



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

ADRIANA WAGNER

**Novos Resultados na Teoria de Partições obtidos por
meio da Representação Matricial**

Campinas

2016

Adriana Wagner

Novos Resultados na Teoria de Partições obtidos por meio da Representação Matricial

Tese apresentada ao Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica da Univer-
sidade Estadual de Campinas como parte dos
requisitos exigidos para a obtenção do título de
Doutora em Matemática Aplicada.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos

Este exemplar corresponde à versão final da
Tese defendida pela aluna Adriana Wagner e
orientada pelo Prof. Dr. José Plínio de Oli-
veira Santos.

Campinas
2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): Não se aplica.

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

W125n Wagner, Adriana, 1983-
Novos resultados na teoria de partições obtidos por meio da representação matricial / Adriana Wagner. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: José Plínio de Oliveira Santos.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Partições (Matemática). 2. Identidade combinatória. 3. Teoria dos números. I. Santos, José Plínio de Oliveira, 1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: New results in partition theory obtained by matrix representation

Palavras-chave em inglês:

Partitions (Mathematics)

Combinatorial identities

Number theory

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutora em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

José Plínio de Oliveira Santos [Orientador]

Robson da Silva

Sueli Irene Rodrigues Costa

Eduardo Henrique de Mattos Brietzke

Vilmar Trevisan

Data de defesa: 12-12-2016

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 12 de dezembro de 2016 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). JOSE PLINIO DE OLIVEIRA SANTOS

Prof(a). Dr(a). ROBSON DA SILVA

Prof(a). Dr(a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Prof(a). Dr(a). EDUARDO HENRIQUE DE MATTOS BRIETZKE

Prof(a). Dr(a). VILMAR TREVISAN

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Aos meus pais, Dejaime e Elza, ao meu irmão Junior e ao meu esposo José Luiz com imenso carinho.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus por tudo. Aos meus pais e irmão pela confiança. Ao meu esposo José Luiz pelo amor, apoio, dedicação e por sempre se dispor a me acompanhar em todas as etapas da minha carreira profissional e acadêmica.

Ao meu orientador Professor José Plínio de Oliveira Santos, pela disponibilidade, atenção dispensada, paciência, dedicação e profissionalismo.

Aos meus amigos, pelos momentos divididos juntos, especialmente a Irene, Alessandro e Marília que contribuíram na realização deste trabalho e pelos quais tenho um imenso carinho. Também agradeço aos amigos do Laboratório: Akemi, Christiane, Cintya, Eleonesio, Giselle, Jerry, Juliana e Roberto pelos vários momentos de risadas, dificuldades, comemorações e comilança.

À Universidade Federal de Mato Grosso do Sul pelo apoio concedido a mim para a realização do doutorado. Aos professores tais como Yuri Dimitrov Bozhkov e Lino Anderson da Silva Grama e funcionários do IMECC-Unicamp.

Aos professores Robson da Silva, Eduardo Henrique de Mattos Brietzke, Vilmar Trevisan e Sueli Irene Rodrigues Costa por aceitarem o convite para compor a banca examinadora da apresentação oral deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, fazendo uso da representação matricial para partições com diferentes restrições, construímos tabelas que nos fornecem várias conjecturas. As demonstrações destas conjecturas correspondem a grande parte desta tese. Apresentamos, também, a solução de duas conjecturas dadas por Andrews.

Palavras-chave: partições de inteiros; representação matricial para partições; funções mock theta; índice de paridade para partições.

Abstract

In this work, using the matrix representation for partitions with different restrictions, we have built tables that provided us with several conjectures. The main results of this thesis are the proofs for those conjectures. We also present the solution to two conjectures given by Andrews.

Keywords: integer partitions; matrix representation for partitions; mock theta functions; parity index for partitions.

Sumário

Introdução	10
1 Preliminares	11
1.1 Partição	11
1.2 Função Geradora	13
1.3 Representação Matricial	14
1.4 Identidades de Rogers-Ramanujan	16
2 Partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e $\pm 2 \pmod{5}$	17
2.1 Partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$	17
2.1.1 Representação matricial para partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$	17
2.1.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 2.1	19
2.1.3 Novos resultados	21
2.2 Partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$	37
2.2.1 Representação matricial para partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$	37
2.2.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 2.5	39
2.2.3 Novos Resultados	41
2.3 Generalizações	54
3 Funções mock theta $\phi(q)$ e $\psi(q)$	57
3.1 Função mock theta ϕ	57
3.1.1 Representação matricial	57
3.1.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 3.1	58
3.1.3 Novos resultados	60
3.2 Função mock theta ψ	68
3.2.1 Representação matricial	68
3.2.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 3.5	69
3.2.3 Novos resultados	72
3.3 Relação entre as funções ϕ^* e ψ^*	76
4 Índice de Paridade	78
4.1 Teorema de Fine	78
4.2 Problema 5 dado em [3]	78
4.2.1 Índice de Paridade	79
4.2.2 Primeira solução do Problema 5	79
4.2.3 Índice de paridade inferior e representação matricial	82
4.3 Problema 6 em [3]	87
5 Considerações Finais	91
REFERÊNCIAS	92

Introdução

Os fundamentos da Teoria de Partições tiveram início com Euler no século XVIII, quando provou alguns refinados e significativos teoremas sobre partições. Outros matemáticos como Hardy, Jacobi, Legendre, Ramanujan, Schur e Sylvester colaboraram com o desenvolvimento da teoria. Dentre estes destacamos Srinivasa Ramanujan, matemático nascido num vilarejo da Índia. Ele passava o dia todo fazendo contas e fórmulas que anotava em seus cadernos. Em uma carta enviada a Hardy, apresentou a descrição sobre sua demonstração de 120 teoremas que muitos almejavam resolver. Com a presença de Ramanujan em Londres, ele e Hardy conseguiram vários resultados de grande importância na Teoria de Números.

Três meses antes de sua morte precoce, que ocorreu pouco depois de sua volta para a Índia, Ramanujan enviou outra carta para Hardy que continha as chamadas funções Mock Theta. Nesta carta, Ramanujan não apresentou uma definição formal para tais funções, mas afirmou algumas identidades e propriedades assintóticas. Andrews [2], Gordon [13], Selberg [17] e Watson [19], entre outros, provaram as afirmações feitas por Ramanujan, dando fórmulas de transformações que as unem e interpretações combinatórias de seus coeficientes.

No ano de 2011, em [15], Santos, Mondek e Ribeiro apresentam uma nova maneira de caracterizar partições, a partir de matrizes de duas linhas, exibindo duas diferentes representações matriciais para partições irrestritas, uma delas fornecendo uma descrição para a partição conjugada. No ano de 2014, em [7], Brietzke, Santos e Silva, usando matrizes de duas linhas, apresentam interpretações combinatórias para as funções mock theta estabelecidas por Ramanujan.

Neste trabalho, no primeiro capítulo, apresentamos os conceitos de partição, função geradora, representação matricial e enunciamos as identidades de Rogers-Ramanujan que serão utilizados ao longo do texto.

No segundo capítulo, dispendo das partições com partes congruentes a ± 1 e a $\pm 2 \pmod{5}$ construímos representação matricial para estes dois tipos. Os resultados das somas, definidas utilizando as entradas da segunda linha destas matrizes, organizamos em tabelas e pela observação destas encontramos relações interessantes.

No terceiro capítulo, baseado na representação matricial das versões sem sinais das funções mock theta ϕ e ψ , [7], construímos as tabelas para cada uma destas funções, através de somas definidas a partir da segunda linha das matrizes, obtendo alguns resultados.

No quarto capítulo, apresentamos soluções para os Problemas 5 e 6 conjecturados por Andrews em [3]. Ressaltamos que para a solução do segundo problema utilizamos o conceito de representação matricial para partições. Parte dos resultados apresentados neste capítulo estão contidos no artigo Parity indices and two-line matrix representation for partitions, [9], publicado na *Trends in Applied and Computational Mathematics*.

1 Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos de partição, função geradora e representação matricial. Além disso, enunciamos as identidades de Rogers-Ramanujan muito conhecidas na Teoria de Partições. Todos os assuntos aqui abordados, encontram-se em [1], [16] e [15], e serão necessários para o entendimento do nosso trabalho.

1.1 Partição

Nesta seção apresentamos o conceito de partição, sua representação gráfica e alguns resultados da Teoria de Partições.

Definição 1.1. *Uma partição λ de um inteiro positivo n é uma sequência finita não crescente de inteiros positivos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, tal que $\sum_{l=1}^r \lambda_l = n$. Cada λ_l é chamado de parte da partição.*

Exemplo 1.1. *Para $n = 5$ as suas respectivas partições são: (5) , $(4, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 1, 1)$ e $(1, 1, 1, 1, 1)$.*

Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n . Assim, do Exemplo 1.1 temos que $p(5) = 7$. Dada uma partição λ do inteiro positivo n podemos representá-la por um conjunto de pontos (ou quadrados), colocados em linhas, tal que cada linha de pontos (ou quadrados) representa uma parte da partição, em ordem não crescente. Esta representação recebe o nome de *Gráfico de Ferrers* (ou *Diagrama de Young*).

Exemplo 1.2. *Consideramos a partição $\lambda = (5, 4, 4, 3, 2)$ de 18 então seu gráfico de Ferrers é representado abaixo*

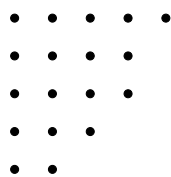


Figura 1 – Gráfico de Ferrers de $(5, 4, 4, 3, 2)$.

