Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

César Klayson Soares dos Santos

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE PARA DOIS PROBLEMAS PARABÓLICOS COM SOLUÇÕES QUE EXIBEM FRONTEIRA LIVRE

CAMPINAS
2017

César Klayson Soares dos Santos

EXISTÊNCIA E REGULARIDADE PARA DOIS PROBLEMAS PARABÓLICOS COM SOLUÇÕES QUE EXIBEM FRONTEIRA LIVRE

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Olivâine Santana de Queiroz

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno César Klayson Soares dos Santos, e orientada pelo Prof. Dr. Olivâine Santana de Queiroz.

Assinatura do Orientador

Campinas
2017

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6925-8806

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

Sa59e

Santos, César Klayson Soares dos, 1980-
Existência e regularidade para dois problemas parabólicos com soluções que exibem fronteira livre / César Klayson Soares dos Santos. – Campinas, SP : [s.n.], 2017.

Orientador: Olivâine Santana de Queiroz.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Problema de fronteira livre. 2. Regularidade ótima. 3. Hausdorff, Medidas de. I. Queiroz, Olivâine Santana de,1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Existence and regularity for two parabolic problems with solutions that exhibit free boundary
Palavras-chave em inglês:
Free boundary problems
Optimal regularity
Hausdorff measures
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Olivâine Santana de Queiroz [Orientador]
Francisco Odair Vieira de Paiva
Gabriela Del Valle Planas
Lucas Catão de Freitas Ferreira
Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
Data de defesa: 24-02-2017
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 24 de fevereiro de 2017 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). OLIVÂINE SANTANA DE QUEIROZ

Prof(a). Dr(a). GABRIELA DEL VALLE PLANAS

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

Prof(a). Dr(a). MARCOS TADEU DE OLIVEIRA PIMENTA

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus pais

Nelson Nunes dos Santos e Nilda Soares dos Santos.

Agradecimentos

Agradeço a todos os meus amigos que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu concluísse essa etapa na minha carreira.

A dedicação exigida em um curso de doutorado é enorme, mas o apoio que recebi da minha família foi maior e isso, incontestavelmente me deu forças para superar as dificuldades que surgiram.

Merecem também um destaque, todos os professores do IMECC nos quais compartilharam seus conhecimentos e experiências. Sem dúvida enriqueceu meu doutoramento.

Todas as contribuições sugeridas pelos membros da banca de defesa, os professores doutores Francisco Odair Vieira de Paiva, Gabriela Del Valle Planas, Lucas Catão de Freitas Ferreira e Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta, foram importantes para refinar minha tese com detalhes não percebidos anteriormente e também no surgimento de novas ideias para futuros trabalhos.

O segundo capítulo desta tese é fruto de um artigo em que, eu e meu orientador trabalhamos com o professor Dr. Angelo Roncalli Furtado De Holanda da Universidade Federal de Campina Grande - Paraíba, Departamento de Matemática, a quem agradeço a oportunidade de compartilhar sua experiência na realização deste trabalho.

Meu orientador, teve papel fundamental em minha formação doutoral. Sua bagagem científica e sólida experiência me fez avançar consideravelmente no estudos de equações diferencias parciais. Meus agradecimentos ao prof. Dr. Olivâine Santana de Queiroz.

Resumo

Neste trabalho, estudamos resultados de existência e regularidade de solução para problemas de fronteira livre parabólicos com absorção forte e com não-linearidade do tipo logarítmica. Além disso, na primeira parte, para o problema de absorção forte, obtemos estimativas ótimas em pontos próximo da fronteira livre. Finalizamos com o estudo de estimativas para a medida de Hausdorff da fronteira livre. A respeito da segunda parte, no estudo do problema singular logarítmico, demonstramos que a regularidade ótima da solução é log-Lipschitz.

Palavras-chave: problemas de fronteira livre parabólico, regularidade ótima, estimativas para a medida de Hausdorff.

Abstract

In this work, we study existence and regularity results of solution for parabolic free boundary problems with strong absorption and logarithmic nonlinearity. In addiction, in the first part, for the strong absorption problem, we obtain optimal estimates near at free boundary. We conclude with the study of estimates for the Hausdorff measure of the free boundary. Concerning the second part, on the study of the singular logarithmic problem, we show that the optimal regularity of the solution is log-Lipschitz.

Keywords: parabolic free boundary problems, optimal regularity, Hausdorff measure estimates.

Notações, Espaços e Normas

Notações

$|\cdot|$ – Norma em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$
$||\cdot||_\infty$, $||\cdot||_{L^\infty}$ – Norma L^∞
$||\cdot||_2$, $||\cdot||_{L^2}$ – Norma L^2
$||\cdot||_X$ – Norma em X
Ω – Domínio limitado suave
$\overline{\Omega}$ – Fecho de Ômega
$\partial\Omega$ – Fronteira de Ômega
$|\Omega|$ – Medida de Lebesgue de Ômega
diam(Ω) – Diâmetro de Ômega
$\Omega_r = \Omega \backslash B_r(\partial\Omega)$
$\Omega' \subset\subset \Omega$ – Compactamente contido
$Q_T = \Omega \times (0, T]$ – Cilindro parabólico
$Q_r(x,t) = B_r(x) \times (t - r^2, t + r^2)$
$Q_r^+(x,t) = B_r(x) \times (t, t + r^2)$
$Q_r^-(x,t) = B_r(x) \times (t - r^2, t)$
$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}$
$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq r\}$
$\partial_p Q_r(x,t) = B_r(x) \times \{t - r^2\} \cup \partial B_r(x) \times [t - r^2, t + r^2]$ – Fronteira parabólica de $Q_r(x,t)$
$\sup\text{ess}\ u = \inf\{a \in \mathbb{R}; \mu(\{(x,t); u(x,t) > a\}) = 0\}$
$\limsup$ – Limite superior
$\liminf$ – Limite inferior
χ_A – Função característica de A
$u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$
$u^-(x) = \max\{-u(x), 0\}$
∇ – Gradiente
Δ – Operador laplaciano
$\mathcal{L}^n$ – Medida n–dimensional de Lebesgue
$\mathcal{H}^n$ – Medida n–dimensional de Hausdorff
$\mathcal{H}_n^{\text{par}}$ – Medida n–dimensional de Hausdorff com respeito a métrica parabólica
$\mathcal{H}_\varepsilon^n$ – Família de Medidas n–dimensional de Hausdorff com parâmetro ε.

Espaços e Normas

Para definição dos espaços de Hölder abaixo e suas respectivas normas usamos as referências [17] e [18]. Aqui, k será sempre um inteiro não negativo e $0 < \alpha < 1$, um número real. Se $\alpha = 1$, temos o espaço de Lipschitz.

$\cdot\ C^\alpha(\overline{\Omega}) = \Big\{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}; u \in C(\overline{\Omega}); [u]_{\alpha;\Omega} < \infty\Big\}$

$$[u]_{\alpha;\Omega} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},\ x \neq y; \quad |u|_{\alpha;\Omega} = |u|_{0;\Omega} + [u]_{\alpha;\Omega}, \quad |u|_{0;\Omega} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$$

$\cdot\ C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \Big\{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}; D^\beta u \in C^\alpha(\overline{\Omega}), |\beta| \leq k\Big\}$

$$|u|_{k,\alpha;\Omega} = \sum_{|\beta|\leq k} \Big|D^\beta u\Big|_{\alpha;\Omega}; \quad |u|_{k,0;\Omega} = \sum_{|\beta|\leq k} \Big|D^\beta u\Big|_{0;\Omega}$$

$\cdot\ C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q}_T) = \Big\{u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}; u \in C(\overline{Q}_T); |u|_{\alpha,\alpha/2;Q_T} < \infty\Big\}$

$$|u|_{\alpha,\alpha/2;Q_T} = |u|_{\alpha,0;Q_T} + [u]_{x,\alpha,\alpha/2;Q_T} + [u]_{t,\alpha,\alpha/2;Q_T}$$

$$|u|_{\alpha,0;Q_T} = \sup_{(x,t)\in Q_T} |u(x,t)|, \quad [u]_{x,\alpha,\alpha/2;\Omega_T} = \sup_{\substack{x,y\,\in\,\Omega \\ t\in(0,T)}} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}}, \ x \neq y$$

$$[u]_{t,\alpha,\alpha/2;Q_T} = \sup_{\substack{x\,\in\,\Omega \\ t,\,s\in(0,T)}} \frac{|u(x,t)-u(x,s)|}{|t-s|^{\alpha/2}}, \ t \neq s$$

· $C^{2,1}(\overline{Q}_T) = \Big\{u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}; u, Du, D^2u, \partial_t u \in C(\overline{Q}_T)\Big\}$

· $C^{1,1/2}(\overline{Q}_T) = \Big\{u : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}; u \in C(\overline{Q}_T); [u]_{x,1,1/2;Q_T} + [u]_{t,1,1/2;Q_T} < \infty\Big\}$

$$[u]_{x,1,1/2;Q_T} = \sup_{\substack{x,y\,\in\,\Omega \\ t\in(0,T)}} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|}, \ x \neq y; \ [u]_{t,1,1/2;Q_T} = \sup_{\substack{x\,\in\,\Omega \\ t,\,s\in(0,T)}} \frac{|u(x,t)-u(x,s)|}{|t-s|^{1/2}}, \ t \neq s$$

Tanto para os espaços de Lebesgue (L) e Sobolev (W) parabólicos a seguir, usamos [18] como principal referência.

· $W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}; D^{\alpha}u \in L^p(\Omega) \textit{ para todo multi-índice } \alpha \textit{ tal que } |\alpha| \leq k\}$

$$||u||_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} \int |D^{\alpha}u|^p\right)^{1/p} & , \quad 1 \leq p < \infty; \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|\leq k} ||D^{\alpha}u||_{\infty} & , \quad p = \infty. \end{cases}$$

· $W^{2,1}_{\infty}(Q_T) = \{u \colon Q_T \to \mathbb{R}; u, Du, D^2u, \partial_t u \in L^{\infty}(Q_T)\}$

· $W^{1,1}_2(Q_T) = \{u \colon Q_T \to \mathbb{R}; u, Du, \partial_t u \in L^2(Q_T)\}, \ ||u||_{W^{1,1}_2(\Omega_T)} = ||u||_2 + ||Du||_2 + ||\partial_t u||_2$

· $W^{1,0}_2(Q_T) = \{u \colon Q_T \to \mathbb{R}; u, Du \in L^2(Q_T)\}, \ ||u||_{W^{1,0}_2(Q_T)} = ||u||_2 + ||Du||_2$

· $L_{p,q}(Q_T) = \{u \colon Q_T \to \mathbb{R}; ||u||_{L_{p,q}} < \infty\}$

$$\|u\|_{L_{p,q}(Q_T)} = \left(\int_0^T \int_{\Omega} |u(x,t)|^p dxdt\right)^{1/q}$$

Quando $p = q$, $L_p(Q_T) = L_{p,p}(Q_T)$ e $\|\cdot\|_p = \|\cdot\|_{L_{p,p}(Q_T)}$, $p \geq 1$. Além disso, para t fixado o espaço será denotado por $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, com norma

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x,t)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Seja X um espaço de Hölder ou Sobolev. As notações X_0, X^{∞} e X_{loc} denotam respectivamente o conjunto das funções com suporte compacto, que são infinitamente diferenciáveis e estão localmente definidas em $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Sumário

Introdução

Problemas de fronteira livre envolvem, particularmente, equações elípticas e parabólicas que apresentam aplicações em diversas áreas científicas como Física, Química, Biologia, Astronomia, Engenharia, entre outras. Aparecem em teoria da elasticidade, *design* ótimo, problemas de supercondutividade, etc. Em essência, um problema de fronteira livre é traduzido por uma equação diferencial parcial dependendo de uma ou mais variáveis, espacial e temporal por exemplo, em que o objetivo é obter um modelo matemático para fenômenos governados por estas equações, nas quais *a priori*, não se têm informações a respeito da geometria/regularidade da fronteira do domínio envolvido, surgindo assim a nomenclatura "fronteira livre". Estes problemas também surgem no estudo de fenômenos que ocorrem transição de fase. Exemplos clássicos destas situações são: fusão entre água e gelo, processo de combustão de um gás, problema de obstáculo, problema de cavidade, etc.

Dentre os problemas acima citados, destacamos os dois últimos, iniciando com o *problema de obstáculo*. Um exemplo deste problema é o de minimizar a energia de uma membrana fixada na fronteira de um conjunto e apoiada sobre um "objeto". Em outras palavras, estabelecer a melhor posição, em acordo com o surgimento de forças externas, que uma membrana está acima de um "objeto" fixado.

Matematicamente, considere o problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u & = & f, & \Omega, \\ u & = & g, & \partial\Omega, \end{array}\right.$$

onde Ω é um subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, $g \in H^1(\Omega)$ e $f \in L^\infty(\Omega)$. Nesta situação, é possível encontrar uma função (uma membrana) prescrita na fronteira de Ω de modo que sua energia seja a menor possível, ou seja, é possível minimizar a energia de todas as membranas fixadas sobre $\partial\Omega$. Para fixar ideias, lembremos que o minimizante para o funcional

$$J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + 2fu\right)$$

onde

$$\mathcal{K}_g = \left\{u \in H^1(\Omega); u - g \in H^1_0(\Omega)\right\}$$

é solução da equação de Poisson acima no sentido das distribuições, isto é,

$$\int_\Omega (\nabla u \nabla \eta + f\eta) = 0,$$

para todas as funções testes $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$.

Agora, suponha que exista um obstáculo $\varphi \in C^2(\Omega)$ tal que $\varphi \leq g$ em $\partial\Omega$ no sentido que $(\varphi - g)_+ \in H^1_0(\Omega)$. O problema de obstáculo consiste em minimizar J na classe

$$\mathcal{K}_{g,\varphi} = \left\{u : H^1(\Omega) \to \mathbb{R} : u - g \in H^1_0(\Omega),\ u \geq \varphi \ q.t.p \ em \ \Omega\right\}.$$

Extremamente importante para o desenvolvimento da teoria de regularidade em equações elípticas, este problema tem sido estudado extensivamente nas últimas três décadas. Uma excelente referência é [23] e, para resultados mais básicos, sugerimos [28].

Outra importante classe de problemas de fronteira livre é o chamado *problema de cavidade.* Considere uma função suave e positiva F e o funcional

$$J(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + F^2(x)\chi_{\{u>0\}} \right) dx,$$

onde a integral do gradiente é a energia e a segunda integral representa a massa do conjunto de positividade. Como no problema de obstáculo, o objetivo é minimizar o funcional J acima, mas agora em

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in H^1(\Omega); u \in C(\Omega) \cap H^1(\Omega),\ u - g = 0 \ em \ \partial\Omega \right\}.$$

Este modelo é utilizado para estudar o comportamento de fluxos cavitacionais para fluídos estacionários. Um tratamento completo deste problema pode ser encontrado em [13].

Mais geralmente, poderíamos considerar o funcional

$$J_\gamma(u) = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 + \left(u^+\right)^\gamma \right) dx,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $0 \leq \gamma \leq 2$ está fixado. Os casos $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$ correspondem aos problemas de cavidade e de obstáculo, respectivamente. Novamente minimizamos J_γ na classe $\mathcal{K}$ definida acima. Além de ser uma classe de problemas que, de certa maneira, interpolam dois casos extremamente importantes, mínimos para J_γ satisfazem, pelo menos formalmente, para $0 < \gamma \leq 2$, a seguinte equação:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & 2\gamma \left(u^+\right)^{\gamma-1} \Gamma(|\nabla u|)\chi_{\{u>0\}}, & \Omega, \\ u & = & g, & \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

O problema (1) também surge em modelos de fenômenos químicos envolvendo catálise. Note que o lado direito de (1) é singular quando $0 < \gamma < 1$, o que nos diz que uma solução fraca não pode ser de classe C^2 ao longo de $\partial\{u > 0\}$, o que chamamos de fronteira livre. No caso $1 < \gamma \leq 2$, a pesar de podermos esperar que a solução seja de classe C^2, ainda teremos dificuldades para realizar uma análise fina do conjunto $\partial\{u > 0\}$, que é um dos principais objetivos da teoria de regularidade para problemas de fronteira livre elípticos e parabólicos.

Nesta tese, focamos no estudo de problemas parabólicos cujas soluções exibem fronteira livre, isto é, $\partial\{u > 0\} \neq \emptyset$ e que o lado direito da equação apresenta uma singularidade não tão forte como a da função $u \mapsto \gamma \left(u^+\right)^{\gamma-1}$, $0 < \gamma < 1$.

Passamos a descrever com mais detalhes os problemas considerados. No primeiro capítulo estudamos o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & = & -\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\chi_{\{u>0\}}, & Q_T, \\ u & = & 1, & \partial\Omega \times (0, T], \\ u & = & u_0, & \Omega \times \{0\}, \end{array} \right. \tag{2}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suave, $Q_T = \Omega \times (0, T]$ e $1 < \gamma < 2$. O caso em que $\Gamma \equiv 1$ foi estudado em [7]. A presença do termo não-isotrópico Γ, além de ter importância física, apresenta dificuldades consideráveis ao tentarmos generalizar os resultados de [7] e novas estimativas e ferramentas se fizeram necessárias. Ressaltamos que, em problemas de fronteira livre. estimativas ótimas são essenciais para obter informações geométricas e analíticas do conjunto $\partial\{u > 0\}$. Sendo assim, acreditamos que nossos resultados do Capítulo 1 fornece uma contribuição interessante tendo em vista que as técnicas utilizadas são essencialmente não variacionais.

Após a obtenção de estimativas no tempo e no espaço para soluções de (2), obtemos um resultado de regularidade ótima sob certas hipóteses de crescimento e não-degenerecência em Γ.

Em seguida, um resultado de não-degenerecência é demonstrado, o que implica que obtemos a taxa exata com que uma solução pode ser anular. Algumas informações adicionais como velocidade de propagação finita e densidade positiva da fronteira livre também são obtidas. Finalmente, após o obtenção de estimativas finas com controle de contantes próximo da fronteira livre, obtemos uma estimativa de Hausdorff para o conjunto $\partial\{u > 0\}$.

O segundo capítulo é fruto de publicação ([15]) o qual envolve uma equação parabólica singular com termo logarítmico. Especificamente, consideremos o problema

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u &=& \chi_{\{u>0\}} \log u, & Q_T, \\ u &=& g, & \partial\Omega \times (0,T], \\ u &=& u_0, & \Omega \times \{0\}, \end{array}\right. \tag{3}$$

onde Ω e Q_T satisfazem as mesmas condições acima, $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ e $g \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$.

Notemos inicialmente que, apesar da função $s \mapsto \log s$ ser singular, esta é mais fraca que a função $s \mapsto \gamma s^{\gamma-1}$, $0 < \gamma < 1$. Assim, uma questão importante é saber qual a regularidade ótima neste caso. O problema elíptico associado a (3) foi considerado em [27]. Outro aspecto que dificulta a obtenção de estimativas básicas é o fato do lado direito de (3) mudar de sinal, o que nos impossibilita usar o Princípio do Máximo. Entretanto, frisamos que técnicas de *scaling* são essenciais em problemas que necessitamos obter estimativas finas de crescimento de uma solução.

Como a função $s \mapsto \log s$ não apresenta *scaling*, o problema (3) gera desafios do ponto de vista da teoria da regularidade em problemas de fronteira livre. Problemas desse tipo são considerandos instáveis no sentido que a fronteira livre $\partial\{u > 0\}$ pode apresentar um comportamento muito diferente do que ocorre, por exemplo, no problema de obstáculo.

Apesar destas dificuldades técnicas, com a introdução de um *scaling intrínseco*, conseguimos demonstrar que, próximo de um ponto da fronteira livre, para um tempo $t > 0$ fixado, uma solução cresce a uma taxa ótima do tipo $r^2 \log r$, chamado de crescimento supercaracterístico.

Resumidamente, para o problema (3) estudamos resultados de regularidade ótima para certas soluções deste problema. É importante observar que não é esperado que tenhamos unicidade de soluções para este caso. Obtemos uma solução via um método de perturbação após a obtenção de certas estimativas *a priori* no tempo e no espaço. Estudamos então a regularidade fina da solução limite.

Capítulo 1

Um problema de fronteira livre parabólico não-isotrópico com absorção forte

1.1 Introdução

Neste capítulo estudamos o problema de fronteira livre parabólico com dependência do gradiente,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= -\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\chi_{\{u>0\}}, & Q_T, \\ u &= 1, & \partial\Omega \times (0,T], \\ u &= u_0, & \Omega \times \{0\}, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

onde $Q_T = \Omega \times (0,T]$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado suave. A dependência do gradiente torna o problema não-isotrópico. Além disso, é um problema de absorção forte, ou seja, não existe singularidade visto que vamos assumir o caso em que $\gamma \in (1,2)$. Para simplificar nossas estimativas, vamos também assumir $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$. Entretanto, as condições para os dados de fronteira poderiam ser mais gerais como por exemplo em $W^{2,1}_\infty(Q_T)$.

Vamos assumir $\Gamma : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\Gamma(t) = 1 + t^m, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq m < 2 - \gamma. \tag{1.1.2}$$

A função acima poderia ser mais geral. De fato, basta escolher Γ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\Gamma \in C^1(0,\infty),\ \Gamma(0) > 0,\ \Gamma'(t) \geq 0 \tag{1.1.3}$$

e

$$t\Gamma''(t) \leq \Gamma'(t), \quad 0 < t < t_0, \tag{1.1.4}$$

com t_0 fixado.

Por uma solução de (1.1.1) definimos como uma função $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ satisfazendo para qualquer função teste $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$ com $\eta \equiv 0$ em $\partial\Omega \times (0,T]$ e para todo $\tau \in (0,T)$ a identidade integral

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\tau \int_\Omega \gamma \eta u^{\gamma-1} \Gamma(|\nabla u|) \chi_{\{u>0\}} dxdt \\
&\qquad = \int_\Omega u(\tau)\eta(\tau)dx - \int_\Omega u_0 \eta(0) dx + \int_0^\tau \int_\Omega \left(-u\partial_t \eta + \langle \nabla u, \nabla \eta \rangle\right) dxdt. \qquad (1.1.5)
\end{aligned}
$$

Problemas de fronteira livre do tipo absorção forte tem sido objeto de estudos nas últimas décadas. Por exemplo, nos trabalhos [24] e [26], Phillips estudou a equação

$$\Delta u = \gamma u^{\gamma-1}, \quad 1 < \gamma < 2, \qquad (1.1.6)$$

com condição de Dirichlet não homogênea obtendo resultados de regularidade para soluções que apresentam fronteira livre e também estimativas para a medida de Hausdorff.

Propriedades de regularidade para o problema (1.1.6) também foram estudadas três anos mais tarde por Alt e Phillips em [2] para equações elípticas semilineares. Diaz, Morel e Oswald em [9] trabalharam com o mesmo problema com um termo forçante $f(x) \in L^1(\Omega)$.

