UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FLORISVAL SANTANA FILHO

ANÁLISE TEXTUAL: OUTRO OLHAR SOBRE A ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

CAMPO GRANDE - MS
2017

FLORISVAL SANTANA FILHO

ANÁLISE TEXTUAL: OUTRO OLHAR SOBRE A ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marilena Bittar

Campo Grande - MS

2017

FLORISVAL SANTANA FILHO

ANÁLISE TEXTUAL: OUTRO OLHAR SOBRE A ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Grande – MS 17 de março de 2017

BANCA EXAMINADORA:

Profa. DrªDra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Carvalho de Fernandes
Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ (Membro externo)

Prof. Dr. Bruno Alves Dassie
Universidade Federal Fluminense – UFF (Membro externo)

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (Suplente)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

AGRADECIMENTOS

Depois de muito caminhar, de muito trabalhar, de muitas noites em claro, é chegada a hora de agradecer a todos aqueles que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste sonho.

Agradeço a meu orientador, prof **João Bosco Pitombeira**, pela paciência e pelos conhecimentos compartilhados ao longo dos últimos dois anos, guardarei comigo essas lembranças com carinho.

Aos professores **Bruno Alves Dassie** e **Marilena Bittar** pelas contribuições, sinto-me honrado em tê-los em minha banca.

A minha família pelo carinho e compreensão pelo tempo em que estive ausente. A minha mãe (**Dalva**) pelo amor incondicional, e que mesmo longe não me deixou só em nenhum momento, e aos meus irmãos (**Nando, Carla, Beto, Gil e Sandro**) pelo apoio e companheirismo de sempre.

Ao grupo **DDMat** pelas discussões e por suas contribuições para este trabalho.

Aos amigos do mestrado que me acolheram e que nunca me deixaram só. Em especial, quero agradecer a **Ana Claudia** pelo acolhimento, cumplicidade e alegrias vividas. Ao meu grupinho "sem noção", **Ivanete, Liana e Relicler** pelos risos, choros, angústias compartilhadas e principalmente pelos novos objetivos partilhados. A **Sônia, Cintia** e J**éssica** pela amizade. Aos meus vizinhos (**Sérgio e Mariana**) pelo acolhimento em minha chegada e por estarem comigo em vários momentos. Aos amigos de sempre **Adriana Ferdele, Adriana Ribeiro e Fátima**, mesmo longe vocês se fizeram presentes com palavras de apoio. À profa **Denize** pelas palavras de carinho de sempre e especialmente por sua amizade.

Agradeço a todos por me darem força e me ajudarem a realizar este sonho, saibam que vocês terão sempre um lugar especial em minha vida.

Enfim, agradeço a **Deus** por possibilitar a realização de mais um sonho e pela certeza de que novos desafios irão surgir e que terei comigo pessoas maravilhosas que estarão torcendo por mim assim como torço por cada um de vocês.

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo apresentar um método que nos permite investigar o modo como um conteúdo matemático é abordado em livros didáticos: a análise textual, proposta por Dormolen (1986). Essa teoria se baseia na ideia de núcleos que são expressões gerais e que abordam o conhecimento matemático presente no livro didático, além de influenciarem o modo como o aluno compreende o conteúdo matemático. Os núcleos podem ser classificados de acordo com as características por eles apresentadas (teórico, heurístico, restritivo, algorítmico e comunicativo). A partir dessa classificação foi possível observar o tipo de linguagem que eles possuíam (ostensiva, relacional e funcional), o tipo de ação que os signos utilizados poderiam provocar nos alunos (símbolo ou sinal), a maneira em que os núcleos estavam dispostos no texto analisado (sequenciamento) e de que forma a aprendizagem de um desses elementos pode contribuir para a compreensão de outros núcleos (condicionamento conceitual). Metodologicamente, seguimos alguns passos da análise de conteúdo proposta por Bardin (2011). Durante o estudo, foi possível perceber o uso diversificado de linguagens, principalmente da funcional e da relacional, tendo ainda sido encontrado um maior número de núcleos heurísticos em relação aos algorítmicos, bem como se verificou que os do tipo teórico estão distribuídos ao longo do texto.

Palavras-chave: Análise de livros didáticos. Análise textual. Núcleos.

ABSTRACT

We present a method that allows investigation on how mathematical topics are approached in textbooks, through a textual analysis, as proposed by Dormolen (1986). This theory is based on the idea of kernel, where are investigated how the approach of general expressions of mathematical knowledge in textbooks can influence the student understanding of mathematical topics. Kernels can be classified as theoretical, heuristic, restrictive, algorithmic and/or communicative. It is possible to analyze what language is used in the kernels (i.e., ostensive, relational and/or functional), as well as: (1) the type of action used to provoke in students (symbol or signal); (2) how the kernels are arranged in the analyzed text (sequencing) and; (3) how the learning of a kernel can contribute to the understanding of others kernels (conceptual conditioning). Methodologically, we follow some steps proposed by Bardin (2011). During the analysis, it was possible to recognize a diversified language use, mainly of functional or relational language. A greater number of heuristic kernels was found than of algorithmic kernel and, it was observed that theoric kernels are distributed throughout the text.

Keywords: didactic books analysis. Textual analysis. Kernel.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O início de uma pesquisa sempre é um período em que estamos envolvidos em um mundo de questionamentos. Penso que em cada ser existe um pesquisador e que somos guiados pela curiosidade, tendo sido essa incessante busca pelo conhecimento que levou o homem a lugares que ele supunha ser impossível alcançar.

Imagine um homem da Idade Média pensando em pisar na Lua. Para ele, essa hipótese pareceria no mínimo um sonho impossível. Entretanto, o conhecimento possibilitou ao homem chegar a lugares improváveis, permitindo-lhe ainda entender, compreender e conhecer os fenômenos à sua volta.

Todavia, pesquisar é investigar. Ponte (2003, p. 02), sobre o tema, entende que "'investigar' não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com [os quais] nos deparamos". Essa procura tão mencionada por este autor foi o motor do desenvolvimento do conhecimento científico humano.

São muitas as formas empregadas na arte da pesquisa. Minha inserção nesse meio aconteceu durante a graduação com a elaboração do meu trabalho de conclusão de curso –TCC – que tinha como título **As práticas metodológicas e as ferramentas tecnológicas no ensino de geometria: um olhar sobre o entendimento de professores de matemática da rede municipal de Aracaju-SE**.[1]

Nessa investigação procurei compreender as abordagens da educação matemática (resolução de problemas, modelagem matemática, materiais manipuláveis, jogos, história da matemática, uso das ferramentas tecnológicas) e quais destas eram mais utilizadas nas aulas de matemática quando os conteúdos geométricos eram abordados e qual o entendimento que os professores possuíam sobre tais práticas.

Vários foram os aspectos que faziam parte do cenário estudado. Dentre eles, um dos que me chamaram atenção foi a utilização do livro didático na sala de aula. Segundo os professores participantes daquela pesquisa, tal material norteava sua prática docente.

---

[1] SANTANA FILHO, Florisval. **Práticas metodológicas e ferramentas tecnológicas no ensino de geometria:** um olhar a partir do entendimento de professores de matemática da rede municipal de Aracaju-SE. 2012. 57 p. Trabalho de Conclusão de Curso – TCC. Aracaju: Universidade Federal de Sergipe – UFS, 2012.

Isso me instigou a entender o livro didático, a forma como é organizado e os programas governamentais que objetivam melhorar sua qualidade.

Após concluir a graduação, fui encorajado por minha então orientadora do TCC a continuar meus estudos. Comecei assim a participar do grupo de pesquisa Processos de Argumentação no Ensino de Matemática, além de eventos na área da Educação Matemática.

No ano de 2015 se deu meu ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PPGEdumat - da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS, inicialmente sob a orientação do professor visitante Dr. João Bosco Pitombeira Carvalho de Fernandes.

Minha intenção inicial era investigar o uso das ferramentas tecnológicas no estudo dos sólidos geométricos nas aulas de Matemática em escolas públicas que ofereciam o Ensino Médio na cidade de Campo Grande/MS. Porém, em conversa com meu orientador, tal objetivo foi descartado e começamos a planejar uma nova pesquisa.

Após diversos encontros, decidimos aplicar um método para a análise de livros didáticos, a análise textual proposta por Dormolen (1986) que está baseada na ideia de núcleos[2], que se classificam em cinco tipos diferentes.[3]

Concordamos em analisar livros didáticos, pois, durante minha pesquisa realizada em 2012, foi possível perceber que esse recurso tinha presença constante na sala de aula e por vezes norteava a prática do professor, de modo que por ele muitos alunos têm o primeiro contato com o conceito de função. Além disso, há o fato de que a aprendizagem desse conceito é imprescindível para a continuidade dos estudos em algumas áreas do conhecimento, como, por exemplo, nas Engenharias, além de ser necessário a algumas ciências, como a Física, a Economia, etc. e à própria formação em Matemática.

O conceito de função também é estudado na educação básica. O primeiro contato discente com ele acontece ainda no Ensino Fundamental (9º ano), quando são apresentados aos alunos alguns conceitos essenciais a serem aprofundados no Ensino Médio. Esse conteúdo também é parte do Ensino Superior. Isso me levou a questionar

[2] Núcleos são expressões gerais que abordam o conhecimento matemático presente no livro didático, e que influenciam o modo como o aluno compreende determinado conteúdo.

[3] Detalhes sobre os núcleos, assim como os aspectos referentes ao nosso referencial teórico, serão abordados no Capítulo III. Ademais, nossa investigação está restrita ao capítulo do livro didático no qual o conceito de função é tratado, visto que pretendemos mostrar como a análise textual pode ser aplicada com essa finalidade.

como é abordado no Ensino Médio, particularmente pelos livros didáticos dessa etapa de ensino.

Além disso, percebemos que o conceito de função é um tema que abrange várias áreas do conhecimento: aspectos relacionados a ele ajudam a explicar, por exemplo, o comportamento de crescimento e decrescimento da quantidade de bactérias (função exponencial); a calcular a intensidade de tremores de terra (função logarítmica), entre outras situações.

Mas como fazer essa pesquisa? Quais materiais analisar: investigar a prática do professor na sala de aula quando explana sobre esse conceito ou analisar o livro didático? Este, por ser um recurso bastante utilizado em sala de aula e ser distribuído gratuitamente a quase todos os alunos da Educação Básica, tornou-se o nosso objeto de pesquisa.

Nos últimos anos, o número de trabalhos voltados para a análise de livros didáticos vem se expandindo, existindo vários referenciais que podem ser utilizados para analisar livros didáticos, como a Hermenêutica da Profundidade, os Campos Conceituais, a Análise de Conteúdo, a Teoria Antropológica do Didático (TAD), entre outros. Neste trabalho, destacamos a TAD por ser bastante discutida no grupo de estudo DDMat[4] do qual faço parte.

Essa teoria foi proposta por Chevallard (1999) e desde então vem sendo aperfeiçoada por meio de diversas pesquisas realizadas em vários países, inclusive no Brasil. No PPGEdumat trabalhos recentes a utilizaram para a análise de livros didáticos. Souza (2014), por exemplo, investigou como a contextualização era proposta no ensino da Introdução à Álgebra em livros didáticos do 7º ano do Ensino Fundamental. Segundo essa autora, foi possível perceber que as contextualizações propostas pelos manuais analisados, em sua maioria, eram artificiais, sem articulação entre a matemática e o contexto apresentado. Por fim, a pesquisadora concluiu que a contextualização privilegia situações sociais e internas à Matemática.

Ramalho (2016), por sua vez, procurou responder ao seguinte questionamento: como é proposto o ensino de trigonometria no ensino fundamental? A partir da análise dos livros didáticos, segundo a autora, pode-se verificar que há uma valorização da construção do bloco do saber (tecnológico-teórico) e da trigonometria no triângulo retângulo, assim como suas técnicas de resolução.

[4] Grupo de Estudo em Didática da Matemática.

Outros trabalhos também utilizaram a TAD como referencial, dentre os quais destacamos Almeida (2015) e Gonçalves (2016). Além dos aspectos estudados nos trabalhos já citados, o uso dessa teoria possibilita uma visão da organização didática e matemática dos livros ou de coleções a serem analisadas, entre outras características que permite investigar.

Neste trabalho, propomos outro referencial teórico, a análise textual, que, segundo Dormolen (1986), visa analisar um texto possibilitando uma visão sobre o conteúdo. Essa vertente teórica está fundamentada na ideia de núcleo que são expressões gerais que abordam o conhecimento matemático presente no livro didático. O conceito de núcleo, assim como maiores detalhes sobre essa teoria, será explicitado mais adiante.

A partir dos aspectos metodológicos e teóricos que escolhemos, estruturamos esta Dissertação da seguinte forma: no Capítulo I, discorremos brevemente sobre a importância do livro didático e o que consideramos ser um texto matemático. Além disso, apresentamos algumas considerações sobre a Matemática e o conceito de função. Finalizamos o capítulo traçando um panorama histórico do desenvolvimento desse conceito ao longo dos séculos.

No Capítulo II, por outro lado, tratamos os aspectos metodológicos referentes à pesquisa e, no Capítulo seguinte, apresentamos o referencial teórico e a análise textual esclarecendo suas características.

Já a análise dos dados obtidos é apresentada no capítulo IV. Nesse capítulo, discutimos os núcleos encontrados no texto matemático, bem como os demais aspectos relacionados ao capítulo do livro didático no qual o conceito de função é abordado. No último Capítulo, finalmente, apresentamos as considerações sobre a análise realizada, assim como as perspectivas para futuras pesquisas utilizando nosso referencial teórico.

CAPÍTULO I – A MATEMÁTICA E O CONCEITO DE FUNÇÃO

Neste capítulo tratamos a importância do livro didático e o que estamos considerando ser um texto matemático. Em seguida, discorremos sobre aspectos relacionados à Matemática e ao conceito de função. Por fim, traçamos um panorama histórico sobre o conceito estudado mostrando seu desenvolvimento ao longo dos séculos até a definição utilizada atualmente.

1.1. A importância do livro didático

Voltamos o nosso olhar para o livro didático por entender que este é um recurso bastante utilizado em sala de aula e que de algum modo norteia a forma como os alunos adquirem conhecimentos matemáticos durante sua vida escolar.

Para Carvalho e Lima (2010), é no livro didático que encontramos o saber a ser ensinado, como também os métodos para que os estudantes o compreendam. Choppin (2004) atribui ao livro quatro funções essenciais[5], das quais destacamos a referencial, pelo qual o impresso é compreendido como um material em que o conhecimento, as técnicas ou habilidades são "depositados" e posteriormente transmitidos às futuras gerações.

Em sua função instrumental, o livro aciona métodos de aprendizagem, uma vez que são propostos exercícios e atividades que podem contribuir para o processo de memorização dos conhecimentos, assim como favorecer a aquisição de competências disciplinares ou transversais, o que proporciona a apropriação de habilidades, métodos de análise ou a resolução de problemas, entre outros.

Além desses pontos, o livro didático desempenha funções específicas para estudantes e professores no contexto da sala de aula. Segundo Carvalho e Lima (2010), em relação aos discentes, tais funções podem ser a aquisição de saberes relevantes; a consolidação, a ampliação, o aprofundamento de conhecimentos já adquiridos e sua integração, além da promoção do desenvolvimento de habilidades e de competências na busca pelo aumento da autonomia do estudante.

Já em relação ao docente, o livro didático pode contribuir para o planejamento e para gestão das aulas, auxiliando na avaliação de aprendizagem do estudante e

---

[5] Choppin (2004) atribui quatro funções essenciais aos livros didáticos: *referencial, instrumental, ideológica e cultural* e *documental*.

favorecendo a aquisição de saberes profissionais pertinentes, cumprindo assim o seu papel de texto de referência (CARVALHO; LIMA, 2010). Entretanto,

> Apesar de toda a sua importância, o livro didático não deve ser o único suporte do trabalho do professor. É sempre desejável buscar enriquecê-lo com outras fontes a fim de ampliar ou aprimorar o conteúdo que ele traz, e acima de tudo adequando-o ao grupo de estudantes que o utilizam (CARVALHO; LIMA, 2010, p. 16).

O livro didático é, pois, um importante recurso que contribui e muito para a dinâmica da sala de aula. Sobre o tema, Lajolo (1996) salienta que, no Brasil, esse recurso adquire importância maior tendo em vista a precariedade do nosso sistema de ensino, de certo modo ainda "determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o *que* se ensina e *como* se ensina o que se ensina" (LAJOLO, 1996, p. 04).

Essa importância pode ser constatada pelo fato de o Ministério da Educação ter um programa que tem por objetivo avaliar e distribuir gratuitamente obras didáticas a quase todos os alunos da educação básica: o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

Frente ao exposto, propomos a análise textual de Dormolen (1986) como um referencial para o estudo de livros didáticos. Essa abordagem metodológica está baseada na ideia de que os núcleos são expressões gerais que tratam o conhecimento matemático presente no livro didático. Tais núcleos são identificados e categorizados de acordo com as características por eles apresentadas. Mais detalhes sobre a análise textual assunto serão apresentados nos próximos capítulos. Antes, porém, acreditamos ser pertinente explicar o que estamos considerando ser um texto matemático.

1.2. O texto matemático no livro didático

Ao delinearmos nosso objeto de estudo, ou seja, ao decidirmos analisar o livro didático de matemática, surgiu um questionamento que deve ser levado em consideração: o que é um texto?

Tal questionamento faz sentido pelo fato de estarmos considerando que o livro didático é composto por vários textos matemáticos cuja finalidade é apresentar o conteúdo a ser ensinado e compreendido pelo aluno.

Assim, ao nos perguntarmos o que vem a ser um texto, percebemos que poderíamos concebê-lo de várias formas. Na meta-matemática, nós o definiríamos como “um conjunto ou sequência de expressões que são compostas em dado alfabeto” (OTTE, 1986, p. 173). Por essa vertente, a leitura significaria apenas estabelecer a distinção e a identidade de duas ou mais expressões.

Recorrendo à Linguística, um texto é uma sequência finita e organizada de enunciados e constitui a unidade fundamental do processo comunicativo dotada de sentido e intencionalidade. Também pode ser compreendido como um conjunto de palavras organizadas que expressam um determinado sentido ou tentam comunicar algo a respeito de algum acontecimento. Nessa última forma de compreender o texto estaríamos desconsiderando os não escritos, formados por figuras, desenhos e pinturas, além dos textos orais. Dessa forma, seja qual for a definição escolhida, um determinado texto tem sua função definida a partir do contexto no qual está inserido.

Por exemplo, no texto narrativo, o objetivo de quem conta a história (narrador) é deixar o leitor ciente do fato ocorrido. No texto descritivo, por outro lado, já existe outra função, não mais narrar e sim descrever o fato sob a perspectiva de quem o presenciou. Ademais, o texto dissertativo é aquele pelo qual o escritor, a partir de um encadeamento lógico de ideias, emite sua opinião sobre determinado assunto.

Neste estudo consideramos o texto de um ponto de vista próximo ao da Linguística, ou seja, como um conjunto de enunciados. Isso porque entendemos que é a partir destes que se dota de sentido e de uma determinada intencionalidade, a qual pode ser compreendida de diversas formas. No caso do professor, a intencionalidade se relaciona aos objetivos pretendidos, sejam eles de curto ou longo prazo.

É nesse sentido que nos apoiaremos na teoria proposta por Dormolen (1986). Segundo esse autor, a análise textual é um instrumento que visa analisar um texto possibilitando uma visão sobre o conteúdo analisado. Para ele, o texto é algo relativamente curto, ou seja, pode consistir de apenas um par de frases, um parágrafo, ou um capítulo de um livro.

Referindo-se a textos matemáticos, Dormolen (1986, p. 141) destaca que:

> Alguns textos contêm apenas os problemas e os exercícios, não há generalizações, regras, convenções, explicações. Esclarecimentos de teoremas, definições e provas devem ser feitos pelo aluno, com ou sem a ajuda do professor, e em parte pelo professor sozinho. [...] Outros contêm generalizações e regras, com explanações em uma parte e problemas e exercícios em outras, essas duas partes são rigorosamente separadas.

No último tipo mencionado, há uma divisão clara: a primeira parte é entendida como o corpo de texto, em que são apresentadas as principais ideias referentes ao conceito matemático, o que poderíamos chamar de “teoria, definições, etc.”; na outra parte, há apenas os problemas e exercícios. Entretanto, nesses tipos de texto, ainda é o professor que decide como ele será utilizado.

Esse mesmo autor refere-se a um terceiro tipo de texto, que “consiste em uma mistura: observações, esclarecimentos, generalizações, regras, etc., são regularmente intercalados com problemas, exercícios e outras atribuições. O texto parece ser um professor” (DORMOLEN, 1986, p. 141). Nesse modelo, busca-se dar autonomia ao aluno na aprendizagem de um determinado conceito, assim como parece haver uma preocupação em escrever um texto ‘à prova de professor’. Contudo, não é possível afirmar se tal texto existe ou mesmo se seria possível a sua elaboração.