Dada uma partição denominamos de *Quadrado de Durfee* o maior quadrado que podemos encaixar no seu gráfico de Ferrers. Do exemplo acima, o quadrado de Durfee tem lado de tamanho 3, como na figura abaixo

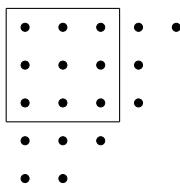


Figura 2 – Quadrado de Durfee de $(5, 4, 4, 3, 2)$.

Se na representação gráfica de uma partição λ de n trocamos as linhas pelas colunas, obtemos uma partição chamada de *conjugada* da partição considerada, a qual denotamos por λ' . Do Exemplo 1.2 temos que $\lambda' = (5, 5, 4, 3, 1)$. Dizemos que uma partição λ é *autoconjugada* se $\lambda = \lambda'$.

Nas proposições abaixo ilustramos resultados envolvendo o conceito de conjugada de uma partição.

Proposição 1.1 ([16]). *O número, $p_k(n)$, de partições de n tendo k como a maior parte é igual ao número, $q_k(n)$, de partições de n com exatamente k partes, isto é, $p_k(n) = q_k(n)$.*

Demonstração. Usando o conceito de conjugada, temos que toda partição que possui k como maior parte é associada a uma partição que possui exatamente k partes. Da mesma forma, toda partição que possui k partes é associada a uma partição que possui k como maior parte. Portanto, $p_k(n) = q_k(n)$. □

Proposição 1.2 ([16]). *O número de partições autoconjugadas de n é igual ao número de partições de n em partes ímpares distintas.*

Demonstração. Provamos o resultado utilizando uma transformação. Para ilustrarmos tal transformação consideramos a partição autoconjugada $(6, 5, 5, 4, 3, 1)$ de 24. Abaixo temos seu gráfico de Ferrers.

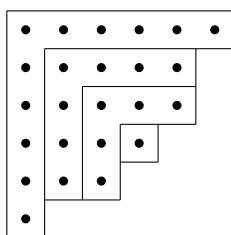


Figura 3 – Gráfico de Ferrers de $(6, 5, 5, 4, 3, 1)$.

Notemos que o número de pontos dentro de cada uma das áreas limitadas é ímpar e estes números são necessariamente distintos. Neste caso, temos $(11, 7, 5, 1)$. Reciprocamente, dada a partição $(11, 7, 5, 1)$ em partes ímpares distintas, podemos colocar cada parte numa disposição semelhante a da Figura 3, obtendo o gráfico da partição autoconjugada $(6, 5, 5, 4, 3, 1)$. □

1.2 Função Geradora

Nesta seção exibimos uma das principais ferramentas para a solução de problemas de contagem, função geradora. Esta ferramenta teve origem nos trabalhos de A. De Moivre (1667 – 1754), sendo aplicada por L. Euler (1707 – 1783) em problemas de Teoria Aditiva de Números, especialmente na Teoria de Partições.

Definição 1.2. Uma série de potências é uma série infinita da forma $\sum_{n \geq 0} a_n q^n$, com a_i números reais, para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, e q variável.

Definição 1.3. Se a_i , para $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, é o número de soluções de um problema combinatório, a função geradora para tal problema é a série de potências $\sum_{n \geq 0} a_n q^n$.

No exemplo abaixo apresentamos algumas funções geradoras e os tipos de partições geradas.

Exemplo 1.3. Na tabela abaixo temos algumas funções geradoras.

<i>Funções Geradoras</i>	<i>Partições de n em partes</i>
$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^k)}$	<i>irrestritas</i>
$\sum_{n \geq 0} p_d(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k)$	<i>distintas</i>
$\sum_{n \geq 0} p_o(n)q^n = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2k+1})}$	<i>ímpares</i>
$\sum_{n \geq 0} p_e(n)q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2k})}$	<i>pares</i>

As seguintes notações serão usadas ao longo do texto.

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ (1 - a) \cdot (1 - aq) \cdots (1 - aq^{n-1}), & n \geq 1 \end{cases}$$

$$(a; q)_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n = \prod_{n \geq 0} (1 - aq^n).$$

As funções geradoras apresentadas no Exemplo 1.3 podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p(n)q^n &= \frac{1}{(q; q)_{\infty}} \\ \sum_{n \geq 0} p_d(n)q^n &= (-q; q)_{\infty} \\ \sum_{n \geq 0} p_o(n)q^n &= \frac{1}{(q; q^2)_{\infty}} \\ \sum_{n \geq 0} p_e(n)q^n &= \frac{1}{(q^2; q^2)_{\infty}} \end{aligned}$$

A seguir apresentamos um resultado em cuja prova usamos o conceito de função geradora.

Proposição 1.3 ([16]). *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de partições de n em partes ímpares.*

Demonstração. Pelo Exemplo 1.3 temos que a função geradora para partições em partes distintas é dada por

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k) \quad (1.1)$$

e que a função geradora para partições em partes ímpares é

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2k+1})}. \quad (1.2)$$

Vamos provar que essas duas expressões são iguais. De fato,

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + q^k)(1 - q^k)}{(1 - q^k)} \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - q^{2k})}{(1 - q^k)} \\ &= \frac{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \cdots}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3)(1 - q^4)(1 - q^5)(1 - q^6) \cdots} \\ &= \frac{1}{(1 - q)(1 - q^3)(1 - q^5)(1 - q^7) \cdots} \\ &= \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^{2k+1})}. \end{aligned}$$

□

1.3 Representação Matricial

Nesta seção introduzimos uma nova maneira de representar as partições, na forma de matrizes de duas linhas, que foi introduzida em [15]. Os autores apresentam duas interpretações para partições irrestritas como matrizes de duas linhas, enunciadas nos dois próximos teoremas.

Teorema 1.1 (Teorema 4.1, [15]). *O número de partições irrestritas de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

com $c_s = 0$, $c_t = c_{t+1} + d_{t+1}$, e a soma de todas as entradas igual a n .

Teorema 1.2 (Teorema 4.3, [15]). *O número de partições irrestritas de n é igual ao número de matrizes de duas linhas da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

sendo $d_t \neq 0$, $c_t \geq 1 + c_{t+1} + d_{t+1}$, e a soma de todas as entradas igual a n .

As provas são apresentadas a partir de outros resultados. Em [6] encontramos provas bijetivas destes teoremas. Para o primeiro teorema a bijeção é construída de tal maneira que a soma das entradas de cada coluna da matriz é uma parte da partição. Abaixo ilustramos tal resultado através de um exemplo.

Exemplo 1.4. Consideramos a partição $(7, 6, 6, 4, 3, 3, 2, 1)$ de 32 sua matriz associada é

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Notamos que o elemento d_t , da segunda linha da matriz, nos fornece a multiplicidade da parte t , com $1 \leq t \leq 8$, na conjugada da partição associada, ou seja, $(8, 7, 6, 4, 3, 3, 1)$ é a conjugada da partição $(7, 6, 6, 4, 3, 3, 2, 1)$.

Para o segundo teorema, no exemplo abaixo, apresentamos a partição e sua matriz associada. Notamos que a matriz é apresentada como soma de outras matrizes onde a primeira representa a quantidade de pontos no quadrado de Durfee e as outras representam as quantidades das partes 1, 2, 3 e 4 abaixo do quadrado de Durfee na partição e na sua conjugada.

Exemplo 1.5. Abaixo temos a partição $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 1)$ de 27 e sua matriz relacionada pelo Teorema 1.2.

$$\begin{aligned} (6, 5, 5, 4, 3, 3, 1) &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 11 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

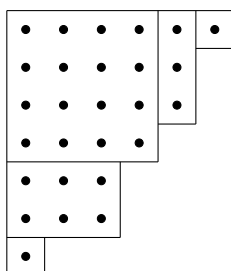


Figura 4 – Gráfico de Ferrers de $(6, 5, 5, 4, 3, 3, 1)$.

Uma representação similar também foi usada para descrever os coeficientes das funções Mock Theta ou de suas versões sem sinal. Em [7], os autores apresentam caracterizações destas matrizes, auxiliando na análise dos coeficientes de cada uma destas funções. No teorema abaixo ilustramos uma destas representações.

Definição 1.4. A função mock theta de ordem 5, $\rho(q)$ é definida por

$$\rho(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q)_n q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(q; q^2)_{n+1}}.$$

Teorema 1.3 ([7]). O coeficiente de q^n na expansão da versão sem sinal de $\rho(q)$ é igual ao número de elementos do conjunto de matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

com entradas inteiras não-negativas somando n e satisfazendo

$$\begin{aligned} c_s &= 0; \\ c_t &= i_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \text{ com } i_t \in \{1, 2\} \text{ e } 1 \leq t \leq s-1. \end{aligned}$$

1.4 Identidades de Rogers-Ramanujan

As mais conhecidas identidades em Teoria de Partição são as identidades de Rogers-Ramanujan enunciadas abaixo.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}} \quad (1.7)$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty}}. \quad (1.8)$$

A primeira nos diz que o número de partições de n em partes 2-distintas é igual ao número de partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. E a segunda que o número de partições de n em partes 2-distintas maiores do que ou iguais a 2 é igual ao número de partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. Tais fórmulas foram descobertas, inicialmente, por Rogers em 1894, anos depois Ramanujan as conjectura (de maneira independente).