Observe que quando fazemos $\gamma \to 1$, (1.1.1) é um problema do tipo obstáculo, por Caffarelli em [5].

Além do trabalho de Choe e Weiss ([7]), destacamos outra importante referência que norteou o estudo deste capítulo, um artigo recentemente publicado por Montenegro, Queiroz e Teixeira ([22]), no qual é tratado propriedades de existência e regularidade para o problema

$$
\begin{cases}
\Delta u = \left(-\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|) + \lambda f(x,u)\right) \chi_{\{u>0\}}, & \Omega, \\
u = 0, & \partial\Omega,
\end{cases}
$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\lambda > 0$, $0 < \gamma < 1$ e Γ e f satisfazendo propriedades apropriadas.

Para motivar, considere o problema unidimensional

$$
\begin{cases}
u'' = \gamma u^{\gamma-1} \chi_{\{u>0\}}, & (-1,1), \\
u = g, & \{-1,1\},
\end{cases} \qquad (1.1.7)
$$

onde a função g satisfaz certos dados de fronteira e $1 < \gamma < 2$.

Observe que (1.1.7) possui uma solução explícita. A saber, a função

$$u(x) = \left(\frac{2}{(2-\gamma)^2}\right)^{1/(\gamma-2)} (x^+)^{2/(2-\gamma)}, \quad x^+ = \max\{x, 0\}$$

cujo expoente $2/(2-\gamma) > 1$. Observe também que sua derivada

$$u'(x) = (2-\gamma)\left(\frac{2}{(2-\gamma)^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma-2}} (x^+)^{\gamma/(2-\gamma)}$$

ainda possui expoente maior que 1. Entretanto, a derivada segunda

$$u''(x) = \gamma \left(\frac{2}{(2-\gamma)^2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma-2}} (x^+)^{\frac{2(\gamma-1)}{(2-\gamma)}}$$

possui expoente $2(\gamma-1)/(2-\gamma)$ que pertence ao intervalo $(0,1)$. Portanto, a deriva de terceira ordem da solução de (1.1.7) possui descontinuidade na origem. Isto significa que o problema (1.1.7) apresenta condição de fronteira livre.

Diante deste exemplo, uma pergunta natural é: em dimensões maiores, por exemplo, ao considerar um problema cuja equação seja

$$\Delta u = \gamma u^{\gamma-1}, \quad 1 < \gamma < 2,$$

é possível encontrar uma solução que se anule num dado conjunto e que próximo aos pontos deste conjunto seu comportamento local seja como a solução do problema motivacional? Além disso, se incluirmos a variável temporal, ainda encontraremos solução satisfazendo tais propriedades?

Neste sentido, nos motivamos a estudar o problema (1.1.1) e dentre outros objetivos, demonstrar heuristicamente que, localmente próximo dos pontos onde a solução se anula, ou seja, próximo dos pontos da fronteira livre, ela se comporta como a solução explícita do problema (1.1.7).

1.2 Existência e estimativa básica

Seja v solução do problema

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v &= 1, & Q_T, \\ v &= 1, & \partial\Omega \times (0,T], \\ v &= u_0, & \Omega \times \{0\}. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Então, vemos que $\overline{v} = v$ é supersolução de (1.2.1). Como $\underline{v} = 0$ é subsolução, temos que existe uma solução u de (1.1.1) no sentido (1.1.5) satisfazendo $\underline{v} \leq u \leq \overline{v}$. Isto, demonstra o nosso primeiro teorema.

Teorema 1.2.1. *O problema* (1.1.1) *possui uma solução no sentido* (1.1.5).

O próximo resultado nos dá uma estimativa *a priori* para (qualquer) solução de (1.1.1).

Teorema 1.2.2. *Se u é qualquer solução de* (1.1.1) *e Γ satisfaz* (1.1.3)*, então existe uma constante não negativa M tal que $||u||_\infty \leq M < \infty$.*

Demonstração. Seja $M' = \max\{1, M\}$. Como $\Gamma(0) > 0$ e $\Gamma' \geq 0$ então $\Gamma > 0$. Defina $v := u - M'$. Temos que

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v &\leq 0, & Q_T, \\ v &\leq 0, & \partial_p Q_T. \end{cases}$$

Portanto, pelo Princípio do Máximo, $v \leq 0$ em $\overline{Q}_T$, ou seja, $u \leq M'$. □

Observação 1.2.3. *Pela teoria parabólica nos espaços de Schauder e L^p, pode-se demonstrar que u é suave em $\{u > 0\}$.*

1.3 Estimativas ótimas

Nesta seção apresentamos estimativas que nos permitirá investigar a regularidade ótima da solução u de (1.1.1).

Iniciamos com a estimativa em tempo demonstrando que $\partial_t(u^{2-\gamma})$ é localmente limitada.

Lema 1.3.1. *Se u é uma solução de* (1.1.1)*, então*

$$\sup_{Q_T} |\partial_t(u^{2-\gamma})| \leq (2-\gamma)M,$$

para alguma constante M dependendo apenas de γ, u_0, Ω e T.

Demonstração. Note que não há o que demonstrar no conjunto $\{\partial_t u = 0\}$. Se $u(x,t) = 0$, então por propriedades de suavidade de u temos que $\partial_t u(x,t) = 0$. Resta analisar o último caso, para isso, defina

$$v(x,t) := |\partial_t u(x,t)|^{1/(\gamma-1)} - u(x,t)$$

e assuma

$$\sup_{Q_T} v(x,t) > 0$$

com (x,t) pertencente ao interior de Q_T. Então, obtemos um ponto

$$(x_0,t_0) \in \{u > 0\} \cap \{\partial_t u \neq 0\} \cap Q_T$$

tal que

$$(\Delta - \partial_t)v(x_0,t_0) \leq 0. \tag{1.3.1}$$

Vamos calcular explicitamente a equação para v em (x_0,t_0). Temos,

$$\partial_t\left(|\partial_t u|^{1/(\gamma-1)}\right) = \frac{1}{\gamma-1}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}\partial_t u \partial_{tt} u \tag{1.3.2}$$

e

$$\Delta\left(|\partial_t u|^{1/(\gamma-1)}\right) = \frac{2-\gamma}{(\gamma-1)^2}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}|\partial_t \nabla u|^2 + \frac{1}{\gamma-1}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}\partial_t u \partial_t \Delta u. \tag{1.3.3}$$

Segue de (1.3.2) e (1.3.3) que

$$\begin{aligned} 0 \geq (\Delta - \partial_t)v &= \frac{2-\gamma}{(\gamma-1)^2}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}|\partial_t \nabla u|^2 + \gamma u^{\gamma-2}\Gamma(|\nabla u|)\left(|\partial_t u|^{1/(\gamma-1)} - u\right) \\ &+ \frac{\gamma}{\gamma-1}u^{\gamma-1}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}\partial_t u \partial_t(|\nabla u|)\Gamma'(|\nabla u|) \\ &> \frac{2-\gamma}{(\gamma-1)^2}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}|\partial_t \nabla u|^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}u^{\gamma-1}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}\partial_t u \partial_t(|\nabla u|)\Gamma'(|\nabla u|). \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

Como (x_0,t_0) é um ponto de máximo de v, obtemos

$$\frac{1}{\gamma-1}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}\partial_t u \partial_t \nabla u = \nabla u.$$

Um simples cálculo nos permite concluir que

$$\partial_t(|\nabla u|) = \frac{\nabla u \partial_t \nabla u}{|\nabla u|}.$$

Estas identidades juntas implicam,

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}|\partial_t u|^{\frac{3-2\gamma}{\gamma-1}}\partial_t u \partial_t(|\nabla u|)\Gamma'(|\nabla u|) = \frac{\gamma}{(\gamma-1)^2|\nabla u|}u^{\gamma-1}|\partial_t u|^{\frac{2(2-\gamma)}{\gamma-1}}|\partial_t \nabla u|^2\Gamma'(|\nabla u|) \geq 0. \quad (1.3.5)$$

No caso em que $|\nabla u(x_0,t_0)| \neq 0$, (1.3.5) em (1.3.4) nos dá a contradição $0 > 0$. Por outro lado, temos $\partial_t|\nabla u(x_0,t_0)| = 0$ pela suavidade de u e isto também gera a mesma contradição em (1.3.4).

Portanto, a função $v(x,t)$ não atinge supremo positivo no interior de Q_T. A continuidade de $\partial_t u$ e Δu em $\overline{Q}_T$ implica que

$$\sup_{Q_T}\left(|\partial_t u| - u^{\gamma-1}\right) \leq \sup_{\partial_p Q_T}\left(|\partial_t u| - u^{\gamma-1}\right) \leq 0,$$

visto que $|\partial_t u| = 0$ ao longo da fronteira parabólica.

Façamos agora os cálculos de $\partial_t(u^{2-\gamma})$ no sentido distribucional. Fixando uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(Q_T)$ e integrando por partes, obtemos a identidade

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega (u+\epsilon)^{2-\gamma}\varphi_t &= -\int_0^T\int_\Omega \partial_t\left((u+\epsilon)^{2-\gamma}\right)\varphi \\ &= -(2-\gamma)\int_0^T\int_{\{u>0\}}(u+\epsilon)^{1-\gamma}u_t\varphi\end{aligned}$$

e como $(u+\varepsilon)^{2-\gamma}\partial_t\varphi$ é limitado, segue do Teorema da Convergência Dominada para $\varepsilon \to 0^+$ que

$$\int_0^T\int_\Omega (u+\varepsilon)^{2-\gamma}\partial_t\varphi \to \int_0^T\int_\Omega u^{2-\gamma}\partial_t\varphi.$$

Analogamente,

$$\int_0^T\int_{\{u>0\}}(u+\varepsilon)^{1-\gamma}\partial_t u\varphi \to \int_0^T\int_{\{u>0\}} u^{1-\gamma}\partial_t u\varphi,$$

o que demonstra

$$\partial_t\left(u^{2-\gamma}\right) = (2-\gamma)u^{1-\gamma}\partial_t u\chi_{\{u>0\}}.$$

Obtemos a estimativa com a última identidade junto com a primeira parte. □

Devido a existência do termo não-isotrópico Γ, precisamos demonstrar uma estimativa auxiliar para o gradiente.

Lema 1.3.2. *Seja u uma solução de* (1.1.1) *com condição inicial $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$. Existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de $n, \gamma, \Gamma, u_0, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$ e $\|u\|_\infty$ tal que*

$$|\nabla u(x,t)| \leq C \text{ para todo } x \in \Omega',\ t \in [0,T]. \quad (1.3.6)$$

Demonstração. Seguindo as ideias de [8] vamos considerar uma função ψ satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\psi \in C^2(\overline{\Omega}),\ \psi > 0 \text{ em } \Omega,\ \psi = 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ e tal que } \frac{|\nabla\psi|^2}{\psi} \text{ é limitado em } \Omega. \quad (1.3.7)$$

Um exemplo de uma função ψ que satisfaz as condições acima é a primeira autofunção do problema de Laplace com condição de Dirichlet (Apêndice − Lema A.16). Note que existe uma constante $\delta' > 0$ tal que $\psi \geq \delta'$ em Ω'. Defina a função

$$v := \psi |\nabla u|^2$$

e suponha por contradição que

$$\sup_{Q_T} v > C \tag{1.3.8}$$

mesmo que a constante C seja tomada suficientemente grande.

Observe que v é contínua em $\overline{Q}_T$ e então existe um ponto $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$ em que v atinje máximo. Assim,

$$v(x_0, t_0) > C. \tag{1.3.9}$$

Uma vez que $v = 0$ em $\partial\Omega$, visto que ψ o é, vemos que x_0 é um ponto interior de $\overline{\Omega}$ e por (1.3.9) temos que $t_0 > 0$. Consequentemente,

$$\nabla v(x_0, t_0) = 0 \tag{1.3.10}$$

e

$$\Delta v(x_0, t_0) - \partial_t v(x_0, t_0) \leq 0. \tag{1.3.11}$$

Vamos mostrar que para uma constante $C > 0$ suficientemente grande obtemos o absurdo $\Delta v(x_0, t_0) - \partial_t v(x_0, t_0) > 0$. A partir de agora, todos os cálculos relacionados a função v e suas derivadas serão avaliados em (x_0, t_0). Além disso, vamos omitir o símbolo do somatório quando necessário. Temos,

$$\Delta\left(|\nabla u|^2\right) = 2\left(\partial_{ij} u\right)^2 + 2\partial_j u \partial_j(\Delta u) \quad \text{e} \quad \partial_t\left(|\nabla u|^2\right) = 2\partial_j u \partial_j(\partial_t u). \tag{1.3.12}$$

Como consequência de (1.3.10),

$$\nabla\left(|\nabla u|^2\right) \nabla\psi = -|\nabla u|^2 \frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}. \tag{1.3.13}$$

Portanto, escrevendo $\beta(u) = \gamma u^{\gamma-1}$ e usando (1.3.10), (1.3.12) e (1.3.13) segue que

$$\begin{aligned} \Delta v - \partial_t v &= \psi\left(\Delta\left(|\nabla u|^2\right) - \partial_t\left(|\nabla u|^2\right)\right) + |\nabla u|^2(\Delta\psi - 2|\nabla\psi|^2/\psi) \\ &= 2\psi\left((\partial_{ij} u)^2 + |\nabla u|^2 \beta'(u)\Gamma(|\nabla u|) + \beta(u)\partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u / |\nabla u|\right) + |\nabla u|^2(\Delta\psi - 2|\nabla\psi|^2/\psi). \end{aligned}$$

Assumindo sem perda de generalidade que $\nabla u(x_0, t_0)$ é paralelo ao eixo da primeira coordenada e usando novamente (1.3.10), obtemos a expressão

$$\partial_{11} u = -\frac{1}{2}|\nabla u|^2 \frac{\partial_1\psi}{\psi\partial_1 u}.$$

Como $(\partial_{ij} u)^2 \geq (\partial_{11} u)^2$, usamos a última expressão para concluir que

$$\begin{aligned} \Delta v - \partial_t v \geq |\nabla u|^2 \Bigg(& \frac{(\partial_1\psi)^2}{2\psi} + 2\psi\beta'(u)\Gamma(|\nabla u|) - |\nabla u|\beta(u)\Gamma'(|\nabla u|)\frac{\partial_1\psi}{\partial_1 u} \\ & + \Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\Bigg). \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

Vamos estimar os termos que aparecem acima. Primeiramente, observe que de (1.3.7) vemos que em $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$-|\nabla u|\frac{\partial_1 \psi}{\partial_1 u} \geq -\psi^{1/2}\sup_{\Omega'}\frac{|\nabla \psi|}{\psi^{1/2}}, \tag{1.3.15}$$

e

$$\Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi} \geq -\sup_{\Omega'}\left(\left|\Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\right|\right). \tag{1.3.16}$$

Por outro lado, pelas hipóteses (1.1.3) sobre a função Γ e definição de β temos que

$$\Delta v - \partial_t v \geq |\nabla u|^{m+2}\left(K_1 - K_2\left(\psi^{1/2}|\nabla u|^{-1} - |\nabla u|^{-m-2}\right)\right)$$

onde K_1 e K_2 são constantes positivas. Agora, se tomarmos $C > 0$ suficientemente grande em (1.3.8) obtemos a contradição. $\square$

A estimativa do Lema 1.3.2 não é ótima (Lema 1.3.4). Contudo, nos permite demonstrar o próximo resultado, que é uma desigualdade do tipo Harnack.

Proposição 1.3.3. *Sejam u solução de* (1.1.1), $(x_0, t_0) \in Q_T$ *e* $r_0 > 0$ *tais que* $B_{r_0}(x_0) \subset \Omega$. *Existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de n, γ, r_0 e Γ tal que*

$$\sup_{B_r(x_0)} u \leq C\left(\inf_{B_r(x_0)} u + r^{2/(2-\gamma)}\right),$$

para qualquer $0 < r \leq r_0$. *Em particular, se* $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, *então*

$$u(x) \leq C|x - x_0|^{2/(2-\gamma)} \text{ para todo } x \in B_r(x_0).$$

Demonstração. Como em [7], defina a função

$$u_r(x,t) := r^{-2/(2-\gamma)}u(x_0 + rx, t_0 + r^2t),\ 0 < r \leq r_0$$

e note que u_r satisfaz

$$\Delta u_r = \partial_t u_r + \gamma u_r^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|),\ B_1(0).$$

Pela Desigualdade de Harnack (Apêndice − Teorema A.14) para equações lineares e pelos Lemas 1.3.1 e 1.3.2 obtemos,

$$\begin{aligned}\sup_{B_{1/2}(0)} u_r &\leq C\left(\inf_{B_{1/2}(0)} u_r + \left\|\gamma\Gamma(|\nabla u|)u_r^{\gamma-1} + \partial_t u_r\right\|_{L^\infty(B_1(0))}\right)\\ &\leq C\left(\inf_{B_{1/2}(0)} u_r + \left(\sup_{B_1(0)} u_r\right)^{\gamma-1}\right).\end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Agora, defina $r_i := 2^{-i}c$ com $c \in [r_0/2, r_0]$. Pela estimativa (1.3.17) acima

$$r_0^{-2/(2-\gamma)}\sup_{B_{r_0/2}(x_0)} u \leq C\left(r_0^{-2/(2-\gamma)}\inf_{B_{r_0/2}(x_0)} u + \left(r_0^{-2/(2-\gamma)}\sup_{B_{r_0}(x_0)} u\right)^{\gamma-1}\right)$$

e como $r < r_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $r_n = r$, implicando que

$$\begin{aligned} \sup_{B_r(x_0)} u &\leq C \inf_{B_r(x_0)} u + Cr^{2/(2-\gamma)} 2^{\frac{2n(\gamma-1)}{2-\gamma}} \left(\sup_{B_{r_0}(x_0)} u \right)^{\gamma-1} \\ &\leq C \left(\inf_{B_r(x_0)} u + r^{2/(2-\gamma)} \right), \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

como queríamos. □

Vamos concluir esta seção mostrando que $\left|\nabla \left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|$ é localmente limitado em Q_T.

Lema 1.3.4. *Se u é uma solução de* (1.1.1)*, então existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de n, γ, T e $r_0 \in (0,1)$ tal que*

$$\left\|\nabla \left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right\|_{L^\infty(\Omega_{r_0} \times (r_0, T-r_0))} \leq C.$$

Demonstração. Suponha que exista uma sequência de soluções $(u_s)_s$ de (1.1.1) e uma sequência $((x_s, t_s))_s$ tal que

$$(x_s, t_s) \in \{u_s > 0\} \cap (\Omega_{r_0} \times (r_0, T - r_0))$$

e

$$\left|\nabla \left(u_s^{(2-\gamma)/2}\right)(x_s, t_s)\right| \to \infty \tag{1.3.19}$$

quando $s \to \infty$. Usando o mesmo argumento de Choe e Weiss em [7], defina a sequência

$$v_s(x,t) := r_s^{-2/(2-\gamma)} u_s(x_s + r_s x, t_s + r_s^2 t), \ x \in B_1(0),$$

onde $r_s := r_0 u_s(x_s, t_s)^{(2-\gamma)/2}$. Observe que, como u_s é limitada podemos sem perda de generalidade assumir $r_s \leq r_0$. Assim, pela Proposição 1.3.3 temos que

$$\begin{aligned} \sup_{B_1(0)} v_s &\leq C \left(r_s^{-2/(2-\gamma)} \inf_{B_{r_s}(x_s)} u_s + 1 \right) \\ &\leq C \left(r_0^{-2/(2-\gamma)} + 1 \right). \end{aligned} \tag{1.3.20}$$

Portanto,

$$v_s(x,t) \leq C, \ B_1(0) \times (-1, 0),$$

ou seja, $v_s \in L^\infty(\overline{Q_1^-(0)})$. Assim, pela teoria de regularidade parabólica, v_s é uma sequência limitada em $C^{0,\beta}(\overline{B_{1/2}(0)} \times [-1/2, 0])$ para algum $\beta \in (0,1)$ e por imersão compacta, temos que a menos de uma subsequência,

$$v_s \to v_0 \ \text{ em } \ C(\overline{B_{1/2}(0)} \times [-1/2, 0]).$$

Agora, $v_s(0) > 0$, então $v_s \geq C_1 > 0$ em $\overline{Q_s^-(x_0)}$ para s suficientemente grande. Então, $v_s^{1/2}$ é uniformemente positiva e novamente pela teoria de regularidade é limitada em $C^1(\overline{Q_{s/2}(x_0)})$. Isso contradiz (1.3.19) observado que

$$\left|\nabla v_s^{1/2}(x_s, t_s)\right| = \left|\nabla (u_s^{(2-\gamma)/2})(x_s, t_s)\right| \to \infty.$$

Em particular existe uma constante $0 < C_1 = C_1(\gamma)$ tal que

$$|\nabla u|^2 \leq C u^\gamma. \tag{1.3.21}$$

Finalmente, usando (1.3.21) e a sequência $(u + \varepsilon)^{(2-\gamma)/2}$, basta proceder como no Lema 1.3.1 para concluir a demonstração. □

De posse dos resultados anteriores, podemos obter a regularidade ótima da solução u de (1.1.1) através do corolário abaixo.

Corolário 1.3.5. *Se u é uma solução de* (1.1.1)*, então* $u^{(2-\gamma)/2} \in C^{1,1/2}(\Omega_{r_0} \times (r_0, T - r_0))$.

Observação 1.3.6. *A demostração do corolário acima segue diretamente do Lema 1.3.4 e do Lema 1.3.1 combinado com o Lema A.15.*

1.4 Estimativas finas próximo da fronteira livre

1.4.1 Não-degenerescência

Iremos agora demonstrar que uma solução u de (1.1.1) satisfaz a propriedade chamada de não-degenerescência, mais precisamente, em nosso caso, obtemos uma limitação inferior para solução do tipo Cr^α com $\alpha > 2$ e $0 < r < r_0$. A ideia da demonstração deste fato foi extraída de [7].

Lema 1.4.1. *Seja u solução de* (1.1.1)*. Existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de n e γ tal que*

$$\sup_{Q_r^-(x_0,t_0)} u \geq Cr^{2/(2-\gamma)},$$

para todo $(x_0, t_0) \in \overline{\{u > 0\}}$, $Q_r(x_0, t_0) \subset \Omega \times (0, \infty)$ *e qualquer* $0 < r < r_0$.

Demonstração. Como antes, defina a função

$$u_r(x, t) := r^{-2/(2-\gamma)} u(x_0 + rx, t_0 + r^2 t)$$

e observe que pela hipótese (1.1.2) e pelo Lema 1.3.2 obtemos uma constante C tal que

$$\partial_t u_r - \Delta u_r \geq -C\gamma u_r^{\gamma-1}. \tag{1.4.1}$$

Agora, defina a função

$$v(x, t) = \left(\frac{\beta(2-\gamma)}{4n} \left(|bx|^2 - 2nb^2 t \right) \right)^{1/(2-\gamma)}, \ B_1(0) \times [-1, 0].$$

onde $b^2 = C\gamma$ e C é a mesma constante de (1.4.1) e $\beta = n(2-\gamma)/(\gamma + n(2-\gamma))$.