A partir desse entendimento, para cada tipo de texto, esperam-se atitudes diferentes do professor, seja dando ao aluno maior autonomia na busca pelo conhecimento ou sendo ele (o professor) o ator principal nesse processo.

Em nosso trabalho, cada capítulo do livro didático é considerado um texto matemático. Com isso, compreende-se que, em cada seção, o autor aborda um conceito matemático, construindo-o a partir de vários enunciados, e o encadeamento desses enunciados permite observar características presentes no livro quando o autor trata um determinado conceito.

Ao olharmos para um texto matemático presente no livro didático, procuraremos identificar os enunciados como uma sequência discursiva, de extensão variável, e que de alguma forma busca, por meio de uma exposição clara, definir, explicar ou demonstrar algo. Isso trará implícita ou explicitamente certas características, as quais explicitaremos no Capítulo III.

Como já mencionado, para esta pesquisa, nossa análise ficará restrita ao capítulo do livro didático em que o conceito de função é introduzido. Escolhemos estudar o conceito de função pois este se configura, como já dissemos, como um conceito extremamente importante em matemática e em suas aplicações.

1.3. A Matemática e o conceito de função

Entender a Matemática como ciência pode ser o primeiro passo na direção de promover seu ensino, visto que, como toda ciência, ela possui uma linguagem própria cujo entendimento é fundamental. Desde os primeiros anos da escolarização temos contato com essa linguagem que, com o passar dos anos, torna-se cada vez mais complexa.

É preciso, assim, mostrar a Matemática presente nos simples afazeres do mundo que nos cerca e tornar isso perceptível é uma das tarefas do professor, que deve fazer com que o aluno perceba que esse conhecimento faz parte de sua vida, e que seu desenvolvimento se deu ao longo de muitos séculos.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 2000), a Matemática possui um caráter formativo, pois possibilita a estruturação do pensamento matemático e do raciocínio dedutivo, além de desempenhar um papel instrumental, uma ferramenta no quotidiano das pessoas. Assim, "a matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e aquisição de atitudes, cuja utilidade transcende o âmbito da própria matemática" (BRASIL, 2000, p. 40).

A Matemática é criação humana, desenvolvendo-se no seio da sociedade e sendo utilizada para explicar os fenômenos a nossa volta. Ela "reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e da natureza" (BRASIL, 1997, p. 23). Sobre esse aspecto, os PCN apontam ainda que:

> A vitalidade da matemática deve-se também ao fato que, apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos da vida diária: na indústria, no comércio e na área tecnológica. Por outro lado, ciências como Física, Química e Astronomia têm a Matemática como ferramenta essencial (BRASIL, 1997, p. 23).

Dessa maneira, essa ciência foi se tornando uma ferramenta para explicar fenômenos e, em contrapartida, estes favoreceram o desenvolvimento de novos ramos que possibilitaram a evolução dos conceitos matemáticos. Com isso, ela se transformou em um vasto campo de conhecimento, com especificidades próprias e regras bem definidas.

Com vistas a essa realidade, seu ensino deve ser promovido de maneira a propiciar seu melhor entendimento, tendo em vista que:

> O saber matemático permite à pessoa intervir criticamente nas ações cotidianas, adquirindo maior capacidade de argumentar suas considerações frente às problemáticas de vida. Nessa perspectiva, o professor precisa redimensionar a abordagem dos conceitos matemáticos, considerando que estes foram construídos sócio historicamente e essa trajetória não pode ser ocultada. O estudo da

> Matemática torna-se significativo quando os alunos percebem as relações entre o conhecimento matemático produzido pela humanidade e os conhecimentos produzidos por outras áreas (LOPES, 2011, p. 07).

Em outras palavras, seu ensino deve proporcionar uma postura crítica e reflexiva diante dos mais diversos tipos de informações, entre elas as matemáticas[6], já que pertencem à nossa realidade e são passíveis de manipulação. Apoiando-se em documentos oficiais, Lopes (2011, p. 09) acrescenta que a Matemática no Ensino Médio:

> Tem um valor formativo, o que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, mas também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas.

Além disso:

> A matemática transforma-se por fim na ciência que estuda todas as possíveis relações e interdependência quantitativas entre grandezas, comportando um vasto campo de teorias, modelos e procedimentos de análise, metodologias próprias de pesquisa, formas de coletar e interpretar dados (BRASIL, 1997, p. 24).

Igualmente, o ensino de Matemática deve contribuir para o desenvolvimento de habilidades e de competências relacionando-as com a representação, a comunicação, a investigação e com a contextualização sociocultural (BRASIL, 2006). De acordo com as *Orientações Curriculares Nacionais* (OCN), deve-se:

> Usar a matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; [de modo que] compreendam que a matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam que a matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apresentar a importância da Matemática no desenvolvimento cientifico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Esse documento apresenta ainda as principais competências e habilidades que devem ser atingidas até os anos finais da Educação Básica, bem como propõe temas que podem estruturar o ensino de Matemática. Um deles, o estudo das funções, configura-se como um integrador relevante para vários ramos da atividade humana.

---

[6] Entende-se por informações matemáticas o uso de conceitos matemáticos utilizados no cotidiano do indivíduo que possam contribuir para a tomada de decisões. Por exemplo, na comparação entre dois produtos com características semelhantes, usamos a comparação entre quantidade adquirida e preço a fim de decidir a melhor escolha.

Sobre o ensino da Matemática, no Ensino Médio, um de seus objetivos constantes nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) é levar o aluno a "reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados a diferentes representações" (BRASIL, 1999, p. 42). Deve também favorecer o desenvolvimento de habilidades e de competências, algumas delas em estreita relação com o conceito de função. Entre elas, podemos citar a leitura e a interpretação de "dados ou informações apresentadas em diferentes linguagens e representações" (BRASIL, 2002, p. 114). Além disso, devemos ser capazes de "traduzir uma situação dada em determinada linguagem para outra [e] transformar as linguagens mais específicas umas nas outras, como tabelas em gráficos ou equações" (BRASIL, 2002, p. 114). Finalmente, deve-se possibilitar a seleção de "diferentes formas para representar um dado ou conjunto de dados e informações, reconhecendo vantagens e limites de cada uma delas" (BRASIL, 2002, p. 114).

Além das competências e habilidades relacionadas, compreender a Matemática de certa forma significa entender o mundo e perceber que seus conceitos servem para explicar várias situações do nosso cotidiano. Um desses conceitos é o de função, que surge do estudo de grandezas, abordando aspectos referentes à interdependência quantitativa entre elas, e dos estudos de variáveis, o que ocasiona o surgimento de um novo ramo: a análise matemática.

Ponte (1990, p. 03) esclarece que:

> Na Análise Infinitesimal consideram-se funções de uma, duas, três ou *n* varáveis, estudando-se as suas propriedades bem como das suas derivadas; nas teorias de equações diferenciais e integrais procura-se resolver equações cujas soluções são funções; na Análise Funcional trabalha-se com espaços cujos objetos são funções; na Análise Numérica estudam-se os processos de controlar os erros na avaliação de função dos mais diversos tipos, etc.

Segundo o autor, o conceito de função possui ainda uma estreita relação com a Álgebra ao considerar suas operações e relações e com a Lógica ao estudar as funções recursivas. Também é possível perceber que o estudo desse conceito permite modelar vários tipos de fenômenos, sejam eles naturais, físicos ou químicos.

Da mesma forma, o conceito de função pode ser tratado de várias maneiras. Ou seja, podemos tê-lo introduzido pelo uso de tabelas e gráficos, utilizando sua lei de formação (uso da linguagem algébrica) ou ainda pela linguagem natural (situação-problema ou contextualização).

Tal direção também pode ser visualizada no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2015, que orienta que o aluno deve "saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos" (BRASIL, 2014, p. 13) assim como trabalhar com "as várias representações (gráficos, tabelas e fórmulas) e a utilização de equações" (BRASIL, 2014, p. 13). É importante ressaltar também que:

> O conceito de função desempenha também papel importante para descrever e estudar por meio da leitura, interpretação e construção de gráficos o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento, como a física, geografia ou economia (BRASIL, 1999, p. 43).

Portanto, devido à sua importância, direcionaremos nosso olhar ao conceito de função, pois, de acordo com Ponte (1992, n.p.), "a noção de função pode ser considerada de várias maneiras, cada uma com diferentes implicações educacionais". Esse autor ainda destaca que "em seus primórdios, a noção de função foi usada para designar correspondência entre entidades geométricas" (PONTE, 1992, n.p.).

Os PCNEM (BRASIL, 1999, p. 121) acrescentam ainda que:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

Assim, a noção de função deve propiciar ao aluno reconhecer e utilizar os mais diversos tipos de linguagem, expressando as relações entre grandezas e modelando as situações problemas apresentadas, buscando com isso fazer as conexões entre a matemática e as mais diversas áreas (BRASIL, 1999). Além disso, o estudante deve conseguir associar tal conceito às mais diversas situações vivenciadas por ele, além de seus diferentes tipos de representações.

1.4. Panorama histórico sobre o conceito de função

Nesta seção discutiremos aspectos históricos que contribuíram não apenas para a evolução do conceito de função, como também para o desenvolvimento da própria Matemática. Essa postura se faz necessária para que se possam entender os desafios enfrentados pelos matemáticos durante a constituição desse conceito. Promovendo um paralelismo entre o conceito de função e núcleo ao observarmos as definições propostas pelo livro didático, vimos que muitas vezes este se utiliza de definições que são retomadas posteriormente e às quais incorpora-se novas características a respeito do conceito abordado. Dessa forma percebemos, que há uma evolução dessas características, o que possibilita assim uma visão em espiral dos núcleos (ver Figura 4, pag. 53).

Essa evolução sobre o conceito de função também pode ser visualizada quando consideramos sua constituição histórica, ou seja, quando fazemos um estudo sobre sua evolução histórica. Nela é possível perceber que as definições propostas traziam elementos que com o passar dos anos foram questionados, o que possibilitou o surgimento de novas definições que por sua vez proporcionaram uma nova visão sobre o conceito de função.

No que diz respeito à evolução histórica do conceito de função, podemos perceber que, na Antiguidade, alguns povos (egípcios, babilônios, entre outros) conheciam e até já trabalhavam com a relação de dependência entre grandezas e realizavam cálculos matemáticos com elas. Os gregos, por sua vez, também contribuíram para a noção de funcionalidade, visto que a utilizavam para expressar a relação de dependência entre as grandezas – como exemplo temos a relação entre posição e tempo. Dessa forma, estaríamos propensos a afirmar que o conceito de função teria se originado nessa época.

Entretanto, Youschkevicth (1976) destaca que, apesar de todo esse conhecimento, esses povos não faziam uso de um sistema de símbolos para representar as dependências funcionais. Eles conheciam as posições dos astros (lua, sol, planetas) e sabiam que estas variavam de forma contínua e periódica em relação ao tempo, assim como entendiam que tais variações eram explicadas por procedimentos convencionais, fazendo uso de exemplos numéricos ou ainda de uma forma verbal bastante generalizada na tentativa de explicar essas transformações. Contudo, não podemos afirmar que esses povos foram os primeiros a trabalhar com o conceito de função.

Nesse período, apesar de esses povos conhecerem a relação de dependência entre grandezas, não é possível encontrar o registro do uso da palavra “função”, o que revela que esse conceito não era concebido de forma clara. Apenas no século XIV os trabalhos de Oresme traziam implícitos indícios do conceito de função.

Já no século XVII, Segundo Siu (1995), em 1667 Gregory explicitou o que para alguns autores é a primeira definição para o conceito de função: uma quantidade composta que era resultado da adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raízes ou por quaisquer outras operações imagináveis entre quantidades. Ou seja, uma quantidade composta era obtida a partir das cinco primeiras operações, por “qualquer outra operação imaginável”. Assim, ele entendia o uso de algum processo bastante geral.

Todavia, Youschkevicth (1976) menciona que não é possível afirmar em que momento o conceito de função se originou, dissertando ainda que:

> A antiga literatura matemática carece não apenas de palavras equivalentes ao termo função, mas até mesmo uma alusão a essa ideia mais abstrata e mais geral que unifica várias dependências concretas entre quantidades ou números, qualquer que seja a forma (descrição verbal, gráfico, tabela) como essas dependências ocorrem e devem ser consideradas (YOUSCHKEVICTH, 1976, p. 42-43). [7]

Em outras palavras, apesar de encontramos características semelhantes ao atual conceito de função e dos indícios sobre essas relações, não se pode atribuir até este momento o surgimento deste conceito. Por outro lado:

> Há uma boa distância entre o instinto de funcionalidade (BELL) e a percepção da mesma, e o mesmo é verdade no que diz respeito a funções específicas e o surgimento do conceito de função com um ou outro grau de generalidade (YOUSCHKEVICTH, 1976, p. 42-43).

Dessa forma, percebe-se que apesar de existirem o instinto e a percepção da funcionalidade, o conceito de função com o grau de generalidade que conhecemos hoje só foi desenvolvido mais precisamente no final do século XVI e início do século XVII. Dois fatores contribuíram para que isso ocorresse: o crescimento da Matemática numérica e a criação de uma álgebra literal que permitiu estender o conceito de número. Tais fatores antecederam de certa forma a “introdução do conceito de função como uma relação entre conjuntos de números ao invés de ‘quantidades’ e para a representação analítica de funções por fórmulas” (YOUSCHKEVICTH, 1976, p. 50).

Nesse mesmo período, Viète começa a utilizar vogais para designar quantidades desconhecidas e as consoantes para se referir a parâmetros (quantidades conhecidas). Com isso, as equações algébricas puderam ser escritas de forma simbólica, contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários, o que fez com que essas equações passassem a ser valorizadas. Vários foram os matemáticos responsáveis por aperfeiçoar essa linguagem cujo simbolismo, inicialmente, gerou muitas dificuldades.

Assim sendo, o desenvolvimento das Ciências Exatas, principalmente com os novos métodos utilizados para entender alguns tipos de fenômenos associados à Física,

---

[7] Salvo indicação contrária, as traduções são do autor deste trabalho.

possibilitou o surgimento de uma série de problemas relacionados à análise infinitesimal. Como consequência, foi necessário introduzir o conceito de função de outra forma, ou seja, romper com a ideia de introduzir as funções de maneira verbal ou por meio de gráficos ou tabelas, métodos esses muito usados até então. Assim, generalizou-se a utilização do método analítico, isto é, a apresentação por meio de fórmulas e equações desenvolvida por Descartes, que objetivava:

> Reduzir a solução de todos os problemas algébricos e equações a algum procedimento padrão para a construção de suas raízes reais, ou seja, as coordenadas de pontos de intersecção de curvas planas apropriadas de ordem mais baixa possível (YOUSCHKEVICTH, 1976, p. 52).

É então a partir dos estudos de Descartes que se tornou possível perceber claramente a relação de dependência entre as quantidades variáveis (x e y), ou seja, como seus valores dependem um do outro, de modo que se permitiu abrir novos caminhos para o trabalho com as funções, além do fato de que o uso das expressões analíticas permitiu a utilização de regras estritamente específicas, o que foi estendido para outros ramos da Matemática.

Até esse momento, o desenvolvimento do conceito de função estava relacionado aos estudos envolvendo a mecânica e as curvas geométricas. Entretanto, não havia, de forma clara, o uso do termo designativo. Sabia-se da relação entre as grandezas, mas não com o grau de generalidade que se conhece atualmente.

Newton e Leibniz, independentemente um do outro, mas quase que simultaneamente, desenvolveram as bases para o conceito de função. Newton foi o primeiro a distinguir as variáveis independentes das dependentes. As primeiras, ele denominou de *fluentes*. Para se referir às variáveis dependentes, ele as chamou de relacionadas. E Leibniz, assim como Newton, partiu das curvas geométricas a fim de obter a noção do conceito de função. "Ele chama funções (functiones, fonctions) quaisquer partes de linhas retas, ou seja, segmentos obtidos por meio da construção de linhas retas infinitas correspondentes a um ponto fixo e a pontos de uma dada curva" (YOUSCHKEVICTH, 1976, p. 57). Leibniz também se referia à palavra função como "um termo geral para várias quantidades geométricas associadas a um ponto na curva" (SIU, 1995, p. 109).

Porém, a definição proposta por Leibniz não corresponde a um contexto mais geral, fato que pode ser notado na correspondência entre ele e Bernoulli em que se pode ler: "a falta de um termo geral para representar quantidades arbitrárias dependentes de alguma variável logo fez com que o termo função fosse usado no sentido de uma expressão analítica" (YOUSCHKEVICTH, 1976, p. 57).

Em outra correspondência trocada, em julho 1968, entre Leibniz e Bernoulli, surge pela primeira vez a palavra "função". Nela, foi discutida qual notação deveria ser utilizada a fim de representá-la. Leibniz introduziu o uso das funções de forma generalizada e também foi o primeiro a utilizar os termos "constante", "variáveis", "coordenadas" e "parâmetros".

Ele, durante seus estudos, notou alguns inconvenientes na notação utilizada por Descartes e propôs duas novas classes para as funções. A primeira delas, a algébrica, era representada por uma equação de certa ordem, enquanto as funções e curvas transcendentes tinham por representações equações de ordem indefinida ou infinita, que transcendem às equações algébricas.

Para Youschkevicth (1976), a primeira vez em que uma função é expressa de maneira analítica é atribuída a J. Bernoulli em 1718. Ele define função de uma variável como "uma quantidade variável composta de qualquer forma dessa variável e de números ou constantes" (RUTHING, 1984, p. 72). Até esse momento, a noção de função tinha por objetivo expressar as relações entre grandezas.

Bernoulli propôs ainda que a letra grega ϕ seja utilizada como notação para se referir a uma função cuja variável independente seja x, usada sem o uso dos parênteses, mas não menciona como obter tais funções.

Um pouco mais adiante, em 1748, Euler definiu algumas noções básicas importantes para o conceito de função. Para ele, uma constante era "uma quantidade determinada que mantém sempre um mesmo valor" (RUTHING, 1984, p. 72), e variável é "uma quantidade indeterminada ou universal que compreende em si todos os valores determinados" (RUTHING, 1984, p. 72). Por fim, define uma função de quantidade variável como "uma expressão analítica composta de qualquer forma usando uma quantidade variável e números ou quantidades constantes" (RUTHING, 1984, p. 72). Também para Euler, o conceito de função tinha um destaque central na análise a partir de uma abordagem algébrica e não mais geométrica, definindo-o como:

> Uma quantidade variável que compreende em si absolutamente todos os números, tanto positivos como negativos, tanto inteiros e fracionários, tanto racionais e irracionais e transcendentes. Até mesmo o número zero e os imaginários não são excluídos do significado de uma quantidade variável (YOUSCHKEVICTH, 1976, p. 61).

Ele ainda diferenciou as funções em contínuas e descontínuas de acordo com a lei de formação de cada uma delas. Para ele, as funções constituídas por uma única expressão analítica eram chamadas de contínuas. Já aquelas formadas por mais de uma expressão eram as descontínuas. Euler também incluiu as curvas desenhadas à mão livre, isto é, aquelas cujas expressões analíticas mudam, por assim dizer, ponto a ponto. Ele também foi responsável por utilizar a notação $f(x)$ para representar uma função de x.

Um fato marcante para o desenvolvimento do conceito de função foi o problema da corda vibrante, que exigiu que esse conceito fosse repensado. D'Alembert entendia esse caso em um contexto algébrico matemático e, para tentar solucioná-lo, restringiu as condições iniciais da corda, obtendo o que seria uma função "contínua" na concepção de Euler. Por outro lado, Bernoulli entendia tal situação sob seu enfoque físico, propondo que as formas iniciais, bem como as posteriores, poderiam ser representadas por séries infinitas. Euler, por seu turno, enxergava esse problema do ponto de vista geométrico, o que o forçou, em 1755, a propor uma nova definição para o conceito de função, concebido de forma mais geral e abstrata:

> Se, no entanto, algumas quantidades dependem de outras, de tal forma que quando estas são alteradas as outras também são alteradas, então as quantidades anteriores são chamadas de funções das últimas quantidades. Esta é uma noção muito abrangente e compreende em si todos os modos pelos quais uma quantidade pode ser determinada por outro. Se, portanto, *x* denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de *x* por qualquer forma ou são determinadas por elas são chamadas de sua função (RUTHING, 1984, p. 72-73).

A nova definição proposta por Euler influenciou de forma significativa o desenvolvimento do conceito de função nos anos seguintes. Ele utilizou as séries de potências de forma universal, possibilitando ainda a generalização das variáveis, o que trouxe como consequência a "continuidade analítica", ou seja, se duas ou mais funções concordam em determinado ponto, elas concordam em todos os intervalos.

Já em 1797, Lagrange, apoiando-se em estudos realizados por Euler e por Bernoulli, propõe a seguinte definição:

> Uma função de uma ou várias quantidades é qualquer expressão de cálculo em que essas quantidades entram de qualquer forma, combinadas ou não como algumas outras quantidades, consideradas como dadas e com valores invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem assumir todos os valores possíveis. Portanto, nas funções se consideram somente apenas as quantidades que se supõem ser

> variáveis sem levar em conta as constantes com as quais podem estar combinadas (RUTHING, 1984, p. 73).

