do tempo: ")
      leia(n)
      M <- C*(1+i)^n   escreva("O valor do montante é: ", M)

fimse
se ($x = 2$) então
escreva("Digite o valor do montante: ")
leia(M)
escreva("Digite o valor da taxa: ")
leia(i)
i<-i/100
escreva("Digite o valor do tempo: ")
leia(n)
C <- M/(1+i)ˆn
escreva(" O valor do capital é: ", C)
fimse
se($x = 3$) então
escreva("Digite o valor do motante: ")
leia(M)
escreva("Digite o valor do capital: ")
leia(C)
R<-M/C
escreva("Digite o valor do tempo: ")
leia(n)
i<-(R)ˆ(1/n) - 1
i<-i*100
escreva("A taxa é ", i,"porcento.")
fimse
se ($x = 4$) então
escreva("Digite o valor do motante: ")
leia(M)
escreva("Digite o valor do capital: ")
leia(C)
R<-M/C
escreva("Digite o valor da taxa: ")
leia(i)
i<-i/100
n<-log(R)/log(1+i)
escreva("O tempo será de :", n)
fimse
Fimalgoritmo

Exemplo 6.0.11. *Juliano deseja comprar um ventilador por* $R\$180,00$*, sendo o pagamento feito em 2 meses após a compra. Para o pagamento à vista, o preço é de* $R\$165,00$*. Qual a taxa mensal de juros cobrada nessa compra?*

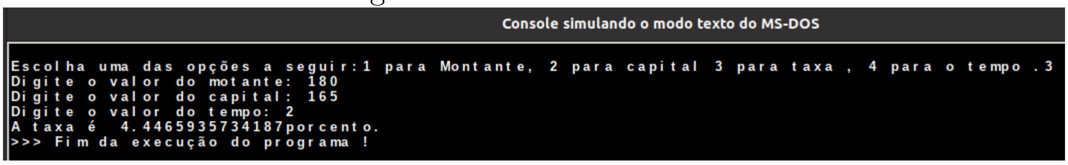
Solução:

Primeiramente, devemos observar que nesse exercício, queremos calcular a taxa, ou seja, devemos utilizar a opção 3. Em seguida, preencher as informações a seguir:

- M = R\$180
- C = R\$165
- $n = 2$

A imagem abaixo mostra o resultado final.

Figura 6.1: Cálculo da taxa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a execução do nosso algoritmo, vemos que a taxa aplicada é de aproximadamente $4,45\%$.

Prova real:

Do enunciado temos que:

- M = R\$180
- C = R\$165
- $n = 2$

Substituindo esses valores na fórmula dos juros compostos temos:

$$
\begin{aligned}
M &= C(1+i)^n \\
i &= \sqrt[n]{R} - 1 \\
i &= \sqrt[2]{\frac{180}{165}} - 1 \\
i &= \sqrt[2]{1,090909} - 1 \\
i &= 1,044465 - 1 \\
i &= 0,044465 \\
i &= 4,4465\% \\
i &\approx 4,45\%
\end{aligned}
$$

Assim, concluímos que a taxa paga foi de aproximadamente $4,45\%$.

Capítulo

7

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na sala de aula, o ensino da matemática é um desafio permanente, pois, criar novas metodologias de ensino, buscando uma didática diferenciada de forma que os alunos possam absorver os conteúdos e compreender as habilidades necessárias é um trabalho extenso e árduo, uma vez que, o principal objetivo é criar cidadãos críticos, reflexivos e ativos na sociedade.

Ao longo desse trabalho, tentamos ilustrar o quão rica é a lógica matemática, em que de forma interdisciplinar, existe uma interação constante a diversos níveis do conhecimento, ou seja, a partir do 6^o do ensino fundamental, a pesquisa extracurricular das aplicações da lógica, leitura e interpretação de problemas, atividades práticas tornam a aprendizagem mais prazerosa.

Nosso objetivo não foi de ensinar de fato uma linguagem de programação, mas sim, de expor através das aplicações, na qual a lógica matemática se encontra em nosso cotidiano, instigando o interesse dos alunos na busca de conhecimentos, tornando-os protagonistas na construção de sua própria aprendizagem.

Acreditamos que objetivo de oferecer um material de apoio aos professores e alunos do ensino fundamental II e ensino médio foi atingido e esperamos que essa dissertação contribua de forma significativa para o ensino-aprendizagem dos alunos.

Referências

[1] ABE, Jair Minoro. Introdução à Lógica para a Ciência da Computação. Arte Ciência, 2001.

[2] ALGORITMO. In: The Definitive Glossary of Higher Mathematical Jargon. Montreal. Disponível em:
https://mathvault.ca/math-glossary/algo. Acesso em: 27 fev. 2021.

[4] As 10 competências da BNCC
Disponível em:
http://inep80anos.inep.gov.br/inep80anos/futuro/novascompetencias-da-base-nacional-comum-curricular-bncc/79. Acesso em: 10 de Ago. 2020.

[5] ARISTOTELES; PESSANHA, Jose Americo Motta. Tópicos dos argumentos sofisticos Aristoteles seleção de textos de Jose Americo Motta Pessanha. Nova Cultural, 1991.

[6] Base Nacional Comum Curricular.
Disponível em:
http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 10 de ago. 2020.