Iremos mostrar que v também satisfaz uma inequação do tipo (1.4.1) e em seguida usar o princípio da comparação. Para isso, façamos os cálculos necessários das derivadas de v. Temos,

$$\partial_t v = -\frac{\beta b^2}{2} \left(\frac{\beta(2-\gamma)}{4n} \left(|bx|^2 - 2nb^2 t \right) \right)^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}$$

e

$$\Delta v = \frac{\beta b^2}{2} \left(\frac{\beta(2-\gamma)}{4n} \left(|bx|^2 - 2nb^2 t \right) \right)^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}} + \frac{\beta^2 b^2 |bx|^2 (\gamma - 1)}{4n^2} \left(\frac{\beta(2-\gamma)}{4n} \left(|bx|^2 - 2nb^2 t \right) \right)^{\frac{2\gamma-3}{2-\gamma}}.$$

Note que $|bx|^2/(|bx|^2 - 2nb^2t) \leq 1$, então

$$\frac{|bx|^2(\gamma-1)}{(|bx|^2 - 2nb^2t)(\gamma + n(2-\gamma))} \leq \frac{\gamma - 1}{\gamma + n(2-\gamma)}$$

e consequentemente,

$$\frac{\beta|bx|^2(\gamma-1)}{n(2-\gamma)(|bx|^2 - 2nb^2t)} \leq \frac{\gamma - 1}{\gamma + n(2-\gamma)} \leq \frac{\gamma}{\gamma + n(2-\gamma)},$$

ou seja,

$$\frac{\beta|bx|^2(\gamma-1)}{n(2-\gamma)(|bx|^2 - 2nb^2t)} \leq 1 - \beta. \tag{1.4.2}$$

Nomeando

$$X = \frac{\beta(2-\gamma)(|bx|^2 - 2nb^2t)}{4n}$$

e reescrevendo (1.4.2) temos como consequência,

$$1 - \beta - \frac{\beta^2|bx|^2(\gamma-1)}{4n^2}X^{-1} \geq 0$$

e esta por sua vez multiplicada por $b^2X^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}}$ nos dá

$$-\beta b^2 X^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}} - \frac{\beta^2 b^2|bx|^2(\gamma-1)}{4n^2}X^{\frac{2\gamma-3}{2-\gamma}} \geq -b^2X^{\frac{\gamma-1}{2-\gamma}},$$

isto é,

$$\partial_t v - \Delta v \geq -C\gamma v^{\gamma-1}. \tag{1.4.3}$$

Pode-se verificar que v é positiva nos conjuntos $Q_1^-(0)$ e $\partial_p Q_1^-(0)$. Como $u_r(0) > 0$, obtemos pelo Princípio da Comparação Parabólico aplicado a (1.4.1) junto com (1.4.3) a contradição $v(0) > 0$ se assumirmos $u_r \leq v$ em toda fronteira parabólica de $Q_1^-(0)$ uma vez que $v(0) = 0$. Logo, existe um ponto $(\overline{x}, \overline{t}) \in \partial_p Q_1^-(0)$ tal que $v(\overline{x}, \overline{t}) < u_r(\overline{x}, \overline{t})$. A demonstração fica completa ao retornarmos para função u. □

Observação 1.4.2. *Como consequência imediata da Proposição 1.3.3 e do Lema 1.4.1 obtemos controle inferior e superior de u.*

1.4.2 Densidade positiva de Lebesgue

A não-degenerecência demonstrada acima é suficiente para obtermos o próximo resultado, densidade positiva de Lebesgue. Este resultado além de ser crucial para estudarmos a medida de Hausdorff da fronteira livre, nos diz que este conjunto não possui um número expressivo de *blow-ups* triviais, ou pontos de cúspides ou ainda que a fronteira não é tão irregular. Esse é um indicativo de que tal conjunto possa ser localmente uma hiper-superfície.

Lema 1.4.3. *Seja u solução de* (1.1.1). *Existe uma constante $C > 0$ suficientemente pequena dependendo apenas de n, γ, T, M e $r_0 \in (0, 1)$ tal que,*

$$Q_{Cr}(\overline{x}, \overline{t}) \subset \{u > 0\} \cap Q_r(x_0, t_0) \tag{1.4.4}$$

para algum ponto $(\overline{x}, \overline{t}) \in Q_r^-(x_0, t_0)$ e para qualquer $(x_0, t_0) \in \overline{\{u > 0\}}$ satisfazendo a inclusão $Q_r(x_0, t_0) \subset \Omega_{r_0} \times (r_0, T - r_0)$.

Demonstração. Pelo Lema 1.4.1 existe $(y, s) \in Q_{r/2}^-(x_0, t_0)$ tal que

$$u(y, s) \geq \tilde{C} \left(\frac{r}{2}\right)^{2/(2-\gamma)}. \tag{1.4.5}$$

Suponha que para uma escolha apropriada, $d > 0$, e para todo (x, t),

$$(y, s) \in Q_d(x, t) \subset Q_r(x_0, t_0) \text{ e } u(x, t) = 0. \tag{1.4.6}$$

Como u é limitada e $d, \delta > 0$, então existe um número natural k satisfazendo,

$$\sup_{Q_d(x,t)} u^{(2-\gamma)/2} \leq kdM,$$

ou seja,

$$\sup_{Q_d(x,t)} u \leq \overline{C} d^{2/(2-\gamma)} \tag{1.4.7}$$

onde $\overline{C} = (kM)^{2/(2-\gamma)}$. Agora, usando (1.4.5) junto com (1.4.7) segue que a desigualdade

$$e := \frac{r}{2} \left(\frac{\tilde{C}}{\overline{C}}\right)^{(2-\gamma)/2} \leq d$$

é verdadeira, mas isto é uma contradição se $d < e$. Assim, escolhendo

$$d := \min\left\{\left(\tilde{C}/\overline{C}\right)^{(2-\gamma)/2}, 1\right\} r/4$$

não existe ponto (x, t) satisfazendo (1.4.6). Portanto,

$$Q_d(y, s) \subset \{u > 0\} \cap Q_r(x_0, t_0)$$

onde $d = Cr$ e $(y, s) = (\overline{x}, \overline{t})$. □

Observação 1.4.4. *De maneira mais elucidativa, veja que como consequência de* (1.4.4),

$$\mathcal{L}^{n+1}(\{u > 0\} \cap Q_r(x_0, t_0)) \geq \mathcal{L}^{n+1}(Q_{Cr}(\overline{x}, \overline{t})) \geq Cr^{n+2}$$

e consequentemente,

$$\frac{\mathcal{L}^{n+1}(\{u > 0\} \cap Q_r(x_0, t_0))}{\mathcal{L}^{n+1}(Q_r)} \geq C > 0.$$

1.4.3 Velocidade de propagação finita

A difusão do calor pode ser instantânea ou não com a variação do tempo. Iremos demonstrar que a equação modelo deste trabalho não possui esta propriedade, ou seja, a difusão ou transferência de energia térmica não é instantânea, em outras palavras, a velocidade de propagação é finita. Isso é percebido pelo fato de que se a solução é nula em um instante t_0, a mesma continua nula no instante $t_0+\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Lema 1.4.5. *Seja u solução de* (1.1.1). *Existe uma constante $1 \leq S < \infty$ dependendo apenas de n e γ tal que a implicação,*

$$\text{Se } u(\cdot,t_0)=0 \text{ em } B_r(x_0) \text{ então } u\left(\cdot,t_0+s^2\right)=0 \text{ em } B_{\max\{0,r-Ss\}}(x_0)$$

é verdadeira para qualquer $Q_r^+(x_0,t_0)\subset\Omega\times(\tau,\infty)$ e $0<r<r_0$.

Demonstração. Suponha que existam um número real $0<s_1<r/S$ e $x_1\in B_{r-Ss_1}(x_0)$ tais que $u(x_1,t_0+s_1^2)>0$. Então, pelo Lema 1.4.1 existe $(x_2,\overline{t})\in\overline{Q_{s_1}^-(x_1,t_0+s_1^2)}$ de maneira que

$$u(x_2,\overline{t})\geq Cs_1^{2/(2-\gamma)}.$$

Pelo Lema 1.3.1 temos que $u>0$ em Q_T para $\partial_t u\neq 0$. Logo, existem $\theta=\theta(r_0)\in(0,1)$ e um ponto $(x_2,t_0+s_2^2)$ tais que

$$u\left(x_2,t_0+s_2^2\right)>0,\ 0\leq s_2\leq(1-\theta)s_1,\ x_2\in\overline{B}_{s_1}(x_1).$$

Por um processo de iteração obtemos um ponto $(x_k,t_0+s_k^2)$ satisfazendo

$$u(x_k,t_0+s_k^2)>0,\ 0\leq s_k\leq(1-\theta)^{k-1}s_1 \text{ e } |x_k-x_1|\leq\frac{1-(1-\theta)^{k-1}}{1-(1-\theta)}s_1.$$

Note que

$$(1-\theta)^k s_1\leq s_1 \text{ e } |x_k|\leq((1/\theta)-S)s_1+|x_0|+r.$$

Assim, a menos de subsequência em k, segue que

$$\left(x_n,t_0+s_n^2\right)\to(\overline{x},t_0)$$

onde $(\overline{x},t_0)\in\overline{\{u>0\}}$ e $|\overline{x}-x_1|\leq(1/\theta)s_1$. Finalmente, se escolhermos $S\geq 2/\theta$,

$$\begin{aligned}|\overline{x}-x_0|&\leq|\overline{x}-x_1|+|x_1-x_0|\\&\leq((1/\theta)-S)s_1+r\\&<r,\end{aligned}$$

contradizendo que $u(\cdot,t_0)=0$ em $B_r(x_0)$. □

1.5 Estimativas para a medida de Hausdorff

O objetivo central nesta seção é demonstrar que a medida de Hausdorff da fronteira livre, $\partial\{u > 0\}$, é localmente finita. Este resultado é importante tendo vista que possibilita o estudo da regularidade da fronteira livre por meio da teoria geométrica da medida.

Iniciamos com a seguinte estimativa gradiente.

Lema 1.5.1. *Seja u uma solução de* (1.1.1) *e assuma que a função Γ satisfaz* (1.1.2) *e* (1.1.3). *Dado $\eta > 0$, existe uma constante $\theta > 0$ dependendo apenas n, m e $r_0 \in (0,1)$ tal que*

$$|\nabla u|^2 \leq 2(1+\eta)u^\gamma \ \ em \ \ Q_\theta(x_0,t_0),$$

para qualquer $(x_0,t_0) \in \Omega_{r_0} \times (r_0, T-r_0) \cap \partial\{u > 0\}$.

Demonstração. Pelo Lema (1.3.4) existe uma constante $C > 0$ tal que para $0 < r \leq r_0$,

$$|\nabla u|^2 \leq Cu^\gamma, \ B_r(x_0) \times \{t_0\}. \tag{1.5.1}$$

Defina a função

$$\phi(r) := \sup_{\{u>0\}\cap B_r(x_0)\times\{t_0\}} \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}, \quad r \leq r_0.$$

Uma simples verificação permite concluir que ϕ é não-decrescente e por (1.5.1) é limitada. Assim, podemos definir

$$l := \lim_{r\to 0} \phi(r).$$

Nosso objetivo agora será encontrar o valor ótimo de l e para este fim vamos assumir sem perda de generalidade $x_0 = 0$. Escolha uma sequência $(x_n, t_0) \subset \{u > 0\}$ tal que

$$x_n \to 0 \ \text{ e } \ \frac{|\nabla u(x_n,t_0)|^2}{u(x_n,t_0)} \to l. \tag{1.5.2}$$

Defina $\rho_n := u(x_n,t_0)^{1/\alpha}$ onde $\alpha = 2/(2-\gamma)$ e

$$w_n(x,t) := \frac{u(\rho_n x + x_n, \rho_n^2 t + t_0)}{\rho_n^\alpha}, \quad B_1 \times \left((\delta - t_n)/\rho_n^2, (T-\delta-t_n)/\rho_n^2\right).$$

Temos que $u \in C_x^{1,\mu}(B_1)$ para algum $0 < \mu < 1$ e $||u_n||_{C_x^{1,\mu}(B_1)} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, o mesmo ocorre com $w_n(\cdot,\bar{t})$ e consequentemente, por imersão entre os espaços de Hölder, a menos de subsequência temos que

$$w_n(\cdot,0) \to w(\cdot,0) \text{ e } \nabla w_n(\cdot,0) \to \nabla w(\cdot,0) \text{ uniformemente em } \ B_1 \times \{0\}.$$

Além disso, como $w_n(0,0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $B_{r_1} \subset B_1$, $r_1 < r$ tal que

$$\frac{|\nabla w_n(\cdot,0)|^2}{w_n(\cdot,0)^\gamma} \to \frac{|\nabla w(\cdot,0)|^2}{w(\cdot,0)^\gamma} \ \text{ uniformemente em } B_{r_1} \times \{0\}.$$

Note que, pela definição de l e (1.5.2), obtemos que

$$|\nabla w(0,0)|^2 = lw(0,0)^\gamma \text{ e } \ |\nabla w(x,0)|^2 \leq lw(x,0)^\gamma, \ B_{r_1} \times \{0\}. \tag{1.5.3}$$

Assim, $(0,0)$ é ponto de máximo da função

$$v(x,t) := |\nabla w(x,t)|^2 - lw(x,t)^\gamma$$

que satisfaz $v \leq 0$, o que implica,

$$\Delta v(0,0) - v_t(0,0) \leq 0. \tag{1.5.4}$$

Vamos demonstrar que (1.5.4) é falsa se $l > 2\Gamma(0)$, fornecendo assim o valor ótimo para l.

Uma vez que u é solução de (1.1.1),

$$\partial_t w_n(x,t) - \Delta w_n(x,t) = -\gamma w_n(x,t)^{\gamma-1}\Gamma\left(\rho_n^{\alpha-1}|\nabla w_n(x,t)|\right)$$

e em particular,

$$\partial_t w_n(x,0) - \Delta w_n(x,0) = -\gamma w_n(x,0)^{\gamma-1}\Gamma\left(\rho_n^{\alpha-1}|\nabla w_n(x,0)|\right) \tag{1.5.5}$$

Temos que $\alpha - 1 > 0$ e $\rho_n \to 0$, $\nabla w_n(x,0) \to \nabla w(x,0)$ e $\partial_t w_n(x,0) \to \partial_t w(x,0)$ quando $n \to 0$. Portanto, passando o limite em (1.5.5) e avaliando w em $(0,0)$ obtemos,

$$\partial_t w(x,0) - \Delta w(x,0) = -\gamma w(x,0)^{\gamma-1} \;\text{ e }\; w(0,0) = 1 \tag{1.5.6}$$

no sentido das distribuições.

Como $||w_n||_{C_x^{1,\mu}(B_1)} \leq C$, então $|\nabla w_n| < \infty$ e por convergência uniforme $|\nabla w|$ é limitada em $B_1 \times \{0\}$. Logo, pela teoria de regularidade parabólica podemos escolher uma vizinhança V de $(0,0)$ tal que $w \in C^3(V)$.

Podemos assumir sem perda de generalidade que $|\nabla w(0,0)|$ é paralelo a e_1, ou seja,

$$|\nabla w(0,0)| = |\partial_1 w(0,0)|. \tag{1.5.7}$$

Lembrando que $(0,0)$ é um ponto de máximo de v, temos $\partial_1 v(0,0) = 0$ e isto implica que

$$\partial_{11} w(0,0) = \frac{l}{2}\gamma w(0,0)^{\gamma-1} \tag{1.5.8}$$

visto que $\partial_1 w(0,0) \neq 0$. Agora, omitindo o somatório no cálculo de $\Delta v - \partial_t v$ e usando (1.5.3), (1.5.6), (1.5.7) e (1.5.8), todos avaliados em $(0,0)$, obtemos,

$$\begin{aligned}
\Delta v - \partial_t v &= 2(\partial_{ij} w)^2 + 2\partial_i w \partial_i(\Delta w) - l\gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2}|\nabla w|^2 - l\gamma w^{\gamma-1}\Delta w \\
&\quad - 2\nabla w \partial_t \nabla w + l\gamma w^{\gamma-1}\partial_t w \\
&\geq 2(\partial_{11} w)^2 + 2\partial_1 w \partial_1(\Delta w - \partial_t w) - l\gamma w^{\gamma-1}(\Delta w - \partial_t w) \\
&\quad - l\gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2}|\nabla w|^2 \\
&\geq \frac{l^2}{2}\gamma^2 w^{2\gamma-2} + 2\partial_1 w \partial_1(\gamma w^{\gamma-1}) - l\gamma w^{\gamma-1}(\gamma w^{\gamma-1}) \\
&\quad - l\gamma(\gamma-1)w^{\gamma-2}|\nabla w|^2 \\
&= l(l/2-1)(2\gamma - \gamma^2)w^{2\gamma-2}.
\end{aligned}$$

Portanto, se $l > 2$ temos a contradição com (1.5.4), isto é, $\Delta v(0,0) - v_t(0,0) > 0$. $\square$

A próxima estimativa nos fornece a constante ótima para o gradiente próximo da fronteira livre.

Lema 1.5.2. *Sejam u e Γ como no Lema 1.5.1 e assuma adicionalmente que exista Γ_0 satisfazendo $0 < \Gamma_0 \leq \Gamma(|\nabla u|)$ em $Q_r(x_0, t_0)$ e $\gamma - 1 < s \leq \min\{p, \gamma/2\}$. Então existem constantes $r = r(r_0) > 0$ e $\Pi = \Pi(r, s, \Gamma_m)$ tais que*

$$|\nabla u|^2 \leq 2u^\gamma \Gamma(|\nabla u|) + \Pi(2r_0)^\beta u^{s+1} \quad em \quad Q_r(x_0, t_0)$$

para todo $(x_0, t_0) \in (\Omega_{2r_0} \times (2r_0, T - 2r_0)) \cap \partial\{u > 0\}$ onde $\beta = -2(s + 1 - \gamma)/(2 - \gamma)$.

Demonstração. Utilizando o *scaling* $u_{2r_0}(x, t) = (2r_0)^{-2/(2-\gamma)} u(x_0 + 2r_0 x, t_0 + (2r_0)^2 t)$, podemos assumir $r_0 = 1/2$. Defina para $r < 1/3$ a função

$$\xi(t) = \begin{cases} 2C_r, & 0 \leq t \leq r, \\ C_r(t - r)^3 + 2C_r, & r \leq t \leq 3r, \end{cases} \tag{1.5.9}$$

onde C_r é a mesma constante do Lema (1.3.4).

Afim de aplicar o Princípio do Máximo, defina

$$w(x, t) = |\nabla u(x, t)|^2 - 2u(x, t)^\gamma \Gamma(|\nabla u(x, t)|) - \Pi u(x, t)^{s+1} - \xi(|x - x_0|/3) u(x, t)^\gamma$$

para todo $(x, t) \in \{u > 0\} \cap Q_{3r}(x_0, t_0)$.

Note que $w \in C^2(\{u > 0\} \cap Q_{3r}(x_0, t_0))$ e

$$w(x, t) \leq |\nabla u(x, t)|^2 - \xi(|x - x_0|/3) u(x, t)^\gamma. \tag{1.5.10}$$

Queremos $w \leq 0$ em $Q_r(x_0, t_0)$. Para obter isto, vamos mostrar que $w \leq 0$ em $Q_{3r}(x_0, t_0)$ (obtendo assim o desejado) e para este fim a função ξ é essencial. Usando (1.5.10) podemos ver que $w < 0$ em $\partial_p Q_{3r}(x_0, t_0)$.

Seja (y_1, t_1) um ponto de máximo de w. Se (y_1, t_1) é ponto de fronteira, então $w \leq 0$ em $Q_{3r}(x_0, t_0)$ visto que w é negativa na fronteira parabólica. Logo, é suficiente analisar (y_1, t_1) como ponto interior e nesse caso, $\Delta w(y_1, t_1) - \partial_t w(y_1, t_1) \leq 0$. Nosso objetivo a partir de agora será obter a contradição $\Delta w(y_1, t_1) - \partial_t w(y_1, t_1) > 0$ se assumirmos $w(y_1, t_1) > 0$ com escolhas de r e Π adequadas.