De acordo com Siu (1995), Lagrange acreditava que qualquer função poderia ser desenvolvida como uma série de potências, o que significaria a algebrização da análise, libertando-a de considerações sobre infinitésimos, limites, etc.

No início do século XIX, os estudos de Fourier sobre a propagação do calor, nos quais a temperatura era considerada uma função composta de duas variáveis, tempo e espaço, possibilitaram que o conceito de função fosse definido de outra forma. Ele afirmou que toda função definida em certo intervalo finito poderia ser descrita arbitrariamente e decomposta em uma soma de funções senos e cossenos. Apesar de esse resultado já ser conhecido na época, o que causou estranhamento foi o fato de ele generalizá-lo para todos os tipos de função, contínuas ou não. Isso causou uma grande mudança no desenvolvimento da Matemática e contribuiu para que fosse reexaminada a noção de integração, constituindo-se como um ponto de partida para a Teoria dos Conjuntos de Cantor. Fourier também se liberta da percepção geométrica de uma função, que ele define da seguinte forma:

> Em geral a função (x) representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada um dos quais é arbitrário. Dados uma infinidade de valores para a abcissa, existe um igual número de ordenadas $f(x)$. Todos têm valores numéricos reais, positivos ou negativos ou nulos. Não supomos que essas coordenadas estão sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem umas às outras de qualquer maneira, seja qual for ela, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade única (RUTHING, 1984, p. 73).

Fourier em sua definição afirma que qualquer função f definida por $f(x)$ poderia ser representada por uma série trigonométrica e que suas ordenadas não estavam subordinadas a uma lei comum, mas se sucediam sequencialmente, sem importar a maneira como isso acontecia, e cada ordenada era considerada como dada.

A partir dessa definição proposta por Fourier, uma função arbitrária passa a ser representada por uma expressão analítica, renovação que exigiu um reexame do conceito de função e também encerrou o princípio da "continuidade analítica".

Fourier tinha uma ideia bastante geral de uma função, pois em sua definição estavam incluídas as não contínuas e aquelas que não eram definidas por uma expressão analítica. A partir de sua descoberta começou-se a distinguir o conceito de função e a sua representação analítica.

Cauchy, em 1823, por sua vez, define função como:

> Uma quantidade variável que consideramos como podendo sucessivamente tomar muitos valores diferentes entre si [...]. Se quantidades variáveis estão relacionadas entre si de maneira que, dado um valor de uma delas, pode-se achar os valores de todos os outros, ordinariamente concebemos essas diversas quantidades como expressas por meio de uma delas, a qual recebe o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são aqueles que chamamos funções desta variável (RUTHING, 1984, p. 74).

Para Cauchy, as funções eram definidas por equações que envolvem números reais ou complexos. Ele também considerava que elas poderiam ser definidas por um domínio restrito da variável independente. Além disso, também discordou da definição de continuidade proposta por Euler no século XVIII e propôs uma muito próxima da que conhecemos atualmente.

Outro passo importante para a elaboração do conceito de função foi dado por Dirichlet em 1837. Sua definição se aproxima de uma concepção moderna de correspondência entre dois conjuntos de números. Entretanto, o conceito de conjunto ainda não havia sido estabelecido, de forma que Dirichlet define função da seguinte maneira:

> Suponhamos que a e b são dois valores definidos e x uma quantidade variável que deve assumir, gradualmente, todos os valores situados entre a e b. Agora, se a cada x corresponde um único y, finito, de tal maneira que, quando x passa continuamente pelo intervalo de a a b, $y = f(x)$ varia do mesmo modo gradualmente, então y é chamado uma função contínua de x para esse intervalo. E, além disso, não é de todo necessário, que y dependa de x nesse intervalo de acordo com a mesma lei; de fato, não é necessário pensar em apenas relações que podem ser expressas por meio de operações matemáticas. Geometricamente representada, ou seja, com x e y considerados como abcissa e coordenada vertical, uma função contínua parece ser uma curva ininterrupta, para a qual apenas um ponto corresponde a cada abcissa entre a e b (RUTHING, 1984, p. 74).

Dirichlet ressaltou ainda a dependência existente entre os valores de x e y dentro do intervalo dado e também deixou claras outras possibilidades de funções com mais de uma expressão analítica. Percebe-se assim que Dirichlet introduz a noção de função a partir de uma correspondência arbitrária.

Outros matemáticos também publicaram trabalhos em que definiram o conceito de função. Em 1847, Stokes contribui com a seguinte definição de função:

> Quantidade cujo valor depende de qualquer maneira do valor da variável, ou dos valores das variáveis, ou dos valores das diversas

> variáveis de que é composta. Assim, as funções consideradas não precisam ser expressas por quaisquer combinações de símbolos algébricos, mesmo entre limites das variáveis, embora muito próximos (RUTHING, 1984, p. 74).

No ano seguinte, Stokes salienta que se devem entender as funções além da ideia de expressão algébrica. Riemann, em 1851, acrescenta:

> Vamos supor que z é uma quantidade variável que pode assumir, de forma gradual, um possível valor real; em seguida, se a cada um de seus valores corresponde um valor único da quantidade indeterminada w, w é chamado de função de z (RUTHING, 1984, p. 75).

Boole, ao se referir às funções, menciona que “qualquer expressão algébrica envolvendo um símbolo x é denominada uma função de x, e pode ser representada sob a forma abreviada geral $f(x)$” (RUTHING, 1984, p. 75). Sobre a notação, ele afirma que se em uma função $f(x)$, substituímos o valor de x por 1, o seu resultado será expresso por $f(1)$; da mesma forma se substituímos o valor de x por 0, esse resultado será expresso por $f(0)$.

Hankel em 1870, por outro lado, argumenta que “uma função de x é chamada de $f(x)$, se a cada valor de x dentro de um determinado intervalo de tempo está associado um valor único determinado por $f(x)$” (RUTHING, 1984, p. 75). Para ele não importa a maneira como o valor da função é determinado, mas que a função seja determinada em todos os pontos (em um determinado intervalo).

Frege em 1879 influenciado pelo logicismo, define função da seguinte forma:

> Quando em uma expressão, sobre cujo conteúdo não seja necessariamente possível atribuir julgamento, um sinal simples ou composto tem uma ou mais ocorrências e se considerarmos esse sinal como substituível em todas ou algumas dessas ocorrências por outra coisa (mas em todas as ocorrências pela mesma coisa) então nós chamamos de função a parte que permanece invariante na expressão, e de argumento da função a parte substituível (RUTHING, 1984, p. 75)[8].

Em 1877 Dedekind, por sua vez, não se limitou às concepções anteriores do conceito de função, definindo-a como um mapeamento entre dois conjuntos quaisquer, contribuindo assim para uma concepção muito mais geral. Sua definição sofreu influência

[8] Tradução de João Bosco Pitombeira Carvalho de Fernandes.

da Teoria dos Conjuntos de Cantor e se beneficiou com o desenvolvimento da Álgebra. Para ele:

> Por um mapeamento de um sistema S entende-se uma lei pela qual cada elemento determinado s de S está associado a um determinado objeto, que é chamado de imagem de s e é designado por $\phi(s)$; podemos dizer, também, que $\phi(s)$ é causada ou gerada de s pelo mapeamento ϕ, que s é transformada pelo mapeamento ϕ em $\phi(s)$ (RUTHING, 1984, p. 75).

Já Tannery em 1904 define função como uma correspondência entre conjuntos, em que a cada *x* pertencente a um conjunto *X* corresponde um único valor de *y*. Dessa forma, diz-se que *y* é uma função de *x*. E completa:

> Uma função é definida neste conjunto se uma correspondência está definida. O conjunto (*Y*) dos valores distintos assumidos por *y* é determinado pela mesma correspondência: diz-se que b é um elemento de (*Y*), mais uma vez isto significa que um elemento a de (*X*) corresponde a um número b. Cada elemento de (*X*) corresponde a um elemento de (*Y*) e vice-versa (RUTHING, 1984, p. 76).

Ele menciona ainda o fato de que é possível ocorrer que vários elementos diferentes de (*X*) correspondam ao mesmo elemento de (*Y*), o que para ele significa que o processo de definição não implica que a correspondência entre (*X*) e (*Y*) seja perfeita.

Pouco tempo depois, referindo-se a uma função, Hardy destaca características que devem estar envolvidas na ideia geral de função. Para ele, em uma função, para cada valor de *y* deve-se ter um valor de *x*, e ainda, a cada valor de *x* faz-se corresponder um e apenas um valor de *y* e que a relação entre *x* e *y* é expressa por meio de uma fórmula, fazendo corresponder o valor de *y* a um dado valor de *x*. O valor *y* pode assim ser calculado pela substituição direta do valor de *x*.

Peano, em 1911, define função como um caso especial de relação. Carey, em 1917, por sua vez, compreende-a como uma correspondência entre duas classes de números, a das variáveis dependentes e a das independentes. Anos mais tarde, Goursat retoma a ideia de Cauchy e Riemann em sua definição de função.

Bourbaki, contribuindo para o assunto, define-a a partir da relação entre conjuntos:

> Sejam E e F dois conjuntos, que podem ou não ser distintos. A relação entre um elemento variável $x \in E$ e um elemento variável $y \in F$ é chamada uma relação funcional em y se, para todos os $x \in E$, existe um único $y \in F$ que está relacionado com x, por meio da relação dada (RUTHING, 1984, p. 77).

Além dos matemáticos citados, muitos outros também foram responsáveis por aprimorar o conceito de função, visto que este conceito está em constante evolução. Com isso, ele foi sendo cada vez mais aperfeiçoado e ganhando um destaque central dentro da própria Matemática.

CAPÍTULO II – PERCURSOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo serão apresentados os percursos metodológicos em que estamos apoiados. De início, trataremos a pesquisa qualitativa. Em seguida, discutiremos a análise de conteúdo, que influenciará o modo como analisamos o livro didático em estudo.

2.1. Caminhos metodológicos

São vários os caminhos que nos levam à obtenção de respostas para uma dada pergunta e, quando temos em mente uma indagação, algo que nos inquieta, nosso objetivo é tentar responder. Bicudo (1993), parafraseando o prof. Joel Martins, afirma que "ter uma interrogação é andar em torno dela em todos os sentidos, sempre buscando as suas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões e outra vez..." (BICUDO, 1993, p. 18).

De igual modo, essa autora acrescenta que:

> Pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada. Configura-se, também, como buscar explicações cada vez mais convincentes e claras sobre a pergunta feita (BICUDO, 1993, p. 18).

Com isso, entende-se que a pesquisa nasce de inquietações presentes no sujeito que lança seu olhar sobre um determinado problema e busca solucioná-lo ou, ao menos, entendê-lo, cabendo ao pesquisador a escolha do caminho mais adequado a seguir. Um deles seria por intermédio da pesquisa qualitativa, que se apresenta como algo que não pode ser mensurado, levando-se em consideração traços de subjetividade e de particularidade próprios do pesquisador.

Creswell (2007) esclarece que a pesquisa qualitativa é fundamentalmente interpretativa, ou seja, o pesquisador interpreta seus dados de acordo com seu olhar, concebendo-a em um momento sociopolítico e histórico. Isso nos remete à ideia de subjetividade, percebendo assim que sujeitos diferentes podem conceber pesquisas distintas mesmo que observando o mesmo objeto e se apoiando nos mesmos referenciais teóricos e metodológicos.

Borba (2004) também admite haver essa interferência subjetiva na abordagem qualitativa, isto é, "o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. O que é 'verdadeiro' dentro desta concepção é sempre dinâmico e passível de ser mudado" (BORBA, 2004, p. 02).

Percebe-se, pois, que por essa abordagem metodológica de pesquisa a visão que o pesquisador tem sobre o objeto pesquisado visa adaptar as perguntas que serão feitas e a interrogação da investigação, contribuindo assim para a definição dos procedimentos que serão utilizados durante a elaboração do trabalho. Destarte, "não é possível formular regras precisas sobre técnicas de pesquisa qualitativa por que cada entrevista ou observação é única; depende do tema, do pesquisador e de seus pesquisados" (GOLDEMBERG, 2004, p. 57).

Assim, deve-se perceber que tais procedimentos em grande parte serão flexíveis e sempre dependerão da subjetividade com que o pesquisador enxerga o objeto pesquisado. Isso porque, conforme salienta Borba (2004, p. 03), "[...] o conhecimento não é isento de valores, da intenção e da história de vida do pesquisador". Com isso, ao se aventurar nesse meio, o pesquisador saberá que os passos a serem seguidos não serão obrigatoriamente prontos e acabados; pelo contrário, verá que o caminho a ser seguido é incerto e muda constantemente com o aparecimento de novos dados e de suposições que o fazem refletir a todo o momento sobre o objeto estudado.

Dessa forma, ele poderá rever seu percurso metodológico sempre que necessário, mudança que será refletida nos procedimentos descritos no projeto, pois este poderá sofrer modificações que se fazem necessárias a fim de se adequar ao objetivo da pesquisa. Goldemberg (2004) acrescenta a essa discussão que a pesquisa não se reduz a um conjunto de procedimentos metodológicos.

Entretanto, apesar de não serem necessárias fórmulas ou regras específicas e precisas na pesquisa qualitativa, isso não a exime de procedimentos a serem seguidos. O pesquisador, assim, precisa esclarecer seus processos metodológicos relatando ou descrevendo o que se pretende, além de elucidar suas discussões.

Com isso, o método qualitativo permite a interpretação e a discussão de fenômenos, sejam eles didáticos ou não. E ainda, "a interpretação na pesquisa qualitativa pode assumir várias formas adaptadas para diferentes tipos de projetos e ser flexível para transmitir significados pessoais, baseados [na] pesquisa" (CRESWELL, 2007, p. 199), além de compreender o fenômeno e obter a resposta ao que foi indagado pela pesquisa.

Uma vez definida a abordagem qualitativa, outras dúvidas que surgiram desde o início da pesquisa ganharam corpo e passaram a nos inquietar. O que pesquisar? Como fazê-lo? Qual o referencial teórico e metodológico a ser utilizado para esta pesquisa? Qual(is) material(is) analisar?

Este capítulo busca justamente responder a esses questionamentos. Neste percurso, os passos que foram seguidos serão explicitados a fim de atingir o objetivo desta pesquisa, que visa apresentar outro método para a análise de livros didáticos.

Respondendo sucintamente algumas das indagações iniciais, propomos um referencial teórico para a análise de livros didáticos e exemplificamos sua aplicação analisando o conceito de função presente no livro didático Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante da editora ática publicado em 2013. Metodologicamente nos inspiraremos em alguns passos utilizados na análise de conteúdo proposta por Bardin (2011) por entender que tal procedimento nos ajuda a atingir nosso objetivo. Teoricamente utilizamos a análise textual proposta por Dormolen (1986), que será detalhada no próximo capítulo.

2.2. Análise de conteúdo

A análise de conteúdo se constitui como "uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos" (MORAES, 1999, n.p.). Desse modo, vemos que ela pode ser utilizada nos mais variados tipos de pesquisas, sejam elas qualitativas ou não, como também aplicada a diversos tipos de materiais.

Segundo Moraes (1999), a análise de conteúdo é mais que uma simples técnica de estudo de dados, compreendendo uma abordagem metodológica com características e possibilidades próprias. Trata-se de:

> Um conjunto de técnicas de análises das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo da mensagem, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens (BARDIN, 2011, p. 48).

Também podemos notar que esse método pertence a:

> Um conjunto de técnicas parciais mais complementares [que] consistam na explicitação e sistematização do conteúdo das mensagens e da expressão deste conteúdo, com o contributo de índices passíveis ou não de quantificação, a partir de um conjunto de técnicas, que embora parciais, são complementares. Esta abordagem tem por finalidade efetuar deduções lógicas e justificadas, referentes à origem da mensagem tomada em consideração (o emissor e seu contexto, ou eventualmente, o efeito dessas mensagens) (BARDIN, 2011, p. 48).

Essa abordagem é entendida como uma ferramenta capaz de investigar problemas dos mais variados tipos e como um instrumento único muito diversificado e adaptável a um vasto campo de aplicação. Seu objeto de estudo se constitui dos mais diferentes tipos de materiais (cartas, livros, entrevistas, filmes, entre outros), verbais ou não.

Ao aplicar a análise de conteúdo por meio de uma abordagem qualitativa tendo como objeto de análise um texto, o pesquisador deve estar ciente de que o sentido textual pode ser simbólico, ou sequer explicitado, além de não ser uno. Pode haver casos, por exemplo, em que o sentido percebido pelo leitor seja diferente daquele pretendido pelo autor, ou seja, pode existir divergência entre o que o autor pretende e aquilo que o leitor realmente entende.

A subjetividade presente em cada indivíduo também deve ser levada em consideração uma vez que ela pode fazer com que um determinado texto adquira sentidos diferentes para leitores diferentes, ser compreendida de formas diversas por esses sujeitos ou adquirir um sentido que nem mesmo o autor previu.

Dessa forma, percebemos que a análise de conteúdo é uma interpretação pessoal do pesquisador em relação à percepção que este tem em relação aos dados coletados. Outro ponto importante é o contexto em que o material analisado está inserido, uma vez que este delimitará o olhar do pesquisador, pois:

> Embora os dados estejam expressos diretamente no texto, o contexto precisa ser reconstruído pelo pesquisador. Isto estabelece certos limites. Não é possível incluir, nessa reconstrução, todas as condições que coexistem, precedem ou sucedem a mensagem, no tempo e no espaço. Não existem limites lógicos para delimitar o contexto da análise. Isto vai depender do pesquisador, da disciplina e dos objetivos propostos para a investigação, além da natureza dos materiais sob análise (MORAES, 1999, n.p.).

A análise de conteúdo ainda se caracteriza por levar em consideração aspectos relacionados ao objeto de estudo, ao contexto e às inferências pretendidas. Contudo, ao se utilizar essa metodologia, é necessário entender os passos a serem seguidos a fim de atingir o objetivo pretendido.

Uma vez definido que esta pesquisa se inspirará nos procedimentos metodológicos utilizados na análise de conteúdo, é necessário entender o percurso trilhado por esta investigação. No início da análise, fizemos a leitura do material a ser investigado com a intenção de verificar quais dados estavam em consonância com os objetivos da pesquisa. Vale destacar que tais materiais devem ser pertinentes e representativos em relação ao universo em estudo.

Após esse primeiro contato e por algumas impressões advindas de diversas leituras, notamos que o texto é dividido em unidades de análise (enunciados) e a partir das características apresentadas por essas unidades é feito o processo de codificação dos dados, pelo qual é atribuído um código que identifica cada elemento do material analisado. Assim,

> A categorização corresponde a uma transmutação – efetuada seguindo regras precisas – dos dados brutos do texto, transmutação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo ou da sua expressão; suscetível de esclarecer o analista acerca das características do texto (BARDIN, 2011, p. 133).

Em nosso caso, essa categorização será composta pela letra inicial maiúscula do tipo de núcleo com que o enunciado foi classificado (T – teórico; A – algorítmico; R – restritivo; H – heurístico; C – comunicativo) e também por dois números, o primeiro indicando a sequência em que ele foi encontrado no texto e o segundo, o número da página em que esse núcleo se encontra. Por exemplo, se tivermos o código T.05.13, entende-se que se trata de um núcleo teórico, o quinto encontrado no texto e presente na página 13. Essa identificação se faz necessária para investigar a progressão do conteúdo matemático ao longo do texto, ou seja, se um núcleo foi precedido de outros que preparavam sua compreensão e se ele de alguma forma contribui para o entendimento dos posteriores.

A *unidade de análise* mencionada também pode ser chamada de *unidade de registro ou de significado* e será o elemento que posteriormente classificaremos de acordo com a categorização escolhida. Para Bardin (2011, p. 134), "a unidade de registro pode ser de dimensões e natureza muito variáveis". Entretanto, convém salientar que o processo de categorização dependerá da unidade de análise escolhida.

Estas podem consistir no documento (texto), em mensagem integralmente ou divididas em partes menores (MORAES, 1999, n.p.). Assim, as unidades podem ser palavras, frases, parágrafos ou até um texto em sua forma integral.

Para nossa investigação, as unidades de análise tomadas serão enunciados de tamanhos variados, de extensão máxima de um parágrafo, contendo ou não figuras. Eles trarão explícitas ou não características relacionadas à classificação de núcleo proposta por Dormolen (1986), como veremos adiante.

Com isso, as unidades de análise nos permitirão "Descobrir 'núcleos de sentido' que compõem a comunicação e cuja presença, ou frequência de aparição, podem significar alguma coisa para o objetivo analítico pretendido" (BARDIN, 2011, p. 135).

Resumidamente, após a leitura do texto o dividiremos em unidades de análise (enunciados), às quais será atribuído um código (núcleo. sequência. página). Ao final, teremos o texto dividido em unidades menores, cada uma delas identificadas por seu respectivo código.