2 Partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e $\pm 2 \pmod{5}$

Em [15], os autores estabelecem uma nova maneira de representar alguns tipos de partições, por meio de matrizes de duas linhas. Neste capítulo, tendo como base as partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e a $\pm 2 \pmod{5}$ construímos uma representação matricial para cada um destes tipos de partições. A partir destas matrizes conseguimos definir somas utilizando as entradas da segunda linha. Tais resultados organizamos em tabelas e pela observação encontramos novos resultados. Em todos as seções deste trabalho consideramos $n \in \mathbb{N}$.

2.1 Partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$

Considerando a primeira identidade de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q; q^5)_{\infty} (q^4; q^5)_{\infty}} = 1 + q + q^2 + q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + \dots$$

que nos diz que o número de partições de n em partes 2-distintas é igual ao número de partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, construímos uma representação matricial para as partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Salientamos que em [15], os autores apresentam uma representação matricial para as partições de n em partes 2-distintas.

2.1.1 Representação matricial para partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$

Nesta subseção construímos a representação por meio de matrizes de duas linhas, para as partições cujas partes são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. No teorema abaixo exibimos tal representação.

Teorema 2.1. *O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{s-1} & c_s \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

em que suas entradas inteiras não negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0, \text{ se } s \geq 2 \text{ e } c_s = 0 \text{ se } s = 1 \quad (2.2)$$

$$c_{2i-1} = 5 \cdot d_{2i+1} + 5 \cdot d_{2i+3} + \dots; \quad (2.3)$$

$$c_{2i} = 5 \cdot \frac{d_{2i+2}}{4} + 5 \cdot \frac{d_{2i+4}}{4} + \dots; \quad (2.4)$$

$$4 \mid d_t, \text{ se } t \text{ é par.}$$

Demonstração. Primeiramente, consideramos R_t o t -ésimo número natural congruente a $\pm 1 \pmod{5}$, isto é, para todo $t \geq 1$ temos que $t = 2i - 1$ ou $t = 2i$, com $i \geq 1$, ou seja,

$$R_t = R_{2i-1} = 5 \cdot (i - 1) + 1 \quad \text{ou} \quad R_t = R_{2i} = 5 \cdot (i - 1) + 4.$$

Dada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, suponhamos que R_s seja sua maior parte, com s um número par (o caso em que s é ímpar é análogo), então,

$$\begin{aligned} n &= j_1 \cdot R_1 + j_2 \cdot R_2 + \cdots + j_s \cdot R_s, \text{ com } j_t \geq 0, \text{ para } 1 \leq t \leq s \\ &= j_1(5 \cdot 0 + 1) + j_2(5 \cdot 0 + 4) + j_3(5 \cdot 1 + 1) + j_4(5 \cdot 1 + 4) + \cdots + j_s \left(5 \cdot \left(\frac{s-2}{2} \right) + 4 \right) \\ &= 5(0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + 2 \cdot j_5 + \cdots + \left(\frac{s-2}{2} \right) \cdot j_{s-1}) + (j_1 + j_3 + j_5 + \cdots + j_{s-1}) \\ &\quad + 5(0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + 2 \cdot j_6 + \cdots + \left(\frac{s-2}{2} \right) \cdot j_s) + 4(j_2 + j_4 + j_6 + \cdots + j_s). \end{aligned}$$

Facilmente, vemos que podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (2.1), satisfazendo as condições (2.2) a (2.4), com $d_t = j_t$ se t é ímpar e $d_t = 4j_t$ se t é par.

Reciprocamente, a partir da entrada d_t , com $1 \leq t \leq s$, de qualquer matriz do tipo (2.1) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = d_t$ se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{4}$ se t é par. Então, $n = j_1 \cdot R_1 + \cdots + j_s \cdot R_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. \square

Exemplo 2.1. Consideramos a partição $(14, 14, 11, 11, 11, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1)$ de 83. Vamos construir a matriz associada. Notamos que $R_6 = 14$ é a maior parte congruente a $\pm 1 \pmod{5}$, logo a matriz associada terá 6 colunas. Então,

$$83 = \underbrace{4}_{j_1} \cdot \underbrace{1}_{R_1} + \underbrace{0}_{j_2} \cdot \underbrace{4}_{R_2} + \underbrace{3}_{j_3} \cdot \underbrace{6}_{R_3} + \underbrace{0}_{j_4} \cdot \underbrace{9}_{R_4} + \underbrace{3}_{j_5} \cdot \underbrace{11}_{R_5} + \underbrace{2}_{j_6} \cdot \underbrace{14}_{R_6}.$$

Assim,

- $d_1 = j_1 = 4$
- $d_2 = 4 \cdot j_2 = 0$
- $d_3 = j_3 = 3$
- $d_4 = 4 \cdot j_4 = 0$
- $d_5 = j_5 = 3$
- $d_6 = 4 \cdot j_6 = 8$
- $c_1 = 5 \cdot d_3 + 5 \cdot d_5 = 15 + 15 = 30$
- $c_2 = 5 \cdot \frac{d_4}{4} + 5 \cdot \frac{d_6}{4} = 0 + 10 = 10$
- $c_3 = 5 \cdot d_5 = 15$
- $c_4 = 5 \cdot \frac{d_6}{4} = 10$
- $c_5 = 0$
- $c_6 = 0$.

Portanto, a matriz é dada por

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 15 & 10 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Agora, dada a matriz (2.5) para obtermos a partição associada olhamos para a segunda linha da matriz, ou seja, para cada d_t , com $1 \leq t \leq 6$. Assim, a maior parte congruente a

$\pm 1 \pmod{5}$ da partição desejada é $R_6 = 14$. Então,

$$\left(\begin{array}{cccccc} 30 & 10 & 15 & 10 & 0 & 0 \\ \underbrace{4}_{j_1} & \underbrace{0}_{4 \cdot j_2} & \underbrace{3}_{j_3} & \underbrace{0}_{4 \cdot j_4} & \underbrace{3}_{j_5} & \underbrace{8}_{4 \cdot j_6} \end{array} \right).$$

Logo, obtemos

$$j_1 \cdot R_1 + j_2 \cdot R_2 + j_3 \cdot R_3 + j_4 \cdot R_4 + j_5 \cdot R_5 + j_6 \cdot R_6 = 4 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + 0 \cdot 9 + 3 \cdot 11 + 2 \cdot 14.$$

Portanto, a partição associada é $(14, 14, 11, 11, 11, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1)$.

Exemplo 2.2. Na tabela abaixo, para $n = 10$ apresentamos as partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e suas respectivas matrizes associadas pelo Teorema 2.1.

Partições de 10 com partes $\equiv \pm 1 \pmod{5}$	Matrizes
$(9, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
$(6, 4)$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
$(6, 1, 1, 1, 1)$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$(4, 4, 1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$
$(4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$
$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

2.1.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 2.1

De acordo com a representação matricial da subseção anterior, para um n fixo, classificamos suas partições em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ conforme a soma de cada entrada d_t , para t ímpar e $\frac{d_t}{4}$ para t par, da segunda linha da matriz associada a cada partição. Por meio da ocorrência de cada número nestas somas descritas, organizamos os dados na tabela abaixo. A entrada na linha n e coluna $n - k$ é o número de vezes que k aparece como resultado de tais somas.

Exemplo 2.3. Do Exemplo 2.2, temos que

Partições de 10 com partes $\equiv \pm 1 \pmod{5}$	Matrizes	$\sum(d_{2i+1} + \frac{d_{2i}}{4})$
(9, 1)	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	2
(6, 4)	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$	2
(6, 1, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	5
(4, 4, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$	4
(4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$	7
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$	10

Para uma melhor compreensão dos dados da Tabela 1 temos a seguinte definição.

Definição 2.1. Para todo $k \geq 1$, consideramos $p_{\pm 1(5)}(n, k)$ o número de partições de n em k partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$.

Exemplo 2.4. Da Definição 2.1, olhando a linha $n = 10$ da Tabela 1, da direita para a esquerda,

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1	0	0	1	0	1	1	0	2	0

temos que $p_{\pm 1(5)}(10, 1) = 0$, $p_{\pm 1(5)}(10, 2) = 2$, $p_{\pm 1(5)}(10, 3) = 0$, $p_{\pm 1(5)}(10, 4) = 1$, $p_{\pm 1(5)}(10, 5) = 1$, $p_{\pm 1(5)}(10, 6) = 0$, $p_{\pm 1(5)}(10, 7) = 1$, $p_{\pm 1(5)}(10, 8) = 0$, $p_{\pm 1(5)}(10, 9) = 0$ e $p_{\pm 1(5)}(10, 10) = 1$.

2.1.3 Novos resultados

Nesta subseção apresentamos resultados obtidos a partir da observação da Tabela 1. Dentre estes destacamos os que expressam relações com os números triangulares. Primeiramente, notamos que a partir de certos valores de n os dados nas colunas se tornam constantes. Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1. Para todo $n \geq 2$ e $i \geq 0$ temos que

$$(a) \quad p_{\pm 1(5)}(4n - 2, n - 1) = p_{\pm 1(5)}(4n - 2 + i, n - 1 + i)$$

$$(b) \quad p_{\pm 1(5)}(4n, n) = p_{\pm 1(5)}(4n + i, n + i)$$

$$(c) \quad p_{\pm 1(5)}(4n, n - 1) = p_{\pm 1(5)}(4n + i, n - 1 + i)$$

Demonstração. Provamos os itens (a) e (c), sendo a prova do item (b) análoga a do item (a).