Como antes, ao proceder com os cálculos, iremos omitir o símbolo do somatório e também os argumentos (x, t) e $|x - x_0|$. Temos,

$$\begin{aligned} \partial_i w = {} & 2\partial_j u \partial_{ij} u - 2u^\gamma \partial_i \Gamma(|\nabla u|) - 2\gamma u^{\gamma-1} \partial_i u \Gamma(|\nabla u|) - \Pi(s + 1) u^s \partial_i u \\ & - u^\gamma \partial_i \xi - \gamma \xi u^{\gamma-1} \partial_i u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{ii} w = {} & 2(\partial_{ij} u)^2 + 2\partial_j u \partial_j(\partial_{ii} u) - 2u^\gamma \partial_{ii} \Gamma(|\nabla u|) - 2\gamma u^{\gamma-1} \partial_i u \partial_i \Gamma(|\nabla u|) \\ & - 2\gamma(\gamma - 1) u^{\gamma-2} (\partial_i u)^2 \Gamma(|\nabla u|) - 2\gamma u^{\gamma-1} \partial_{ii} u \Gamma(|\nabla u|) - 2\gamma u^{\gamma-1} \partial_i u \partial_i \Gamma(|\nabla u|) \\ & - \Pi s(s + 1) u^{s-1} (\partial_i u)^2 - \Pi(s + 1) u^s \partial_{ii} u - 2\gamma u^{\gamma-1} \partial_i u \partial_i \xi - u^\gamma \partial_{ii} \xi \\ & - \gamma(\gamma - 1) \xi u^{\gamma-2} (\partial_i u)^2 - \gamma \xi u^{\gamma-1} \partial_{ii} u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta w = {} & 2(\partial_{ij} u)^2 + 2\nabla u \nabla(\Delta u) - 2u^\gamma \Delta\Gamma(|\nabla u|) - 4\gamma u^{\gamma-1} \nabla u \nabla\Gamma(|\nabla u|) - 2\gamma(\gamma - 1) u^{\gamma-2} |\nabla u|^2 \Gamma(|\nabla u|) \\ & - 2\gamma u^{\gamma-1} \Delta u \Gamma(|\nabla u|) - \Pi s(s + 1) u^{s-1} |\nabla u|^2 - \Pi(s + 1) u^s \Delta u - 2\gamma u^{\gamma-1} \nabla u \nabla\xi - u^\gamma \Delta\xi \\ & - \gamma(\gamma - 1) \xi u^{\gamma-2} |\nabla u|^2 - \gamma \xi u^{\gamma-1} \Delta u \end{aligned}$$

e

$$\partial_t w = 2\nabla u \partial_t(\nabla u) - 2\gamma u^{\gamma-1}\partial_t u \Gamma(|\nabla u|) - 2u^\gamma \partial_t \Gamma(|\nabla u|) - \Pi(s+1)u^s \partial_t u - u^\gamma \partial_t \xi - \gamma \xi u^{\gamma-1}\partial_t u.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta w - \partial_t w = {} & 2(\partial_{ij}u)^2 + 2\nabla u \nabla(\Delta u) - 2\left(\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\right)^2 - 2\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2}|\nabla u|^2\Gamma(|\nabla u|) \\
& - \Pi(s+1)\gamma u^{s+\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\left(1 + \frac{s|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma \Gamma(|\nabla u|)}\right) - 2u^\gamma \Delta\Gamma(|\nabla u|) \\
& - \gamma^2 \xi u^{2\gamma-2}\Gamma(|\nabla u|)\left(1 - \frac{(1-\gamma)|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma \Gamma(|\nabla u|)}\right) - 4\gamma u^{\gamma-1}\nabla u \nabla \Gamma(|\nabla u|) \\
& - 2\gamma u^{\gamma-1}\nabla u \nabla \xi - u^\gamma \Delta \xi - 2\nabla u \partial_t(\nabla u) + 2u^\gamma \partial_t \Gamma(|\nabla u|) + u^\gamma \partial_t \xi.
\end{aligned} \tag{1.5.11}$$

Usando (1.1.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
\Delta\Gamma(|\nabla u|) &= (\partial_j u \partial_{ij} u)^2 \left(\frac{\Gamma''(|\nabla u|)}{|\nabla u|^2} - \frac{\Gamma'(|\nabla u|)}{|\nabla u|^3}\right) + \frac{\Gamma'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\left((\partial_{ij}u)^2 + \partial_i u \partial_i(\Delta u)\right) \\
&\leq \frac{\Gamma'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\left((\partial_{ij}u)^2 + \partial_i u \partial_i(\Delta u)\right).
\end{aligned} \tag{1.5.12}$$

Agora, defina $\kappa = 2u^{\gamma-1}\Gamma'(|\nabla u|)/|\nabla u|$ e observe que podemos usar o Lema 1.5.1 para concluir que $\kappa u \to 0$ se $u \to 0$. Por (1.5.12) obtemos,

$$2u^\gamma \Delta\Gamma(|\nabla u|) \leq \kappa u \left((\partial_{ij}u)^2 + \partial_i u \partial_i(\Delta u)\right). \tag{1.5.13}$$

Usando $(\partial_{ij}u)^2 \geq (\partial_{11}u)^2$ e (1.5.13) em (1.5.11) segue que

$$\begin{aligned}
\Delta w - \partial_t w \geq {} & (2-\kappa u)(\partial_{11}u)^2 + 2\nabla u \nabla(\Delta u) - 2\left(\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\right)^2 - \kappa u \partial_i u \partial_i(\Delta u) \\
& - \Pi(s+1)\gamma u^{s+\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\left(1 + \frac{s|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma \Gamma(|\nabla u|)}\right) - 4\gamma u^{\gamma-1}\nabla u \nabla\Gamma(|\nabla u|) \\
& - \gamma^2 \xi u^{2\gamma-2}\Gamma(|\nabla u|)\left(1 - \frac{(1-\gamma)|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma \Gamma(|\nabla u|)}\right) - 2\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2}|\nabla u|^2\Gamma(|\nabla u|) \\
& - 2\gamma u^{\gamma-1}\nabla u \nabla \xi - u^\gamma \Delta \xi - 2\nabla u \partial_t(\nabla u) + 2u^\gamma \partial_t \Gamma(|\nabla u|) + u^\gamma \partial_t \xi.
\end{aligned} \tag{1.5.14}$$

Lembrando que $w(y_1, t_1) > 0$, temos $|\nabla u(y_1, t_1)| > 0$. Portando, podemos mudar as coordenadas tal que $|\nabla u(y_1, t_1)|$ seja paralelo a e_1. Assim,

$$\begin{aligned}
2\nabla u \nabla(\Delta u) - 2\nabla u \partial_t(\nabla u) &= 2\partial_1 u \partial_1(\Delta u) - 2\partial_1 u \partial_1(\partial_t u) \\
&= 2\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2}|\nabla u|^2\Gamma(|\nabla u|) + \kappa\gamma|\nabla u|^2\partial_{11}u,
\end{aligned}$$

$$-4\gamma u^{\gamma-1}\nabla u \nabla \Gamma(|\nabla u|) = -4\gamma u^{\gamma-1}\frac{\Gamma'(|\nabla u|)}{|\nabla u|}|\nabla u|^2\partial_{11}u = -2\kappa\gamma|\nabla u|^2\partial_{11}u$$

e

$$2u^\gamma \partial_t \Gamma(|\nabla u|) - C\kappa \partial_i u \partial_i(\Delta u) = -\kappa\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-1}|\nabla u|^2\Gamma(|\nabla u|) - \frac{\kappa^2}{2}\gamma u|\nabla u|^2\partial_{11}u.$$

Substituindo as identidades acima em (1.5.14),

$$
\begin{aligned}
\Delta w - \partial_t w \geq\ & (2-\kappa u)(\partial_{11}u)^2 - 2\left(\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\right)^2 - \Pi(s+1)\gamma u^{s+\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|) \\
& \times \left(1 + \frac{s|\nabla u|^2}{\gamma u^{\gamma}\Gamma(|\nabla u|)}\right) - \gamma^2 \xi u^{2\gamma-2}\Gamma(|\nabla u|)\left(1 - \frac{(1-\gamma)|\nabla u|^2}{\gamma u^{\gamma}\Gamma(|\nabla u|)}\right) \\
& - |\nabla u|^2 \left(\kappa\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|) + \gamma\left(\kappa + \frac{\kappa^2}{2}u\right)\partial_{11}u\right) \\
& - 2\gamma u^{\gamma-1}\nabla u \nabla \xi - u^{\gamma}\Delta\xi + u^{\gamma}\partial_t \xi.
\end{aligned}
\tag{1.5.15}
$$

Vamos agora, estimar o termo renomeado abaixo,

$$
\Theta = |\nabla u|^2 \left(\kappa\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|) + \gamma\left(\kappa + \frac{\kappa^2}{2}u\right)\partial_{11}u\right). \tag{1.5.16}
$$

Temos que $\nabla w(y_1, t_1) = 0$. Logo,

$$
\partial_{11}u = \frac{u^{\gamma-1}}{2-\kappa u}\left(2\gamma\Gamma(|\nabla u|) + \Pi(s+1)u^{s+1-\gamma} + \frac{\partial_1 \xi}{\partial_1 u}u + \gamma\xi\right). \tag{1.5.17}
$$

De $w(y_1, t_1) > 0$, temos que

$$
2u^{\gamma}\Gamma(|\nabla u|) < |\nabla u|^2
$$

e pelo Lema 1.5.1 obtemos a estimativa,

$$
2\gamma\Gamma(|\nabla u|) \leq \gamma\frac{|\nabla u|^2}{u^{\gamma}} \leq 2\gamma(1+\eta) < \infty \tag{1.5.18}
$$

com η pequeno tanto quanto se queira. Pela definição de ξ temos que $\partial_1\xi = 0$. Além disso, $\gamma - 1 < s$, assim, usando que u é limitada e a estimativa (1.5.18) podemos tomar κ suficientemente pequeno para concluir que

$$
\partial_{11}u \leq C_1 \frac{u^{\gamma-1}}{2-\kappa u} \tag{1.5.19}
$$

onde $C_1 = C(1+\eta)$, $C = C(\gamma, s, \Pi, ||u||_{\infty}, C_r)$ e η é a constante do Lema 1.5.1 a qual será tomada arbitrariamente pequena.

Voltemos a analise de (1.5.16). Por (1.5.19) segue que

$$
\Theta \leq u^{\gamma-1}|\nabla u|^2 \left(\kappa\gamma(\gamma-1)\Gamma(|\nabla u|) + C_1\gamma\frac{\kappa + (\kappa^2/2)\,u}{2-\kappa u}\right).
$$

Note que pelo Teorema 1.2.2 e pelo Lema 1.5.1,

$$
u^{\gamma-1}|\nabla u|^2 = u^{2\gamma-1}\frac{|\nabla u|^2}{u^{\gamma}} \leq 2C(1+\eta)u^{2\gamma-1}.
$$

Logo, $\Theta \leq \eta_1 u^{2\gamma-1}$ com $\eta_1 \to 0^+$ quando $r \to 0^+$, ou seja,

$$
-\eta_1 u^{2\gamma-1} \leq -|\nabla u|^2 \left(\kappa\gamma(\gamma-1)u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|) + \gamma\left(\kappa + \frac{\kappa^2}{2}u\right)\partial_{11}u\right) < 0. \tag{1.5.20}
$$

Novamente, usando a definição de ξ, temos que suas derivadas não nulas, com isso e (1.5.20) reescrevemos (1.5.15) como segue,

$$\begin{aligned}\Delta w - \partial_t w \geq (2-\kappa u)(\partial_{11}u)^2 - 2\left(\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\right)^2 - \Pi(s+1)\gamma u^{s+\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\\ \times\left(1+\frac{s|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma \Gamma(|\nabla u|)}\right) - \gamma^2\xi u^{2\gamma-2}\Gamma(|\nabla u|)\left(1-\frac{(1-\gamma)|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma\Gamma(|\nabla u|)}\right) - \eta_1 u^{2\gamma-1}.\end{aligned} \tag{1.5.21}$$

De (1.5.17) temos,

$$\begin{aligned}(2-\kappa u)(\partial_{11}u)^2 \geq \frac{4}{2-\kappa u}\Big(\left(\gamma u^{\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\right)^2 + \Pi(s+1)\gamma u^{s+\gamma-1}\Gamma(|\nabla u|)\\ + \gamma^2\xi u^{2\gamma-2}\Gamma(|\nabla u|)\Big).\end{aligned} \tag{1.5.22}$$

Pelo Lema 1.5.1 e do fato que $\Gamma > 1$,

$$1+\frac{|\nabla u|}{2u^\gamma\Gamma(|\nabla u|)} \leq 2+\eta$$

e como $4/(2-\kappa u) > 2$, podemos escolher η suficientemente pequeno de forma que

$$\frac{|\nabla u|}{2u^\gamma\Gamma(|\nabla u|)} + 1 < \frac{4}{2-\kappa u}.$$

Assim, existe uma constante positiva δ_0 satisfazendo,

$$1+\frac{|\nabla u|}{2u^\gamma\Gamma(|\nabla u|)} + \delta_0 \leq \frac{4}{2-\kappa u}.$$

Por hipótese, $s \leq \gamma/2$ e a última desigualdade acima nos dá,

$$\frac{4}{2-\kappa u} \geq 1+\frac{s|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma\Gamma(|\nabla u|)} + \delta_0. \tag{1.5.23}$$

Agora, da hipótese, $\gamma - 1 < s$ e de (1.5.23) segue que

$$1+\frac{(\gamma-1)|\nabla u|^2}{\gamma u^\gamma\Gamma(|\nabla u)|} \leq \frac{4}{2-\kappa u} - \delta_0 < \frac{4}{2-\kappa u}. \tag{1.5.24}$$

Usando (1.5.17), (1.5.23) e (1.5.24) em (1.5.21) concluímos que

$$\Delta w - \partial_t w \geq u^{s+\gamma-1}\left(\Pi\delta_0(s+1)\gamma\Gamma_m + \frac{4\gamma^2\Gamma_m}{2-\kappa u}u^{\gamma-1-s} - \eta_1 u^{\gamma-s}\right)$$

Portanto, tomando $\Pi = \Pi(r, s, \Gamma_m) > 0$ grande o suficiente, obtemos a contradição. $\square$

No próximo resultado, iremos demonstrar que $u^{-p} \in L^1(Q_r(x_0,t_0) \cap \{u > 0\})$ para todo $0 < p < (2-\gamma)/2$. Esse resultado, nos diz que num certo sentido temos não-degenerescência da solução. Além disso, é parte crucial na demonstração da finitude local da medida de Hausdorff da fronteira livre mencionada acima.

Lema 1.5.3. *Se u e Γ são funções satisfazendo as mesmas condições do Lema 1.5.2 e, além disso, $p \in (0,(2-\gamma)/2)$, então*

$$\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}} u^{-p} \le Cr^{n+2-2p/(2-\gamma)}$$

para qualquer $r \le r_0/2$ e para todo $(x_0,t_0) \in \Omega_{r_0} \times (r_0, T-r_0) \cap \partial\{u > 0\}$.

Demonstração. Defina a função $w = u^{2-\gamma-p}$ em $\{u > 0\}$. Temos,

$$\partial_t w - \Delta w = -\gamma(2-\gamma-p)u^{-p}\Gamma(|\nabla u|) - (2-\gamma-p)(1-\gamma-p)u^{-\gamma-p}|\nabla u|^2.$$

Pelo Lema 1.5.1,

$$w_t - \Delta w \le -(2-\gamma-p)\left(1 + 2(1-\gamma-p)(1+\eta)\right)u^{-p} < -ku^{-p} < 0, \tag{1.5.25}$$

em $Q_r(x_0,t_0) \cap \{u > 0\}$ desde que $\eta > C$ onde $C = (3 + 2(\gamma+p)) \,/\, (2(\gamma+p-1))$.

Pela Proposição 1.3.3 e pelo Lema (1.3.4) obtemos,

$$w \le Cr^{\frac{2(2-\gamma-p)}{2-\gamma}}, \; Q_r(x_0,t_0) \tag{1.5.26}$$

e

$$|\nabla w| \le Cr^{1-2p/(2-\gamma)}, \; Q_r(x_0,t_0). \tag{1.5.27}$$

Agora, integrando por partes com $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} 0 \le \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)} \nabla w \nabla \min\{u,\varepsilon\} &= -\frac{1}{\epsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{0<u\le\varepsilon\}} u\Delta w - \int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>\varepsilon\}} \Delta w \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2}\int_{\partial Q_r(x_0,t_0)} \min\{u,\varepsilon\}\partial_\nu w d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned} \tag{1.5.28}$$

Assim, usando (1.5.25), (1.5.27) e (1.5.26) em (1.5.28) segue que

$$\begin{aligned} k\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>\varepsilon\}} u^{-p} &\le Cr^{n+2-2p/(2-\gamma)} - \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)} \frac{2-\gamma-p}{3-\gamma-p}\partial_t \min\Big\{u^{3-\gamma-p}, \varepsilon^{3-\gamma-p}\Big\} \\ &\quad + \int_{Q_r(x_0,t_0)} \max\Big\{w, \varepsilon^{2-\gamma-p}\Big\}\Big(t_0 - r^2\Big) - \int_{Q_r(x_0,t_0)} \max\Big\{w, \varepsilon^{2-\gamma-p}\Big\}\Big(t_0 + r^2\Big). \end{aligned}$$

Para o caso em que $\{u = 0\}$, segue como no Lema 2.5 de [26] e fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos que

$$\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}} u^{-p} \le Cr^{n+2-2p/(2-\gamma)},$$

como queríamos. □

No que segue, utilizamos as estimativas gradiente e de não-degenerecência fraca para obtermos as estimativas de Hausdorff da fronteira livre.

Lema 1.5.4. *Seja u solução de (1.1.1) e tome (x_0, t_0) como no Lema 1.5.1. Existe uma constante $C < \infty$ dependendo apenas de n, γ, T e $r_0 \in (0,1)$ tal que para qualquer $\varepsilon > 0$ a estimativa*

$$\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}^{n+1}\left(Q_r(x_0,t_0) \cap \left\{0 < u < \varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}\right) \leq Cr^{n+1}$$

é verdadeira para todo $r \leq r_0/2$.

Demonstração. A demonstração seguirá como em [7]. Observemos inicialmente que em $\{u > 0\}$,

$$\left|\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|^2 = \left(\frac{2-\gamma}{2}\right)^2 \frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma} \tag{1.5.29}$$

e

$$\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right) - \Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right) = \frac{2-\gamma}{2}\gamma u^{(\gamma-2)/2}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2u^\gamma} - \Gamma(|\nabla u|)\right). \tag{1.5.30}$$

Logo, segue do Lema 1.5.1 que, por um lado,

$$\begin{aligned}
&\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}} \left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right) - \partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right) + \left|\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|^2\right) \\
&\quad \geq \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}} \frac{2-\gamma}{2}\left(\gamma\Gamma(|\nabla u|) + (1-\gamma)\frac{|\nabla u|^2}{u^\gamma}\right) \\
&\quad \geq \frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}} \frac{2-\gamma}{2}\left(\gamma + 2(1-\gamma)(1+\eta)\right) \\
&\quad = \frac{2-\gamma}{2}\left(\gamma + 2(1-\gamma)(1+\eta)\right)\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}^{n+1}\left(Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}\right).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}} \left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right) - \partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right) + \left|\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|^2\right) \\
&\qquad \geq \tau\frac{1}{\varepsilon}\mathcal{L}^{n+1}\left(Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}\right) > 0,
\end{aligned} \tag{1.5.31}$$

onde usamos que

$$\frac{2-\gamma}{2}\left(\gamma + 2(1-\gamma)(1+\eta)\right) > \tau > 0$$

para $r < \theta r_0/2$ e η suficientemente pequeno e ainda que

$$\mathcal{L}^{n+1}\left(Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}\right) > 0.$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}}\left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)-\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)+\left|\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|^2\right)\\
&\quad=\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)-\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)+\left|\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|^2\right)\\
&\quad-\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{u\geq\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}}\left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)-\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right). \qquad (1.5.32)
\end{aligned}
$$

Vamos agora estimar o lado direito da identidade acima. Note que

$$
\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\nabla\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}=\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left|\nabla\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\right|^2.
$$

Assim, por integração por partes,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)&=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left|\nabla\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\right|^2\\
&+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2}\int_{\partial B_r(x_0)\cap\{u>0\}}\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\partial_\nu u^{(2-\gamma)/2}d\mathcal{H}^{n-1}. \qquad (1.5.33)
\end{aligned}
$$

Novamente por integração por partes, obtemos que

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\\
&\qquad=\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0-r^2\right)\\
&\qquad-\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0+r^2\right)\\
&\qquad+\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0+r^2\right)\\
&\qquad-\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0-r^2\right). \qquad (1.5.34)
\end{aligned}
$$

Temos também de (1.5.30) que

$$
\begin{aligned}
&-\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{u\geq\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}}\left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)-\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right)\\
&\qquad=\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{u\geq\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}}\frac{2-\gamma}{2}\gamma u^{(\gamma-2)/2}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2u^\gamma}-\Gamma(|\nabla u|)\right) \qquad (1.5.35)
\end{aligned}
$$

Substituindo (1.5.33), (1.5.34) e (1.5.35) em (1.5.32),

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}}\left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)-\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)+\left|\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|^2\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2}\int_{\partial B_r(x_0)\cap\{u>0\}}\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\partial_\nu u^{(2-\gamma)/2}d\mathcal{H}^{n-1}\\
&+ \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0-r^2\right)\\
&- \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0+r^2\right)\\
&+ \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0+r^2\right)\\
&- \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0-r^2\right)\\
&+ \int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{u\geq\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}}\frac{2-\gamma}{2}\gamma u^{(\gamma-2)/2}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2u^\gamma}-\Gamma(|\nabla u|)\right).
\end{aligned} \tag{1.5.36}$$

Resta agora estimar o lado direito de (1.5.36) acima. Para isso, note que pelo Lema 1.3.4 obtemos a estimativa,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0-r^2}^{t_0+r^2}\int_{\partial B_r(x_0)\cap\{u>0\}}\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}\partial_\nu u^{(2-\gamma)/2}d\mathcal{H}^{n-1}\leq C_1r^{n+1}. \tag{1.5.37}$$

Assumindo $\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}=\varepsilon$, segue que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0+r^2\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0-r^2\right)=0,
\end{aligned} \tag{1.5.38}$$

e pelo Lema 1.3.1,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0-r^2\right)\\
&\qquad - \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0+r^2\right)<0.
\end{aligned} \tag{1.5.39}$$

Por outro lado, se $\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}=u^{(2-\gamma)/2}$, concluímos de modo análogo que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0-r^2\right)\\
&\qquad - \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon,u^{(2-\gamma)/2}\right\}u^{(2-\gamma)/2}\right)\left(t_0+r^2\right)\\
&\qquad + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0+r^2\right)\\
&\qquad - \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_r(x_0,t_0)\cap\{u>0\}}\left(\min\left\{\varepsilon^2,u^{2-\gamma}\right\}\right)\left(t_0-r^2\right)<0.
\end{aligned} \tag{1.5.40}$$

Portanto, segue dos Lemas 1.5.2 e 1.5.3 que

$$\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{u\geq\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}} \frac{2-\gamma}{2}\gamma u^{(\gamma-2)/2}\left(\frac{|\nabla u|^2}{2u^\gamma}-\Gamma(|\nabla u|)\right)\leq C_2 r^{\beta+\sigma} \tag{1.5.41}$$

onde $\beta=-2(s+1-\gamma)/(2-\gamma)$ e $\sigma=n+2-2/(2-\gamma)((2-\gamma)/2+\gamma-1-s)$. Portando, usando as estimativas (1.5.37)-(1.5.41) em (1.5.36) obtemos,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_r(x_0,t_0)\cap\left\{0<u<\varepsilon^{2/(2-\gamma)}\right\}}\left(\Delta\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)-\partial_t\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)+\left|\nabla\left(u^{(2-\gamma)/2}\right)\right|^2\right) &\leq C_1^{n+1}+C_2^{\beta+\sigma}\\ &\leq C_3 r^{n+1}.\end{aligned}$$

A demonstração segue de (1.5.31) e da última desigualdade acima. □

Finalmente, o resultado abaixo nos permite concluir que de fato a medida de Hausdorff da fronteira livre é finita. Embora a demonstração segue essencialmente como em [7], iremos demonstrá-la para facilitar a leitura.