Elas serão isoladas e submetidas à classificação para que possam ser analisadas fora de seu contexto original. Todavia, durante as transformações dos dados em unidades de análise, é crucial que estas possam representar um conjunto de informações que tenham um significado em si, ou seja, que não necessitem de informações adicionais, uma vez que elas "deverão poder ser compreendidas e interpretadas mantendo-se o seu significado original" (MORAES, 1999, n.p.).

Além disso, deve-se considerar que a fragmentação do texto poderia ocasionar uma perda de informação do material analisado. Contudo, essa perda pode ser justificada pelo "aprofundamento em compreensão que a análise possibilita" (MORAES, 1999, n.p.). Bardin (2011) explica que em alguns momentos é necessário definir uma unidade de contexto, que é aquela mais ampla que a de análise. Entretanto, neste trabalho, compreendemos que, ao analisar um livro didático, o contexto pode ser muito diversificado e, caso restringíssemos nossa análise a um específico, estaríamos de certo modo também estreitando nossa análise, o que poderia ocasionar uma "cegueira" em relação a alguns dados.

Esse estabelecimento das unidades de análise possibilita o processo de categorização, "uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto de diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia) com critérios previamente definidos" (BARDIN, 2011, p. 147). Os critérios por nós utilizados baseiam-se na ideia de núcleo proposta por Dormolen (1986).

Moraes (1999, n.p.) acrescenta que:

> A análise do material se processa de forma cíclica e circular, e não de forma sequencial e linear. Os dados não falam por si. É necessário extrair deles o significado. Isto em geral não é atingido num único esforço. O retorno periódico aos dados, o refinamento progressivo das categorias, dentro da procura de significados cada vez melhor explicitados, constituem um processo nunca inteiramente concluído, em que a cada ciclo podem atingir-se novas camadas de compreensão.

Durante o processo de categorização alguns critérios devem ser obedecidos. Nesse sentido, as categorias devem ser válidas, isto é, adequadas ao material analisado, aos objetivos e à fundamentação teórica, esclarecendo ainda as intenções de investigação, as questões do pesquisador e/ou as características da mensagem/texto.

Também se devem atender critérios como o da exaustividade e da inclusividade, isto é, categorizar todos os conteúdos de acordo com o objetivo de análise, já que na exaustividade todas as unidades de análise devem ser contempladas. Para atender ao critério da homogeneidade, por outro lado, as categorias precisam ser consideradas a partir de um único princípio ou regra de classificação.

No critério da exclusão mútua, por sua vez, cada unidade de análise deve existir em apenas uma categoria. Bardin (2011, p. 149) explica que "pode pôr-se em causa essa regra, com a condição de se adaptar o código de maneira a que não existam ambiguidades no momento do cálculo (multicodificação)".

Em nossa investigação foi possível perceber unidades de análise satisfazendo mais que uma categoria, casos em que adotamos o código TC.05.13. Assim, indicamos que temos um núcleo que satisfaz duas categorias diferentes (teórica e comunicativa), é o quinto encontrado no texto e está presente na página 13.

Outros critérios a serem atendidos são os da objetividade e da fidelidade. Para atender a esses parâmetros, as regras de categorização devem ser as mesmas para todas as unidades de análise; ou seja, devem ser consistentes em toda a análise. Por fim, temos o critério da produtividade, que rege que os dados obtidos devem ser férteis em inferências, hipóteses e informações.

Os passos descritos anteriormente fazem parte da pré-análise. Além do apresentado, esta etapa tem por objetivo operacionalizar e sistematizar as ideias iniciais. Nessa fase também é realizada a opção pelos documentos a serem submetidos à análise. Neste trabalho, analisamos um dos livros adotados pelo PNLD (2015), mais especificamente o capítulo (texto) no qual é abordado o conceito de função objetivando exemplificar como a análise textual proposta por Dormolen (1986) pode ser utilizada para a análise desses materiais.

Em seguida, temos a formulação das hipóteses e a apresentação dos objetivos. Em nosso caso, temos como objetivo apresentar outra metodologia para a análise de livros didáticos. Por fim, temos "a elaboração de indicadores que fundamentem a interpretação final" (BARDIN, 2011, p. 123), aqui se adotando a concepção de núcleo proposta por Dormolen (1986).

Apesar de não existir uma ordem cronológica para os passos descritos, é perceptível uma estreita relação entre eles, pois os objetivos que se pretende alcançar dependem dos documentos a serem analisados e vice-versa. Para isso, foi necessário classificar os núcleos encontrados no livro didático Contexto e Aplicações de Luiz Roberto Dante publicado em 2013 usando para isso os tipos propostos por Dormolen (1986) e obedecendo a regras que permitirão atingir "uma representação do conteúdo ou de sua expressão; suscetível de esclarecer o analista acerca das características do texto" (BARDIN, 2011, p. 133).

Em seguida, apresentamos a fase da exploração do material, etapa da análise em que ocorre a aplicação das decisões tomadas e que consiste "essencialmente em operações de codificação, decomposição ou enumeração, em função de regras previamente formuladas" (BARDIN, 2011, p. 131).

Por fim, temos o tratamento dos dados obtidos durante a pré-análise. Neste momento da pesquisa, o analista propõe inferências e pode adiantar interpretações de acordo com os objetivos traçados.

CAPÍTULO III – O REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo será apresentada a fundamentação teórica desta pesquisa: discutiremos os aspetos relacionados aos núcleos, às linguagens e aos signos no texto matemático.

3.1 A análise textual e os núcleos

A análise textual lança seu olhar sobre o livro didático vendo-o constituído de vários textos matemáticos. Cada um desses textos é subdividido em pequenos enunciados que podem conter imagens ou não e que posteriormente são classificados de acordo com suas características.

Nessa teoria, "os núcleos são expressões gerais que têm que ser aprendidas como conhecimento" (DORMOLEN, 1986, p. 146) e representam a matemática significativa[9] presente no texto. Dessa forma, podemos definir os núcleos como expressões gerais que abordam o conhecimento matemático presente no livro didático e que influenciam o modo como o aluno compreende determinado conteúdo.

Nesse sentido, os núcleos podem ser compreendidos como pequenos enunciados matemáticos presentes no conteúdo analisado, estruturando-o. É importante salientar que um enunciado, posteriormente classificado como um núcleo, pode ter extensão variada, caracterizando-se como uma frase, um parágrafo, uma fórmula, etc. Eles possuem várias funções textuais e, a partir do seu encadeamento e disposição, ajudam a revelar algumas das características acerca do conteúdo matemático analisado.

Dormolen (1986) considera que problemas ou exercícios resolvidos, exemplos e explicações são não-núcleos. Entretanto, consideramos que tais elementos podem se configurar como núcleos uma vez que eles tornam a matemática abordada compreensível e ainda contribuem para consolidar um conhecimento recém-aprendido, além de mostrar como ele pode ser aplicado. Não-núcleos são enunciados presentes no livro didático e não essenciais para o ensino, ou ainda inserções feitas pelo autor na tentativa de relembrar conceitos abordados anteriormente.

Na Figura 1, a seguir, reproduzimos uma página do livro analisado. Nesta figura destacamos a presença de um enunciado que pode ser classificado contendo aspectos

---

[9] Neste trabalho entendemos matemática significativa como as ocasiões em que as situações apresentadas no conteúdo fazem sentido para o aluno permitindo que este compreenda e saiba utilizar o conceito abordado.

algorítmico e heurístico. Nele são apresentadas ainda duas características que podem ser associadas ao conceito de função: a primeira diz respeito à dependência entre grandezas e a segunda é a presença implícita de um método de obtenção para encontrar a expressão algébrica da função.

Apesar de a referida página iniciar o capítulo, observamos que o autor já faz uso de um núcleo para introduzir características relativas ao conceito de função. Os demais textos ou figuras constantes são o que chamamos de não-núcleos: enunciados que não apresentam informações relativas ao conhecimento matemático abordado e têm uma função complementar, tornando o texto mais compreensivo para o leitor. Além disso, eles podem conter dados históricos ou curiosidades sobre o conteúdo abordado, não contemplando as características pertinentes aos núcleos. Vejamos:

Figura 1: Núcleo e não-núcleo

CAPÍTULO 2

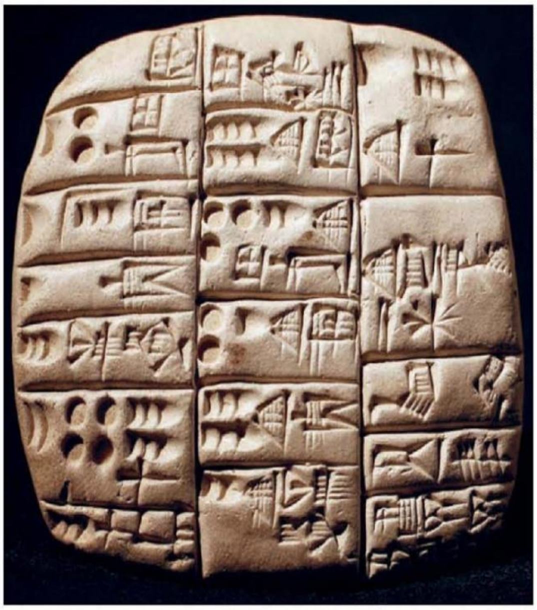
Funções

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática e ocupa lugar de destaque em vários de seus campos, bem como em outras áreas do conhecimento. É muito comum e conveniente expressar **fenômenos** físicos, biológicos, sociais, etc. por meio de funções.

Fenômeno: fato ou evento de interesse científico que pode ser descrito e explicado cientificamente.

Os babilônios, por volta do ano 2000 a.C., já utilizavam a ideia de função quando faziam tabelas colocando alguns números na primeira coluna e o produto desses números por um valor constante na segunda coluna. Assim, se o multiplicador fosse o 7, *x* o número da primeira coluna e *y* o número da segunda coluna, a cada *x* corresponderia um *y*, de acordo com a função: $y = 7x$.

x	y
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35
⋮	⋮



Gianni Dagli Orti/Corbis/Latinstock

Observe, na imagem ao lado, a tabela de multiplicação por 72, que provavelmente serviu para o ensino da Matemática. Essa tábua, na escrita cuneiforme, mede 7,8 cm × 4,7 cm × 1,8 cm e foi feita no século XIX a.C.

Em nosso cotidiano aplicamos o conceito de função sempre que pagamos por produtos que compramos, pois o valor a ser pago, em geral, varia em função da quantidade de objetos comprados.

Tábua com escrita cuneiforme. Os símbolos eram gravados em tabletes de argila úmida, que posteriormente eram cozidos e secos ao sol. Milhares dessas tábuas resistiram até nossos dias.

40

Fonte: Dante (2013, p. 40).

Uma vez definido o que é um núcleo e um não-núcleo, faz-se necessário compreender os diversos tipos de núcleos e suas características, haja vista que eles podem ser considerados segundo cinco características (aspectos) apresentadas a seguir.

Os núcleos teóricos (T) são enunciados que juntos formam a estrutura matemática ou parte dela abordada no texto matemático. Nesse tipo de núcleo são apresentados os conhecimentos matemáticos sistematizados e abstratos sobre o conteúdo, cujas informações são apresentadas com certo rigor matemático. Como exemplo temos:

> Dados dois conjuntos, A e B, uma função A em B é uma regra que indica como associar cada elemento de $x \in A$ a um único elemento $y \in B$ (DANTE, 2013, p. 46).

Alguns enunciados apresentam como característica regras ou passos a serem seguidos de forma didática, métodos para a obtenção de determinada resposta ou modelos para a resolução de outras atividades. Chamaremos esses enunciados de núcleos algorítmicos (A), pois eles trazem de forma explícita o "como fazer".

Como exemplo desse tipo de núcleo temos o enunciado:

> Para construir o gráfico de uma função dada por $y = f(x)$, com $x \in D(f)$, no plano cartesiano, devemos:
> Construir uma tabela com valores de x escolhidos convenientemente no domínio D e com valores correspondentes a $y = f(x)$;
> Associar um ponto do plano cartesiano a cada par ordenado (x, y) da tabela;
> Marcar um número suficiente de pontos até que seja possível esboçar o gráfico da função (DANTE, 2013, p. 53).

Outro tipo de núcleo que podemos encontrar nos livros didáticos são os restritivos (R), que recebem esse nome por apresentarem certos limites à teoria e aos procedimentos que podem ser usados pelos alunos. Esses núcleos também podem conter conhecimentos implícitos e podem ocorrer nas seguintes situações: quando ensinamos as operações com os números naturais, por exemplo, jamais poderemos atribuir ao resultado de uma subtração um valor negativo $(3 - 4 = -1)$, já que o subtraendo nunca poderá ser maior que o minuendo e, nesse caso, o aluno ainda não compreenderá o porquê disso se para ele existem apenas os números naturais.

O mesmo ocorre no ensino da resolução das equações do 2º grau no Ensino Fundamental, quando o valor do discriminante (delta) for menor que zero. Nesse nível, como o estudante não conhece ou entende a maneira como o conjunto dos números complexos funciona, ele não conseguirá compreender que, nesse caso, o valor das raízes possui uma parte real e outra imaginária. Por esse motivo, chamamos atenção para a maturidade que o discente apresenta, levando-se ainda em consideração seu nível cognitivo.

Por outro lado, para que um determinado núcleo seja categorizado como heurístico (H) ele deve incluir regras de "como fazer". Entretanto, para que o aluno entenda determinado passo, ele deve estar atento às especificidades da ação que realiza. A diferença entre um núcleo heurístico e um algorítmico é que no primeiro exige-se um momento de reflexão (é necessário que o aluno pense) enquanto que no segundo o aluno deve seguir os passos a fim de atingir ao objetivo desejado.

O núcleo heurístico pretende levar o aluno à descoberta, a procurar elementos que permitam a compreensão do conteúdo estudado; em outras palavras, leva o aluno a descobrir o que se pretende que ele aprenda.

Figura 2*:* Núcleo heurístico

Número de litros de gasolina e preço a pagar

A tabela abaixo relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em janeiro de 2013).

Número de litros	Preço a pagar (R$)
1	2,70
2	5,40
3	8,10
4	10,80
⋮	⋮
40	108,00
x	$2{,}70x$

Observe que o preço a pagar é dado **em função** do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar **depende** do número de litros comprados.

preço a pagar (p) = R$ 2,70 vezes o número de litros (x) comprados

ou

$p = 2{,}70x$ → **lei da função** ou **fórmula matemática da função** ou regra da função ou ainda representação analítica da função

Fonte: Dante (2013, p. 42).

Os passos para a resolução de problemas sugeridos por Polya (1995) podem ser caracterizados como núcleos heurísticos, uma vez que consistem na compreensão de um problema, em construir uma estratégia para sua resolução, na execução dessa estratégia e por último em revisar a solução encontrada.

Por fim, os núcleos comunicativos (C) são aqueles que enfatizam as conversões sobre a linguagem, sobre as notações e como escrever uma prova matemática. Eles têm por objetivo informar quais símbolos são utilizados para representar alguma propriedade (característica) do texto ou convenção do discurso matemático. Como exemplo desse tipo de núcleo temos "a representação de uma função pela notação $f(x)$ (lê-se: f de x) foi atribuída a ao matemático suíço Euler, no século XVII" (DANTE, 2013, p. 41).

Como toda teoria, a Análise Textual possui também certo grau de subjetividade para a análise dos enunciados, uma vez que a caracterização de cada núcleo dependerá do pesquisador. Isso porque o que define um núcleo não é totalmente objetivo, há sempre uma componente subjetiva, a dependência de quem o analisa, pois "não há critério especial para decidir se determinada afirmação generalizada é um núcleo ou não" (DORMOLEN, 1986, p. 146). Ainda pode existir um enunciado que pode ser considerado satisfazendo mais de um núcleo ao mesmo tempo. Para Dormolen (1986), o exemplo citado a seguir pode ser classificado tanto como de natureza heurística quanto algorítmica:

> Para converter graus Fahrenheit em Centigrado, primeiro você subtrai 32, depois multiplica por 10 e por fim divide por 18. O resultado obtido em Celsius é o equivalente a temperatura dada em Fahrenheit (DORMOLEN, 1986, p. 146).

Ao analisar esse enunciado, pode-se classificá-lo das duas formas já que a natureza heurística pode ser notada quando o aluno aprende de forma intuitiva como converter temperaturas dadas em escalas diferentes. Também é possível perceber a existência do aspecto algorítmico, neste caso um algoritmo de conversão, como se pudéssemos elaborar um programa computacional para esse fim.

Entretanto, pode haver casos em que outro analista considere o enunciado como satisfazendo apenas um aspecto, ou seja, tenha natureza heurística ou algorítmica, levando em consideração apenas uma de suas características. Poderia também existir um terceiro pesquisador que não atribua a esse enunciado nenhum dos aspectos mencionados, o que levaria a não ser classificado como núcleo. Tudo isso depende de um contexto mais amplo em que o estudioso esteja examinando o texto. Naturalmente, o autor desta pesquisa também estará sujeito à mesma subjetividade.

3.2. Aspectos relacionados ao texto matemático

De modo geral, o livro didático deve se vincular a conhecimentos e competências já adquiridos pelo aluno durante sua trajetória escolar e também aos saberes que ainda lhe serão apresentados. Sobre esse aspecto há dois pontos a serem investigados: se há uma *sequência conceitual*, isto é, se os núcleos apresentados seguem um encadeamento sequencial. Isso nos permite afirmar que, para aprender um novo núcleo, o aluno precisa ter tido contato com outros núcleos relativos a ele.

Ao estudar um novo núcleo, o estudante precisa estabelecer ligações com aprendidos por ele anteriormente e também ter a percepção que essa aprendizagem tem implicações futuras para a compreensão de novos núcleos. Por exemplo, ao estudar o conceito de função como uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos, ele deve já ter tido contato com núcleos relativos a conjuntos assim como àqueles relativos a uma correspondência entre conjuntos, o que lhe permitirá compreender esse novo núcleo.

Por outro lado, temos o que poderíamos chamar de *condicionamento conceitual*, visto que o modo como um aluno aprende um núcleo é capaz de influenciar (positiva ou negativamente) a aprendizagem de novos conhecimentos sobre o tema. Desse modo, além de estabelecer uma ligação entre o passado (núcleos com os quais já teve contato) e o futuro (núcleos a serem ainda estudados), é necessário centrar a aprendizagem no processo e não nos resultados.

Como exemplo dessa argumentação, podemos citar o modo como o conceito de função é por vezes trabalhado, com maior ênfase em seu aspecto algébrico em detrimento dos demais, contribuindo assim para que muitos alunos não percebam que existem outras formas de representá-lo.

Métodos distintos de ensinar a resolução de determinado problema (núcleo heurístico ou algorítmico) podem possibilitar o momento de escolha sobre o melhor caminho para se encontrar a solução procurada. Assim sendo, percebemos que a maneira como um núcleo é compreendido pode dificultar a aprendizagem de outro, bem como a aplicação a um novo conceito.

Também é necessário observar se determinado texto atende ao planejamento proposto pelo professor e se a linguagem apresentada corresponde ao nível escolar do aluno e ainda às suas competências. O docente pode também julgar o material didático inadequado pelo fato de este apresentar uma quantidade insuficiente de atividades e ainda dispor de poucas indicações sobre o que se espera dos alunos.

Salientamos que tais fatores não devem ser decisivos para a utilização ou não de determinado texto: eles devem servir como parâmetros, ficando a cargo do professor a escolha do momento em que essa utilização será feita.

Ainda podemos ter estágios que visam verificar a adaptabilidade do texto às competências discentes. Inicialmente temos a associação de processos de aprendizagem, com vistas a preparar e a motivar o aluno a aprender algo novo. Para isso, busca-se levá-lo a revisar conhecimentos e competências relevantes já adquiridos, familiarizando-se com os objetivos almejados pelo autor do texto em cada atividade. As situações-problema devem ser abordadas de modo a esclarecer como se espera que se realize a atividade proposta.

Em seguida, temos o momento em que os alunos realmente aprendem algo novo. Nessa fase, há a diferenciação da ação de explorar o texto em relação ao conjunto de exemplos e contraexemplos relativos a novos núcleos e o controle da abstração em que o aluno (e o professor) percebe se um núcleo foi aprendido, mesmo que de maneira implícita, além de se verificar se é capaz de formulá-lo explicitamente, em palavras ou por meio de uma fórmula (DORMOLEN, 1986).

As situações-problema devem ser capazes de gerar novos núcleos e permitirem que o alunado abstraia os conhecimentos matemáticos. Com isso, ao se introduzir um novo núcleo, deve-se repetir o mesmo processo.

A maneira como essa aprendizagem é verificada nem sempre é explícita. Quando isso ocorre, o aluno a faz de modo a especificar sua formulação, utilizando palavras ou fórmulas para se referir ao conteúdo. Por fim, temos a etapa em que há a consolidação e a aplicação do núcleo. Nesse momento, o aluno é preparado para determinadas competências e as integra a esses novos conhecimentos, aplicando-as a novos problemas.

Outro ponto de vista a ser analisado refere-se à linguagem utilizada pelo autor que influencia o modo como se assimila o conteúdo estudado e deve proporcionar sua compreensão.