- (a) Fixado i , para particionarmos $4n - 2 + i$ em $n - 1 + i$ partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, devemos ter pelos menos i partes de tamanho 1. De fato, suponhamos que existam $i - 1$ partes de tamanho 1. Então,

$$1 \cdot (i - 1) + 4 \cdot (n - 1 + i - (i - 1)) = 4n - 1 + i,$$

o qual é maior que $4n - 2 + i$. Assim, eliminando i partes de tamanho 1 de uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n - 2 + i, n - 1 + i)$, obtemos uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n - 2, n - 1)$.

Reciprocamente, adicionando i partes de tamanho 1 em um partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n - 2, n - 1)$, obtemos uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n - 2 + i, n - 1 + i)$.

- (c) Primeiramente, vamos garantir que existam pelo menos i partes de tamanho 1 em uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n + i, n - 1 + i)$. Suponhamos que existam $i - 1$ partes iguais a 1. Então, as n partes restantes devem ser maiores do que ou iguais a 4 e somarem $4n + 1$. Notamos que nesta partição não existirá uma parte de tamanho 9, pois caso contrário, $9 + 4 \cdot (n - 1) = 4n + 5 > 4n + 1$. Assim, existem partes de tamanho 4 e 6. Logo, precisamos resolver a equação $4r + 6s = 4n + 1$ sobre a condição $r + s = n$, para $r, s \in \mathbb{N}$. Claramente, tal equação não possui solução. Assim, dada uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n + i, n - 1 + i)$ retirando i partes de tamanho 1 obtemos uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n, n - 1)$. Reciprocamente, acrescentando i partes de tamanho 1 a qualquer partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n, n - 1)$ obtemos uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(4n + i, n - 1 + i)$.

□

Exemplo 2.5. Para ilustrarmos a bijeção do item (a) da Proposição 2.1 consideramos $n = 7$ e $i = 3$. Então,

$P_{\pm 1(5)}(26, 6)$	$P_{\pm 1(5)}(29, 9)$
(21, 1, 1, 1, 1, 1)	(21, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
(16, 6, 1, 1, 1, 1)	(16, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
(11, 11, 1, 1, 1, 1)	(11, 11, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
(11, 6, 6, 1, 1, 1)	(11, 6, 6, 1, 1, 1, 1, 1, 1)
(9, 4, 4, 4, 4, 1)	(9, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1)
(6, 6, 6, 6, 1, 1)	(6, 6, 6, 6, 1, 1, 1, 1, 1)
(6, 4, 4, 4, 4, 4)	(6, 4, 4, 4, 4, 4, 1, 1, 1)

Observação 2.1. Ao observarmos a primeira diagonal da Tabela 1, que contabiliza o número de partições com exatamente uma parte congruente a $\pm 1 \pmod{5}$, claramente $p_{\pm 1(5)}(n, 1) = 1$ se, e somente se, $n \equiv \pm 1 \pmod{5}$.

Os seguintes resultados obtemos observando os dados da segunda diagonal da Tabela 1.

Proposição 2.2. Para todo n temos que $p_{\pm 1(5)}(5n, 2) = n$.

Demonstração. A fim de particionarmos $5n$ em exatamente duas partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, notamos que uma parte deve ser congruente a $1 \pmod{5}$ e a outra a $4 \pmod{5}$. Assim, escrevemos

$$5n = \underbrace{5 + 5 + \cdots + 5 + 5}_{n \text{ vezes}} = (1 + 4) + (1 + 4) + \cdots + (1 + 4) + (1 + 4).$$

Se separarmos a soma acima em qualquer posição entre um 1 e um 4 e somarmos as partes antes e depois desta separação, novamente temos duas partes, uma congruente a 1 e a outra congruente a $4 \pmod{5}$, caso contrário, não teríamos partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Como podemos realizar esta separação de n maneiras diferentes, temos o resultado desejado. \square

Proposição 2.3. *Para todo n temos que*

$$p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 2) = p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2) = p(n + 1, 2).$$

Demonstração. Para provarmos a primeira igualdade, seja (λ_1, λ_2) uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 2)$, notamos que ambas as partes devem ser congruentes a $1 \pmod{5}$. Por outro lado, uma partição (μ_1, μ_2) contada por $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2)$ possui ambas as partes congruentes a $4 \pmod{5}$. Claramente, $(\lambda_1 + 3, \lambda_2 + 3)$ será uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2)$ e $(\mu_1 - 3, \mu_2 - 3)$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 2)$.

Para provarmos a segunda igualdade, consideramos uma partição (μ_1, μ_2) contada por $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2)$, isto é, sendo $r, s \geq 1$

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= 5n + 3 \\ (5(r - 1) + 4) + (5(s - 1) + 4) &= 5n + 3 \\ (5r - 1) + (5s - 1) &= 5n + 3 \end{aligned}$$

ou seja,

$$r + s = n + 1.$$

Então, o número desejado é igual o número de partições de n em exatamente duas partes, ou seja, $p_{\pm 1(5)}(5n + 3, 2) = p(n + 1, 2)$. \square

Exemplo 2.6. *Para ilustrarmos o resultado da Proposição 2.3 consideramos $n = 9$. Então,*

$P_{\pm 1(5)}(42, 2)$	$P_{\pm 1(5)}(48, 2)$		$P(10, 2)$
(41, 1)	(44, 4)	$(5 \cdot 9 - 1, 5 \cdot 1 - 1)$	(9, 1)
(36, 6)	(39, 9)	$(5 \cdot 8 - 1, 5 \cdot 2 - 1)$	(8, 2)
(31, 11)	(34, 14)	$(5 \cdot 7 - 1, 5 \cdot 3 - 1)$	(7, 3)
(26, 16)	(29, 19)	$(5 \cdot 6 - 1, 5 \cdot 4 - 1)$	(6, 4)
(21, 21)	(24, 24)	$(5 \cdot 5 - 1, 5 \cdot 5 - 1)$	(5, 5)

Olhando os dados da terceira diagonal da Tabela 1 conseguimos os resultados abaixo. Dentre estes, destacamos os que apresentam relações com os números triangulares. Para o próximo teorema necessitamos do seguinte lema.

Lema 2.1. *Para todo $n \geq 1$ temos que*

- (a) *O número de partições de $10n + 1$ em exatamente três partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual a n , denotado por*

$$p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3) = n.$$

- (b) *O número de partições de $10n + 6$ em exatamente três partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual a $n + 1$, ou seja,*

$$p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 6, 3) = n + 1.$$

Demonstração. Provamos o primeiro item, sendo o outro análogo. Seja $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)$. Observamos que duas destas partes devem ser congruentes a 1 $\pmod{5}$ e a terceira congruente a 4 $\pmod{5}$. Assim, temos três possibilidades:

- (1) $\lambda_1, \lambda_2 \equiv 1 \pmod{5}$ e $\lambda_3 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0$;
- (2) $\lambda_1 \equiv 4 \pmod{5}, \lambda_2, \lambda_3 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 3$;
- (3) $\lambda_1, \lambda_3 \equiv 1 \pmod{5}$ e $\lambda_2 \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 2$;

Para o caso (1), suponhamos que $\lambda_1 = 5(k_1 - 1) + 1$, $\lambda_2 = 5(k_1 - 1) + 1$ e $\lambda_3 = 5(k_3 - 1) + 4$, com $k_1 > k_3 \geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} 10n + 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (5k_1 - 4) + (5k_1 - 4) + (5k_3 - 1) \\ 10n + 10 &= 5(2k_1 + k_3) \\ 2n + 2 &= 2k_1 + k_3 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para que a equação (2.6) tenha solução, devemos ter k_3 par, isto é, $k_3 = 2j$, com $j \geq 1$. Logo, precisamos encontrar o número de soluções da equação

$$2n + 2 = 2k_1 + 2j$$

ou ainda, encontrar o número de soluções de

$$n + 1 = k_1 + j, \text{ com } j \geq 1 \text{ e } k_1 > 2j.$$

- (1.a) Se $n \equiv 0 \pmod{3}$ então $n = 3l$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l + 1$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ soluções;

- (1.b) Se $n \equiv 1 \pmod{3}$ então $n = 3l - 2$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l - 1$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l - 1$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ soluções;

(1.c) Se $n \equiv 2 \pmod{3}$ então $n = 3l - 1$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l - 1$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ soluções.

Para o caso (2), suponhamos que $\lambda_1 = 5(k_1 - 1) + 4$, $\lambda_2 = 5(k_1 - 1) + 1$ e $\lambda_3 = 5(k_3 - 1) + 1$, com $k_1 \geq k_3 \geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} 10n + 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (5k_1 - 1) + (5k_1 - 4) + (5k_3 - 4) \\ 10n + 10 &= 5(2k_1 + k_3) \\ 2n + 2 &= 2k_1 + k_3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Para que a equação (2.7) tenha solução, devemos ter k_3 par, isto é, $k_3 = 2j$, com $j \geq 1$. Logo, precisamos encontrar o número de soluções da equação

$$2n + 2 = 2k_1 + 2j$$

ou seja, encontrar o número de soluções de

$$n + 1 = k_1 + j, \text{ com } j \geq 1 \text{ e } k_1 \geq 2j.$$

(2.a) Se $n \equiv 0 \pmod{3}$ então $n = 3l$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l + 1$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ soluções;

(2.b) Se $n \equiv 1 \pmod{3}$ então $n = 3l - 2$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l - 1$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$ soluções;

(2.c) Se $n \equiv 2 \pmod{3}$ então $n = 3l - 1$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ soluções.