Teorema 1.5.5. *Sejam u como no Lema 1.5.4 e $F(s)=\partial\{u>0\}\cap\{t=s\}$. Existe uma constante $C<\infty$ dependendo apenas de n,γ,T e $r_0\in(0,1)$ tal que, a função $t\mapsto\mathcal{H}^{n-1}\left(F(t)\cap\overline{\Omega}_{r_0}\right)$ é mensurável a Borel em $(r_0,T-r_0)$. Além disso, são verdadeiras as estimativas:*

(*i*) $\mathcal{H}^{par}_{n+1}\left((\Omega_{r_0}\times(r_0,T-r_0))\cap\partial\{u>0\}\right)\leq C$;

(*ii*) $\displaystyle\int_{r_0}^{T-r_0}\mathcal{H}\left(F(s)\cap\Omega_{r_0}\right)ds\leq C.$

Demonstração. Para (*i*), tome uma cobertura $\cup_{i=1}^{N_\varepsilon}Q_\varepsilon(x_i,t_i)\supset\partial\{u>0\}\cap\left(\overline{\Omega}_{r_0}\times[r_0,T-r_0]\right)$ tal que $(x_i,t_i)\in\partial\{u>0\}$ e $\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\chi_{Q_\varepsilon(x_i,t_i)}(x,t)\leq\tilde{K}$ para todo $(x,t)\in\overline{\Omega}_{r_0}\times[r_0,T-r_0]$. Logo, segue do Lema 1.5.4 que

$$\begin{aligned}2\omega_n\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\varepsilon^{n+1} &\leq \sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\frac{1}{k^{n+2}}\frac{1}{\varepsilon}\int_{Q_\varepsilon(x_i,t_i)\cap\{u>0\}}d\mathcal{L}^{n+1}\\ &\leq \frac{\tilde{K}}{k^{n+2}}\frac{1}{\varepsilon}\int_{\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon}(Q_\varepsilon(x_i,t_i)\cap\{u>0\})}\\ &\leq \frac{\tilde{K}\overline{k}}{k^{n+2}}\frac{1}{\overline{k}\varepsilon}\mathcal{L}^{n+1}\left(\left(\overline{\Omega}_{r_0/2}\times[r_0/2,T-r_0/2]\right)\cap\left\{0<u^{(2-\gamma)/2}<\overline{k}\varepsilon\right\}\right)\\ &\leq C_1.\end{aligned}$$

para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno.

A respeito de (*ii*), observamos que, se A é um aberto qualquer contendo $F(t_0)\cap K$ onde $K\subset\Omega$ é um conjunto compacto, então $F(t)\cap K\subset A$ para $|t-t_0|$ pequeno o suficiente. Caso contrário, existe uma sequência $(x_k,t_k)\in F(t_k)\cap(K-A)$ tal que, podemos a menos de uma subsequência obter $(x_k,t_k)\to(x_0,t_0)\in\partial\{u>0\}\cap(K-A)$, o que contradiz $F(t_0)\subset A$. Assim,

$$\mathcal{H}_\varepsilon^{n-1}\left(F(t_0)\cap\overline{\Omega}_{r_0}\right)\geq\limsup_{t\to t_0}\mathcal{H}_\varepsilon^{n-1}\left(F(t)\cap\overline{\Omega}_{r_0}\right)$$

e as funções $t\mapsto\mathcal{H}_\varepsilon^{n-1}\left(F(t)\cap\overline{\Omega}_{r_0}\right)$ e $t\mapsto\mathcal{H}^{n-1}\left(F(t)\cap\overline{\Omega}_{r_0}\right)$ são mensuráveis a Borel.

Agora, tomando a cobertura de (i), obtemos que

$$\begin{aligned}
C_1 &\geq \frac{1}{\varepsilon}\int_{\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon}} d\mathcal{L}^{n+1}\\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{r_0}^{T-r_0} \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} Q_\varepsilon(x_i,t_i)\cap\{t=s\}\right) ds\\
&\geq \frac{\omega_n}{K}\int_{r_0}^{T-r_0}\sum_{i=1}^{N_\varepsilon}\varepsilon^{n-1}\chi_{\{Q_\varepsilon(x_i,t_i)\cap\{t=s\}\neq\emptyset\}} ds\\
&\geq \frac{\omega_n}{K\omega_{n-1}}\int_{r_0}^{T-r_0}\mathcal{H}_\varepsilon^{n-1}\left(F(s)\cap\overline{\Omega}_{r_0}\right) ds,
\end{aligned}$$

e a estimativa segue do Teorema da Convergência Monótona. $\square$

Capítulo 2

Um problema de fronteira livre parabólico com não-linearidade logarítmica

2.1 Introdução

Neste capítulo, como citado anteriormente, apresentamos resultados do artigo [15] onde foram estudados existência local e questões de regularidade de solução para o seguinte problema parabólico singular de fronteira livre:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= \chi_{\{u>0\}} \log u, & Q_T, \\ u &= g, & \partial\Omega \times (0,T], \\ u &= u_0, & \Omega \times \{0\}, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

onde Q_T e Ω são como antes. Vamos supor que $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ e que $g \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$. A equação é singular ao longo do conjunto $\partial\{u > 0\}$ e a não-linearidade logarítmica não tem propriedades de *scaling.* Quando comparada com a equação (1.1.1), estudada no Capítulo 1, vemos que não podemos esperar regularidade acima de $C^{1,1}$ para soluções de (2.1.1). Na verdade, soluções deste problema não podem possuir esta regularidade uma vez que, quando $u \to 0$, vemos que o lado direito de (2.1.1) se torna ilimitado. Demonstraremos que, próximo da fronteira livre, temos um crescimento da forma $r^2 logr$, o que, levando-se em consideração os comentários anteriores, é o crescimento ótimo esperado.

A falta de *scaling* dificulta a adaptação da teoria existente para problemas singulares com não-linearidades do tipo potência.

Equações parabólicas com não-linearidade singular têm sido estudadas em muitos trabalhos. Uma versão simplificada é o modelo

$$\partial_t u - \Delta u = -u^{\gamma-1}\chi_{\{u>0\}}, \qquad Q_T, \tag{2.1.2}$$

onde $0 < \gamma < 2$. Este problema surge como modelo de equações tanto para fenômenos de extinção ou fenômenos de reações químicas ([3] e [10]). O problema (2.1.2) quando $\gamma \in [1, 2)$ (absorção forte) foi estudado em [7], onde os autores demonstraram regularidade ótima e estimativas de não-degenerecência para a solução única sob algumas hipóteses sobre dados iniciais e de fronteira. Além disso, eles mostraram que a medida $(n+1)$–dimensional de Hausdorff (com respeito a métrica parabólica) da fronteira livre $\partial\{u > 0\}$ é localmente limitada ([6] e [29]).

Nos trabalhos [8] e [25] os autores consideraram (2.1.2) com $\gamma \in (0,1)$. Em ambos os casos, encontraram solução usando um processo de limite. De fato, eles trataram a equação

$$\partial_t u - \Delta u = f(\varepsilon, u), \; Q_T, \tag{2.1.3}$$

onde, para $\varepsilon > 0$, a função $f(\varepsilon, u)$ é suave e $f(\varepsilon, u) \to -u^{\gamma-1}$ pontualmente quando $\varepsilon \to 0^+$ para $u > 0$.

A existência de singularidade nestes tipos de equações nos fornece soluções de fronteira livre e neste contexto, uma importante tarefa é demonstrar regularidade ótima da solução próximo da fronteira livre $\partial\{u > 0\}$. No caso de não-linearidade do tipo potência, a solução limite em [8] satisfaz

$$u \in C^{1,\alpha_\gamma}_{x,\mathrm{loc}}(Q_T) \cap C^{0,\beta_\gamma}_{t,\mathrm{loc}}(Q_T), \; 0 < \gamma < 1, \; \alpha_\gamma = \frac{\gamma}{2-\gamma} \;\text{ e }\; \beta_\gamma = \frac{1}{2-\gamma}.$$

Isso significa que, localmente, u é $(1+\beta_\gamma)/2$-Hölder contínua em t e ∇u é α_γ-Hölder contínua em x (seguindo a notação como em [16]).

A não-linearidade singular do tipo potência $-u^{\gamma-1}$ é mais forte do que $\log u$ para qualquer $\gamma \in (0,1)$. Assim, é natural pensar que a regularidade ótima para soluções de (2.1.1) seja melhor que $C^{1,\alpha}$ para qualquer $0 < \alpha < 1$. Sabemos que tal regularidade não é $C^{1,1}$ visto que o lado direito em (2.1.1) explode ao longo da fronteira livre. Vamos mostrar que uma solução limite u de (2.1.1) satisfaz

$$u \in C^{1,\log-\mathrm{lip}}_{x,\mathrm{loc}}(Q_T) \cap C^{0,\log-\mathrm{lip}}_{t,\mathrm{loc}}(Q_T).$$

Comparando com os resultados para o problema com não-linearidade do tipo potência e observando que o lado direito em (2.1.1) se torna ilimitado, vemos que esta regularidade é ótima.

Para o resultado de existência iremos utilizar um processo de aproximação que será explicado em detalhes posteriormente. No momento, cabe mencionar que a não-linearidade logarítmica pode mudar de sinal e este fato gera novos desafios, especialmente em relação a estimativas *a priori* para solução u.

Equações Elípticas e Parabólicas com não-linearidade logarítmica surgem quando consideramos equações de modelagem da dinâmica de filmes finos de fluídos viscosos ([4] e referências). Com relação aos aspectos teóricos na teoria de fronteira livre, a não aplicabilidade de *scaling* em não-linearidade do tipo log é a principal diferença entre (2.1.1) e (2.1.2). Lembremos que argumentos de *scaling* são essenciais para o estudo da teoria de regularidade dos problemas de fronteira livre.

Vamos mostrar que para $t \in (0,T)$ fixado, as soluções aproximadas, próximo da fronteira livre exibem um *crescimento supercaracterístico* como $r^2 \log r$. Fenômeno deste tipo foi estudado pela primeira vez por Monneau e Weiss em [20] onde os autores investigaram um problema de obstáculo instável:

$$-\Delta u = \chi_{\{u>0\}}, \; \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.1.4}$$

Soluções de (2.1.4) tem crescimento supercaracterístico próximo à alguns pontos da fronteira livre. Além disso, a segunda variação da energia associada a uma solução de (2.1.4) assume o valor $-\infty$ e as soluções com esta característica são chamadas de *completamente instáveis.* Assim, a equação (2.1.1) torna-se um exemplo interessante de um problema de fronteira livre *altamente instável*, no sentido que toda solução cresce como $r^2 \log r$ em pontos da fronteira livre.

Finalmente, mencionamos que a teoria de regularidade para mínimos do problema elíptico associado a (2.1.1) foi recentemente considerado por Queiroz e Shagholian em [27] no qual seus resultados são generalizados neste capítulo para o contexto parabólico.

2.2 Definição de solução

Uma solução de (2.1.1) é uma função $u \in W_2^{1,0}(Q_T)$ satisfazendo para qualquer função teste $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$ com $\eta \equiv 0$ em $\partial\Omega \times (0, T]$ e para todo $\tau \in (0, T)$ a identidade integral

$$\int_\Omega u(\tau)\eta(\tau)dx - \int_\Omega u_0\eta(0)dx + \int_0^\tau \int_\Omega (-u\partial_t\eta + \langle \nabla u, \nabla\eta\rangle)\, dxdt = \int_0^\tau \int_\Omega \eta\chi_{\{u>0\}} \log u dxdt, \tag{2.2.1}$$

com $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$.

O resultado de existência depende de um processo de aproximação o qual iremos descrever agora. Para cada $0 < \varepsilon < 1$ definimos a perturbação

$$\beta_\varepsilon(s) = \begin{cases} \log\left(\dfrac{s^2 + \varepsilon s + \varepsilon}{s + \varepsilon}\right), & s \geq 0, \\ 0, & s < 0 \end{cases} \tag{2.2.2}$$

e o problema de aproximação

$$\begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \Delta u^\varepsilon &= \beta_\varepsilon(u^\varepsilon), & Q_T, \\ u &= g, & \partial\Omega \times (0, T], \\ u &= u_0, & \Omega \times \{0\}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

A formulação variacional de uma solução de (2.2.3) é análoga à do problema não perturbado (2.2.1), a saber: para $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, com qualquer $\eta \in C^2(\overline{Q}_T)$, $\eta \equiv 0$ em $\partial\Omega \times (0, T]$ e para todo $\tau \in (0, T)$,

$$\int_\Omega u^\varepsilon(\tau)\eta(\tau)dx - \int_\Omega u_0\eta(0)dx + \int_0^\tau \int_\Omega (-u^\varepsilon\partial_t\eta + \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla\eta\rangle)\, dxdt = \int_0^\tau \int_\Omega \eta\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)dxdt. \tag{2.2.4}$$

Observação 2.2.1. *Usando resultados de densidade, podemos tomar como função teste a função $\eta \in W_2^{1,2}(Q_T)$ identicamente nula em quase todo ponto de $\partial\Omega \times (0, T]$ e satisfazendo $\eta = 0$ em $\Omega \times \{T\}$ no sentido dos traços.*

2.3 Limitação $-$ L^∞ uniforme em ε

A estimativa $-$ L^∞ uniforme em ε é essencial para obter compacidade. Como a não-linearidade logarítmica muda de sinal, esta não é uma aplicação do Princípio do Máximo (como no caso da não-linearidade do tipo potência). No nosso caso, usamos o crescimento lento da função $s \mapsto \log s$ e resultados gerais que podem ser encontrados em [18]. Entretanto, precisamos primeiro demonstrar uma estimativa–L^2. Iniciamos com o

Lema 2.3.1. *Sejam $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ e $g \in W_2^{1,1}(Q_T)$ funções não negativas e suponha que $u^\varepsilon \geq 0$ seja solução fraca de (2.2.3) com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, para algum $\varepsilon_0 > 0$ fixado. Então*

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{0\leq t\leq T} \|u^\varepsilon(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^\varepsilon\|_{L^2(Q_T)} \leq C,$$

onde $C = C\left(n, \Omega, T, \|g\|_{W_2^{1,1}(Q_T)}, \|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \varepsilon_0\right)$ independe de ε.

Demonstração. Para simplificar, vamos denotar $u = u^\varepsilon$. Fixando $\tau \in (0,T)$ e usando $\eta = u - g$ como função teste, obtemos por integração por partes a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(\tau)dx + \int_0^\tau\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt &= \int_0^\tau\int_\Omega \beta_\varepsilon(u)(u-g)dxdt - \int_0^\tau\int_\Omega u\partial_t g dxdt \\ &+ \int_\Omega u(\tau)g(\tau)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2(0) - \int_\Omega u_0 g(0)dx + \int_0^\tau\int_\Omega \langle\nabla u, \nabla g\rangle dxdt. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Sejam $a \in (0,1)$ fixado e $C_1 > 0$ uma constante dependendo apenas de a e ε_0 tais que, para cada $s \geq 0$, $|\beta_\varepsilon(s)| \leq C_1 s^a$. Aplicando a Desigualdade de Poincaré,

$$\int_0^\tau\int_\Omega \beta_\varepsilon(u)(u-g)dxdt \leq C_2\int_0^\tau \left(\|u\|^a_{L^2(\Omega)}\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}\right)\right) dt,$$

onde a constante $C_2 > 0$ depende apenas de a e Ω. Pela Desigualdade de Young,

$$\int_0^\tau\int_\Omega \beta_\varepsilon(u)(u-g)dxdt \leq C_2\delta_1\int_0^\tau \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}dt + C_3\int_0^\tau \|u\|^{2a}_{L^2(\Omega)}dt + C_2\delta_1\int_0^\tau \|\nabla g\|^2_{L^2(\Omega)}dt, \tag{2.3.2}$$

com C_3 dependendo apenas de δ_1 e C_2.

Novamente pela Desigualdade de Young,

$$\int_0^\tau\int_\Omega \langle\nabla u, \nabla g\rangle dxdt \leq \delta_2\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + \frac{1}{4\delta_2}\int_0^\tau\int_\Omega |\nabla g|^2 dxdt, \tag{2.3.3}$$

$$\int_\Omega u(\tau)g(\tau)dx \leq \delta_3\int_\Omega u^2(\tau)dx + \frac{1}{4\delta_3}\int_\Omega g^2(\tau)dx, \tag{2.3.4}$$

e

$$\int_0^\tau\int_\Omega u\partial_t g dxdt \leq \int_0^\tau \left(\delta_4\int_\Omega u^2 dx + \frac{1}{4\delta_4}\int_\Omega \partial_t g^2 dx\right) dt. \tag{2.3.5}$$

Agora, escolhendo $\delta_1 = 1/2C_2$, $\delta_2 = \delta_3 = 1/4$ e substituindo (2.3.2)–(2.3.5) em (2.3.1) obtemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega u^2(\tau)dx + \int_0^\tau\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt &\leq C_4 T \sup_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t)\|^{2a}_{L^2(\Omega)} + \delta_4 T \sup_{0\leq t\leq T} \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &+ C_5\int_\Omega u^2(0)dx + C_6\|g\|^2_{W_2^{1,1}(Q_T)}, \end{aligned}$$

em que todas as constantes acima são universais. Tomamos então o supremo no intervalo $(0,T]$ e $\delta_4 = 1/2T$ para obter,

$$\frac{1}{2}\sup_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_T)} \le C_4 T \sup_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|^{2a}_{L^2(\Omega)} + C_7\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|g\|^2_{W_2^{1,1}(Q_T)}\right).$$

Considerando a equação quadrática em $\sup\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)}$ com $0\le t\le T$ e recordando que $a\in(0,1)$, implicando que $2a<2$, concluímos que

$$\sup_{0\le t\le T}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(Q_T)} \le C,$$

para uma constante C como descrita no lema. □

Estamos agora em condições de demonstrar a estimativa L^∞.

Lema 2.3.2. *Assuma as mesmas hipóteses do Lema 2.3.1 e adicionalmente que $g\in L^\infty(Q_T)$. Existe uma constante $M = M\left(n,\Omega,T,\|g\|_{W_2^{1,1}(Q_T)},\|u_0\|_{L^2(\Omega)},\|g\|_{L^\infty(Q_T)},\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\right) > 0$ (que independe de $\varepsilon>0$, $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$) tal que*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)} \le M,$$

para cada solução fraca $u^\varepsilon \ge 0$ de (2.2.3).

Demonstração. Como antes, vamos denotar $u=u^\varepsilon$. Fixemos $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$k_0 \ge \max\left\{||u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|g\|_{L^\infty(Q_T)}\right\}$$

e, para qualquer $k\in\mathbb{N}$ com $k\ge k_0$, defina os conjuntos

$$u^k(x,t) = \max\{u(x,t)-k,0\},\ (x,t)\in Q_T,$$

e

$$A_k(t) = \{x\in\Omega \mid u(x,t)>k\},\ 0\le t\le T.$$

Por resultados do Capítulo II (Lemas $4.1-4.5$, Seção 4 de [18]) podemos usar u^k como uma função teste na definição de solução para (2.2.3). Isto nos dá a seguinte identidade:

$$\frac{1}{2}\int_{A_k(\tau)}\left(u^k\right)^2(\tau)dx + \int_0^\tau\int_{A_k(t)}|\nabla u^k|^2 dxdt = \int_0^\tau\int_{A_k(t)}\beta_\varepsilon(u)u^k dxdt + \frac{1}{2}\int_{A_k(0)}\left(u^k\right)^2(0)dx, \tag{2.3.6}$$

em todo intervalo $(0,\tau)\subset(0,T]$.

Para $0<a<1$ existe uma constante $C>0$ dependendo apenas de a tal que $\beta_\varepsilon(u)\le Cu^a$. Aplicando esta estimativa e usando a Desigualdade de Hölder obtemos,

$$\int_0^\tau\int_{A_k(t)}\beta_\varepsilon(u)u^k dxdt \le C_1\int_0^\tau \|u\|^a_{L^2(A_k(t))}|A_k(t)|^{(1-a)/2}\|u^k\|_{L^2(A_k(t))}dt. \tag{2.3.7}$$

Por outro lado, pela Desigualdade de Hölder com expoentes 2^* e $2^*/(2^*-2)$ e a Desigualdade de Sobolev,

$$\|u^k\|_{L^2(A_k(t))} \leq C_2 \|\nabla u^k\|_{L^2(A_k(t))} \, |A_k(t)|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^*}}, \tag{2.3.8}$$

para uma constante $C_2 = C_2(\Omega) > 0$. Usando (2.3.8) em (2.3.7) e a Desigualdade de Young, segue que

$$\int_0^\tau \int_{A_k(t)} \beta_\varepsilon(u) u^k dxdt \leq C_3 \delta \int_0^\tau \|\nabla u^k\|^2_{L^2(A_k(t))} dt + \frac{C_3}{4\delta} \int_0^\tau \|u\|^{2a}_{L^2(A_k(t))} |A_k(t)|^{2-a-\frac{2}{2^*}} dt. \tag{2.3.9}$$

Aplicando (2.3.9) em (2.3.6) vale que $\delta = 1/(2C_3)$ e consequentemente,

$$\frac{1}{2} \int_{A_k(\tau)} (u^k)^2(\tau) dx + \frac{1}{2} \int_0^\tau \int_{A_k(t)} |\nabla u^k|^2 dxdt \leq C_4 \int_0^\tau \|u\|^{2a}_{L^2(A_k(t))} |A_k(t)|^{2-a-\frac{2}{2^*}} dt. \tag{2.3.10}$$

Agora, tomando o supremo para $\tau \in [0,T]$ em (2.3.10) e aplicando o Lema 2.3.1 obtemos que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^k(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^k\|_{L^2(Q_T)} \leq C_5 \left(\int_0^T |A_k(t)|^{2-a-\frac{2}{2^*}} \right)^{1/2}. \tag{2.3.11}$$

Escolhendo $q = 2$ e

$$\begin{aligned} r = 2, a = \frac{2}{n}, \kappa = 0 & \quad \text{se } n > 2, \\ r = 3, a = \frac{1}{2}, \kappa = \frac{1}{2} & \quad \text{se } n = 2, \\ r = 5, a = \frac{1}{2}, \kappa = \frac{3}{2} & \quad \text{se } n = 1, \end{aligned}$$

podemos reescrever a integral do lado direito de (2.3.11) obtendo a estimativa

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^k(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^k\|_{L^2(Q_T)} \leq C_5 \left(\int_0^T |A_k(t)|^{r/q} \right)^{(1+\kappa)/r}.$$

Finalmente, a última estimativa, os valores de q, r, κ e a hipótese de u ser limitada na fronteira parabólica $\partial_p \Omega_T$ coloca-nos em posição de aplicar o Teorema 6.1 (pg. 102) de [18] (Apêndice $-$ Teorema A.8) e obter a estimativa L^∞. $\square$

2.4 Existência de solução clássica para o problema perturbado

Nesta seção iremos demonstrar que o problema (2.2.3) tem solução para cada $\varepsilon \in (0,1)$ via método de subsolução e supersolução.

Lema 2.4.1. *Seja $T > 0$ fixado e suponha $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, $g \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$ com $u_0, g \geq 0$. Então, para cada $\varepsilon \in (0,1)$, o problema (2.2.3) tem uma solução $u^\varepsilon \geq 0$ tal que $u^\varepsilon \in C^3(\overline{Q}_T)$.*

Demonstração. Podemos ver sem dificuldade que $\underline{u} = 0$ é uma subsolução. A fim de obter uma supersolução, seja Y uma solução da equação

$$\begin{cases} Y_t - \Delta Y &= 1, & Q_T, \\ Y &= g, & \partial\Omega \times (0,T], \\ Y &= u_0, & \Omega \times \{0\}. \end{cases}$$

Para $k > 0$ fixado definimos $\overline{u} = kY$. Então,

$$\overline{u}_t - \Delta\overline{u} - \beta_\varepsilon(\overline{u}) \geq k - \log(\overline{u}+1) \geq k - \log(k\|Y\|_{L^\infty} + 1).$$

Pelo crescimento da função log podemos escolher $k > 0$ grande o suficiente tal que $\overline{u}$ seja uma supersolução.