De acordo com Freudenthal (1978), as linguagens utilizadas em textos matemáticos podem ser classificadas em três tipos: ostensiva, relacional e funcional. A primeira caracteriza-se por tentar mostrar um objeto matemático a partir de uma indicação pela qual seja possível identificá-lo (o primeiro, o próximo ao 7), especificando-o (conjunto B, incógnita x, variável y) ou a partir da sua identificação (este, aquele, isso, aquilo). Como exemplo, temos a seguinte explanação presente no livro analisado:

> A notação (a, b) é usada para indicar o par ordenado de números reais a e b, no qual o número a é a primeira coordenada e o número b é a segunda coordenada (DANTE, 2013, p. 49).

Percebe-se que há uma indicação sobre o que os números a e b representam. Neste caso, eles irão se referir a um par ordenado. Na tentativa de evitar o modo subjetivo de se reportar aos objetos matemáticos, é necessário adotar outro tipo de linguagem em que tais objetos sejam descritos a partir de sua relação com seus pares. Assim, na linguagem relacional, os objetos matemáticos são variáveis, letras ou palavras que indicam a relação entre eles.

Como exemplo temos:

> Dado um ponto P desse plano, dizemos que os números a e b são as coordenadas cartesianas do ponto P, em que a é a abcissa e b a ordenada (DANTE, 2013, p. 49).

Nota-se que, ao invés de os números a e b indicarem simplesmente um par ordenado, nesta parte do texto existe uma relação entre o ponto P e os números a e b, o que caracteriza o uso da linguagem relacional. Por fim, na linguagem funcional procura-se abstrair os objetos matemáticos por meio de uma lei ou fórmula pela qual seja possível introduzir uma função apropriada que permita caracterizar as relações entre os objetos matemáticos.

Para esse tipo de linguagem podemos citar o seguinte exemplo:

Figura 3: Linguagem funcional

Número de litros de gasolina e preço a pagar

A tabela abaixo relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em janeiro de 2013).

Número de litros	Preço a pagar (R$)
1	2,70
2	5,40
3	8,10
4	10,80
⋮	⋮
40	108,00
x	$2{,}70x$

Observe que o preço a pagar é dado **em função** do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar **depende** do número de litros comprados.

preço a pagar (p) = R$ 2,70 vezes o número de litros (x) comprados

ou

$p = 2{,}70x \rightarrow$ **lei da função** ou **fórmula matemática da função** ou regra da função ou ainda representação analítica da função

Fonte: Dante (2013, p. 42).

Nesse exemplo o autor utiliza uma linguagem que tem por objetivo introduzir uma função apropriada que permite caracterizar as relações entre os objetos matemáticos, neste caso a dependência entre o número de litros comprados e o preço a pagar.

As linguagens mencionadas podem adquirir um caráter mais descritivo ou procedimental dependendo do grau de familiaridade com as informações apresentadas. Por exemplo:

> A notação (a, b) é usada para indicar o par ordenado de números reais a e b, no qual o número a é a primeira coordenada e o número b é a segunda coordenada. Observe que os pares ordenados $(3,4)$ e $(4,3)$ são diferentes, pois a primeira coordenada de $(3,4)$ é 3, enquanto a primeira coordenada de $(4,3)$ é 4 (DANTE, 2013, p. 49).

Na primeira parte dessa citação, o autor descreve a notação do par ordenado e suas respectivas coordenadas. Em seguida, utiliza uma linguagem procedimental para distinguir os pares ordenados apresentados. Dessa forma, os autores dos livros didáticos precisam notar qual a linguagem mais adequada para o nível escolar a que o livro é destinado, ou seja, buscar respeitar o nível cognitivo do aluno.

Além da linguagem, os signos também podem representar um fator importante para a aprendizagem. Um signo é algo perceptível por um ou por vários sentidos e remete a algo ou mesmo o indica, além de poder ser um ente utilizado para induzir ou sugerir uma dada ação a quem o percebe. O próprio signo pode representar uma linguagem ou uma palavra em si.

Na Matemática, um signo pode ter dois sentidos. No primeiro, funciona como um sinal à medida que induz uma ação/reação do sujeito que o percebe. No segundo, pode operar como um símbolo quando indica ou identifica algo que é concebido ou percebido.

Segundo Dormolen (1986), ele pode funcionar de maneiras distintas dependendo do contexto e da situação real do leitor. O sinal, por exemplo, é um signo que evoca determinadas ações e é válido em certo grupo, usado para sugerir ou induzir uma determinada ação a quem o percebe. Ao ver o símbolo "+" o estudante pode ser induzido a fazer o agrupamento das parcelas a ele apresentadas. Nesse instante, o signo "+" estará funcionando como um sinal visto que induz a operação da soma.

O símbolo evoca então um conceito ou uma combinação destes, sendo ele percebido ou concebido. Assim, o símbolo $\frac{a}{b}$ pode suscitar vários conceitos nos estudantes, como a divisão entre números reais ou a representação de um número fracionário ou outros conceitos a este relacionados.

Tanto a linguagem quanto os signos podem auxiliar na aprendizagem do conteúdo abordado, e adequar a linguagem utilizada pelo livro didático de maneira que o aluno possa compreender o conteúdo deve ser um dos caminhos para o processo de ensino-aprendizagem. Os signos, por sua vez, devem suscitar conceitos pertinentes ao conteúdo estudado ou a conceitos referentes a este e ainda promover ações que conduzam o aluno ao entendimento e à compreensão do conteúdo estudado.

CAPITULO IV – ANALISANDO O TEXTO MATEMÁTICO

Iniciamos este capítulo apresentando os critérios de escolha da coleção analisada. Em seguida, apresentamos a referida coleção a partir de uma breve apresentação de seu autor e de como é abordado o conceito de função. Por fim, traremos as análises dos dados obtidos.

4.1. O livro didático analisado

Uma vez definido que iríamos trabalhar com o conceito de função em um livro didático de Matemática voltado a alunos do Ensino Médio, levantou-se outra questão: qual livro didático investigar? Decidimos analisar o livro *Matemática - contexto e aplicações* de Luiz Roberto Dante da editora ática publicado em 2013 por ser a coleção didática mais distribuída no último PNLD para o Ensino Médio (ver Tabela 1) e, por esse mesmo motivo, ser o texto mais utilizado nas escolas brasileiras para o ensino da disciplina. Por conseguinte, é a partir dele que muitos estudantes têm o primeiro contato com o conceito de função.

Tabela 1: Quantidade de livros didáticos distribuídos pelo PNLD[10] 2015

Coleções didáticas	Quantidade	%
Matemática – Contexto e Aplicações	2.564.520	34,3
Novo Olhar Matemática	1.481.977	19,8
Matemática – Ciências e Aplicações	1.451.745	19,5
Matemática – Paiva	900.309	12,1
Conexões com a Matemática	767.161	10,3
Matemática Ensino Médio	300.317	4,0
Total	**7.466.029**	**100**

Fonte: Portal do FNDE.

Lembramos que nossa análise ficará restrita ao capítulo no qual o conceito de função é abordado, o que não acarretará prejuízos à investigação, pois nossa intenção é

[10] Disponível em: http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos. Acesso em: 22 agosto 2016.

mostrar como a metodologia de análise textual proposta por Dormolen (1986) pode ser aplicada, exemplificando sua utilização.

Luiz Roberto Dante, autor do livro em análise, foi professor livre docente em Educação Matemática e pesquisador em ensino e aprendizagem de Matemática pela UNESP/SP. Possui doutorado em Psicologia da Educação em ensino de Matemática pela PUC/SP e também é autor de diversos outros livros didáticos, tanto voltados para o Ensino Fundamental quanto para o Ensino Médio, tendo atuado como professor da educação básica.

O livro, *Matemática – Contexto e Aplicações volume 01*, é dividido em quatro unidades, cada uma subdividida em dois capítulos. Na unidade 1, o autor trata o conceito de função, foco deste trabalho. Ele inicia o conteúdo com fatos históricos, de forma bastante resumida, como o uso da funcionalidade na Antiguidade. Na sequência, Dante recorre a definições apresentadas por matemáticos nos séculos XVII e XIX para mostrar aos alunos formulações diferentes desse conceito.

Após essa apresentação, o autor procura explorar intuitivamente o tema. Para isso, utiliza situações-problema para mostrar que, quando temos duas grandezas, dentre as quais uma esteja em relação de dependência com a outra, temos uma relação funcional, ou seja, implicitamente estamos trabalhando com o conceito de função. Dessa forma, faz uso da linguagem natural, utilizando a escrita para, por meio das situações-problema, trabalhar intuitivamente o conceito.

Em seguida, apresenta-se a noção de função por meio de conjuntos. A partir desse momento, o autor utiliza apenas diagramas de Venn, enfatizando em quais casos essa relação será uma função. Não é perceptível, nessa abordagem, uma articulação entre essas representações: tudo se passa como se essas representações fossem independentes.

O uso de expressões analíticas somente é feito no estudo do gráfico de funções. Ressalto que, quando Dante trabalha esse conteúdo, ele segue apenas em uma direção. Primeiro tem-se a expressão analítica e a partir desta monta-se uma tabela pela qual é dado o valor da variável x. Com a tabela preenchida, marcam-se no plano cartesiano os pontos obtidos anteriormente e então se tem a representação gráfica da função. Entretanto, não se promove o percurso inverso.

4.2. Análise do livro *Matemática contexto e aplicações*

Na unidade 1, *Números e funções*, como já mencionado, Dante introduz o conceito de função. Nesse universo, nossa análise localizou um total de cinquenta e um núcleos, distribuídos conforme a tabela 3.

Tabela 2: Quantitativo de núcleos no livro "Matemática Contexto e Aplicações"

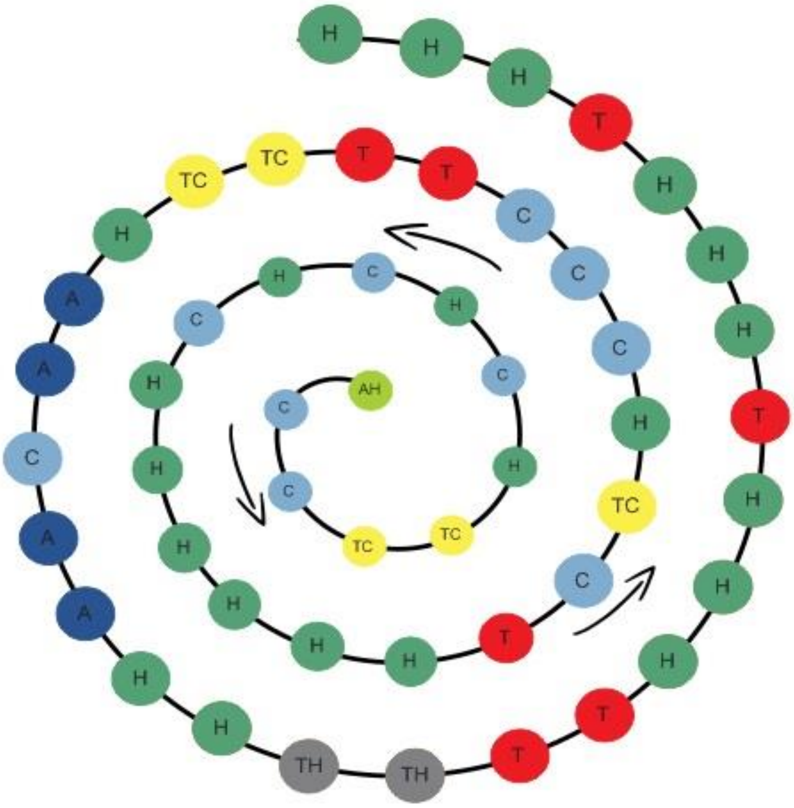
Núcleos	Quantidade (%)
Algorítmico	4 (8)
Comunicativo	10 (20)
Heurístico	22 (43)
Restritivo	0 (0)
Teórico	7 (14)
Teórico-comunicativo	5 (10)
Teórico-heurístico	2 (4)
Algorítmico-heurístico	1 (2)
Total	**51 (100)**

Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante mencionar que existem alguns núcleos que satisfazem mais de um aspecto, simultaneamente, denominados núcleos-conjuntos e cujas particularidades serão tratadas mais adiante. Eles ocorrem ao menos oito vezes neste capítulo.

Os núcleos encontrados no capítulo no qual o conceito de função é abordado seguem a ordem indicada na figura abaixo.

Figura 4: Ordenação dos núcleos no livro didático de Dante (2013)

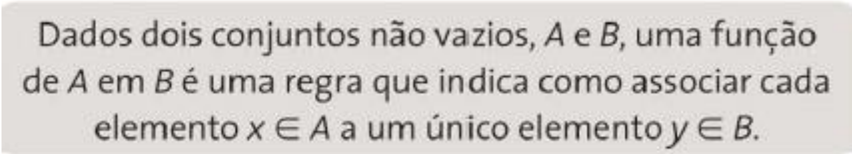


Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível perceber que os núcleos teóricos estão distribuídos ao longo do texto analisado, evitando assim a concentração da teoria em um único ponto. Outra característica do texto é a existência de um maior número de núcleos heurísticos em relação aos algorítmicos, o que pode indicar uma tentativa do autor de levar o aluno à descoberta de propriedades matemáticas presentes no texto analisado.

Iniciaremos nossa análise apresentando os núcleos em que encontramos apenas uma característica. Observe, por exemplo, o núcleo teórico, reproduzido na Figura 5:

Figura 5: Núcleo teórico


Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

Fonte: Dante (2013, p. 46).

Nele encontramos um núcleo teórico, conforme aponta Dormolen (1986), tipo que se caracteriza por apresentar a estrutura matemática do conteúdo abordado ou parte dela. Nesse trecho, Dante apresenta o conceito de função a partir da noção de conjuntos não vazios, para os quais existe uma regra que associa cada elemento a um e somente um item do outro conjunto. Convém ressaltar que essa definição é essencialmente a proposta por Bourbaki em 1939 (Veja a pág. 30).

Outro núcleo encontrado no livro analisado é mostrado na figura 6.

Figura 6: Núcleo Heurístico

A máquina de dobrar

Observe a seguir o diagrama de uma "máquina" de dobrar números.

Veja que os números que saem são dados **em função** dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem dependem dos números que entram.

Representando o número de saída por n e o número de entrada por x, temos:

$n = 2x \rightarrow$ fórmula matemática da função

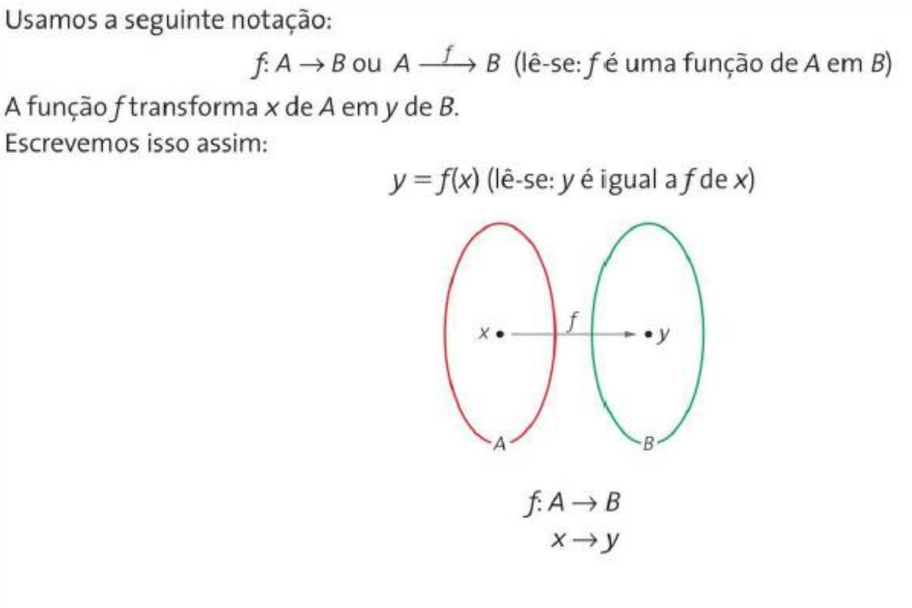
Fonte: Dante (2013, p. 43).

Esse núcleo se caracteriza como heurístico, pois por ele, deve-se entender o que está ocorrendo com os números no momento em que eles passam pela máquina. Apesar de Dormolen (1986) mencionar que os exercícios não são entendidos como núcleos, classificamos esse exemplo assim pelo fato de que o aluno, a partir da observação do que acontece com o número após passar pela máquina, deve entender a transformação ocorrida.

O intuito desse exemplo é levar à compreensão da relação entre as duas grandezas, que, neste caso, são os números que entram por um lado da máquina e os que saem dela. Existem ainda outros três exemplos desse tipo na obra pesquisada, todos classificados como heurísticos. Nos demais, é dada uma situação-problema e uma tabela de valores em que uma das grandezas depende da outra e o aluno, a partir de sua observação, poderá intuir que tais dependências caracterizam uma função.

Outro tipo de núcleo bastante encontrado foi o comunicativo, que tem por finalidade mostrar ao leitor alguma nomenclatura, notação a respeito do conteúdo estudado. Um exemplo desse tipo de núcleo é apresentado na figura abaixo.

Figura 7: Núcleo Comunicativo 1


Usamos a seguinte notação:

$f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B)

A função f transforma x de A em y de B.

Escrevemos isso assim:

$y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x)

$$f: A \to B$$
$$x \to y$$

Fonte: Dante (2013, p. 46).

Dante utiliza a noção de correspondência entre conjuntos para apresentar algumas notações utilizadas no ensino do conceito de função. Os núcleos comunicativos, em sua maioria, são encontrados fora do corpo principal do texto, ou seja, são apresentados em caixas informativas, como no exemplo mostrado na Figura 8.

Figura 8: Núcleo comunicativo 2


Fique atento!
Podemos usar a notação $f(x)$ no lugar de p. Assim, teríamos $f(x) = 2{,}70x$.

Fonte: Dante (2013, p. 41).

Seu objetivo é comunicar, informar a notação utilizada ao se referir a uma função. Esse tipo de núcleo é o mais encontrado em associação com outros, o que será detalhado na continuidade deste texto.

Já os núcleos algorítmicos, assim com os heurísticos, são procedimentos indicativos para a realização de determinada atividade. Entretanto, a diferença entre ambos, conforme aponta Dormolen (1986), é que no heurístico exige-se que o aluno pense, observe e utilize sua intuição, pois é a partir disso que notará algo comum a todos os exemplos apresentados.

Já os núcleos algorítmicos são passos e procedimentos mecânicos, os quais devem ser seguidos para se obter a resposta desejada. Poderíamos afirmar, pois, que um núcleo algorítmico se apresenta como uma lista de passos a serem seguidos, como ilustrado na Figura 9.

Figura 9: Núcleo Algorítmico

Para construir o gráfico de uma função dada por $y = f(x)$, com $x \in D(f)$, no plano cartesiano, devemos:

- construir uma tabela com valores de x escolhidos convenientemente no domínio D e com valores correspondentes para $y = f(x)$;
- associar um ponto do plano cartesiano a cada par ordenado (x, y) da tabela;
- marcar um número suficiente de pontos até que seja possível esboçar o gráfico da função.

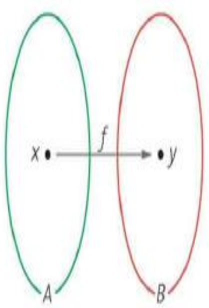
Fonte: Dante (2013, p. 53).

No livro analisado, não encontramos nenhum enunciado que, em nossa opinião, pudesse ser caracterizado como restritivo, nem mesmo em associação com outro núcleo.

Continuando com a análise, passamos agora para os núcleos que satisfazem duas características simultaneamente, os núcleos-conjuntos. O núcleo teórico-comunicativo (TC) é caracterizado por conter tanto o aspecto teórico quanto o comunicativo, não sendo possível dissociá-los, tendo sido encontrados cinco exemplos dele no livro de Dante (2013). Um deles é reproduzido a seguir.

Figura 10: Núcleo Teórico e comunicativo

Dada uma função f de A em B, o conjunto A chama-se **domínio** da função (D) e o conjunto B, **contra-domínio** (CD) da função. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se **imagem** de x pela função f ou o valor assumido pela função f para $x \in A$, e o representamos por $f(x)$. Assim, $y = f(x)$.



Fonte: Dante (2013, p. 47).