Para o caso (3), suponhamos que $\lambda_1 = 5(k_1 - 1) + 1$, $\lambda_2 = 5(k_1 - 2) + 4$ e $\lambda_3 = 5(k_3 - 1) + 1$, com $k_1 > k_3 \geq 1$. Assim,

$$\begin{aligned} 10n + 1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = (5k_1 - 4) + (5k_1 - 6) + (5k_3 - 4) \\ 10n + 15 &= 5(2k_1 + k_3) \\ 2n + 3 &= 2k_1 + k_3 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Para que a equação (2.8) tenha solução, devemos ter k_3 ímpar, isto é, $k_3 = 2j - 1$, com $j \geq 1$. Logo, precisamos encontrar o número de soluções da equação

$$2n + 3 = 2k_1 + 2j - 1$$

ou ainda, encontrar o número de soluções da equação

$$n + 2 = k_1 + j, \text{ com } j \geq 1 \text{ e } k_1 > 2j - 1.$$

(3.a) Se $n \equiv 0 \pmod{3}$ então $n = 3l$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l + 2$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ soluções;

(3.b) Se $n \equiv 1 \pmod{3}$ então $n = 3l - 2$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ soluções;

(3.c) Se $n \equiv 2 \pmod{3}$ então $n = 3l - 1$, com $l \geq 1$ e $k_1 + j = 3l + 1$. Neste caso, temos uma solução para todo $j \leq l$, isto é, $l = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1$ soluções.

Para n fixado, o número de partições contadas por $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)$ é dado pela soma do número de soluções nos casos (1), (2) e (3), dependendo do valor de n módulo 3. Assim,

(a) Se $n \equiv 0 \pmod{3}$, o número de partições é

$$\left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 \right) = 3 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 3 = 3 \left\lfloor \frac{3l-1}{3} \right\rfloor + 3 = 3l = n.$$

(b) Se $n \equiv 1 \pmod{3}$, o número de partições é

$$\left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 \right) = 3 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 = 3 \left\lfloor \frac{3l-3}{3} \right\rfloor + 1 = 3l - 2 = n.$$

(c) Se $n \equiv 2 \pmod{3}$, o número de partições é

$$\left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \right) + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 1 \right) = 3 \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor + 2 = 3 \left\lfloor \frac{3l-2}{3} \right\rfloor + 2 = 3l - 1 = n.$$

□

Teorema 2.2. Para todo n temos que

$$(a) \quad p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3) = n;$$

$$(b) \quad p_{\pm 1(5)}(10n + 6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) = n + 1.$$

Demonstração. Provamos o primeiro item, sendo o outro análogo. Consideramos a união disjunta $P_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) = P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3) \cup P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)$, sendo $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$ o conjunto de partições de $10n + 1$ cuja diferença entre as duas maiores partes é maior do que ou igual a 5 e $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)$ o conjunto das partições de $10n + 1$ cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5.

Notamos que existe uma bijeção entre os conjuntos $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$ e $P_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)$. De fato, como a diferença entre as duas maiores partes de uma partição pertencente ao conjunto $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$ é pelo menos 5, subtraindo-se 5 da maior parte obtemos uma partição pertencente ao conjunto $P_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)$. Reciprocamente, adicionando-se 5 na maior parte de uma partição do conjunto $P_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)$ obtemos uma partição do conjunto $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)$.

Então,

$$\begin{aligned} p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) &= |P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 1, 3)| + |P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)| \\ &= |P_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3)| + |P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)|. \end{aligned}$$

Pelo item (a) do Lema 2.1 temos que $|P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 1, 3)| = n$, logo

$$p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3) = n.$$

□

Exemplo 2.7. Considerando $n = 3$ ilustramos o resultado do item (a) do Teorema 2.2. Observamos que existem 3 partições cuja diferença entre as duas maiores partes é 0, 2 ou 3 e tais partições não possuem correspondentes no conjunto $P_{\pm 1(5)}(26, 3)$.

$P_{\pm 1(5)}(31, 3)$		$P_{\pm 1(5)}(26, 3)$
(29, 1, 1)	(29 - 5, 1, 1)	(24, 1, 1)
(26, 4, 1)	(26 - 5, 4, 1)	(21, 4, 1)
(24, 6, 1)	(24 - 5, 6, 1)	(19, 6, 1)
(21, 9, 1)	(21 - 5, 9, 1)	(16, 9, 1)
(21, 6, 4)	(21 - 5, 6, 4)	(16, 6, 4)
(19, 11, 1)	(19 - 5, 11, 1)	(14, 11, 1)
(19, 6, 6)	(19 - 5, 6, 6)	(14, 6, 6)
(16, 11, 4)	(16 - 5, 11, 4)	(11, 11, 4)
(16, 9, 6)	(16 - 5, 9, 6)	(11, 9, 6)
(16, 14, 1)		
(14, 11, 6)		
(11, 11, 9)		

Combinando os itens do Teorema 2.2, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.1. Para todo n , sendo T_n o n -ésimo número triangular, temos que

(a) $p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) = 2T_n;$

(b) $p_{\pm 1(5)}(10n + 6, 3) = T_n + T_{n+1}.$

Demonstração. (a) Pelos itens (a) e (b) do Teorema 2.2, respectivamente, temos que

$$p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n - 4, 3) = n \tag{2.9}$$

e

$$p_{\pm 1(5)}(10(n - 1) + 6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n - 1) + 1, 3) = n. \tag{2.10}$$

Nas equações (2.9) e (2.10), se substituirmos n por $n - 1, n - 2, \dots, 2$ e 1 , obtemos a sequência de equações

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-1)+1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-1)-4, 3) = n-1 \quad (2.11)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-2)+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-2)+1, 3) = n-1 \quad (2.12)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-2)+1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-2)-4, 3) = n-2 \quad (2.13)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-3)+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-3)+1, 3) = n-2 \quad (2.14)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-3)+1, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-3)-4, 3) = n-3 \quad (2.15)$$

$$p_{\pm 1(5)}(10(n-4)+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n-4)+1, 3) = n-3 \quad (2.16)$$

...

$$p_{\pm 1(5)}(11, 3) - p_{\pm 1(5)}(6, 3) = 1 \quad (2.17)$$

$$p_{\pm 1(5)}(6, 3) - p_{\pm 1(5)}(1, 3) = 1 \quad (2.18)$$

Somando-se as equações (2.9) até (2.18) e observando que $p_{\pm 1(5)}(1, 3) = 0$, temos que

$$p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = 2n + 2(n-1) + 2(n-2) + \dots + 2 = 2T_n.$$

(b) Pelo item anterior, $p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = 2T_n$ e do item (b) do Teorema 2.2 temos que $p_{\pm 1(5)}(10n+6, 3) - p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = n+1$. Somando-se estas duas equações, obtemos

$$p_{\pm 1(5)}(10n+6, 3) = 2T_n + (n+1) = T_n + T_{n+1}$$

□

Proposição 2.4. Para todo n temos que $p_{\pm 1(5)}(5n, 3) = 0$.

Demonstração. Qualquer combinação de três números congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ deve ser de um dos tipos abaixo, com $s_1, s_2, s_3 \geq 1$:

$$(a) \quad (5(s_1-1)+1) + (5(s_2-1)+1) + (5(s_3-1)+1) = 5(s_1+s_2+s_3-3) + 3;$$

$$(b) \quad (5(s_1-1)+1) + (5(s_2-1)+1) + (5(s_3-1)+4) = 5(s_1+s_2+s_3-2) + 1;$$

$$(c) \quad (5(s_1-1)+1) + (5(s_2-1)+4) + (5(s_3-1)+4) = 5(s_1+s_2+s_3-2) + 4;$$

$$(d) \quad (5(s_1-1)+4) + (5(s_2-1)+4) + (5(s_3-1)+4) = 5(s_1+s_2+s_3-1) + 2.$$

Como nenhuma delas é congruente a 0 $\pmod{5}$, resulta que $p_{\pm 1(5)}(5n, 3) = 0$. □

Proposição 2.5. Para todo n temos que

$$(a) \quad p_{\pm 1(5)}(10n+1, 3) = p_{\pm 1(5)}(10n+4, 3);$$

$$(b) \quad p_{\pm 1(5)}(10n+6, 3) = p_{\pm 1(5)}(10n+9, 3).$$

Demonstração. Provamos o item (a), sendo o outro análogo. Notamos que qualquer partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3)$ possui duas partes congruentes a 1 $\pmod{5}$ e uma congruente a 4 $\pmod{5}$. Por outro lado, qualquer partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 4, 3)$ possui duas partes congruentes a 4 $\pmod{5}$ e uma congruente a 1 $\pmod{5}$.