Agora, podemos proceder como no caso elíptico, (Lema 2.3 em [21]) usando o Princípio da Comparação para equações parabólicas (Corolário 2.2.6 em [16] − Apêndice − Corolário A.6) para obter uma solução u satisfazendo $0 \leq u \leq \overline{u}$. A regularidade de u segue da teoria geral encontrada em [18]. □

Com os Lemas 2.3.2 e 2.4.1 acima demonstramos a

Proposição 2.4.2. *Seja $T > 0$ fixado e assuma $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, $g \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$ com $u_0, g \geq 0$. Então, para cada $\varepsilon \in (0,1)$, o problema (2.2.3) tem uma solução $u^\varepsilon \geq 0$ tal que $u^\varepsilon \in C^3(Q_T)$. Além disso, existe uma constante $M > 0$, $M = M(\Omega, g, u_0, T)$, tal que*

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)} \leq M \text{ para todo } \varepsilon \in (0,1).$$

2.5 Estimativas uniformes e pontuais para ∇u^ε e $\partial_t u^\varepsilon$

Nesta seção demonstramos estimativas pontuais para ∇u^ε e $\partial_t u^\varepsilon$ que são uniforme em $\varepsilon > 0$. Estas estimativas terão papel importante no estudo da regularidade da solução fraca de (2.1.1). Iniciamos com a estimativa gradiente de uma solução de (2.2.3) a qual usamos uma técnica do tipo Bernstein inspirada em [8].

Lema 2.5.1. *Sejam $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$ com $u_0 \geq 0$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$. Suponha que $u^\varepsilon \in C^3(\overline{\Omega}) \cap C^1([0,T])$ satisfaz* (2.2.3)*. Então existem constantes $C, \Lambda > 0$ dependendo apenas de* $\mathrm{dist}(\Omega', \Omega), N, u_0$ *e $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}$ tais que*

$$|\nabla u^\varepsilon(x,t)|^2 \leq C u^\varepsilon(x,t)\left(\Lambda + \log\frac{1}{u^\varepsilon(x,t)}\right) \text{ para todo } x \in \Omega',\ t \in [0,T]. \tag{2.5.1}$$

Demonstração. Primeiro, fixe uma função ψ como no Lema 1.3.2. Denote $u = u^\varepsilon$ e defina

$$Z(u) = -u\log u + \Lambda u,\ Z(0) = 0. \tag{2.5.2}$$

Fixamos $\Lambda \geq \max\{1, 2M\}$ onde M é a constante do Lema 2.3.2. Então $Z'(u) \geq 0$ e $Z''(u) \leq 0$, isto é, Z é não decrescente e côncava. Definimos também as funções

$$w = \frac{|\nabla u|^2}{Z(u)} \quad \text{e} \quad v = w\psi. \tag{2.5.3}$$

Por um lado, a função v é contínua em $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ e como antes, v herda a propriedade da função ψ de se anular em $\partial\Omega$. Por outro lado, para pontos onde $u = 0$, usamos que $u \in C^3(\overline{\Omega})$, e assim

$$|\nabla u|^2 \leq u \leq -u\log u + \Lambda u,$$

mostrando que w é limitada.

A demonstração é feita por contradição. Assumindo falsa a estimativa (2.5.1), temos que

$$\sup_{Q_T} v > C_1, \tag{2.5.4}$$

onde $C_1 > 0$ será fixada posteriormente (independentemente de ε) a fim de obtermos a contradição desejada.

A própria definição de v implica que, se $(x_0, t_0) \in \overline{Q}_T$ é um ponto de máximo, então por (2.5.4), necessariamente $x_0 \in \Omega$ e $t_0 > 0$. Além disso,

$$\nabla v(x_0, t_0) = 0 \tag{2.5.5}$$

e

$$\Delta v(x_0, t_0) - \partial_t v(x_0, t_0) \leq 0. \tag{2.5.6}$$

A partir de agora o objetivo é demonstrar que para uma escolha suficientemente grande de C_1 obtemos uma contradição de (2.5.6). Cálculos similares foram feitos em [8]. Todos os cálculos a seguir serão avaliados em (x_0, t_0) e por simplificação o símbolo do somatório será omitido. Primeiramente observe que por (2.5.5)

$$\nabla w \nabla \psi = -w\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}.$$

Assim,

$$\Delta v - \partial_t v = \psi(\Delta w - \partial_t w) + w(\Delta\psi - 2|\nabla\psi|^2/\psi). \tag{2.5.7}$$

Calculando as derivadas de w obtemos,

$$\begin{aligned}
\partial_i w &= \frac{2\partial_j u \partial_{ij} u Z(u) - |\nabla u|^2 \partial_i u Z'(u)}{Z(u)^2},\\
\partial_{ii} w &= \frac{2(\partial_{ij}u)^2 Z(u) + 2\partial_j u \partial_j \partial_{ii} u Z(u) - |\nabla u|^2 \partial_{ii} u Z'(u) - |\nabla u|^2 (\partial_i u)^2 Z''(u)}{Z(u)^2}\\
&\quad - \frac{Z(u)^2 \partial_i w \partial_i Z(u)^2}{Z(u)^4}
\end{aligned}$$

e

$$\partial_t w = \frac{2\partial_j u \partial_j (u_t) Z(u) - |\nabla u|^2 Z'(u) \partial_t u}{Z(u)^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Delta v - \partial_t v = \psi\Bigg(&\frac{2(\partial_{ij}u)^2 Z(u) + 2|\nabla u|^2 Z(u) \beta_\varepsilon'(u) \Gamma(|\nabla u|) - |\nabla u|^4 Z''(u)}{Z(u)^2}\\
&+ \frac{2Z(u)\beta_\varepsilon(u)\Gamma'(|\nabla u|)\partial_i u \partial_j u \partial_{ij} u/|\nabla u| - |\nabla u|^2 Z'(u) \beta_\varepsilon(u) \Gamma(|\nabla u|)}{Z(u)^2}\\
&- 2\frac{Z'(u)}{Z(u)} \partial_i u \partial_i w\Bigg) + w\left(\Delta\psi - 2|\nabla\psi|^2/\psi\right).
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $|\nabla u(x_0, t_0)|$ é paralelo ao eixo Ox_1. Então por (2.5.5) obtemos a identidade abaixo,

$$\partial_{11} u = \frac{1}{2} w \left(Z'(u) - \frac{\partial_1 \psi}{\psi \partial_1 u} Z(u) \right).$$

Usando que $(\partial_{ij}u)^2 \geq (\partial_{11}u)^2$ e a identidade acima em (2.5.8) segue que

$$\begin{aligned}
\Delta v - v_t \geq \frac{1}{Z(u)}\Bigg[&\frac{1}{2}\psi w^2 \Bigg(Z'(u)^2 + \frac{(\partial_1\psi)^2}{\psi^2(\partial_1 u)^2} Z(u)^2 - 2\frac{\partial_1\psi}{\psi\partial_1 u} Z(u) Z'(u) \Bigg)\\
&+ \psi w Z'(u) \beta_\varepsilon(u) - 2\psi w Z(u) \beta_\varepsilon'(u) - \psi w^2 Z(u) Z''(u)\\
&- 2\psi Z'(u) \partial_1 u \partial_1 w \Bigg] + w\Bigg(\Delta\psi - 2|\nabla\psi|^2/\psi\Bigg).
\end{aligned}$$

Por (1.3.7), (2.5.2) e (2.5.3) as seguintes estimativas são verdadeiras:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} w^2 \frac{(\partial_1\psi)^2}{\psi(\partial_1 u)^2} Z(u)^2 &\geq -\frac{1}{2} w Z(u) \sup \frac{|\nabla\psi|^2}{\psi},\\
-w^2 \frac{\partial_1\psi}{\partial_1 u} Z(u) Z'(u) &\geq -Z'(u) Z(u)^{1/2} \psi^{1/2} w^{3/2} \sup \frac{|\nabla\psi|}{\psi^{1/2}},\\
-2\psi Z'(u) \partial_1 u \partial_1 w &\geq -2Z'(u) Z(u)^{1/2} \psi^{1/2} w^{3/2} \sup \frac{|\nabla\psi|}{\psi^{1/2}},\\
w\left(\Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi}\right) &\geq -w \sup \left| \Delta\psi - 2\frac{|\nabla\psi|^2}{\psi} \right|
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

e por conseguinte, (2.5.9) pode ser reescrita como segue,

$$\begin{aligned}\Delta v - \partial_t v \geq & \frac{1}{Z(u)}\Bigg[\psi w^2\left(\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)\right) + w(\psi Z'(u)\beta_\varepsilon(u) \\ & - 2\psi Z(u)\beta_\varepsilon'(u) - KZ(u)) - K\psi^{1/2}w^{3/2}Z(u)^{1/2}Z'(u)\Bigg],\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

onde K é uma constante positiva dependendo apenas de ψ. As estimativas abaixo são independentes de $0 < \varepsilon < 1$ e a constante $C > 0$ depende apenas de M. Temos,

$$Z(u)^{1/2}Z'(u) \leq C\left(\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)\right), \tag{2.5.11}$$

$$Z(u)|\beta_\varepsilon'(u)| \leq C\left(\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)\right), \tag{2.5.12}$$

$$-Z'(u)\beta_\varepsilon(u) \leq C\left(\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)\right), \tag{2.5.13}$$

$$Z(u) \leq C\left(\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)\right). \tag{2.5.14}$$

Assumindo (2.5.11)–(2.5.14) verdadeiras e usando-as em (2.5.10), o lado direito da desigualdade abaixo é estritamente positivo se $v(x_0, t_0) > C_1$ para alguma constante C_1 suficientemente grande independentemente de ε, isso contradiz (2.5.6), ou seja,

$$\Delta v - \partial_t v \geq \frac{\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)}{\psi Z(u)}\left(v^2 - C\left(v + v^{3/2}\right)\right) > 0.$$

Agora, a fim de demonstrar as estimativas (2.5.11)–(2.5.14) precisamos escolher Λ apropriado e usar o crescimento da não-linearidade logarítmica.

Consideremos primeiro (2.5.11). Note que

$$\begin{aligned}Z(u)^{1/2}Z'(u) &\leq (-u\log u + \Lambda u + 1)(-\log u + \Lambda - 1) \\ &\leq M\log^2 u - (C_2 u + C_3)\log u + C_4.\end{aligned} \tag{2.5.15}$$

Se $\log u \leq 0$, uma vez que $C_2 u + C_3 \leq C_5\Lambda$ para alguma constante $C_5 > 0$, vale que,

$$\begin{aligned}Z(u)^{1/2}Z'(u) &\leq M\log^2 u - C_5\Lambda\log u + C_4 \\ &\leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda\log u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right) \\ &= C\left(\frac{1}{2}Z'(u)^2 - Z(u)Z''(u)\right).\end{aligned}$$

Observe que $\Lambda\log M < \Lambda M$ e $\Lambda \geq \max\{2M, 1\}$, então

$$-\Lambda\log u + \frac{\Lambda^2+1}{2} \geq -\Lambda\log M + \frac{\Lambda^2+1}{2} > 0.$$

Agora, se $\log u > 0$ podemos ver,

$$
\begin{aligned}
M\log^2 u - (C_2 u + C_3)\log u + C_4 &\leq M\log^2 u + C_4 \\
&\leq M\log^2 u - \Lambda\log M + C_5\frac{\Lambda^2+1}{2} \\
&\leq M\log^2 u - \Lambda\log u + C_5\frac{\Lambda^2+1}{2}. \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda\log u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Demonstremos agora (2.5.12). Como

$$\beta_\varepsilon'(u) = \frac{(u+\varepsilon)^2 - \varepsilon}{(u^2+\varepsilon u+\varepsilon)(u+\varepsilon)},$$

se assumirmos que $u \leq \sqrt{\varepsilon} - \varepsilon$, obtemos,

$$|\beta_\varepsilon'(u)| = \frac{\varepsilon - (u+\varepsilon)^2}{(u^2+\varepsilon u+\varepsilon)(u+\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon}{(u^2+\varepsilon u+\varepsilon)(u+\varepsilon)} \leq \frac{1}{u+\varepsilon} \leq \frac{1}{u}.$$

Caso contrário, se $u > \sqrt{\varepsilon} - \varepsilon$,

$$|\beta_\varepsilon'(u)| = \frac{(u+\varepsilon)^2 - \varepsilon}{(u^2+\varepsilon u+\varepsilon)(u+\varepsilon)} \leq \frac{u+\varepsilon}{u^2+\varepsilon u+\varepsilon} \leq \frac{1}{u}.$$

Portanto,

$$Z(u)|\beta_\varepsilon'(u)| \leq -\log u + \Lambda.$$

Analisando novamente o sinal, se $\log u \leq 0$, então $-\log u < -\Lambda\log u$ e assim,

$$
\begin{aligned}
Z(u)|\beta_\varepsilon'(u)| &\leq -\Lambda\log u + C\left(\frac{1}{2}\log^2 u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right) \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda\log u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

para alguma constante $C > 0$. No conjunto onde $\log u > 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
Z(u)|\beta_\varepsilon'(u)| &\leq C\left(-\Lambda\log M + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right) \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda\log u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Para (2.5.13), o fato, $\beta_\varepsilon(u) \leq -\log u$ nos dá

$$-Z'(u)\beta_\varepsilon(u) \leq \log^2(u) - (\Lambda-1)\log u.$$

Entretanto, $-(\Lambda-1)\log u \leq -\Lambda\log u$ se $\log u \leq 0$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
-Z'(u)\beta_\varepsilon(u) &\leq \log^2(u) - \Lambda\log u \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda\log u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

No caso $\log u > 0$,

$$\begin{aligned}-Z'(u)\beta_\varepsilon(u) &\leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda \log M + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right)\\ &\leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda \log u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right).\end{aligned}$$

Finalmente, ao considerar (2.5.14) observe que

$$\Lambda u \leq \Lambda M \leq \frac{\Lambda^2+1}{2}$$

e se por um lado $\log u \leq 0$,

$$-u\log u \leq -\Lambda \log u \leq -\Lambda \log u + \frac{1}{2}\log^2 u,$$

implicando que

$$Z(u) \leq C\left(\frac{1}{2}\log^2 u - \Lambda \log u + \frac{\Lambda^2+1}{2}\right).$$

Por outro lado, se $\log u > 0$, basta observar que

$$Z(u) \leq \frac{\Lambda^2+1}{2},$$

o que conclui a demonstração. □

Iremos demonstrar a estimativa pontual em tempo. No caso da não-linearidade do tipo potência, o próximo lema pode ser visto como uma consequência do princípio do máximo ([7]). No nosso caso, enfrentamos dificuldades significativas para aplicar a técnica devido ao fato de não existir homogeneidade. Aqui, necessitamos introduzir um novo tipo de *scaling* intrínseco que nos permitirá aplicar a teoria parabólica geral.

Lema 2.5.2. *Sejam $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, o dado inicial e u^ε solução de (2.2.3). Então, para cada $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $\tau \in (0, T]$ existe $C > 0$ tal que*

$$|\partial_t u^\varepsilon(x,t)| \leq C \log \frac{1}{u^\varepsilon(x,t)} \ \textit{para todo}\ x \in \Omega',\ t \in (\tau, T]$$

onde $C = C\left(\tau, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), \|u^\varepsilon\|_\infty\right)$.

Demonstração. Novamente, denote $u = u^\varepsilon$. Como $\|u^\varepsilon\|_\infty$ é limitada por uma constante independentemente de ε, não há perda de generalidade se supormos que $\|u^\epsilon\|_\infty \leq M < 1$.

Dado $(x_0, t_0) \in \Omega' \times (\tau, T]$, defina a função reescalonada e transladada

$$\tilde{u}(x,t) = e^{-\frac{\Lambda}{r}} u(rx + x_0, r^2 t + t_0),$$

onde $\Lambda \geq \max\{1, 2M\}$ é a constante do Lema 2.5.1. Fixe $r_0 = \min\{1, \operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega), \sqrt{\tau}\}$ e seja $r > 0$ dado por

$$r^{-2} e^{\frac{\Lambda}{r}} = L r_0^{-2} e^{\frac{2\Lambda}{r_0}} \log u(x_0, t_0),$$

onde $L = 4(\log M)^{-1} < 0$. Temos $0 < r < r_0/2$ e pela escolha de r_0 a função $\tilde{u}$ está definida em $\overline{B}_1 \times [-1, 0]$, é de classe C^1 e satisfaz

$$\partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u} = r^2 e^{-\frac{\Lambda}{r}} \beta_\varepsilon (e^{\frac{\Lambda}{r}} \tilde{u}), \ B_1 \times (-1, 0]. \tag{2.5.16}$$

Observe que podemos encontrar uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} |\partial_t u(x_0, t_0)| &= r^{-2} e^{\frac{\Lambda}{r}} |\tilde{u}_t(0,0)| \\ &= 4(\log M)^{-1} r_0^{-2} e^{\frac{2\Lambda}{r_0}} |\tilde{u}_t(0,0)| \log u(x_0, t_0) \\ &\leq C \log \frac{1}{u(x_0, t_0)} \end{aligned}$$

desde que exista uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\partial_t \tilde{u}(0,0)| \leq C_1. \tag{2.5.17}$$

Assim, o que precisamos fazer é demonstrar (2.5.17). Para isso, recordemos que pelo Lema 2.5.1,

$$|\nabla u|^2 \leq C_2(-u \log u + \Lambda u), \ B_{r_0}(x_0) \times (t_0 - r^2, t_0).$$

Além disso, pela definição de $\tilde{u}$,

$$|\nabla \tilde{u}|^2 = r^2 e^{-\frac{2\Lambda}{r}} |\nabla u|^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{u}|^2 &\leq C_2 r^2 e^{-\frac{2\Lambda}{r}} (-u \log u + \Lambda u) \\ &\leq C_2 r^2 e^{-\frac{\Lambda}{r}} (-\tilde{u} \log \tilde{u} + \Lambda \tilde{u}(1 - 1/r)) \\ &\leq C \tilde{u} \log \frac{1}{\tilde{u}}, \end{aligned} \tag{2.5.18}$$

sempre que $0 < r < 1$. A desigualdade acima é válida em $B_1 \times (-1, 0]$ com $\tilde{u} < 1$. Então, usando que $\tilde{u} \leq 1/\log \tilde{u}^{-1}$ segue de (2.5.18) que

$$|\nabla \tilde{u}^{3/2}|^2 \leq \frac{9}{4} \frac{|\nabla \tilde{u}|^2}{\log \frac{1}{\tilde{u}}} \leq C, \ B_1 \times (-1, 0). \tag{2.5.19}$$

Agora, tome $\psi \in C_0^\infty(B_1 \times (0, 1])$. Multiplicando a equação (2.5.16) por $\psi \partial_t \tilde{u}$ e integrando sobre B_1 obtemos,

$$\int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx = \int_{B_1} \psi \partial_t \tilde{u} \Delta \tilde{u} dx + r^2 e^{-\frac{\Lambda}{r}} \int_{B_1} \psi \partial_t \tilde{u} \beta_\varepsilon \left(e^{\frac{\Lambda}{r}} u \right) dx$$

e ao integrarmos por partes a primeira integral do lado direito acima obtemos a identidade,

$$\begin{aligned} \int_{B_1} \psi \partial_t \tilde{u} \Delta \tilde{u} dx &= -\int_{B_1} \nabla(\psi \partial_t \tilde{u}) \nabla \tilde{u} dx - \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u} \nabla \tilde{u} \nabla \psi - \psi \nabla(\partial_t \tilde{u}) \nabla \tilde{u}) dx \\ &= -\int_{B_1} \partial_t \tilde{u} \nabla \tilde{u} \nabla \psi dx - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 dx, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\nabla \tilde{u}|^2 = \nabla(\partial_t \tilde{u}) \nabla \tilde{u}.$$

Logo,

$$\int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 \psi dx - \int_{B_1} \partial_t \tilde{u} \nabla \tilde{u} \nabla \psi dx + r^2 e^{-\frac{2\Lambda}{r}} \frac{d}{dt}\int_{B_1} \psi B_\varepsilon \left(e^{\frac{\Lambda}{r}} \tilde{u}\right) dx,$$

onde

$$B_\varepsilon(u) = \int_0^u \beta_\varepsilon(s) ds.$$

Pela Desigualdade de Young,

$$\begin{aligned} -\int_{B_1} \partial_t \tilde{u} \nabla \tilde{u} \nabla \psi dx &\leq \int_{B_1} \psi^{1/2} |\partial_1 \tilde{u}| |\nabla \tilde{u}| \frac{|\nabla \psi|}{\psi^{1/2}} dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx + \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 \frac{|\nabla \psi|^2}{\psi} dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx + C\int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 dx, \end{aligned}$$

implicando que

$$\frac{1}{2}\int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx \leq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 \psi dx + C\int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 dx + r^2 e^{-\frac{2\Lambda}{r}} \frac{d}{dt}\int_{B_1} \psi B_\varepsilon \left(e^{\frac{\Lambda}{r}} \tilde{u}\right) dx.$$

Integrando de $t_1 \in (-1, 0)$ a 0,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^0 \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx dt \leq& \int_{B_1} |\nabla \tilde{u}(\cdot, t_1)|^2 dx + 2C\int_{t_1}^0 \int_{B_1} |\nabla \tilde{u}|^2 dx dt \\ &+ 2r^2 e^{-\frac{2\Lambda}{r}} \int_{B_1} \psi B_\varepsilon \left(e^{\frac{\Lambda}{r}} \tilde{u}(\cdot, 0)\right) dx \\ &- 2r^2 e^{-\frac{2\Lambda}{r}} \int_{B_1} \psi B_\varepsilon \left(e^{\frac{\Lambda}{r}} \tilde{u}(\cdot, t_1)\right) dx. \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

Assumindo $0 < \varepsilon < 1 - M$, vemos por um lado que

$$\beta_\varepsilon(u) = \log \frac{u^2 + \varepsilon u + \varepsilon}{u + \varepsilon} \leq 0 < u,$$

o que implica,

$$B_\varepsilon(e^{\frac{\Lambda}{r}} \tilde{u}) \leq \frac{1}{2} e^{\frac{2\Lambda}{r}} \tilde{u}^2.$$

Por outro lado, $-\beta_\varepsilon(u) \leq u^{-1/2}$ e consequentemente

$$-B_\varepsilon\left(e^{\frac{\Lambda}{r}} \tilde{u}\right) \leq 2e^{\frac{\Lambda}{2r}} \tilde{u}^{1/2}.$$