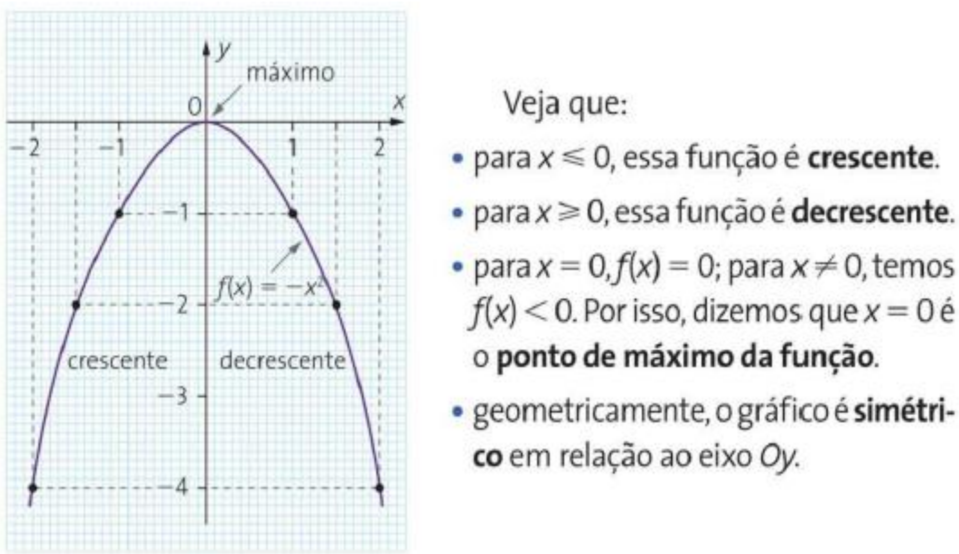
Note que, nesse trecho, o autor define o que é uma função, assim como também domínio, contra-domínio e a imagem de uma função. Esses são elementos que fazem parte da teoria que compõe o conteúdo, o que por sua vez caracteriza um núcleo teórico, como já mencionamos anteriormente.

O aspecto comunicativo se faz presente quando o autor especifica, dentre os conjuntos apresentados, qual deles é o domínio, o contra-domínio e a imagem. Além disso, ele nos informa que todo elemento que se refere ao domínio está presente no conjunto A e que um elemento do conjunto B faz referência ao contra-domínio ou imagem.

Com isso, pretende-se que o aluno possa identificar a qual conjunto um determinado elemento pertence. Dessa maneira, está sendo comunicado que se um elemento pertence ao domínio da função (Conjunto A) nunca será imagem dessa mesma função (conjunto B).

Também encontramos núcleos teórico-heurísticos (TH): duas vezes no livro analisado. Um deles é mostrado na Figura 11.

Figura 11: Núcleo teórico- heurístico



Fonte: Dante (2013, p. 55).

O aspecto teórico desse núcleo é percebido quando se define o ponto de máximo da função e, ainda, que o gráfico da função é simétrico em relação ao eixo y. Já o aspecto heurístico está presente de modo implícito, notado quando a partir da observação do gráfico o aluno percebe em quais intervalos a função quadrática exemplificada na Figura 11 cresce ou decresce.

Da mesma forma, encontramos no capítulo analisado um núcleo algorítmico-heurístico (AH), mostrado na figura a seguir.

Figura 12: Núcleo Algorítmico-Heurístico

Os babilônios, por volta do ano 2000 a.C., já utilizavam a ideia de função quando faziam tabelas colocando alguns números na primeira coluna e o produto desses números por um valor constante na segunda coluna. Assim, se o multiplicador fosse o 7, x o número da primeira coluna e y o número da segunda coluna, a cada x corresponderia um y, de acordo com a função: $y = 7x$.

x	y
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35
⋮	⋮

Fonte: Dante (2013, p. 40).

O aspecto heurístico está presente quando o autor menciona o fato de que os babilônios separavam os valores em colunas diferentes como representado pela figura, em que na primeira coluna é colocado um determinado valor e na segunda outro multiplicado por uma constante (7). Nesse caso, fica entendido que na primeira encontra-se o valor da variável e na segunda o produto dessa variável por uma constante, deixando claro que a partir da observação desse método é possível encontrar a lei de formação procurada.

Em relação ao aspecto algorítmico, salientamos o fato de ser utilizado no enunciado o seguinte algoritmo: “se o multiplicador for 7, x o número da primeira coluna e y o número da segunda coluna, a cada x corresponderia um y, de acordo com a função $y = 7x$”. Isso nos remete à ideia dos passos a serem seguidos a fim de que se possa encontrar a solução procurada.

4.3. Tabela de núcleos

Na Tabela 3, a seguir, apresentaremos os núcleos encontrados no livro de Dante (2013), *Matemática contexto e aplicações*, no capítulo em estudo. Para identificação desses núcleos foi utilizado o código X.00.00, como já referido: a letra inicial maiúscula representa o tipo de núcleo com que o enunciado foi classificado (T - Teórico; H -

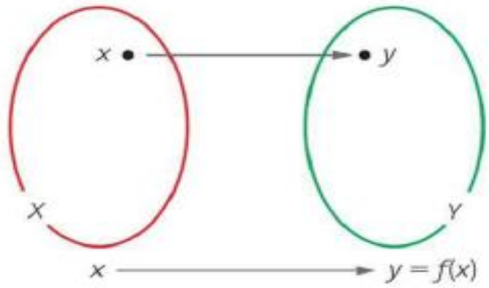
Heurístico; A - Algorítmico; R - Restritivo; C – Comunicativo) e dentre os dois números, o primeiro indica a sequência em que ele foi encontrado no texto e o segundo o número da página do livro em que se localiza.

Tabela 3: Livro Matemática Contexto e Aplicações (DANTE, 2013)

<table>
<tr><th>Código</th><th>Núcleo</th></tr>
<tr><td>AH.01.40</td><td>Os babilônios, por volta do ano 2000 a.C., já utilizavam a ideia de função quando faziam tabelas colocando alguns números na primeira coluna e o produto desses números por um valor constante na segunda coluna. Assim, se o multiplicador fosse o 7, x o número da primeira coluna e y o número da segunda coluna, a cada x corresponderia um y, de acordo com a função: $y = 7x$.
<table>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>1</td><td>7</td></tr>
<tr><td>2</td><td>14</td></tr>
<tr><td>3</td><td>21</td></tr>
<tr><td>4</td><td>28</td></tr>
<tr><td>5</td><td>35</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>C.02.40</td><td>Em nosso cotidiano aplicamos o conceito de função sempre que pagamos por produtos que compramos, pois o valor a ser pago, em geral, varia em função da quantidade de objetos comprados.</td></tr>
<tr><td>C.03.41</td><td>A representação de uma função pela notação $f(x)$ (lê-se: f de x) foi atribuída ao matemático suíço Euler, no século XVII.</td></tr>
<tr><td>TC.04.41</td><td>“Uma variável y se diz função de uma variável x se, para todo valor atribuído a x, corresponde, por alguma lei ou regra, um único valor de y. Nesse caso, x denomina-se variável independente e y, variável dependente.”</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>TC.05.41</td><td>

“Dados os conjuntos X e Y, uma função f: $X \rightarrow Y$ (lê-se: uma função de X em Y) é uma regra que determina como associar a cada elemento $x \in X$ um único $y = f(x) \in Y$.”



</td></tr>
<tr><td>H.06.42</td><td>

a) **Número de litros de gasolina e preço a pagar**

A tabela abaixo relaciona o número de litros de gasolina comprados e o preço a pagar por eles (em janeiro de 2013).

<table>
<tr><th>Número de litros</th><th>Preço a pagar (R$)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>2,70</td></tr>
<tr><td>2</td><td>5,40</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8,10</td></tr>
<tr><td>4</td><td>10,80</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>40</td><td>108,00</td></tr>
<tr><td>x</td><td>$2{,}70x$</td></tr>
</table>

Observe que o preço a pagar é dado **em função** do número de litros comprados, ou seja, o preço a pagar **depende** do número de litros comprados.

preço a pagar (p) = R$ 2,70 vezes o número de litros (x) comprados

ou

$p = 2{,}70x \rightarrow$ **lei da função** ou **fórmula matemática da função** ou regra da função ou ainda representação analítica da função

</td></tr>
<tr><td>C.07.42</td><td>

Fique atento!

Podemos usar a notação $f(x)$ no lugar de p. Assim, teríamos $f(x) = 2{,}70x$.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>H.08.42</td>
<td>

b) Lado do quadrado e perímetro

A tabela a seguir relaciona a medida do lado de um quadrado (ℓ), em centímetros, e o seu perímetro (P), também em centímetros.

<table>
<tr><th>Medida do lado (ℓ em cm)</th><th>Perímetro (P em cm)</th></tr>
<tr><td>1</td><td>4</td></tr>
<tr><td>2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2,5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>3</td><td>12</td></tr>
<tr><td>4,1</td><td>16,4</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>ℓ</td><td>4ℓ</td></tr>
</table>

Observe que o perímetro do quadrado é dado em função da medida do seu lado, isto é, o perímetro depende da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado corresponde um único valor para o perímetro.

perímetro (P) = 4 vezes a medida do lado (ℓ) ou

$P = 4\ell \rightarrow$ lei da função

Como o perímetro depende da medida do lado, ele é a **variável dependente**, e a medida do lado é a chamada **variável independente**.

</td>
</tr>
<tr>
<td>H.09.42</td>
<td>

A máquina de dobrar

Observe a seguir o diagrama de uma "máquina" de dobrar números.

Veja que os números que saem são dados **em função** dos números que entram na máquina, ou seja, os números que saem dependem dos números que entram.

Representando o número de saída por n e o número de entrada por x, temos:

$n = 2x \rightarrow$ fórmula matemática da função

</td>
</tr>
</table>

H.10.43

Em uma rodovia, o motorista coloca o carro no piloto automático e mantém uma velocidade constante de 90 km/h.
Veja a tabela que relaciona o tempo t (em horas) e a distância d (em quilômetros):

Tempo (h)	**Distância** (km)
0,5	45
1	90
1,5	135
2	180
t	$90t$

Ricardo Azoury/Pulsar Imagens

Você sabia?
Este exemplo aborda um conteúdo estudado em Física: **velocidade média**.

Observe que a distância percorrida é dada **em função** do tempo, isto é, a distância percorrida **depende** do intervalo de tempo. A cada intervalo de tempo considerado corresponde um único valor para a distância percorrida. Dizemos, então, que a **distância percorrida** (d) **é função do tempo** (t) e escrevemos:

distância = 90 · tempo

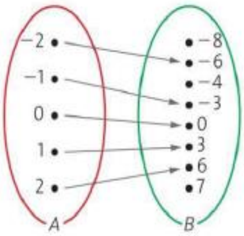
$d = 90t$ → representação analítica da função
→ variável independente
→ variável dependente

C.11.43

Fique atento!
Podemos usar $f(t)$ no lugar de d.
Assim, $f(t) = 90t$.

H.12.45

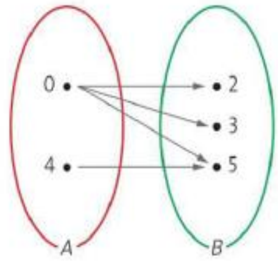
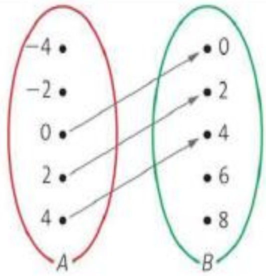
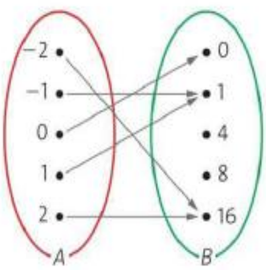
Observe os conjuntos A e B relacionados da seguinte forma: em A estão alguns números inteiros e em B, outros.
Devemos associar cada elemento de A a seu triplo em B.

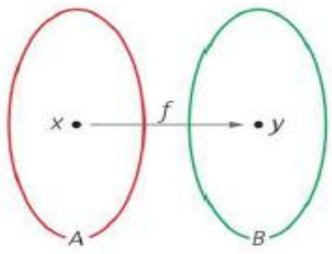
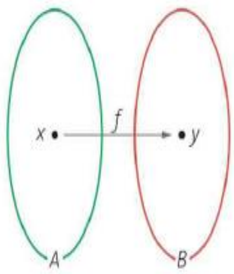


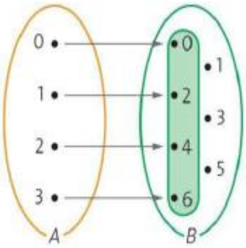
$x \in A$	$y \in B$
−2	−6
−1	−3
0	0
1	3
2	6

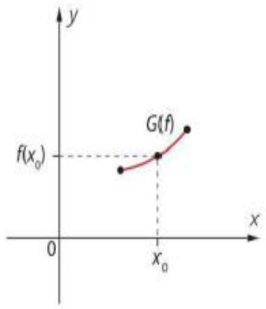
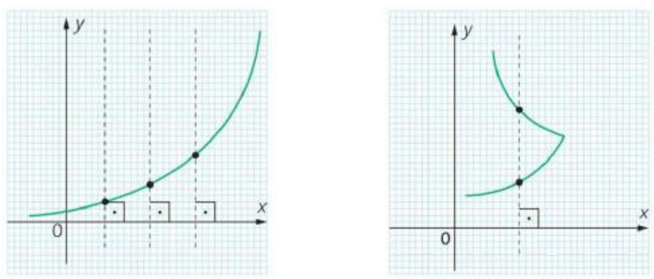
Note que:
- todos os elementos de A têm correspondente em B;
- a cada elemento de A corresponde um único elemento de B.

Nesse caso, temos uma função de A em B, expressa pela fórmula $y = 3x$.

H.13.45	) Dados $A = \{0, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5\}$, relacionamos A e B da seguinte forma: cada elemento de A é menor do que um elemento de B: Nesse caso, não temos uma função de A em B, pois ao elemento 0 de A correspondem três elementos de B (2, 3 e 5, pois $0 < 2$, $0 < 3$ e $0 < 5$), e não apenas um único elemento de B. 
H.14.45	Dados $A = \{-4, -2, 0, 2, 4\}$ e $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, associamos os elementos de A aos elementos de igual valor em B: Observe que há elementos em A (os números -4 e -2) que não têm correspondente em B. Nesse caso, não temos uma função de A em B. 
H.15.45	Dados $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 4, 8, 16\}$ e a correspondência entre A e B dada pela fórmula $y = x^4$, com $x \in A$ e $y \in B$, temos: • todos os elementos de A têm correspondente em B; • a cada elemento de A corresponde um único elemento de B. Assim, a correspondência expressa pela fórmula $y = x^4$ **é uma função de A em B.** 
H.16.45	Sejam P o conjunto das regiões poligonais do plano e $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. A cada região poligonal do plano fazemos corresponder a sua área em $\mathbb{R}$. Essa correspondência **é uma função de P em $\mathbb{R}$.**
T.17.46	Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$.

C.18.46	Usamos a seguinte notação: $f: A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ (lê-se: f é uma função de A em B) A função f transforma x de A em y de B. Escrevemos isso assim: $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x)  $f: A \to B$ $x \to y$
TC.19.47	Dada uma função f de A em B, o conjunto A chama-se **domínio** da função (D) e o conjunto B, **contra-domínio** (CD) da função. Para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$ chama-se **imagem** de x pela função f ou o valor assumido pela função f para $x \in A$, e o representamos por $f(x)$. Assim, $y = f(x)$.  O conjunto de todos os y assim obtidos é chamado conjunto imagem da função f e é indicado por $Im(f)$.
C.20.47	**Fique atento!** Em toda função f de A em B, $Im(f) \subset B$.

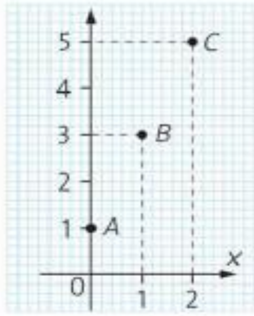
H.21.47	Dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vamos considerar a função $f: A \rightarrow B$ que transforma $x \in A$ em $2x \in B$. Dizemos que $f: A \rightarrow B$ é definida por $f(x) = 2x$ ou por $y = 2x$. A indicação $x \xrightarrow{f} 2x$ significa que x é transformado pela função f em $2x$.  Veja que, para caracterizar uma função, é necessário conhecer seus três componentes: o domínio (A), o contradomínio (B) e uma regra que associa cada elemento de A a um único elemento $y = f(x)$ de B. Nesse exemplo o domínio é $A = \{0, 1, 2, 3\}$, o contradomínio é $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a regra é dada por $y = 2x$ e o conjunto imagem é dado por $Im(f) = \{0, 2, 4, 6\}$.
C.22.48	Estudamos que toda função tem domínio, contradomínio e lei de correspondência. Quando é citada uma função f de A em B, já ficam subentendidos o domínio (A) e o contradomínio (B).
C.23.48	Às vezes, é apresentada apenas a lei da função f, sem que A e B sejam citados. Nesses casos, consideramos o contradomínio $B = \mathbb{R}$ e o domínio A como o "maior" subconjunto de $\mathbb{R}$ ($A \subset \mathbb{R}$) tal que a lei dada defina uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.
T.24.49	A notação (a, b) é usada para indicar o par ordenado de números reais a e b, no qual o número a é a primeira coordenada e o número b é a segunda coordenada. Observe que os pares ordenados (3, 4) e (4, 3) são diferentes, pois a primeira coordenada de (3, 4) é 3, enquanto a primeira coordenada de (4, 3) é 4.
T.25.49	Um sistema de eixos ortogonais é constituído por dois eixos perpendiculares, Ox e Oy, que têm a mesma origem O.
TC.26.49	Usamos esse sistema para localizar pontos no plano. Dado um ponto P desse plano, dizemos que os números a e b são as **coordenadas cartesianas** do ponto P, em que a é a **abscissa** e b é a **ordenada**.

TC.27.52	Dada uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o seu gráfico é o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), para $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$, ou seja, $$G(f) = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } y = f(x)\}$$  $(x_0, f(x_0))$ é um ponto do gráfico
H.28.52	Já estudamos que, para ter uma função de $A \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a cada $x \in A$ deve corresponder um único $y \in \mathbb{R}$. Geometricamente, isso significa que qualquer reta perpendicular ao eixo Ox que intersecta o gráfico deve fazê-lo em um único ponto. Por exemplo:  O primeiro gráfico é de uma função, pois qualquer reta perpendicular ao eixo Ox intersecta-o em um único ponto. O segundo gráfico não é de uma função, pois existem retas perpendiculares ao eixo Ox intersectando-o em mais de um ponto.
A.29.53	Para construir o gráfico de uma função dada por $y = f(x)$, com $x \in D(f)$, no plano cartesiano, devemos: • construir uma tabela com valores de x escolhidos convenientemente no domínio D e com valores correspondentes para $y = f(x)$; • associar um ponto do plano cartesiano a cada par ordenado (x, y) da tabela; • marcar um número suficiente de pontos até que seja possível esboçar o gráfico da função.

A.30.53

a) Gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 1$, sendo o domínio $D = \{0, 1, 2\}$.

x	$y = f(x) = 2x + 1$
0	1
1	3
2	5



Nesse caso, o gráfico da função é o conjunto dos pontos A, B e C.

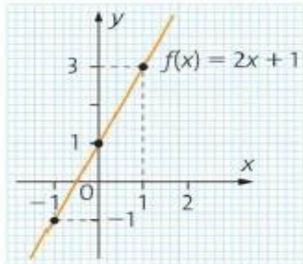
C.31.53

Fique atento!
Você verá no próximo capítulo que, quando temos y igual a um polinômio do 1º grau da forma $ax + b$, o gráfico é sempre uma reta. Como dois pontos determinam uma reta, basta marcar apenas dois pontos para traçá-la.

A.32.53

Gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$.
Como, nesse caso, $D = \mathbb{R}$, vamos escolher alguns valores arbitrários de x e determinar y:

x	$y = f(x) = 2x + 1$
−1	−1
0	1
1	3

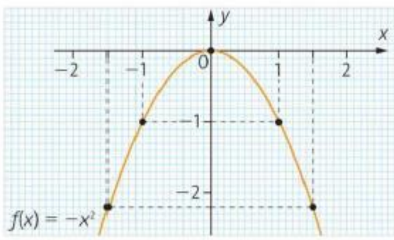


O gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y), com x real e $y = 2x + 1$, resultando na reta da figura ao lado.