Definimos uma bijeção entre os dois tipos de partições da seguinte maneira: a partir da parte congruente a 4 $\pmod{5}$ de uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 1, 3)$, adiciona-se 3 na parte congruente a 1 $\pmod{5}$ imediatamente menor. Se a parte congruente a 4 $\pmod{5}$ for a menor parte adiciona-se 3 na maior parte da partição. Reciprocamente, a partir da parte congruente a 1 $\pmod{5}$ de uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n + 4, 3)$, subtrai-se 3 da parte congruente a 4 $\pmod{5}$ imediatamente maior. Se a parte congruente a 1 $\pmod{5}$ for a maior parte subtraia-se 3 da menor parte da partição. □

Exemplo 2.8. Considerando $n = 2$ ilustramos o resultado do item (a) da Proposição 2.5.

$P_{\pm 1(5)}(21, 3)$		$P_{\pm 1(5)}(24, 3)$
(19, 1, 1)	(19, 1 + 3, 1)	(19, 4, 1)
(16, 4, 1)	(16, 4, 1 + 3)	(16, 4, 4)
(14, 6, 1)	(14, 6 + 3, 1)	(14, 9, 1)
(11, 9, 1)	(11, 9, 1 + 3)	(11, 9, 4)
(11, 6, 4)	(11 + 3, 6, 4)	(14, 6, 4)
(9, 6, 6)	(9, 6 + 3, 6)	(9, 9, 6)

Para o próximo teorema, o qual também apresenta uma relação com os números triangulares, obtido observando-se os dados da quarta diagonal da Tabela 1, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.2. Para todo n e $i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, temos que

- (a) $p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i-1}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - (2i - 1)) + 9, 3)$;
- (b) $p_{\pm 1(5)}(10n + 5, 4, \text{menor parte } R_{2i-1}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - 2(i - 1)) + 1, 3)$;
- (c) $p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - 2i) + 6, 3)$;
- (d) $p_{\pm 1(5)}(10n + 5, 4, \text{menor parte } R_{2i}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - (2i - 1)) + 1, 3)$.

Demonstração. (a) Considerando $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R_{2i-1})$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i-1})$, temos que

$$\begin{aligned} 10n &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 5(i - 1) + 1 \\ 10n - (5(i - 1) + 1) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

Como as partes λ_1, λ_2 e λ_3 são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e maiores do que ou iguais a $5(i - 1) + 1$, podemos subtrair de cada uma $5(i - 1)$. Então, obtemos que

$$10n - (5(i - 1) + 1) - 15(i - 1) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$

ou ainda que

$$10(n - (2i - 1)) + 9 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$

sendo μ_1 , μ_2 e μ_3 partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Assim, $p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i-1}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - (2i - 1)) + 9, 3)$.

- (b) Consideramos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R_{2i-1})$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n+5, 4, \text{menor parte } R_{2i-1})$ temos que

$$\begin{aligned} 10n + 5 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 5(i - 1) + 1 \\ 10n + 5 - (5(i - 1) + 1) &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{aligned}$$

Como as partes λ_1, λ_2 e λ_3 são congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e maiores do que ou iguais a $5(i - 1) + 1$, podemos subtrair de cada uma $5(i - 1)$. Então, obtemos que

$$10n + 5 - (5(i - 1) + 1) - 15(i - 1) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3,$$

ou ainda que

$$10(n - 2(i - 1)) + 4 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

com μ_1 , μ_2 e μ_3 partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Assim, $p_{\pm 1(5)}(10n+5, 4, \text{menor parte } R_{2i-1}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - 2(i - 1)) + 4, 3)$. Pelo item (a) da Proposição 2.5 temos que $p_{\pm 1(5)}(10(n - 2(i - 1)) + 4, 3) = p_{\pm 1(5)}(10(n - 2(i - 1)) + 1, 3)$, logo

$$p_{\pm 1(5)}(10n + 5, 4, \text{menor parte } R_{2i-1}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - 2(i - 1)) + 1, 3).$$

- (c) Consideramos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R_{2i})$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i})$, removemos a parte R_{2i} e subtraímos $5(i - 1)$ das partes restantes (que são duas congruentes a $1 \pmod{5}$ e a outra congruente a $4 \pmod{5}$). Ainda subtraímos 5 das partes congruentes a $1 \pmod{5}$ já que são maiores do que ou iguais a 6. O processo é ilustrado abaixo

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, R_{2i}) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \rightarrow (\lambda_1 - 5(i - 1), \lambda_2 - 5(i - 1), \lambda_3 - 5(i - 1)).$$

O próximo passo é subtrairmos 5 das duas partes congruentes a $1 \pmod{5}$. Assim,

$$p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i}) = p_{\pm 1(5)}(10(n - 2i) + 6, 3).$$

- (d) Análogo ao item (c).

□

Teorema 2.3. Para todo n temos que

$$(a) \quad p_{\pm 1(5)}(10n, 4) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$(b) \quad p_{\pm 1(5)}(10n+5, 4) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n T_i = 2 \cdot \binom{n+2}{3}.$$

Demonstração. (a) Para a primeira igualdade, classificamos as partições contadas por $p_{\pm 1(5)}(10n, 4)$ de acordo com sua menor parte. Notamos que o valor máximo para esta parte é R_n , que poderá ser, com $i \geq 1$,

$$R_{2i-1} = 5(i-1) + 1, \text{ para } i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \quad \text{ou} \quad R_{2i} = 5(i-1) + 4, \text{ para } i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Após esta classificação, temos que

$$\begin{aligned} p_{\pm 1(5)}(10n, 4) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i-1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{\pm 1(5)}(10n, 4, \text{menor parte } R_{2i}). \end{aligned}$$

Pelos itens (a) e (c) do Lema 2.2, esta igualdade torna-se

$$\begin{aligned} p_{\pm 1(5)}(10n, 4) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} p_{\pm 1(5)}(10(n - (2i - 1)) + 9, 3) \\ &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{\pm 1(5)}(10(n - 2i) + 6, 3). \end{aligned}$$

Pelo item (b) da Proposição 2.5, temos que

$$p_{\pm 1(5)}(10(n - 2i) + 6, 3) = p_{\pm 1(5)}(10(n - 2i) + 9, 3).$$

Combinando-a com o item (b) do Corolário 2.1, podemos escrever

$$\begin{aligned} p_{\pm 1(5)}(10n, 4) &= \sum_{i=1}^n p_{\pm 1(5)}(10(n - i) + 6, 3) \\ &= \sum_{i=1}^n (T_{n-i} + T_{n-i+1}) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n. \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade procedemos por indução sobre n . Para $n = 1$ temos que $T_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$. Suponhamos que para algum n temos que

$$2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vamos provar que para $n + 1$ o resultado também é válido. Então,

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{i=1}^{n+1-1} T_i + T_{n+1} &= 2 \sum_{i=1}^n T_i + T_{n+1} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} T_i + 2T_n + T_{n+1} \\ &= \left(2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n \right) + (T_n + T_{n+1}) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Assim, pelo Princípio de Indução temos o desejado.

- (b) A prova é análoga ao item anterior, usando os itens (b) e (d) do Lema 2.2 e o item (a) do Corolário 2.1.

□

Para o próximo teorema, que também é um resultado extraído dos dados da quarta diagonal, precisamos do lema e da proposição abaixo.

Lema 2.3. *O número de partições de $5n + 2$ em quatro partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual ao número de partições de $n - 1$ em até três partes, isto é,*

$$p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n + 2, 4) = p(n - 1, \leq 3).$$

Demonstração. As diferenças possíveis para as duas maiores partes são: 0, 2 e 3. Analisamos os três casos.

- **Diferença 0:** Temos que $\lambda_1 = \lambda_2 = 5k + 1$ e as outras duas partes devem ser uma congruente a 1 $\pmod{5}$ e a outra a 4 $\pmod{5}$. Então se $\lambda_3 = 5k_3 + 1$ e $\lambda_4 = 5k_4 + 4$. Temos que

$$\begin{aligned} (5k + 1) + (5k + 1) + (5k_3 + 1) + (5k_4 + 4) &= 5n + 2 \\ 5(2k + k_3 + k_4) &= 5n - 5 \\ 2k + k_3 + k_4 &= n - 1, \end{aligned}$$

com $k_4 \leq k_3 < k$.

Consideramos a partição $(k + k_4, k, k_3)$, claramente contada por $p(n - 1, \leq 3)$. Para a outra possibilidade, $\lambda_3 = 5k_3 + 4$ e $\lambda_4 = 5k_4 + 1$, tomamos $(k + k_3, k, k_4)$. Notamos que $\frac{k + k_3 - 1}{2} < k$.

- **Diferença 2:** Temos que $\lambda_1 = 5(k + 1) + 1$, $\lambda_2 = 5k + 4$, $\lambda_3 = 5k_3 + 1$ e $\lambda_4 = 5k_4 + 1$ sujeito a $k_4 \leq k_3 \leq k$. Assim,

$$\begin{aligned} (5(k + 1) + 1) + (5k + 4) + (5k_3 + 1) + (5k_4 + 1) &= 5n + 2 \\ 2k + 1 + k_3 + k_4 &= n - 1. \end{aligned}$$

Consideramos a partição $(2k + 1, k_3, k_4)$ que é contada por $p(n - 1, \leq 3)$. Notamos que $k_3 \leq k$.

- **Diferença 3:** Temos que $\lambda_1 = 5k + 4$, $\lambda_2 = 5k + 1$, $\lambda_3 = 5k_3 + 1$ e $\lambda_4 = 5k_4 + 1$, sujeita a $k_4 \leq k_3 \leq k$. Assim,

$$\begin{aligned} (5k + 4) + (5k + 1) + (5k_3 + 1) + (5k_4 + 1) &= 5n + 2 \\ 2k + k_3 + k_4 &= n - 1. \end{aligned}$$

Consideramos a partição $(2k, k_3, k_4)$ que é contada por $p(n - 1, \leq 3)$. Notamos que $k_3 \leq k$.