Usando a desigualdade anterior e (2.5.18) em (2.5.20) concluímos,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^0 \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx dt \leq& -C\int_{B_1} \tilde{u}(\cdot, t_1) \log \tilde{u}(\cdot, t_1) dx - C\int_{t_1}^0 \int_{B_1} \tilde{u} \log \tilde{u} dx dt \\ &+ r^2 \int_{B_1} \tilde{u}(\cdot, 0)^2 dx + 4r^2 e^{-\frac{3\Lambda}{r}} \int_{B_1} \tilde{u}(\cdot, t_1)^{1/2} dx. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Como $0 < r < r_0/2$ e $-\tilde{u} \log \tilde{u} \leq \tilde{u}^{1/2}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{t_1}^0 \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dx dt \leq C\left(1 + \int_{t_1}^0 \int_{B_1} \tilde{u}^{1/2} dx dt + \int_{B_1} \tilde{u}(\cdot, t_1)^{1/2} dx\right). \tag{2.5.22}$$

Iremos obter uma estimativa para $\tilde{u}$ em termos do lado esquerdo de (2.5.22). Para isso, tome $t \in (-1/2, 0)$, $x_1 \in B_1$ e observe que

$$\tilde{u}(x,0) - \tilde{u}(x,t) = \int_t^0 \partial_t \tilde{u}(x,s)ds =: H(x).$$

Pelo Teorema do Valor Médio para integrais existe $\overline{x} \in B_{r_1}$ com $r_1 = |t|^{1/3n}$ tal que

$$H(s) = \frac{C}{r_1^n} \int_t^0 \int_{B_{r_1}} \partial_t \tilde{u}(x,s)dxds.$$

Desta forma, segue da Desigualdade de Schwarz que

$$(\tilde{u}(\overline{x},t) - \tilde{u}(\overline{x},0))^2 \leq \frac{C|t|}{r_1^n} \int_t^0 \int_{r_1} (\partial_t \tilde{u})^2(x,s)dxds.$$

Uma vez que $r_1 = |t|^{1/3n}$, vemos que

$$\frac{C|t|}{r_1^n} = C|t|^{2/3},$$

o que nos dá,

$$|\tilde{u}(\overline{x},t) - \tilde{u}(\overline{x},0)| \leq C|t|^{1/3} \left(\int_t^0 \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2(x,s)\psi dxds \right)^{1/2}, \tag{2.5.23}$$

onde usamos que $\psi > 0$ em B_{r_1} para $r_1 \leq (1/2)^{1/3n} < 1$. Por (2.5.19) e pelo Teorema do Valor Médio temos que para todo $y \in B_1$ e $t \in (-1/2, 0)$,

$$\begin{aligned} |\tilde{u}^{3/2}(y,t) - \tilde{u}^{3/2}(\overline{x},t)| &\leq |\nabla \tilde{u}^{3/2}(z,t)||(y,t) - (\overline{x},t)| \\ &\leq C|y - \overline{x}|, \end{aligned}$$

onde $\overline{x} \in B_{r_1}$. Então,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y,t) &\leq \left(C\mathrm{diam}(\overline{B}_1) + \tilde{u}(\overline{x},t)^{3/2} \right)^{2/3} \\ &\leq C(1 + \tilde{u}(\overline{x},t)). \end{aligned} \tag{2.5.24}$$

Logo, segue de (2.5.23) e (2.5.24) que

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{1/2}(y,t) &\leq \left(C \left(1 + |t|^{1/3} \left(\int_{t_1}^0 \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dxdt \right)^{1/2} \right) \right)^{1/2} \\ &\leq C \left(1 + |t|^{1/6} \left(\int_{t_1}^0 \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dxdt \right)^{1/4} \right). \end{aligned}$$

Para $|t| \leq |t_1|$ e usando a Desigualdade de Young temos,

$$\tilde{u}(y,t)^{1/2} \leq C \left(1 + |t_1|^{1/6} \left(\int_{t_1}^0 \int_{B_1} (\partial_t \tilde{u})^2 \psi dxdt \right) \right).$$

Portanto, (2.5.22) implica que

$$\int_{t_1}^{0}\int_{B_1}(\partial_t\tilde{u})^2\psi dxdt \le C\left(1+|t_1|^{1/6}\left(\int_{t_1}^{0}\int_{B_1}(\partial_t\tilde{u})^2\psi dxdt\right)\right).$$

Então, escolhendo $\delta>0$ suficientemente pequeno, vemos que, para $t_1\in(-\delta,0]$ existe uma constante C (que independe de t_1) tal que

$$\int_{t_1}^{0}\int_{B_1}(\partial_t\tilde{u})^2\psi dxdt \le C.$$

Por (2.5.19) existe $\rho>0$ pequeno e $C_1>0$ com $C_1=C_1(\rho)\to 0$ quando $\rho\to 0$ tal que

$$\tilde{u}(x,t)^{3/2}\ge \tilde{u}(x_0,t)^{3/2}-C_1,\ \ B_\rho(0)\times(-\rho,0].$$

A continuidade de $\tilde{u}$ implica a existência de uma constante $C_2>0$, $C_2=C_2(\rho)\to 0$ quando $\rho\to 0$ tal que

$$\tilde{u}(x_0,t)\ge \tilde{u}(0,0)-C_2,\ \ B_\rho(0)\times(-\rho,0].$$

Lembrando que $\tilde{u}(0,0)>0$ não depende de ρ,

$$\tilde{u}(x,t)\ge C>0,\ \ B_\rho(0)\times(-\rho,0]$$

e como

$$|\partial_t\tilde{u}-\Delta\tilde{u}|\le C,\ \ B_\rho(0)\times(-\rho,0],$$

a teoria de regularidade parabólica implica (2.5.17). □

Como consequência dos resultados anteriores obtemos o lema abaixo.

Lema 2.5.3. *Sejam $u_0\in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0,g\ge 0$ e suponha que $u^\varepsilon\ge 0$ satisfaz* (2.2.3)*. Então, para todo $\Omega'\subset\subset\Omega$ e qualquer $\tau\in(0,T]$ existem constantes $C_1,C_2,\Lambda>0$ tais que*

$$|\nabla u^\varepsilon(x,t)|^2\le C_1\Big(u^\varepsilon(x,t)|\log u^\varepsilon(x,t)|+\Lambda u^\varepsilon(x,t)\Big)\ \textit{para todo}\ x\in\Omega',\ \ t\in[0,T] \tag{2.5.25}$$

e

$$|u_t^\varepsilon(x,t)|\le C_2|\log u^\varepsilon(x,t)|\ \textit{para todo}\ x\in\Omega',t\in(\tau,T]. \tag{2.5.26}$$

As constantes C_1 e Λ dependem apenas de $\operatorname{dist}(\Omega',\partial\Omega),N,g,u_0,$ e $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(Q_T)}$ e além da dependência destas constantes, C_2 depende também de τ. Em particular, estas constantes não dependem de $0<\varepsilon<1$.

2.6 Existência de solução fraca

O objetivo nesta seção é demonstrar existência de solução para o problema (2.1.1) no sentido de (2.2.1). Para isso é necessário justificar a passagem ao limite $\varepsilon\to 0^+$ no Teorema 2.6.1 a seguir. Mais precisamente, iremos demonstrar o teorema com a seguinte redação.

Teorema 2.6.1. *Seja $u_0\in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0\ge 0$, e suponha que $(u^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ seja uma família de soluções de* (2.2.3) *para cada $\varepsilon\in(0,1)$. Então existe uma subsequência $\varepsilon_j\to 0^+$ tal que $u^{\varepsilon_j}\to u$ uniformemente em subconjuntos compactos de Q_T para alguma função $u\in C(\Omega\times[0,T])$. Além disso, a função u é uma solução fraca de* (2.1.1) *no sentido de* (2.2.1)*.*

O objetivo do próximo resultado é duplo: nos permite obter estimativa uniforme em ε nos espaços de Hölder $C^{1,\alpha}_{x,\mathrm{loc}}$ e $C^{0,\alpha}_{t,\mathrm{loc}}$ para uma família $(u^\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$ e, por compacidade, encontrar um candidato para a solução que é o limite de u^ε quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, fornece regularidade ótima para a solução limite.

Proposição 2.6.2. *Seja u^ε uma solução de (2.2.3), $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ com dado inicial $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $u_0 \geq 0$. Então, se $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $\tau \in (0,T)$ estão fixados, para todo $\alpha \in (0,1)$ existe uma constante $C > 0$ dependendo apenas de $\Omega', n, \tau, T, \alpha$ e $\|u_0\|_\infty$ tal que*

$$|u^\varepsilon(x,t) - u^\varepsilon(x,s)| \leq C|t-s|^\alpha \tag{2.6.1}$$

e

$$|\nabla u^\varepsilon(x,t) - \nabla u^\varepsilon(y,t)| \leq C|x-y|^\alpha \tag{2.6.2}$$

para todo $x, y \in \Omega'$ e $t, s \in (\tau, T)$. Em particular, existe $u\colon \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ tal que, a menos de subsequência,

$$u^\varepsilon \to u \text{ quando } \varepsilon \to 0^+ \text{ localmente uniformemente em } Q_T.$$

Além disso, $u \in C^{1,\alpha}_{x,\mathrm{loc}} \cap C^{0,\alpha}_{t,\mathrm{loc}}$ e satisfaz

$$|\partial_t u(x,t)| \leq C_1 |\log u(x,t)| \text{ para todo } x \in \Omega',\ t \in [0,T] \tag{2.6.3}$$

e

$$|\nabla u(x,t)|^2 \leq C_1 u(x,t)\left(\Lambda + |\log u(x,t)|\right) \text{ para todo } x \in \Omega',\ t \in [0,T], \tag{2.6.4}$$

onde a constante C_1 depende apenas de N, Ω', τ, T e $\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ e Λ é a mesma constante do Lema 2.5.1.

Demonstração. Iniciemos com a estimativa em t. Defina as funções

$$v(x,t) = u^\varepsilon(x,t)^{\alpha+2} \quad \text{e} \quad w(t) = t^{1/(\alpha+2)}.$$

Pela Proposição 2.4.2, Lema 2.5.1, Teorema do Valor Médio e usando o fato que $|\log s| \leq e^s s^{-1}$, obtemos,

$$\begin{aligned} |v(x,t) - v(x,s)| &\leq C_1(2+\alpha) u(x,\xi)^{1+\alpha} |\log u^\varepsilon(x,\xi)||t-s| \\ &\leq C|t-s|. \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

Como w é $1/(\alpha+2)$-Hölder contínua, então a composta $w \circ v$ é Hölder contínua com mesmo expoente (Apêndice – Lema A.15) e de (2.6.5) temos a estimativa (2.6.1).

Agora, como $u^\varepsilon \in C^1_t(\overline{Q}_T)$ segue de (2.6.5) e pela imersão compacta

$$C^{z,\nu_1}(\overline{Q}_T) \hookrightarrow\!\!\!\rightarrow C^{z,\nu_2}(\overline{Q}_T)$$

onde $0 \leq z \in \mathbb{Z}$ e $0 < \nu_2 < \nu_1 \leq 1$ que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\epsilon = u \in C^{0,\alpha}_{t,loc}(\overline{\Omega}_T).$$

Para a estimativa (2.6.2) suponha

$$|y_0 - x_0| \leq \theta \max\{u(x_0,t_0)^{1/\alpha}, u(y_0,t_0)^{1/\alpha}\} \tag{2.6.6}$$

e defina r_0, r e $\tilde{u}$ como no Lema 2.5.2 com r_0 fixado. Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$|y_0 - x_0| \leq \theta u(x_0, t_0)^{1/\alpha}. \tag{2.6.7}$$

Procedendo exatamente como em [8] (Corolário 3.2) obtemos que $\nabla\tilde{u} \in C^{0,\alpha}$ em x para algum $0 < \alpha < 1$ em $B_{\rho/2} \times (-\rho/2, 0]$ com ρ suficientemente pequeno.

Fixe $\theta = \frac{1}{4}\rho r_0(\log(1/M))^{1/2}$ onde $||u_0||_\infty \leq M < 1$. Supondo que ocorra (2.6.7) e lembrando que

$$r_0 = re^{\frac{\Lambda}{r_0} - \frac{\Lambda}{2r}}(L\log u(x_0, t_0))^{1/2}$$

com $r < r_0/2$ e $L = 4/\log M$, obtemos que

$$\frac{|y_0 - x_0|}{r} \leq \frac{\rho}{2}, \tag{2.6.8}$$

ou seja, $(y_0 - x_0)/r \in B_{\rho/2}$.

Um cálculo simples nos permite concluir a partir da definição de $\tilde{u}$ que

$$\left|\nabla\tilde{u}\left(\frac{y_0 - x_0}{r}, 0\right) - \nabla\tilde{u}(0,0)\right| \leq C(r^{-1}|y_0 - x_0|)^\alpha$$

e voltando para u,

$$\begin{aligned} |\nabla u(y_0, t_0) - \nabla u(x_0, t_0)| &\leq Cr^{-2\alpha}e^{\frac{\alpha\Lambda}{r}}|y_0 - x_0|^\alpha \\ &\leq C|y_0 - x_0|^\alpha. \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

Por outro lado, se (2.6.6) não ocorrer, como consequência do Lema 2.5.1 segue que

$$\begin{aligned} |\nabla u(y_0, t_0) - \nabla u(x_0, t_0)| &\leq |\nabla u(y_0, t_0)| + |\nabla u(x_0, t_0)| \\ &\leq C(u(y_0, t_0) + u(x_0, t_0)) + Cu(y_0, t_0)\log\frac{1}{u(y_0, t_0)} \\ &+ Cu(x_0, t_0)\log\frac{1}{u(x_0, t_0)} \end{aligned}$$

e sendo u limitada, $u^{\gamma-1}\log(1/u)$ é limitada e assim

$$\begin{aligned} |\nabla u(y_0, t_0) - \nabla u(x_0, t_0)| &\leq C(u(y_0, t_0) + u(x_0, t_0)) + C\left(u(y_0, t_0)^{2-\gamma} + u(x_0, t_0)^{2-\gamma}\right) \\ &\leq C(u(y_0, t_0) + u(x_0, t_0)) \\ &\leq C|y_0 - x_0|^\alpha. \end{aligned}$$

Portanto, como $u \in C^2_x(\overline{Q}_T)$, concluímos de modo análogo ao feito acima o limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^\epsilon = u \in C^{1,\alpha}_{x,loc}(\overline{Q}_T)$$

para algum $0 < \alpha < 1$. $\square$

Com a proposição 2.6.2, demonstramos a primeira parte do Teorema 2.6.1. Resta mostrar que o candidato a solução fraca satisfaz a definição no sentido (2.2.1). Para isso, faz-se necessário termos um resultado de integrabilidade o qual segue abaixo.

Lema 2.6.3. *Se u é a função limite da Proposição 2.6.2, então*

$$\chi_{\{u>0\}} \log u \in L^1_{\mathrm{loc}}(Q_T).$$

Demonstração. Para $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ fixemos $0 < a_0 < 1$ satisfazendo $\beta_{\varepsilon_0}(a_0) = 0$. Sejam $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ tais que $0 \leq \eta \leq 1$ e $\eta \equiv 1$ em Ω'. No conjunto $\Omega' \times \{u^\varepsilon > a_0\}$, $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)$ é não negativa, então pelo Lema 2.3.2 temos que

$$\int_0^T \int_{\Omega' \cap \{u^\varepsilon > a_0\}} |\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)| dxdt \leq C.$$

Logo, é suficiente demonstrar que

$$\int_0^T \int_{\Omega' \cap \{u^\varepsilon \leq a_0\}} |\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)| dxdt \leq C.$$

Para tanto, note que existem constantes $\tilde{M}, \overline{M} > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega' \cap \{u^\varepsilon \leq a_0\}} |\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)| dxdt &\leq - \int_0^T \int_{\Omega'} \beta_\varepsilon(u^\varepsilon) dxdt + \tilde{M}T \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega'} \eta\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) dxdt + \tilde{M}T \\
&\leq - \int_0^T \int_{\Omega} \eta\beta_\varepsilon(u^\varepsilon) dxdt + \overline{M}T \\
&= - \int_0^T \int_{\Omega} \left(\eta\partial_t u^\varepsilon + \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla \eta \rangle\right) dxdt + \overline{M}T \\
&= - \int_{\Omega} \eta \left(u^\varepsilon(T) - u_0\right) dx - \int_0^T \int_{\Omega} \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla \eta \rangle dxdt + \overline{M}T
\end{aligned}$$

e pelo Lema 2.3.2,

$$- \int_{\Omega} \eta \left(u^\varepsilon(T) - u_0\right) dx \leq C$$

e ainda usando a Desigualdade Schwarz junto com o Lema 2.3.1, obtemos que

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla \eta \rangle dxdt \leq C.$$

A conclusão segue do Lema Fatou. $\square$

Finalmente demonstramos a existência - Teorema (2.6.1).

Demonstração. Vamos demonstrar que a função u da Proposição 2.6.2 é uma solução no sentido de (2.2.1). Para este fim, seja $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave satisfazendo $0 \leq \xi(s) \leq 1$ e

$$\xi(s) = \begin{cases} 1, & s \geq 1, \\ 0, & s \leq 1/2. \end{cases}$$

Para $m > 0$ usamos a função teste $\eta\xi(u^\varepsilon/m)$, $\eta \in C_0^\infty(\Omega \times [0,T))$ como na definição (2.2.4). Temos,

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_\Omega \beta_\varepsilon(u^\varepsilon)\eta\xi(u^\varepsilon/m)dxdt = & \int_\Omega u^\varepsilon(\tau)\eta(\tau)\xi(u^\varepsilon(\tau)/m)dx - \int_\Omega u_0\eta(0)\xi(u_0/m)dx \\ & - \int_0^\tau \int_\Omega u^\varepsilon \partial_t \left(\eta\xi(u^\varepsilon/m)\right) dxdt \\ & + \int_0^\tau \int_\Omega \langle \nabla u^\varepsilon, \nabla(\eta\xi(u^\varepsilon/m))\rangle dxdt. \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Observemos que a partir de agora toda convergência respeita a seguinte ordem: Primeiro $\varepsilon \to 0$ e em seguida $m \to 0$. Pelo Lema 2.3.2 e pela Proposição 2.6.2 segue do Teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u^\varepsilon(\tau)\eta(\tau)\xi(u^\varepsilon(\tau)/m)dx = \int_\Omega u(\tau)\eta(\tau)dx \tag{2.6.11}$$

e

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega u_0\eta(0)\xi(u_0/m)dx = \int_\Omega u_0\eta(0)dx. \tag{2.6.12}$$

Quanto a terceira integral do lado direito de (2.6.10),

$$\int_0^\tau \int_\Omega u^\varepsilon \partial_t \left(\eta\xi(u^\varepsilon/m)\right) dxdt = \int_0^\tau \int_\Omega u^\varepsilon \partial_t\eta\xi(u^\varepsilon/m)dxdt + \frac{1}{m}\int_0^\tau \int_\Omega u^\varepsilon \partial_t u^\varepsilon \eta\xi'(u^\varepsilon/m)dxdt$$

e com raciocínio análogo ao usando acima,

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\tau \int_\Omega -u^\varepsilon\partial_t\eta\xi(u^\varepsilon/m)dxdt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega u\partial_t\eta dxdt.$$

Por outro lado, seja $\Omega' \subset\subset \Omega$ tal que $\eta = 0$ em $(\Omega \setminus \Omega') \times [0,\tau]$. Então o Lema 2.5.2 implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{m}\left|\int_0^\tau \int_\Omega u^\varepsilon\partial_t u^\varepsilon\eta\xi'(u^\varepsilon/m)dxdt\right| \leq & \frac{1}{m}\sup|\eta|\sup|\xi'| \int_0^\tau\int_{\Omega'} \chi_{\{1/2\leq u^\varepsilon/m\leq 1\}} u^\varepsilon|\partial_t u^\varepsilon|dxdt \\ \leq & \, C\int_0^\tau\int_{\Omega'} \chi_{\{1/2\leq u^\varepsilon/m\leq 1\}}\frac{u^\varepsilon}{m}|\log u^\varepsilon|dxdt \\ \leq & \, C\int_0^\tau\int_{\Omega'} \chi_{\{1/2\leq u^\varepsilon/m\leq 1\}}|\log u^\varepsilon|dxdt. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m}\left|\int_0^\tau\int_\Omega u^\varepsilon\partial_t u^\varepsilon\eta\xi'(u^\varepsilon/m)dxdt\right| \leq C\int_0^\tau\int_{\Omega'}\chi_{\{1/2\leq u/m\leq 1\}}|\log u|dxdt.$$

O Lema 2.6.3 e o Teorema da Convergência Dominada implica que o lado direito da desigualdade acima tende a zero quando $m \to 0$. Portanto,

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau\int_\Omega u^\varepsilon\partial_t\left(\eta\xi(u^\varepsilon/m)\right)dxdt = \int_0^\tau\int_\Omega u\partial_t\eta dxdt. \tag{2.6.13}$$

Voltando para (2.6.10),

$$\int_0^\tau\int_\Omega\langle\nabla u^\varepsilon,\nabla(\eta\xi(u^\varepsilon/m))\rangle dxdt = \int_0^\tau\int_\Omega\xi(u^\varepsilon/m)\langle\nabla u^\varepsilon,\nabla\eta\rangle dxdt + \frac{1}{m}\int_0^\tau\int_\Omega\eta|\nabla u^\varepsilon|^2\xi'(u^\varepsilon/m)dxdt.$$

Com raciocínio análogo ao usado acima, podemos verificar que

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau\int_\Omega\xi(u^\varepsilon/m)\langle\nabla u^\varepsilon,\nabla\eta\rangle dxdt = \int_0^\tau\int_\Omega\langle\nabla u,\nabla\eta\rangle dxdt.$$

Agora, aplicando o Lema 2.5.1, temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{m}\left|\int_0^\tau\int_\Omega\eta|\nabla u^\varepsilon|^2\xi'(u^\varepsilon/m)dxdt\right| &\leq C\int_0^\tau\int_{\Omega'}\chi_{\{1/2\leq u^\varepsilon/m\leq 1\}}\frac{u^\varepsilon}{m}(\Lambda+|\log u^\varepsilon|)dxdt\\ &\leq C\int_0^\tau\int_{\Omega'}\chi_{\{1/2\leq u^\varepsilon/m\leq 1\}}(\Lambda+|\log u^\varepsilon|)dxdt.\end{aligned}$$

Portanto, como consequência do Lema 2.6.3 obtemos,

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{m}\left|\int_0^\tau\int_\Omega\eta|\nabla u^\varepsilon|^2\xi'(u^\varepsilon/m)dxdt\right| = 0,$$

o que nos permite concluir o limite abaixo,

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau\int_\Omega\langle\nabla u^\varepsilon,\nabla(\eta\xi(u^\varepsilon/m))\rangle dxdt = \int_0^\tau\int_\Omega\langle\nabla u,\nabla\eta\rangle dxdt. \tag{2.6.14}$$

Agora, usando a convergência pontual da função $\beta_\varepsilon(u^\varepsilon)\eta\xi(u^\varepsilon/m)$ quando $\varepsilon\to 0$ e o Lema 2.6.3, vemos que

$$\lim_{m\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\tau\int_\Omega\beta_\epsilon(u^\varepsilon)\eta\xi(u^\varepsilon/m)dxdt = \int_0^\tau\int_\Omega\chi_{\{u>0\}}\eta\log u dxdt. \tag{2.6.15}$$

A demonstração termina usando (2.6.11)-(2.6.15) em (2.6.10). □

2.7 Regularidade ótima

Nesta última seção apresentamos nosso resultado de regularidade.