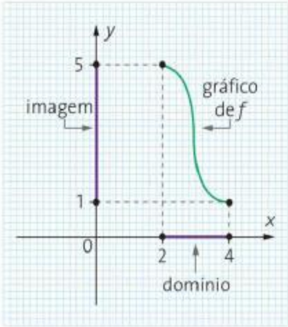
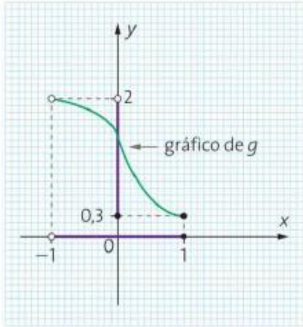
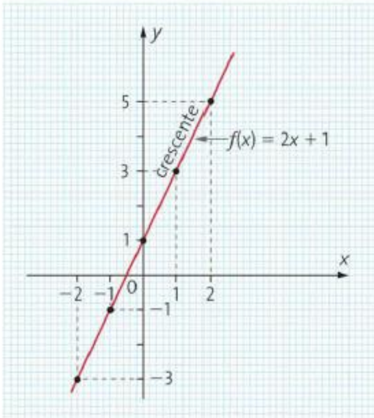
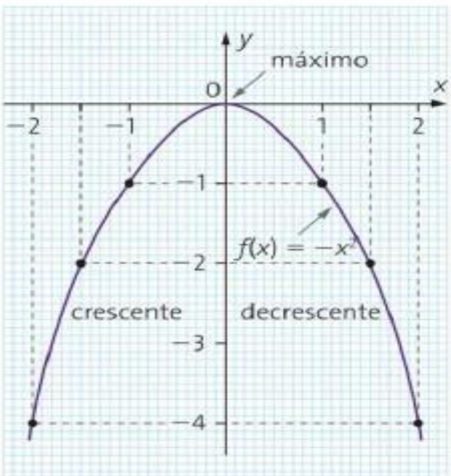
A.33.53

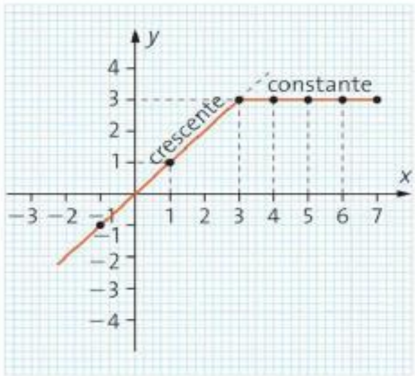
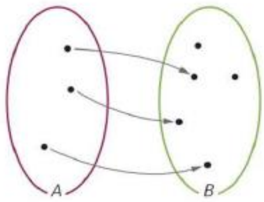
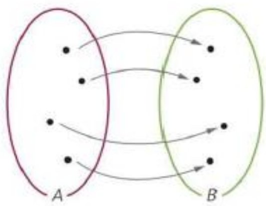
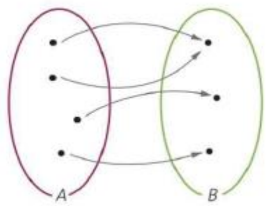
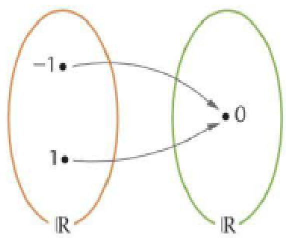
Gráfico da função $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -x^2$.

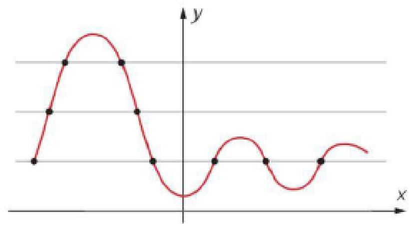
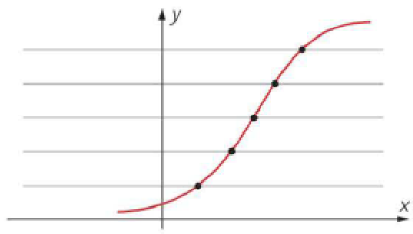
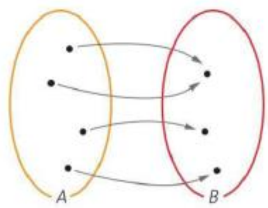
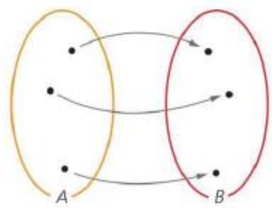
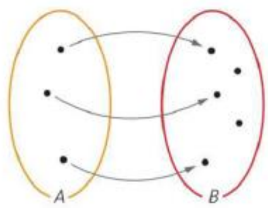
x	$y = f(x) = -x^2$	(x, y)
−1,5	−2,25	(−1,5; −2,25)
−1	−1	(−1, −1)
0	0	(0, 0)
1	−1	(1, −1)
1,5	−2,25	(1,5; −2,25)

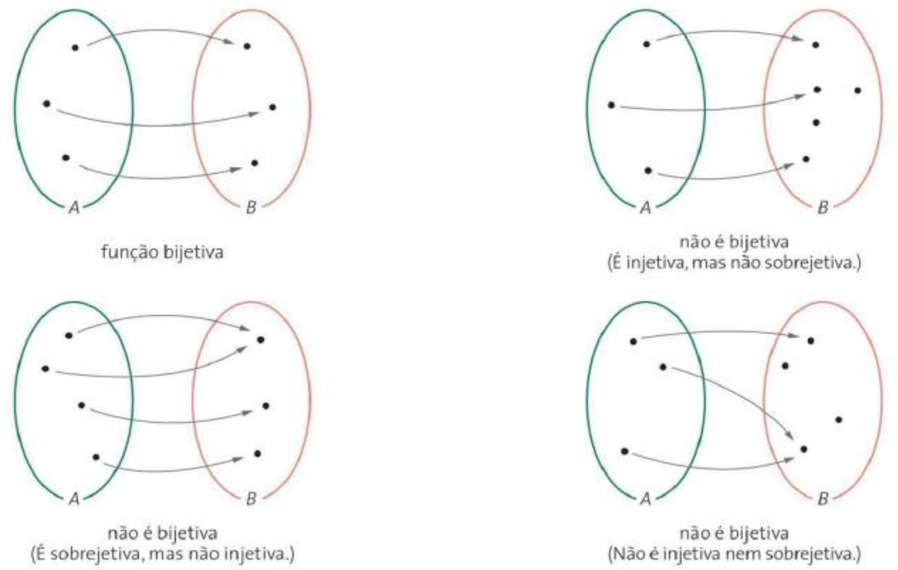


A curva que contém todos os pontos obtidos com $y = -x^2$ é o gráfico da função dada. Essa curva se chama parábola.

TH.34.55	Observando o gráfico de uma função no plano cartesiano podemos determinar o domínio D e o conjunto imagem Im da função, projetando o gráfico nos eixos. Veja:   $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\} = [2, 4]$ $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y \leq 5\} = [1, 5]$ $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 1\} =]-1, 1]$ $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0{,}3 \leq y < 2\} = [0{,}3;\ 2[$
H.35.55	 Observe que o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 1$ é uma reta. Dizemos que essa função é **crescente**, pois, quanto maior o valor dado a x, maior será o valor correspondente $y = f(x) = 2x + 1$.
TH.36.55	 Veja que: • para $x \leq 0$, essa função é **crescente**. • para $x \geq 0$, essa função é **decrescente**. • para $x = 0, f(x) = 0$; para $x \neq 0$, temos $f(x) < 0$. Por isso, dizemos que $x = 0$ é o **ponto de máximo da função**. • geometricamente, o gráfico é **simétrico** em relação ao eixo Oy.

<table>
<tr>
<td>TH.37.55</td>
<td>Por fim, observe o gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leq 3 \\ 3, \text{ se } x > 3 \end{cases}$.

Veja que:
• para $x \leq 3$, essa função é **crescente**.
• para $x > 3$, essa função é **constante**.
• para $x < 0$, $f(x) < 0$.
• para $x = 0$, $f(x) = 0$.
• para $x > 0$, $f(x) > 0$.</td>
</tr>
<tr>
<td>T.38.56</td>
<td>**1ª)** Onde ela é positiva ($f(x) > 0$), onde ela é negativa ($f(x) < 0$) e onde ela se anula ($f(x) = 0$). Os valores x_0 nos quais ela se anula ($f(x_0) = 0$) são chamados **zeros** da função f.
2ª) Onde ela é crescente (se $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$), onde ela é decrescente (se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$) e onde ela assume um valor máximo ou um valor mínimo, se existirem. Por exemplo,</td>
</tr>
<tr>
<td>T.39.60</td>
<td>Uma função $f: A \rightarrow B$ é **injetiva** (ou **injetora**) quando elementos diferentes de A são transformados por f em elementos diferentes de B, ou seja, não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A. Assim, f é injetiva quando:
$x_1 \neq x_2$ em $A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ em B
ou equivalentemente usando a contrapositiva:
$f(x_1) = f(x_2)$ em $B \Rightarrow x_1 = x_2$ em A

função injetiva

função injetiva
(Não há elemento em B que seja imagem de mais de um elemento de A.)

função não injetiva
(Há um elemento em B que é imagem de dois elementos distintos de A.)</td>
</tr>
<tr>
<td>H.40.60</td>
<td>Exemplos:
A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - 1$ não é injetiva, pois:
• para $x = 1$ corresponde $f(1) = 0$;
• para $x = -1$ corresponde $f(-1) = 0$.
Neste caso, para dois valores diferentes de x encontramos um mesmo valor para a função.
</td>
</tr>
</table>

H.41.60	A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ é injetiva, pois faz corresponder a cada número real x o seu dobro $2x$, e não existem dois números reais diferentes que tenham o mesmo dobro. Simbolicamente: Para quaisquer $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
H.42.60	**Observação**: Podemos verificar se uma função é injetiva olhando seu gráfico. Sabemos que, se a função é injetiva, não há elemento do conjunto imagem que seja imagem de mais de um elemento do domínio. Assim, imaginando linhas horizontais cortando o gráfico, essas linhas só podem cruzar o gráfico uma única vez para cada valor de y. Exemplos: a) As linhas horizontais intersectam o gráfico mais de uma vez. A função não é injetiva.  b) As linhas horizontais **nunca** intersectam o gráfico mais de uma vez. Então a função é injetiva. 
T.43.61	Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetiva** (ou **sobrejetora**) quando, para qualquer elemento $y \in B$, pode-se encontrar um elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Ou seja, f é sobrejetiva quando todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A, isto é, quando $Im(f) = B$.  função sobrejetiva $Im(f) = B$  função sobrejetiva $Im(f) = B$  função não sobrejetiva (Há elementos em B sem correspondente em A; logo, $Im(f) \neq B$.)
H.44.61	A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 2$ é sobrejetiva, pois todo elemento de $\mathbb{R}$ é imagem de um elemento de $\mathbb{R}$ pela função $[x = f(x) - 2]$. Veja: • $f(x) = 5$ é imagem de $x = 3$, pois $5 - 2 = 3$; • $f(x) = 0$ é imagem de $x = -2$, pois $0 - 2 = -2$.
H.45.61	A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ é sobrejetiva, pois todo elemento de $\mathbb{R}_+$ é imagem de pelo menos um elemento de $\mathbb{R}$ pela função $\left[x = \pm\sqrt{f(x)}\right]$. Observe: • $f(x) = 9$ é imagem de $x = 3$ e de $x = -3$ $(\pm\sqrt{9})$ • $f(x) = 0$ é imagem de $x = 0$ $(\pm\sqrt{0})$ • $f(x) = 2$ é imagem de $x = \sqrt{2}$ e de $x = -\sqrt{2}$ $(\pm\sqrt{2})$

H.46.61	A função sucessora $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $f(n) = n + 1$ **não** é sobrejetiva, pois $Im(f) = \mathbb{N}^*$ e $\mathbb{N}^* \neq \mathbb{N}$. Em outras palavras, dado $0 \in \mathbb{N}$, não há natural algum que seja transformado em 0 pela função f, isto é, 0 não é sucessor de nenhum número natural.
T.47.62	Uma função $f: A \to B$ é **bijetiva** se ela for, simultaneamente, injetiva e sobrejetiva. Quando isso ocorre dizemos que há uma **bijeção** ou uma **correspondência biunívoca** entre A e B. 
H.48.62	A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ é bijetiva, pois ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva; cada número real do contradomínio $\mathbb{R}$ tem como correspondente no domínio a sua terça parte, que sempre existe e é única.
H.49.62	A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x$ é bijetiva, pois ela é simultaneamente injetiva e sobrejetiva; cada número real do contradomínio $\mathbb{R}$ tem como correspondente no domínio a sua terça parte, que sempre existe e é única.
H.50.62	A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ dada por $f(x) = x^2$ não é bijetiva, pois, embora seja sobrejetiva, ela não é injetiva: $3 \neq -3$, mas $f(3) = f(-3) = 9$.
H.51.62	A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2^x$ não é bijetiva; embora seja injetiva, ela não é sobrejetiva. Não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ ou que $f(x)$ seja negativo.

Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3.1. Os núcleos teóricos

Em geral, como mencionado anteriormente, os núcleos teóricos apresentam a definição de conceitos ou de objetos matemáticos. Neles, a linguagem utilizada pelo autor é relacional, associando os diferentes objetos matemáticos presentes nas definições.

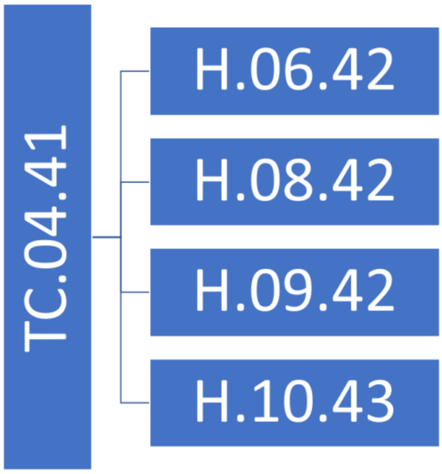
Como exemplo dessa linguagem temos o núcleo T.17.46 (Tabela 3), no qual o autor relaciona dois elementos pertencentes a conjuntos não vazios distintos que estão unidos por uma regra que associa cada elemento de um conjunto a um elemento de outro.

Esses núcleos estão distribuídos por todo o capítulo do livro analisado; ora eles apresentam aspectos puramente teóricos, como foi possível perceber nos exemplos T.17.46; T.24.49; T.25.49; T.38.56; T.39.60; T.43.61 e T.47.62 (Tabela 3), ora, além do aspecto teórico, também apresentam o comunicativo, procurando também comunicar qual notação deve ser utilizada ao se referir ao conceito de função. Enquadrados nessa categoria encontramos cinco enunciados: TC.04.41; TC.05.41, TC.19.47; TC.26.49 e TC.27.52 (Tabela 3).

É importante ressaltar que os núcleos teóricos e os teóricos-comunicativos apresentados podem influenciar a aprendizagem de novos núcleos. Como exemplo, podemos citar o exemplo TC.04.41. Nele, Dante define o que é função a partir da relação entre as variáveis (dependente e independente). Em outras palavras, esse núcleo aborda a dependência entre x e y. Se o aluno não entender que a variável y dependerá dos valores atribuídos a x, terá dificuldades em compreender os núcleos H.06.42, H.08.42 e H.10.43, visto que eles trazem a relação de dependência entre as grandezas (medida do lado e perímetro de um quadrado, números que entram de um lado da máquina e os que saem do outro, tempo e distância percorrida em uma viagem, respectivamente).

Com isso, a não compreensão do núcleo TC.04.41 poderá dificultar a aprendizagem em relação a essa noção básica do conceito de função, causando assim um efeito negativo na aprendizagem. Essa relação de dependência pode ser observada na Figura 13:

Figura 13: Dependência entre os núcleos 1

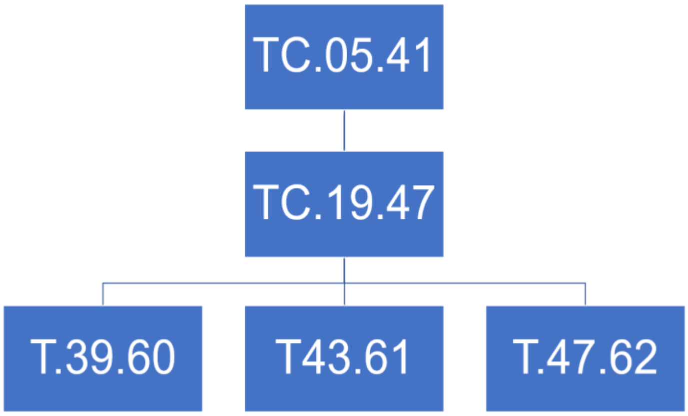


Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que no núcleo TC.04.41 Dante define o conceito de função chamando atenção para a relação de dependência entre as variáveis *x* e *y* e também para a existência de uma lei de formação ou regra. Os outros núcleos da Figura 13 são exemplificações das características abordadas na definição apresentada. No H.06.42, por exemplo, as grandezas mencionadas são a quantidade de litros de gasolina e o preço a pagar, e o modo como esse núcleo é apresentado progride para a obtenção de uma lei ou regra que representa a relação de dependências entres as variáveis. Os demais núcleos (H.08.42, H.09.42 e H.10.43) são apresentados seguindo o mesmo modo descrito.

Essa relação existente entre os núcleos é o que chamamos de condicionamento conceitual. Notamos também que a ordem em que eles estão dispostos no texto é satisfatória uma vez que o autor procura apresentá-los de tal maneira que para cada novo núcleo apresentado apresente aspectos relacionados aos tratados anteriormente. Na Figura 14 exemplificamos o sequenciamento dos núcleos.

Figura 14: Dependência entre os núcleos 2



Fonte: Elaborada pelo autor.

No núcleo TC.05.41, Dante relaciona os elementos dos conjuntos *X* e *Y*, no qual cada elemento pertencente a *X* tem um correspondente em *Y* e, para representar essa relação, é utilizado o diagrama de Venn. Já no núcleo TC.19.47 o autor relembra a relação entre os elementos dos conjuntos e apresenta algumas características pertencentes ao conceito de função, como domínio, contra-domínio e imagem de uma função. Nos núcleos T.39.60, T.43.61 e T.47.62, por outro lado, definem-se função injetiva, sobrejetiva e bijetiva, respectivamente. Nesses núcleos, a obra retoma a relação de dependência entre os elementos dos conjuntos.

Outro tipo de núcleo encontrado foi o teórico-heurístico, que subjaz saberes que o leitor já deve possuir. Os núcleos encontrados elencados nessa categoria foram TH.36.55 e o TH.37.55.

No total, foram identificados quatorze núcleos com aspecto teórico, dos quais sete são puramente teóricos, dois mesclam essa característica com os heurísticos e cinco com os comunicativos.

4.3.2. Os núcleos heurísticos

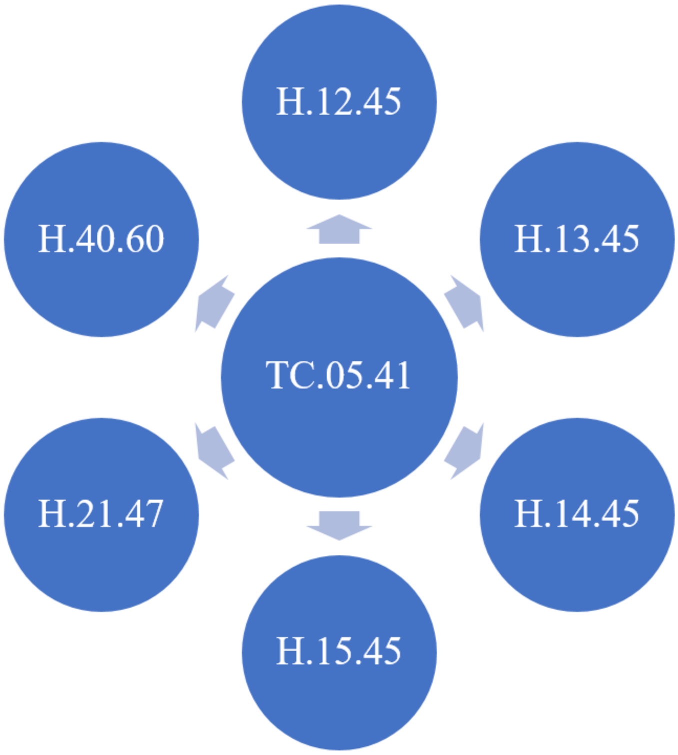
Os núcleos heurísticos são aqueles que incluem regras de "como fazer". Entretanto, esse tipo de núcleo apresenta ainda implícitos saberes que o leitor deve intuir, perceber.

Eles foram encontrados em sua maioria como exemplos. Alguns deles possuem uma linguagem funcional, cujo objetivo é fazer com que o leitor, por meio das informações apresentadas, consiga perceber a existência de uma expressão analítica que relacione as grandezas abordadas, como se pode observar nos núcleos H.06.42, H.08.42, H.09.43 e H.10.43.

Em três desses núcleos (H.06.42, H.08.42 e H.12.45) as tabelas apresentadas funcionam como um símbolo, evocando uma relação de dependência entre as grandezas apresentadas. No núcleo H.09.43 a ilustração apresentada deve relembrar a ideia da multiplicação por dois, característica que deve ser percebida pelo leitor.

O sequenciamento é perceptível quando analisamos alguns núcleos. Por exemplo, a compreensão do núcleo TC.05.41 é indispensável para que o leitor entenda H.12.45, H.13.45, H.14.45, H.15.45, H.21.47 e H.40.60. Esse sequenciamento está ilustrado na Figura 15.

Figura 15: Sequenciamento dos núcleos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como mencionado anteriormente, no núcleo TC.05.41 Dante define função a partir da associação de elementos de dois conjuntos não vazios. Nos demais núcleos (H.12.45, H.13.45, H.14.45, H.15.45, H.21.47 e H.40.60), retomam-se essas características para exemplificar heuristicamente as propriedades abordadas no núcleo teórico-comunicativo. No exemplo H.12.45, por sua vez, são utilizados dois tipos de signos, o diagrama de Venn e uma tabela. No primeiro, o leitor precisa associar um elemento de um conjunto a um e somente um elemento do outro, ou seja, o signo apresentado deve evocar conceitos, neste caso funcionando como um símbolo.