A aplicação definida é uma bijeção. De fato, consideramos (μ_1, μ_2, μ_3) uma partição de $n-1$, cujas partes podem ser zero, precisamos dividir a primeira parte em duas para estabelecermos uma parte congruente $1 \pmod{5}$ e uma a $4 \pmod{5}$. As restantes serão $5\mu_2 + 1$ e $5\mu_3 + 1$. Pela classificação que fizemos antes, somos capazes de reescrevê-las como segue, ordenando as partes, se necessário:

- μ_1 par e $\frac{\mu_1}{2} \geq \mu_2$: Consideramos a partição

$$5 \cdot \frac{\mu_1}{2} + 4, 5 \cdot \frac{\mu_1}{2} + 1, 5\mu_2 + 1, 5\mu_3 + 1.$$

- μ_1 par e $\frac{\mu_1}{2} < \mu_2$: Consideramos a partição

$$5\mu_2 + 1, 5\mu_2 + 1, 5(\mu_1 - \mu_2) + 4, 5\mu_3 + 1.$$

- μ_1 ímpar e $\frac{\mu_1 - 1}{2} \geq \mu_2$: Consideramos a partição

$$5 \cdot \frac{\mu_1 - 1}{2} + 4, 5 \cdot \frac{\mu_1 + 1}{2} + 1, 5\mu_2 + 1, 5\mu_3 + 1.$$

- μ_1 ímpar e $\frac{\mu_1 - 1}{2} < \mu_2$: Consideramos a partição

$$5\mu_2 + 1, 5\mu_2 + 1, 5(\mu_1 - \mu_2) + 4, 5\mu_3 + 1.$$

□

Exemplo 2.9. Para ilustrarmos a bijeção apresentada no lema anterior, consideramos $n = 5$. Na primeira tabela, a partir de partições contadas por $p_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(27, 4)$, obtemos as partições contadas por $p(4, \leq 3)$.

$P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(27, 4)$			$P(4, \leq 3)$
(14, 11, 1, 1)	$(5 \cdot 2 + 4, 5 \cdot 2 + 1, 5 \cdot 0 + 1, 5 \cdot 0 + 1)$	$(2 \cdot 2 + 1, 0, 0)$	(4, 0, 0)
(11, 11, 4, 1)	$(5 \cdot 2 + 1, 5 \cdot 2 + 1, 5 \cdot 0 + 4, 5 \cdot 0 + 1)$	$(2 + 0, 2, 0)$	(2, 2, 0)
(11, 9, 6, 1)	$(5 \cdot 2 + 1, 5 \cdot 1 + 4, 5 \cdot 1 + 1, 5 \cdot 0 + 1)$	$(2 \cdot 1 + 1, 1, 0)$	(3, 1, 0)
(9, 6, 6, 6)	$(5 \cdot 1 + 4, 5 \cdot 1 + 1, 5 \cdot 1 + 1, 5 \cdot 1 + 1)$	$(2 \cdot 1, 1, 1)$	(2, 1, 1)

Na tabela abaixo, apresentamos o processo inverso.

	$P(4, \leq 3)$		$P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(27, 4)$
μ_1 par,	(4, 0, 0)	$(5 \cdot \frac{4}{2} + 4, 5 \cdot \frac{4}{2} + 1, 5 \cdot 0 + 1, 5 \cdot 0 + 1)$	(14, 11, 1, 1)
$\frac{\mu_1}{2} \geq \mu_2$	(2, 1, 1)	$(5 \cdot \frac{2}{2} + 4, 5 \cdot \frac{2}{2} + 1, 5 \cdot 1 + 1, 5 \cdot 1 + 1)$	(9, 6, 6, 6)
μ_1 par,	(2, 2, 0)	$(5 \cdot 2 + 1, 5 \cdot 2 + 1, 5 \cdot (2 - 2) + 4, 5 \cdot 0 + 1)$	(11, 11, 4, 1)
$\frac{\mu_1}{2} < \mu_2$			
μ_1 ímpar,	(3, 1, 0)	$(5 \cdot \frac{3+1}{2} + 1, 5 \cdot \frac{3-1}{2} + 4, 5 \cdot 1 + 1, 5 \cdot 0 + 1)$	(11, 9, 6, 1)
$\frac{\mu_1 - 1}{2} \geq \mu_2$			

Proposição 2.6. Para todo n temos que

$$p_{\pm 1(5)}(5n + 2, 4) - p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4) = p(n - 1, \leq 3).$$

Demonstração. Consideramos a união disjunta $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n + 2, 4) \cup P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(5n + 2, 4)$. Notamos que existe uma bijeção entre os conjuntos $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(5n + 2, 4)$ e $P_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4)$, de fato, como a diferença entre as duas maiores partes de uma partição pertence ao conjunto $P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(5n + 2, 4)$ é maior ou igual do que 5 podemos subtrair 5 da maior parte e assim obtemos uma partição pertencente ao conjunto $P_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4)$. A recíproca basta acrescentarmos 5 na maior parte da partição pertencente a $P_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4)$.

Por outro lado, pelo Lema 2.3 temos que $|P_{\pm 1(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n + 2, 4)| = p(n - 1, \leq 3)$. Portanto, $p_{\pm 1(5)}(5n + 2, 4) - p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4) = p(n - 1, \leq 3)$. \square

Com os dois resultados acima, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 2.4. Para todo n temos que

$$p_{\pm 1(5)}(5n + 2, 4) = p_{\pm 1(5)}(5n + 8, 4) = \sum_{i=0}^{n-1} p(i, \leq 3).$$

Demonstração. Para a primeira igualdade, notamos que qualquer partição de $5n + 2$ em exatamente quatro partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ deve possuir três partes congruentes a 1 $\pmod{5}$ e uma parte congruente a 4 $\pmod{5}$. Além disso, qualquer partição de $5n + 8$ em exatamente quatro partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ deve possuir três partes congruentes a 4 $\pmod{5}$ e uma parte congruente a 1 $\pmod{5}$.

Assim, uma bijeção entre os dois tipos de partições é obtida adicionando-se 3 em cada uma das duas partes consecutivas congruentes a 1 $\pmod{5}$ menores do que a única parte congruente 4 $\pmod{5}$. Quando há uma ou nenhuma parte congruente a 1 $\pmod{5}$ menor do que a parte congruente a 4 $\pmod{5}$ adicionamos 3 na menor e maior parte ou adicionamos 3 nas duas maiores partes, respectivamente. A aplicação inversa é facilmente construída.

Para a segunda igualdade, da Proposição 2.6, temos que

$$\begin{aligned} p_{\pm 1(5)}(5n + 2, 4) - p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4) &= p(n - 1, \leq 3) \\ p_{\pm 1(5)}(5n - 3, 4) - p_{\pm 1(5)}(5n - 8, 4) &= p(n - 2, \leq 3) \\ &\vdots \\ p_{\pm 1(5)}(7, 4) - p_{\pm 1(5)}(2, 4) &= p(0, \leq 3). \end{aligned}$$

Somando-se todas as equações acima, obtemos que

$$p_{\pm 1(5)}(5n + 2, 4) - p_{\pm 1(5)}(2, 4) = \sum_{i=0}^{n-1} p(i, \leq 3).$$

Como $p_{\pm 1(5)}(2, 4) = 0$, segue o resultado. □

Exemplo 2.10. Para ilustrarmos a bijeção descrita na prova do Teorema 2.4, consideramos $n = 4$. Então,

$P_{\pm 1(5)}(22, 4)$		$P_{\pm 1(5)}(28, 4)$
(19 , 1, 1, 1)	(19 , 1 + 3, 1 + 3, 1)	(19, 4, 4, 1)
(16, 4 , 1, 1)	(16, 4 , 1 + 3, 1 + 3)	(16, 4, 4, 4)
(14 , 6, 1, 1)	(14 , 6 + 3, 1, 1)	(14, 9 , 4, 1)
(11, 9 , 1, 1)	(11, 9 , 1 + 3, 1 + 3)	(11, 9, 4, 4)
(11, 6, 4 , 1)	(11 + 3, 6, 4 , 1 + 3)	(14, 6, 4, 4)
(9 , 6, 6, 1)	(9 , 6 + 3, 6 + 3, 1)	(9, 9, 9, 1)
(6, 6, 6, 4)	(6 + 3, 6 + 3, 6, 4)	(9, 9, 6, 4)

Da quinta diagonal da Tabela 1 conseguimos os seguintes resultados.

Proposição 2.7. Para todo n temos que

$$p_{\pm 1(5)}(5n + 1, 5) = p_{\pm 1(5)}(5n + 4, 5).$$

Demonstração. Construimos uma bijeção entre os conjuntos $P_{\pm 1(5)}(5n + 1, 5)$ e $P_{\pm 1(5)}(5n + 4, 5)$. Consideramos $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ uma partição contada por $p_{\pm 1(5)}(5n + 1, 5)$, notamos que três delas devem ser congruentes a 1 (mod 5) e as outras duas congruentes a 4 (mod 5). A aplicação que construiremos exigirá uma classificação sobre a posição da menor parte congruente a 4 (mod 5). Com os casos descritos abaixo, apresentamos todas possíveis posições para as partes das partições contadas por $p_{\pm 1(5)}(5n + 1, 5)$ e das contadas por $p_{\pm 1(5)}(5n + 4, 5)$:

- Se a menor parte congruente a 4 (mod 5) é λ_2, λ_3 ou λ_4 :

Adiciona-se 3 na parte seguinte. Todos os casos são descritos abaixo, sendo as partes em negrito congruentes a 4 (mod 5).