Teorema 2.7.1. *Seja $u_0\in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0\geq 0$, e suponha que u seja a solução limite do Teorema 2.6.1. Então,*

(i) $u(\cdot,t)\in C^{1,\log-\mathrm{lip}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *para todo* $t\in(0,T)$;

(ii) $u(x,\cdot)\in C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(0,T)$ *para todo* $x\in\Omega$ *e para todo* $\alpha\in(0,1)$. *Além disso, se* $\Omega'\subset\subset\Omega$ *e* $\tau\in(0,T)$, *então*

$$|\partial_t u(x,t)|\leq C|\log u(x,t)| \text{ para todo } (x,t)\in\Omega'\times(\tau,T],$$

onde $C = C\left(\tau,\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega),\|u\|_{L^\infty(Q_T)}\right)$.

Observação 2.7.2. *Recordemos que uma função u é dita $\log -$ lipschitz se existir uma constante C tal que*

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y| \log \frac{1}{|x-y|}, \ |x-y| < 1.$$

Uma vez demonstrada a Proposição 2.6.2, completamos a regularidade mostrando que o gradiente da solução limite é log-lipschitz na variável espacial. Sintetizamos esse resultado no teorema abaixo.

Teorema 2.7.3. *Seja $u_0 \in C^1(\overline{\Omega})$, $u_0 \geq 0$ e suponha que u seja o solução limite de* (2.1.1) *do Teorema 2.6.1. Então existem constantes positivas C e R_0 tais que*

$$|\nabla u(y, t_0) - \nabla u(x, t_0)| \leq C|y-x|| \log |y-x||,$$

para todo $x, y \in \Omega' \cap B_{R_0}(x_0)$ onde $\Omega' \subset\subset \Omega$ e $0 < t_0 < T$.

Demonstração. Fixe $x_0, y_0 \in \Omega' \cap \{u(\cdot, t_0) > 0\}$ e assuma verdadeira a desigualdade

$$|x-x_0|^2 | \log |x-x_0|| < \max \{u(x_0, t_0), u(y_0, t_0)\}. \tag{2.7.1}$$

Note que, sendo u limitada, podemos assumir $u < 1$. Além disso, sem perda de generalidade podemos também assumir $u(x_0, t_0) > u(y_0, t_0)$.

Defina a função

$$\tilde{u}(x,t) = e^{-\frac{\Lambda}{r}} u(rx + x_0, r^2 t + t_0), \ (x,t) \in B_\rho \times (-\rho, 0],$$

onde Λ, r e r_0 são como no Lema 2.5.2 e $\rho > 0$ será fixado posteriormente. Procedendo como neste lema, existem $C, \rho > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
&|\partial_t \tilde{u} - \Delta \tilde{u}| \leq C \ \text{ em } \ B_\rho \times (-\rho, 0];\\
&|\partial_t \tilde{u}| \leq C \ \text{ em } \ B_\rho \times (-\rho, 0];\\
&|\tilde{u}| \leq C \ \text{ em } \ B_\rho \times \{-\rho\} \ \text{ e } \ \partial B_\rho \times (-\rho, 0].
\end{aligned}$$

Além disso, $\tilde{u}(\cdot, t_0)$ satisfaz $\Delta \tilde{u}(\cdot, t_0) = h$ em B_ρ, com h satisfazendo todas as exigências da teoria de regularidade do problema de obstáculo desenvolvida em detalhes em [23] (Teorema 2.14 $-$ Apêndice $-$ Teorema A.12). Assim, deduzimos que $\nabla \tilde{u}$ é $C^{0,1}$ em x com $(x,t) \in B_{\rho/2} \times (-\rho/2, 0]$.

Dados $r_0 > 0$ (fixado) suficientemente pequeno e y_0 tais que $y_0 \in \Omega' \subset\subset \Omega$ e $|y_0 - x_0| < r_0$, escolha $\rho > 0$ tal que

$$\frac{y_0 - x_0}{r} \in B_{\rho/2}(0).$$

Então,

$$\left| \nabla \tilde{u} \left(\frac{y_0 - x_0}{r}, 0 \right) - \nabla \tilde{u}(0,0) \right| \leq C r^{-1} |y_0 - x_0|.$$

Voltando para u,

$$\begin{aligned}
|\nabla u(y_0, t_0) - \nabla u(x_0, t_0)| &\leq C r^{-2} e^{\frac{\Lambda}{r}} |y_0 - x_0| \\
&= C r_0^{-2} e^{\frac{2\Lambda}{r_0}} |L|| \log u(x_0, t_0)||x - x_0|.
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Observe que

$$\left| \log \left(|x-x_0|^2 | \log |x-x_0|| \right) \right| \leq C | \log |x - x_0||.$$

Usando (2.7.1) obtemos,

$$\frac{1}{u(x_0,t_0)} \leq \frac{1}{|x-x_0|^2|\log|x-x_0||}$$

e consequentemente

$$|\log u(x_0,t_0)| \leq \left|\log\left(|x-x_0|^2|\log|x-x_0||\right)\right|.$$

Assim,

$$|\log u(x_0,t_0)| \leq \left|\log\left(|x-x_0|^2|\log|x-x_0||\right)\right| \leq C|\log|x-x_0||$$

e de (2.7.2),

$$|\nabla u(x,t_0)-\nabla u(x_0,t_0)| \leq C|x-x_0||\log|x-x_0||,$$

onde C é uma constante dependendo apenas de r_0 e ρ.

Assuma agora que (2.7.1) não ocorre. Pela estimativa gradiente (2.6.4) e usando que a função $s \mapsto -s\log s$ é crescente para $0 < s < s_0$, s_0 pequeno, obtemos que

$$\begin{aligned}
|\nabla u(y_0,t_0)-\nabla u(x_0,t_0)| &\leq |\nabla u(y_0,t_0)| + |\nabla u(x_0,t_0)| \\
&\leq C\left((-u(y_0,t_0)\log u(y_0,t_0))^{1/2} + (-u(x_0,t_0)\log u(x_0,t_0))^{1/2}\right) \\
&\leq C\left(|y_0-x_0|^2\log\frac{1}{|y_0-x_0|}\right)^{1/2}\left(-\log\left(|y_0-x_0|^2\log\frac{1}{|y_0-x_0|}\right)\right)^{1/2} \\
&\leq C|y_0-x_0|\log\frac{1}{|y_0-x_0|}\left(2+\frac{\log\left(-\log|y_0-x_0|\right)}{\log|y_0-x_0|}\right)^{1/2} \\
&\leq C|y_0-x_0|\log\frac{1}{|y_0-x_0|},
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Referências

[1] Adams, R. A. e F., Fournier J. J. *Sobolev Spaces.* Elsevier Sciense, 2003.

[2] Alt, H. M. e Phillips, D. "A free boundary problem for semilinear elliptic equations". *J. Reine Angew. Math.* 368, (1986), pp. 63–107.

[3] Aris, R. *The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalysts.* Clarendon Press, Oxford, 1975.

[4] Bertozzi, A.L. e Pugh, M.C. "Finite-time blow-up of solutions of some long-wave unstable thin film equations". *Indiana Univ. Math. J.* 49,(4) (2000), pp. 1323–1366.

[5] Caffarelli, L. A. "The regularity of free boundaries in higher dimensions". *Acta. Math.* 139, (1977), pp. 155–184.

[6] Chen, X.-Y., Matano, H. e Mimura, M. "Finite-point extinction and continuity of interfaces in a nonlinear diffusion equation with strong absorption". *J. Reine Angew. Math.* 459 (1995), pp. 1–36.

[7] Choe, H.J. e Weiss, G.S. "A semilinear parabolic equation with free boundary". *Indiana Univ. Math. J.* 52,(1) (2003), pp. 19–50.

[8] Dávila, J. e Montenegro, M. "Existence and asymptotic behavior for a singular parabolic equation". *Trans. Amer. Math. Soc.* 357,(5) (2005), pp. 1801–1828.

[9] Diaz, J. I., Morel, J. M. e Oswald, L. "An elliptic equation with singular nonlinearity". *Commum. Partial. Differ. Equ.* 12, (1987), pp. 1333–1344.

[10] Díaz, J.I. "Nonlinear partial differential equations and free boundaries". *Pitman.* I, (1985).

[11] Evans, L. C. *Partial Differential Equations.* Vol. 19. American Mathematical Society Providence Rhode, Island, 2010.

[12] Fernandez, P. J. *Medida e Integração.* IMPA, 2002.

[13] Friedman, A. *Variational principles and free-boundary problems.* A Wiley-Interscience Publication, Pure e Applied Mathematics. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1982.

[14] Gilbarg, D. e S., Trudinger N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer, 1997.

[15] Holanda, A.R.F., Queiroz, O.S. e Santos, C.K.S. "Pointwise regularity for a parabolic equation with log-term singularity". *Annali di Matematica Pura ed Applicata.* (2016).

[16] Imbert, C. e Silvestre, L. "An introduction to fully nonlinear parabolic equations. An introduction to the Kähler-Ricci flow". *Cham* 2086 (2013), pp. 7–88.

[17] Krylov, N. V. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces.* Vol. 12, American Mathematical Society, 1996.

[18] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A. e Uraltseva, N.N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Vol. 23. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, R.I., (Russian), 1967.

[19] Lima, E. L. *Curso de Análise.* Vol. 1. IMPA, 2006.

[20] Monneau, R. e Weiss, G.S. "An unstable elliptic free boundary problem arising in solid combustion". *Duke Math. J.* 136,(2) (2007), pp. 321–341.

[21] Montenegro, M. e Queiroz, O.S. "Existence and regularity to an elliptic equation with logarithmic nonlinearity". *J. Differential Equations.* 246,(2) (2009), pp. 482–511.

[22] Montenegro, M., Queiroz, O.S. e Teixeira, E.V. "Existence and regularity properties of non-isotropic singular elliptic equations". *Mathematische Annalen.* 351,(2) (2010), pp. 215–250.

[23] Petrosyan, A., Shahgholian, H. e Uraltseva, N. "Regularity of free boundaries in obstacle-type problems". *Graduate Studies in Mathematics* 136 (2012).

[24] Phillips, D. "A minimization problem and the regularity of solutions in the presence of a free boundary". *Indiana Univ. Math. J.* 32, (1983), pp. 1–17.

[25] Phillips, D. "Existence of solutions of quenching problems". *Appl. Anal.* 24,(4) (1987), pp. 253–264.

[26] Phillips, D. "Hausdorff measure estimates of a free boundary for a minimum problem". *Commum. Partial Differ. Equ.* 8, (1983), pp. 1409–1454.

[27] Queiroz, O.S. de e Shahgolian, H. "A free boundary problem with log–term singularity" (2016).

[28] Rodrigues, J.F. *Obstacle problems in mathematical physics.* Vol. 134. North-Holland Mathematics Studies, Notas de Matemática, 114, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.

[29] Weiss, G.S. "Self-similar blow-up and Hausdorff dimension estimates for a class of parabolic free boundary problems". *SIAM J. Math. Anal.* 30,(3) (1999), pp. 623–644.

[30] Wheeden, R. L. e Zygmund, A. *Measure and Integral.* Marcel Dekker, INC, 1977.

[31] Wolanski, N. *Introduccíon a los problemas de frontera libre.* Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, 2007.

[32] Wu, Z., Yin, J. e Wang, C. *Elliptic & Parabolic Equations.* World Scientific, 2006.

Apêndice A

Reunimos neste apêndice os principais resultados utilizados com suas respectivas referências caso o leitor tenha interesse em realizar uma leitura mais detalhada. Além disso, algumas desigualdades cruciais durante todo o texto.

Teorema A.1. ***(Desigualdade de Young)****([32]) Se $a, b, c > 0$, $p, q > 1$ e $1/p + 1/q = 1$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Quando $p = q = 2$ a desigualdade acima é chamada de Desigualdade de Cauchy.

Substituindo a e b por $\varepsilon^{1/p}a$ e $\varepsilon^{-1/q}b$ com $\varepsilon > 0$ no teorema acima, obtemos o

Teorema A.2. ***(Desigualdade de Young com ε)****([32]) Suponha que $a, b, c > 0$, $p, q > 1$, $1/p + 1/q = 1$ e $\varepsilon > 0$, então*

$$ab \leq \frac{\varepsilon a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p} b^q}{q} \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q.$$

Em particular, quando $p = q = 2$, temos

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2,$$

chamada de Desigualdade de Cauchy com ε.

Teorema A.3. ***(Lema de Fatou)*** *([12]) Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis e v e w são funções integráveis, então:*

(i) Se $u_n \leq v$ q.t.p., então $\displaystyle\int \limsup_{n\to\infty} u_n \geq \limsup_{n\to\infty} \int u_n$;

(ii) Se $u_n \geq w$ q.t.p., então $\displaystyle\int \liminf_{n\to\infty} u_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int u_n$.

Teorema A.4. ***(Teorema da Convergência Dominada)*** *([12]) Sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis e v uma função integrável.*

$$\textit{Se } \lim_{n\to\infty} u_n = u \textit{ e } |u_n| \leq |g| \textit{ em q.t.p. para todo } n \in \mathbb{N}, \textit{ então } \int u = \lim_{n\to\infty} \int u_n.$$

Teorema A.5. ***(Princípio do Máximo Parabólico)****([16]) Considere uma função contínua e limitada $u : Q_T \to \mathbb{R}$ tal que $\partial_t u$ existe em todo ponto de Q_T e Du e D^2u existem e são contínuas em Q_T. Se*

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & \leq & 0, & Q_T, \\ u & \leq & 0, & \partial_p Q_T, \end{array}$$

então $u \leq 0$ em Q_T.

Corolário A.6. ***(Princípio da Comparação Parabólico)****([16]) Sejam u e v duas funções contínuas, limitadas e diferenciáveis com relação ao tempo e tal que a primeira e segunda derivadas com relação ao espaço sejam contínuas. Se*

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & \leq & w, & Q_T, \\ \partial_t v - \Delta v & \geq & w, & Q_T, \end{array}$$

e $u \leq v$ em $\partial_p Q_T$, então $u \leq v$ em Q_T.

Teorema A.7. ***(Desigualdade de Hölder)****([30]) Sejam $u \in L_p$ e $v \in L_q$. Se $1 \leq p \leq \infty$ e $1/p + 1/q = 1$, então*

(i) $\displaystyle\int |uv| \leq \left(\int |u|^p\right)^{1/p} + \left(\int |v|^q\right)^{1/q}, \quad (1 < p < \infty);$

(ii) $\displaystyle\int |uv| \leq \sup\text{ess}|u| \int |g|, \quad (p = \infty).$

Em (i) quando $p = q = 2$ a desigualdade é nomeada por Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema A.8. ***(Teorema** 6.1**)** ([18]) Suponha que exista uma constante $k_0 \geq 0$ tal que*

$$\sup_{\partial_p Q_T} \text{ess}\ u \leq k_0$$

e que

$$|u^{(k)}|_{Q_T} \leq \gamma k u^{\frac{1+\kappa}{r}}(k)$$

onde $r \geq k_0$, γ e k são constantes positivas e

$$u(k) = \int_0^T |A_k(t)|^{r/q} dt.$$

Além disso, r e q são números reais satisfazendo

$$\begin{array}{l} r \in [2, \infty],\ q \in [2, 2_n]\ \text{se}\ n > 2, \\ r \in (2, \infty],\ q \in [2, \infty)\ \ \text{se}\ n = 2, \\ r \in [4, \infty],\ q \in [2, \infty]\ \ \text{se}\ n = 1, \end{array}$$

onde $2_n = 2n/(n-2)$. Então

$$\sup_{\partial_p Q_T} \text{ess}\ u \leq C$$

onde $C = C(\gamma, \kappa, r, q, n, T, \Omega)$ e

$$|u^{(k)}|_{Q_T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \text{ess}\ ||u(\cdot, t)||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{L^2(Q_T)}.$$

Teorema A.9. ***(Teorema do Valor Médio para Integrais)*** *([19]) Dadas as seguintes funções $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ com u contínua, temos:*

(i) Existe $c \in (a, b)$ tal que $\int_a^b u(x)dx = u(c) \cdot (b - a)$;

(ii) Se v é integrável e não muda de sinal, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = u(c)\int_a^b v(x)dx;$$

(iii) Se v é positiva, decrescente e com derivada integrável, existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = v(a)\int_a^c u(x)dx.$$

Teorema A.10. ***(Desigualdade de Poincaré)*** *([14]) Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < n$. Para todo $q \in [1, p^*]$ onde $p^* = np/(n - p)$ existe uma constante $C = C(n, p, q, |\Omega|)$ tal que*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leq C||\nabla u||_{L^p(\Omega)} \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Em particular, quando $p = q$, a estimativa acima é chamada de Desigualdade de Poincaré.

Teorema A.11. ***(Desigualdade de Sobolev)*** *([1]) Se $1 \leq p < n$, então existe uma constante $C = C(n, p)$ tal que*

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C||Du||_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Teorema A.12. ***(Teorema** 2.14 – **Regularidade**–$C^{1,1}$**)*** *([23]) Seja $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisfazendo:*

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & f(x,u)\chi_{A(u)}, & \Omega, \\ |\nabla u| & = & 0, & \Omega\backslash A(u), \end{array}$$

onde $A(u)$ é um subconjunto aberto de Ω e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições: existem constantes $C_1, C_2 \geq 0$ tais que

(i) $|f(x, t) - f(y, t)| \leq C_1|x - y|$ para todo $x, y \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x, s) - f(y, t) \geq -C_2(s - t)$ para todo $x \in \Omega,\ s, t \in \mathbb{R},\ s \geq t$.

Então $u \in C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e

$$||C^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega')|| \leq CM\left(1 + ||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||\eta||_{L^\infty(\Omega)}\right)$$

para qualquer $\Omega' \subset\subset \Omega$ onde $C = C\left(n, \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega)\right)$ e $M = \max\{1, C_1, C_2\}$.

Teorema A.13. ***(Desigualdade de Harnack)*** *([11]) Seja u uma função harmônica não negativa. Então para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe uma constante C dependendo apenas de n, Ω' e Ω tal que*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u.$$

Em particular,

$$\frac{1}{C} u(y) \leq u(x) \leq C u(y)$$

para quaisquer $x, y \in \Omega'$.

Teorema A.14. ***(Desigualdade de Harnack – Poisson)*** *([31]) Seja $u \geq 0$ tal que $\Delta u = f$ em $B_1(0)$ e suponha que $f \in L^\infty(B_1(0))$. Existe uma constante $C = C(n) > 0$ tal que*

$$\sup_{B_{1/2}(0)} u \leq \ C \left(\inf_{B_{1/2}(0)} u + ||f||_{L^\infty(B_1(0))} \right).$$

Demonstração. Defina a função

$$v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(y) \frac{C}{|x-y|^{n-2}} dy$$

onde $C/\left(|x-y|^{n-2}\right)$ é solução fundamental da equação de Laplace e

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & x \in B_1(0), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1}(0). \end{cases}$$

Temos que $\Delta v = f$ em $B_1(0)$ e

$$\begin{aligned} |v(x)| &\leq ||f||_{L^\infty(B_1(0))} \int_{B_1(x)} \frac{1}{|y|^{n-2}} dy \\ &\leq C ||f||_{L^\infty(B_1(0))}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Agora, como v é limitada, a função $w := u - v$ satisfaz

$$w \geq -\tilde{C} \ \text{ e } \ \Delta w = 0, \ \ B_1(0).$$

Logo, podemos aplicar o Teorema A.13 a $w + \tilde{C}$ em $B_{1/2}(0)$ para concluir que

$$\sup_{B_1(0)} w \leq C \inf_{B_1(0)} w.$$

Portanto, usando propriedades do supremo e do ínfimo junto com (A.1), segue que

$$\sup_{B_1(0)} u \leq C \left(\inf_{B_{1/2}(0)} u + ||f||_{L^\infty(B_1(0))} \right),$$

onde usamos que $w \leq u$. □

Lema A.15. *Para quaiquer* $r, s \in \mathbb{R}$ *e um número real* $\theta > 1$,

$$|r^{1/\theta} - s^{1/\theta}| \leq C|r - s|^{1/\theta}$$

onde C *é uma constante positiva.*

Demonstração. Defina a função

$$f(r, s) = |r^{1/\theta} - s^{1/\theta}|^{\theta} - C|r - s|.$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $s < r$. Temos,

$$\partial_r f(r, s) = r^{1/\theta - 1}\left(r^{1/\theta} - s^{1/\theta}\right)^{\theta - 1} - C.$$

Observe que

$$\begin{aligned} r^{1/\theta - 1}\left(r^{1/\theta} - s^{1/\theta}\right)^{\theta - 1} &= \frac{\left(r^{1/\theta} - s^{1/\theta}\right)^{\theta - 1}}{\left(r^{1/\theta}\right)^{\theta - 1}} \\ &= \left(1 - \left(\frac{s}{r}\right)^{1/\theta}\right)^{\theta - 1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$r^{1/\theta - 1}\left(r^{1/\theta} - s^{1/\theta}\right)^{\theta - 1} < 1$$

e assim, a função $g(r) = f(r, s)$ tem derivada negativa ao escolhermos $C > 1$, mostrando que g é decrescente, ou seja, $g(r) \leq g(s)$. $\square$

Lema A.16. *Se* $u > 0$ *é a primeira autofunção associada ao problema de autovalor com condição de Dirichlet,*

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & \Omega, \\ u = 0, & \partial\Omega, \end{cases} \tag{A.2}$$

então u *satisfaz* (1.3.7).

Demonstração. Pela teoria de regularidade para equações elípticas, temos que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ uma vez que Ω é um domínio limitado suave. Resta demonstrar que o quociente $|\nabla u|^2/u$ é limitado. Para este fim, suponha que

$$\frac{|\nabla u|^2}{u} > \lambda_1, \tag{A.3}$$

onde $\lambda_1 > 0$ é o primeiro autovalor associado a u. Por hipótese, u é a primeira autofunção do problema (A.2). Assim,

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 = \lambda_1 \int_\Omega u. \tag{A.4}$$

Agora, de (A.3) e (A.4) obtemos o absurdo

$$\lambda_1 \int_\Omega u \geq C \int_\Omega u > \lambda_1 \int_\Omega u,$$

como queríamos. $\square$