[7] CARNIELLI, Walter A. EPSTEIN, Richard L.. Pensamento crítico o poder da lógica e da argumentação. 4 ed. São Paulo: Rideel, 2019.

[8] CANTÃO, Renato. Gottfried Wilhelm von Leibniz. Disponível em
http://www.ime.unicamp.br/s̃andra/CCA/history/leibniz/leibniz.html.
Acesso em: 10 mar. 2020.

[9] DANTE, Luiz Roberto. Teláris Ensino Fundamental - Anos Finais Matemática. 2018. Editora Ática. 3ª Edição, São Paulo.

[10] DE ALENCAR FILHO, Edgard. Iniciação à lógica matemática. NBL Editora, 2002.

[11] DE PESQUISA EM TRATAMENTO, Grupo; EM ADOLESCENTES, Prevenção da Obesidade. A utilização do critério da Organização Mundial de Saúde para classificação do estado nutricional em crianças.

[12] EL PAÍS. Google homenageia seu precursor George Boole, que completa 200 anos. Disponível em *https://brasil.elpais.com/brasil/2015/11/02/cultura/1446422831_484321.html*. Acesso em: 10 mar. 2020.

[13] EVES, Howard, Introdução à História da Matemática, Unicamp, Campinas, 1997.

[14] FARIAS, Gilberto; SANTANA, Eduardo. Introdução à computação. v1. 0, Universidade Aberta do Brasil, 2013.

[15] FERRARI, FABRICIO; CECHINEL, CRISTIAN. Introdução a algoritmos e programação. Bagé: Universidade Federal do Pampa, 2008.

[16] FRAZÃO, Dilva. Tales de Mileto, filósofo grego. Disponível em: *https://www.ebiografia.com/tales_de_mileto/*. Acesso em: 26 fev. 2021.

[17] FRAZÃO, Dilva. Pitágoras, matemático grego. Disponível em: *https://www.ebiografia.com/pitagoras*. Acesso em: 26 fev. 2021.

[18] GIOVANNI, José Ruy Júnior; CASTRUCCI, Benedisto. A Conquista da Matemática 6 ano. 2018.Editora FTD. 4º Edição, São Paulo.

[19] GOMES, Carla Regina. Platão - O “criador”de matemáticos. Disponível em:

http://www.hcte.ufrj.br/downloads/sh/sh4/trabalhos/Carla%20Regina %20PLATÃO.pdf. Acesso em: 10 mar. 2020.

[20] JANGUAS, Caio Cesar di Gesu et al. Um estudo sobre a lógica do pensamento dedutivo proposta por George Boole no contexto de algebrização da Lógica no século XIX. 2019.

[21] KAHN, CHARLES H. Pitágoras e os pitagóricos-Uma breve história. Edições Loyola, 2007.

[22] MARCONATTO, Arildo Luiz. Gotfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) em Só Filosofia. Virtuous Tecnologia da Informação, 2008-2021. Disponível em *http://www.filosofia.com.br/historia_show.phpid=76*. Acesso em: 10 mar. 2020.

[23] MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Educação. Referencial Curricular da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul. Campo Grande: s. n., 2014

[24] MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Educação. Currículo de Referência de Mato Grosso do Sul. Campo Grande: s. n., 2019

[25] MENDES, Herman do Lago. Os Números Binários: do saber escolar ao saber científico Dissertação. 2015. Dissertação de Mestrado.

[26] PUGA, Sandra; RISSETTI, Gerson. Lógica de programação e estruturas de dados, com aplicações em Java . Pearson Educación, 2008.

[27] Quem foi pitágoras de Samos? Disponível em: *https://www.marcelouva.com.br/quem-foi-pitagoras-de-sams/*. Acesso em: 20 mai. 2020.

[28] Questão de Raciocínio Lógico sobre Lógica proposicional, 2014. 1 vídeo (ca. 05 min).
Publicado pelo canal Folha Dirigida. Disponível em: *https://youtu.be/Nm1m3AnjbxY*. Acesso em: 20 ago. 2020.

[29] TASINAFO, P. M. Um breve histórico do desenvolvimento da lógica matemática e o surgimento da teoria da computação. 2008.

[30] TRAVELLO, Vanessa de Freitas. O uso da Lógica Matemática para Interpretação e Resolução de Problemas. 2020. Dissertação de Mestrado. Disponível em: *https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=171052033*. Acesso em: 10 mar. 2020.

[31] VAZ, Rodrigo Marques. Formalização do Raciocínio Lógico Baseada na Lógica Matemática. 2014. Dissertação de Mestrado. Disponível em: *https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=1349*. Acesso em: 10 mar. 2020.

[32] VIEIRA, Demetrius Dantos Arruda. Traços da Influência das Filosofias de Platão e Aristóteles no Desenvolvimento da Matemática. 2018. Dissertação de Mestrado. Disponível em: *https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160210938*. Acesso em: 10 mar. 2020.

[33] Visual G - O melhor interpretador de algoritmos. Disponível em: *https://visualg3.com.br/*. Acesso em: 15 abr. 2020.

[34] Visual G - O melhor interpretador de algoritmos. Disponível em: *http://manual.visualg3.com.br/doku.php*. Acesso em: 20 out. 2020.

[35] WIDMER, Neal S.; TOCCI, R. J. Sistemas Digitais: Princípios e Aplicações. 2011.