Algo semelhante é notado nos demais núcleos citados anteriormente. Todos eles trabalham com diagramas de Venn para relembrar os conceitos matemáticos. Os núcleos heurísticos, por exemplo, apresentam uma linguagem procedimental e descritiva, com a indicação de como se obter a resposta procurada e a descrição implícita dos passos seguidos.

Apenas três núcleos heurísticos não são atividades que exemplificam o conteúdo estudado. São eles: H.28.52, H.34.54 e H.42.60, para os quais, entretanto, todas as demais considerações se aplicam.

No texto analisado foram encontrados vinte e dois núcleos heurísticos, além dos núcleos teórico-heurísticos mencionados na seção anterior. Também encontramos um núcleo algorítmico-heurístico (AH.01.40), cujas considerações foram apresentadas no tópico 4.2.

4.3.3. Os núcleos comunicativos

Durante a análise, foi possível ainda destacar a existência de dez núcleos comunicativos, tipologia que visa comunicar a forma e a notação utilizada para se referir a um objeto matemático. Desses núcleos, seis (C.07.42, C.11.43, C.20.47, C.23.48 e C.31.53) não fazem parte do corpo principal do texto, constituindo-se em inserções com o fim de recordar algum conhecimento necessário ao leitor para que este compreenda o conteúdo apresentado. Em geral, eles apresentam uma linguagem relacional, pois ligam a notação utilizada ao conceito matemático abordado.

4.3.4. Os núcleos restritivos

Não foi encontrado nenhum núcleo que possa ser categorizado como restritivo.

4.3.5. Os núcleos algorítmicos

Foram localizados quatro núcleos algorítmicos e um algorítmico-heurístico (ver seção 4.2). Nos núcleos A.30.53, A.32.53 e A.33.53, o autor mostra como, a partir da lei de formação, pode-se obter o gráfico de uma função.

Nesses núcleos são dadas as expressões analíticas e, em seguida, monta-se uma tabela com valores atribuídos à variável independente x para encontrar seu valor correspondente *y*. Com os pares ordenados (*x*, *y*) encontrados na tabela monta-se o gráfico da função.

Observa-se que nesses exemplos Dante segue o mesmo modelo anterior: parte da expressão analítica, constrói a tabela e por fim o gráfico. Ele não orienta o leitor a obter a expressão analítica da função partindo diretamente da tabela.

No núcleo A.29.53, o autor apresenta um método a seguir a fim de realizar os passos mencionados anteriormente. De certo modo, poderíamos considerar que nesse núcleo encontra-se um aspecto heurístico, uma vez que a palavra "convenientemente" sugere que o aluno busque valores para a variável *x* e que de alguma maneira se facilite o cálculo para obter o valor do y. Assim, a linguagem é procedimental, de modo a fazer o leitor atingir determinado objetivo.

4.3.6. Sequenciamento e condicionamento conceitual

No livro analisado foi possível perceber também a existência de um sequenciamento que permite que o leitor compreenda o conteúdo abordado. Podemos visualizar essa afirmação quando observamos os núcleos H.12.45, H.13.45, H.14.45 e H.15.45: para que o leitor os compreenda é preciso que ele entenda o TC.05.41. Além desses, esse mesmo núcleo também favorece a compreensão dos núcleos T.39.42, T.43.61 e T.47.62.

Essa correlação entre os núcleos se repete em vários locais do texto. O núcleo T.39.60 e H.40.60 e H.41.60, por exemplo, possuem essa correlação. É possível ainda observar a existência desse sequenciamento entre os núcleos T.43.61 e H.44.61, H.45.61 e H.46.61 e entre os núcleos T.47.62 e H.48.62, H.49.62, H.50.62 e H.51.62.

Nota-se ainda a influência que a compreensão de um núcleo pode ter relação com os demais, a que damos o nome de condicionamento conceitual, uma vez que a forma como o núcleo é compreendido pelo leitor pode se tornar um fator (positivo ou negativo) determinante no entendimento de outros núcleos. O núcleo TC.05.41 pode influenciar significativamente o modo como o leitor compreende T.39.60, T.43.61 e T.47.62, por exemplo.

Por outro lado, observe que no núcleo TC.04.41 o autor aborda o conceito de função a partir da associação entre dois conjuntos não vazios. Nos demais (T.39.60, T.43.61 e T.47.62), Dante classifica as funções por meio da relação entre os elementos dos conjuntos, ou seja, em função injetiva, bijetiva e sobrejetiva, respectivamente. Esses aspetos guardam relação com o núcleo TC.04.41, pois o leitor não compreenderá essas relações caso tenha dificuldades na compreensão desse núcleo.

No núcleo TH.36.55, o autor menciona conceitos que até o momento não haviam sido tratados: ponto de máximo de uma função e simetria. Entretanto, espera-se que o leitor tenha tido anteriormente contato com núcleos relacionados a esses conceitos e que a relação entre os conhecimentos novos e dados possa influenciar o modo como se compreenderá o núcleo apresentado. Também temos um núcleo (C.31.53) que antecipa conceitos referentes ao gráfico de um polinômio de 1º grau, chamando atenção para o fato de que esse conteúdo será estudado mais adiante.

É importante observar ainda que os núcleos TC.04.41 e TC 05.41 se configuram, em termos de definições matemáticas, como os mais importantes na aprendizagem do conceito de função no texto analisado, visto explicam as principais características desse conceito e é a partir deles que o autor fundamenta matematicamente o conceito de função.

4.3.7. Linguagens e Signos

Tendo em vista os diferentes núcleos apresentados, percebemos que, por um mesmo tipo, o autor trabalha com linguagens variadas. Em H.06.42, H.08.42, H.09.43 e H.10.43, por exemplo, observamos a utilização de linguagem funcional, que visa à obtenção da expressão analítica relativa à situação estudada. Há também aspectos descritivos, posto que se descreve a relação de dependência entre as grandezas apresentadas.

Já em H.12.45, H.13.45, H.14.45 e H.15.45, notamos a existência de uma linguagem relacional, já que eles enfatizam a ligação entre os conjuntos por meio da relação entre seus elementos. Examinando os núcleos H.40.60, H.41.60, H.44.61, H.45.61 e H.46.61, apesar de a linguagem utilizada não se enquadrar em nenhum dos tipos por nós utilizados (ostensiva, relacional e funcional), percebemos a existência de aspectos procedimentais, uma vez que se sugerem métodos de obtenção das respostas esperadas. Essa mesma observação é pertinente em relação aos núcleos H.28.52 e H.42.60. Entretanto, convém salientar que esses últimos não são atividades como a maioria dos demais por nós caracterizados como heurísticos.

Por sua própria natureza, mostrar métodos de “como fazer”, os núcleos algorítmicos apresentam uma linguagem com características descritivo-procedimentais, que podem ser notadas principalmente nos núcleos AH.01.40 e A.29.53.

Em relação aos núcleos teóricos, a linguagem apresentada possui um aspecto relacional, uma vez que se define o conteúdo matemático atribuindo-se uma relação entre os objetos. O mesmo pode ser afirmado em relação aos núcleos teórico-comunicativos.

Todavia, quando analisamos os núcleos puramente comunicativos, não é possível atribuir a eles nenhuma das características presentes em qualquer dos tipos de linguagem por nós considerados. Outro ponto a destacar é que encontramos apenas um núcleo (T.24.49) com linguagem que pudesse ser classificada como ostensiva. Isso se deve ao fato de que o livro analisado é voltado para o Ensino Médio, subentendendo-se que o leitor já teve contato anterior com núcleos relativos ao conteúdo abordado e não seria necessário, portanto, a identificação, a indicação ou mesmo a especificação dos objetos matemáticos apresentados.

Em relação aos signos, em alguns núcleos, foi possível perceber que eles relembravam alguns conceitos que se espera que o leitor possua. Como exemplo temos o núcleo H.34.55, no qual se devem relembrar aspectos relacionados a intervalos numéricos, conceito tratado pelo autor no capítulo anterior ao analisado por este estudo.

Ademais, ao observarmos os núcleos H.12.45, H.13.45, H.14.45, H.21.47, H.40.60, T.39.60, T.43.61 e T.47.62, são percebidos aspectos que se relacionam com a correspondência entre elementos de conjuntos numéricos distintos. Porém, em nossa análise, não foi possível identificar nenhum signo que provocasse no leitor uma ação ou reação, ou seja, que funcionasse como um sinal.

4.3.8. Significância

Neste trabalho, também procuramos saber se a matemática apresentada no capítulo analisado é significativa. Para isso, algumas características deveriam ser consideradas, como verificar se a matemática apresentada estaria livre de erros, coerente, clara e fizesse sentido para o leitor, respeitando seu nível cognitivo.

Na análise do livro didático de Dante, não foi possível perceber a existência de erros ou imprecisões: o texto matemático apresentado é coerente e claro, uma vez que o autor não se contradiz no decorrer do capítulo analisado e que a forma como o conteúdo é abordado é adequada à estrutura cognitiva do leitor.

Além disso, convém mencionar que as situações-problema apresentadas no corpo do texto fazem sentido para o leitor. Dessa forma, ao observar essas características, percebe-se que a matemática presente no livro pode ser considerada significativa.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Em nosso trabalho, objetivamos apresentar outro método para a análise de livros didáticos, a análise textual, metodologia baseada no constructo teórico de Dormolen (1986). Toda a nossa análise foi baseada nos núcleos, a partir dos quais foi possível perceber as características mais importantes pertinentes ao texto matemático, possibilitando analisá-lo.

Os núcleos podem ser classificados em 5 tipos (teórico, heurístico, restritivo, algorítmico e comunicativo). A partir dessa classificação, observamos qual tipo de linguagem eles apresentavam (procedimental, relacional, funcional) e quais ações os signos poderiam despertar no aluno. Essas, por sua vez, podem influenciar a aprendizagem do conteúdo matemático, fazendo o estudante relembrar conceitos matemáticos a partir dos signos utilizados (símbolo) ou induzir uma ação/reação no sujeito que o percebe (sinal). Além disso, investigamos a sequência em que os núcleos estão dispostos no texto, assim como o efeito (positivo ou negativo) que a aprendizagem de determinado núcleo pode ter para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Destacamos, mais uma vez, que nossa análise esteve restrita ao capítulo do livro *Matemática – Contexto e aplicações* (Dante, 2013) no qual o conceito de função é tratado. Nesse universo, foram identificados 51 núcleos, dos quais 22 foram classificados como heurísticos, 10 comunicativos, 7 teóricos, 5 teórico-comunicativos, 4 algorítmicos, 2 teórico-heurísticos, 1 algorítmico-heurístico e nenhum restritivo, conforme apresentado na Tabela 1 no Capítulo IV.

Outra característica analisada é se a matemática abordada no livro didático é significativa para o aluno, ou seja, se ela é coerente, livre de erros e se faz sentido para o público a que se destina. Esses foram os principais aspectos observados no texto analisado em relação a esse quesito e notamos que todas essas características têm como ponto de partida a identificação e a classificação dos núcleos.

Com base nos dados estudados, percebemos que os núcleos heurísticos foram encontrados em maior número em relação aos algorítmicos, apesar de ambos possuírem como característica principal procedimentos ou métodos para a obtenção de respostas. Nos heurísticos, exige-se um momento de reflexão do aluno, de forma que a partir da observação de suas ações descubram-se as propriedades matemáticas pertinentes ao conteúdo estudado, fazendo o aluno descobrir o que se pretende que ele aprenda. Esse maior número de núcleos heurísticos pode significar uma tentativa do autor de levar o estudante à descoberta de propriedades matemáticas, evitando a simples apresentação de métodos para a obtenção da resposta desejada.

Em alguns desses núcleos, encontramos uma linguagem funcional. Neles, o intuito é fazer com que o aluno perceba a existência de uma lei de formação (expressão algébrica) para a situação-problema estudada. Em outros núcleos desse tipo, utiliza-se uma linguagem mais relacional, principalmente naqueles em que são exemplificadas funções injetivas, bijetivas e sobrejetivas.

Na Figura 4 mostramos a disposição dos núcleos no texto analisado. Nota-se que os teóricos estão distribuídos ao longo do texto analisado, o que evita o acúmulo da teoria em um único ponto. Por eles, são apresentados os conhecimentos matemáticos sintetizados e/ou abstratos sobre o conteúdo. Eles são enunciados que juntos formam a estrutura matemática ou parte dela e, ao observar os núcleos teóricos e os teórico-comunicativos, vimos que a linguagem relacional foi a mais utilizada.

Já a linguagem ostensiva foi encontrada em apenas um núcleo (T.24.49). Acreditamos que o motivo para seu pouco uso se deve ao fato de o conceito de função ser abordado, mesmo que de maneira superficial, no 9º ano do ensino fundamental. Dessa forma, algumas propriedades básicas não necessitam mais serem indicadas, identificadas ou especificadas pelo texto analisado.

O sequenciamento dos núcleos, por outro lado, também foi objeto de estudo deste trabalho. Mostramos na Figura 15 um exemplo desse sequenciamento. De modo geral, a sequência em que os núcleos aparecem no texto é considerada, por nós, satisfatória e, a partir da observação desse quesito, foi possível notar que Dante apresenta as propriedades matemáticas nos núcleos teóricos e as retoma nos núcleos heurísticos subsequentes, trabalhando as propriedades matemáticas de maneira implícita.

Essa forma recursiva de se referir às propriedades matemáticas a partir de diferentes tipos de núcleos é vista diversas vezes no texto analisado. Com isso, entendemos que o sequenciamento adotado por Dante auxilia na compreensão do conteúdo, uma vez que assumir outro sequenciamento poderia acarretar prejuízos para a aprendizagem do conteúdo matemático e com esse sequenciamento o autor constrói o conceito de função de maneira lógica e trabalha com as propriedades matemáticas de maneira heurística.

Vimos ainda que os núcleos TC.04.41 e TC.05.41 são fundamentais para a compreensão do conceito de função e sua não compreensão pode ocasionar dificuldades em outros conteúdos ainda a serem estudados. Isso porque esses núcleos alicerçam propriedades matemáticas importantes não apenas para o conceito de função, mas para o estudo dos diversos tipos de funções.

Além disso, não constatamos a presença de erros que pudessem acarretar algum tipo de bloqueio à aprendizagem. Sobre o assunto, o autor procura trabalhar com uma matemática que seja significativa para o aluno. Assim, acreditamos ter sido alcançado o objetivo proposto para este estudo, já que pretendíamos apresentar outro método para a análise de livros didáticos.

À guisa de uma conclusão, compreendemos que este trabalho pode contribuir para futuras pesquisas em análise de coleções didáticas, discutindo semelhanças e diferenças entre as obras e tendo como foco de pesquisa os núcleos. Igualmente, com o objetivo de analisar como essas obras didáticas abordam determinado conteúdo e a forma como essa abordagem é feita ou ainda a partir dos núcleos, pode-se estabelecer diferenças e semelhanças nas linguagens utilizadas pelos autores das coleções analisadas ou ainda se reconhecer o uso dos signos. Pode-se também analisar coleções didáticas de um mesmo autor voltadas a etapas de ensino diferentes (Ensino Fundamental e Médio, por exemplo), observando os aspectos aqui tratados e também o modo como os conceitos matemáticos são apresentados para os diferentes anos de escolarização.

Por fim, a utilização da análise textual proposta por Dormolen (1986) em conjunto com outras teorias utilizadas para a análise de livros didáticos pode ser uma possibilidade para pesquisas futuras, visto que percebemos que a análise textual nos permite investigar aspectos relevantes dos textos matemáticos. A partir da identificação dos núcleos, por exemplo, podemos refletir sobre a(s) linguagem(ns) utilizada(s) pelos autores para tratar o conteúdo matemático, as funções que os signos (símbolo/sinal) utilizados desempenham para a compreensão do conteúdo e o modo como esses núcleos estão dispostos, o que pode nos revelar dificuldades existentes para a aprendizagem dados o condicionamento e o sequenciamento.

Dessa forma, a análise textual pode ser empregada para a análise de textos matemáticos investigando a maneira como os conceitos matemáticos são abordados nos livros didáticos possibilitando uma visão panorâmica sobre o tema.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. S. M. **A articulação entre o ensino de polígonos e de poliedros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental**. 114 p. Dissertação de Mestrado. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, 2015.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Trad. Luis Antero Neto, Augusto Pinheiro. 2ª reimp. da 1ª Ed. São Paulo: Edições 70, 2011.

BICUDO, M. A. V. Pesquisar em Educação Matemática. **Pro-Posicões**, Rio Claro, v. 04, n. 01, março, 1993, p.18-23.

BORBA, M. C. A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**.** In: Reunião Anual da Anped, 27. 2004, Poços de Caldas. **Anais eletrônicos**... Poços de Caldas: Anped, 2004. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf. Acesso em: 23 jun 2015.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v. 3. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Brasília: MEC, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Volume 2. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015: Matemática: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEMTEC, 2014.

CARVALHO, J. B. P. F; LIMA, P. F. Escolha e uso do livro didático. In: CARVALHO, J. B. P. F. de (Org.). **Matemática**: Ensino Fundamental. 17. ed. Brasília: Ministério da Educação, 2010. Cap. 1. p. 15-30. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=7842-2011-matematica-capa-pdf&category_slug=abril-2011-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 14 set 2016.

CHEVALLARD, Y. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/>. Acesso em: 20 jan 2017.

CHOPPIN, A. História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. Trad. Maria Adriana C. Cappello. **Educação & pesquisa**, São Paulo, v. 30, n. 3, set./dez. 2004, p. 549-566.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: Método qualitativos, quantitativos e misto. Trad. Luciana de Oliveira da Rocha. 1ª reimp. da 2ª Ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DANTE, L. R. **Matemática**: Contexto e Aplicações. 2ª Ed. São Paulo: Ática, 2013.

DORMOLEN, J. Textual Analysis. In: CHRISTIANSEN, B; HOWSON, A. G; OTTE, M. (Eds). **Perspectives on Mathematics Education**. Dordrecth, Holanda: Reidel Publishing Company, 1986, p. 141-171.

FREUDENTAL, H. **Weeding and sowing.** New York: Kluwer**,** 1978, p.233-242.

GOLDEMBERG, M. **A arte de pesquisar**: como fazer uma pesquisa em Ciências Sociais. 8ªed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GONÇALVES, K. R. **A teoria antropológica do didático como ferramenta para o estudo de transposições didáticas:** os casos das operações de adição e subtração dos números inteiros no 7º ano do ensino fundamental. 129 p. Dissertação de Mestrado. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, 2016.

HARDY, M. *et al*. **History of the concept function.** Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_the_function_concept>. Acesso em: 26 jun 2016.

HARIKI, S. **Analysys of mathematical discurse**: multiple perspectives. Southanpton, UK: University of Douthanpton, 1992.

LAJOLO, M. Livro didático: um (quase) manual de usuário. **Em Aberto**, Brasília, ano 16, n. 69, p. 02 - 09, jan./mar. 1996.

LOPES, C. E. **Os desafios e as perspectivas para a Educação Matemática no Ensino Médio**. Trabalho encomendado pelo GT19- Educação Matemática para apresentação na 34ª Reunião Anual da ANPED. Natal, 2011.

MONNA, A. F. The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with regard to the Discussions between Baire, Borel and Lebesgue. **Arch. For Hist. of Exact Sciences**, v. 9, p. 57-84, 1972.

MORAES, R. **Análise de conteúdo,** 1999. Disponível em: < http://cliente.argo.com.br/~mgos/analise_de_conteudo_moraes.html/>. Acesso em: 01 set 2009.

OTTE, M. What is a text? In: CHRISTIANSEN, B. HOWSON, A. G; OTTE, M. (Eds). **Perspectives on Mathematics Education.** Dordrecth, Holanda: Reidel Publishing Company, 1986, p. 172-203.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimp. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Revista Educação e Matemática, APM, Portugal, n.15, p. 3-9, 1990.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **The Mathematics Educator**. Vol. 03. Nº 02, 1992.

PONTE, J. P. Investigar, ensinar e aprender. **Actas do profmat**. Lisboa: APM, 2003, p. 25-39. (CD-ROM).

RAMALHO, L. V. **Trigonometria em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental**. 88 p. Dissertação de Mestrado. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, 2016.

RUTHING, D. **Some Definitions of the concept of function from Joh. Bernoulli to N. Boubarki**. The Mathematical Intelligencer, 6 (4), 1984, p.72-77.

SIU, M. K. Concept of function − Its history and teaching. In: SWETZ, F. *et al* (Eds.) **Learn From the Masters**: Proceedings of Workshop on History of Mathematics at Kristiansand in August 1995, Washington D.C.: Mathematical Association of America, p. 105-121.

SOUZA, N. F. **Contextualização no ensino de álgebra:** análise de livros didáticos do 7º ano. 107 p. Dissertação de Mestrado. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, 2015 (2014).

YOUSCHKEVlTCH, A. R. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. **Archive for history of exact sciences**, 16 (1), 1976, p. 37-85.