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) &\rightarrow (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3 + \mathbf{3}, \lambda_4, \lambda_5) \\
 (\boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \lambda_4, \lambda_5) &\rightarrow (\boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4 + \mathbf{3}, \lambda_5) \\
 (\boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \lambda_5) &\rightarrow (\boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \boldsymbol{\lambda}_5 + \mathbf{3}) \\
 (\lambda_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \lambda_4, \lambda_5) &\rightarrow (\lambda_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4 + \mathbf{3}, \lambda_5) \\
 (\lambda_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \lambda_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \lambda_5) &\rightarrow (\lambda_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \lambda_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \boldsymbol{\lambda}_5 + \mathbf{3}) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \lambda_5) &\rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \boldsymbol{\lambda}_5 + \mathbf{3})
 \end{aligned}$$

A imagem de cada aplicação nos diz que as duas menores partes congruentes a 4 (mod 5) são adjacentes. Este é um critério para decidirmos qual aplicação inversa devemos usar.

- A menor parte congruente a 4 (mod 5) é λ_5 : Neste caso usamos as seguintes correspondências:

$$\begin{aligned}
 (\boldsymbol{\lambda}_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \boldsymbol{\lambda}_5) &\rightarrow (\boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 + \mathbf{3}, \lambda_3, \lambda_4, \boldsymbol{\lambda}_5) \\
 (\lambda_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \lambda_3, \lambda_4, \boldsymbol{\lambda}_5) &\rightarrow (\lambda_1, \boldsymbol{\lambda}_2, \boldsymbol{\lambda}_3 + \mathbf{3}, \lambda_4, \boldsymbol{\lambda}_5) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \lambda_4, \boldsymbol{\lambda}_5) &\rightarrow (\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{3}, \lambda_2, \boldsymbol{\lambda}_3, \lambda_4, \boldsymbol{\lambda}_5) \\
 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \boldsymbol{\lambda}_5) &\rightarrow (\boldsymbol{\lambda}_1 + \mathbf{3}, \boldsymbol{\lambda}_2 + \mathbf{3}, \lambda_3, \boldsymbol{\lambda}_4, \lambda_5 - 3).
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.11. Para ilustrarmos a bijeção descrita na prova da Proposição 2.7, consideramos $n = 5$, notamos que na coluna da esquerda temos duas partes congruentes a 4 (mod 5) e na coluna da direita temos três (em negrito). Então,

$P_{\pm 1(5)}(26, 5)$		$P_{\pm 1(5)}(29, 5)$
(19 , 4 , 1, 1, 1)	(19 , 4 , 1 + 3, 1, 1)	(19 , 4 , 4 , 1, 1)
(16, 4 , 4 , 1, 1)	(16, 4 , 4 , 1 + 3, 1)	(16, 4 , 4 , 4 , 1)
(14 , 9 , 1, 1, 1)	(14 , 9 , 1 + 3, 1, 1)	(14 , 9 , 4 , 1, 1)
(14 , 6 , 4 , 1, 1)	(14 , 6 , 4 , 1 + 3, 1)	(14 , 6 , 4 , 4 , 1)
(11, 9 , 4 , 1, 1)	(11, 9 , 4 , 1 + 3, 1)	(11, 9 , 4 , 4 , 1)
(11, 6 , 4 , 4 , 1)	(11, 6 , 4 , 4 , 1 + 3)	(11, 6 , 4 , 4 , 4)
(9 , 9 , 6 , 1, 1)	(9 , 9 , 6 + 3, 1, 1)	(9 , 9 , 9 , 1, 1)
(9 , 6 , 6 , 4 , 1)	(9 , 6 , 6 , 4 , 1 + 3)	(9 , 6 , 6 , 4 , 4)
(6, 6, 6, 4 , 4)	(6 + 3, 6 + 3, 6, 4 , 4 - 3)	(9 , 9 , 6 , 4 , 1)

Proposição 2.8. Para todo n temos que

$$p_{\pm 1(5)}(5n - 2, 5) = p_{\pm 1(5)}(5n + 7, 5).$$

Demonstração. Notamos que qualquer partição de $5n - 2$ em cinco partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ deve ter quatro partes congruentes a 1 (mod 5) e uma parte congruente a 4 (mod 5). Além disso, qualquer partição de $5n + 7$ em cinco partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ deve ter quatro partes congruentes a 4 (mod 5) e uma parte congruente a 1 (mod 5).

Assim, uma bijeção entre os dois tipos de partições é obtida adicionando-se 3 em cada uma das três seguintes partes congruentes a $1 \pmod{5}$ menores do que a única parte congruente a $4 \pmod{5}$. Quando há menos de três partes depois desta única parte, realize o processo a partir da maior parte. A aplicação inversa é facilmente construída.

□

Exemplo 2.12. Para ilustrarmos a bijeção descrita na prova da Proposição 2.8, consideramos $n = 5$. Então,

$P_{\pm 1(5)}(23, 5)$		$P_{\pm 1(5)}(32, 5)$
(19, 1, 1, 1, 1)	(19, 1 + 3, 1 + 3, 1 + 3, 1)	(19, 4, 4, 4, 1)
(16, 4, 1, 1, 1)	(16, 4, 1 + 3, 1 + 3, 1 + 3)	(16, 4, 4, 4, 4)
(14, 6, 1, 1, 1)	(14, 6 + 3, 1 + 3, 1 + 3, 1)	(14, 9, 4, 4, 1)
(11, 9, 1, 1, 1)	(11, 9, 1 + 3, 1 + 3, 1 + 3)	(11, 9, 4, 4, 4)
(11, 6, 4, 1, 1)	(11 + 3, 6, 4, 1 + 3, 1 + 3)	(14, 6, 4, 4, 4)
(9, 6, 6, 1, 1)	(9, 6 + 3, 6 + 3, 1 + 3, 1)	(9, 9, 9, 4, 1)
(6, 6, 6, 4, 1)	(6 + 3, 6 + 3, 6, 4, 1 + 3)	(9, 9, 6, 4, 4)

2.2 Partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$

Considerando a segunda identidade de Rogers-Ramanujan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2; q^5)_{\infty} (q^3; q^5)_{\infty}} = 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + 2q^6 + \dots$$

que nos diz que o número de partições de n em partes 2-distintas maiores do que ou iguais a 2 é igual ao número de partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$, construiremos uma representação matricial para as partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. Novamente, salientamos que em [15] os autores apresentam uma representação matricial para as partições em partes 2-distintas maiores do que ou iguais a 2.

2.2.1 Representação matricial para partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$

Nesta subseção, como foi feito para partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$, exibimos uma representação matricial para as partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. Tal representação está descrita no teorema abaixo.

Teorema 2.5. O número de partições de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{s-1} & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_{s-1} & d_s \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

em que suas entradas inteiras não negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0; \quad (2.20)$$

$$c_{2i-1} = 5 \cdot \frac{d_{2i+1}}{2} + 5 \cdot \frac{d_{2i+3}}{2} + \dots; \quad (2.21)$$

$$c_{2i} = 5 \cdot \frac{d_{2i+2}}{3} + 5 \cdot \frac{d_{2i+4}}{3} + \dots; \quad (2.22)$$

$$2 \mid d_t, \text{ se } t \text{ ímpar};$$

$$3 \mid d_t, \text{ se } t \text{ par}.$$

Demonstração. Seja L_t o t -ésimo número natural congruente a $\pm 2 \pmod{5}$, isto é, para todo $i \geq 1$ temos que $t = 2i - 1$ ou $t = 2i$, ou seja,

$$L_t = L_{2i-1} = 5 \cdot (i - 1) + 2 \text{ ou } L_t = L_{2i} = 5 \cdot (i - 1) + 3.$$

Dada uma partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$, suponhamos que L_s seja sua maior parte, com s um número par (o caso em que s é ímpar é análogo), então,

$$\begin{aligned} n &= j_1 \cdot L_1 + j_2 \cdot L_2 + \dots + j_s \cdot L_s, \text{ com } j_t \geq 0, \text{ para } 1 \leq t \leq s \\ &= j_1(5 \cdot 0 + 2) + j_2(5 \cdot 0 + 3) + j_3(5 \cdot 1 + 2) + j_4(5 \cdot 1 + 3) + \dots + j_s \left(5 \cdot \left(\frac{s-2}{2} \right) + 3 \right) \\ &= 5(0 \cdot j_1 + 1 \cdot j_3 + 2 \cdot j_5 + \dots + \left(\frac{s-2}{2} \right) \cdot j_{s-1}) + 2(j_1 + j_3 + j_5 + \dots + j_{s-1}) \\ &\quad + 5(0 \cdot j_2 + 1 \cdot j_4 + 2 \cdot j_6 + \dots + \left(\frac{s-2}{2} \right) \cdot j_s) + 3(j_2 + j_4 + j_6 + \dots + j_s). \end{aligned}$$

É fácil ver que podemos associar a partição acima a uma única matriz do tipo (2.19), satisfazendo as condições (2.20) a (2.22), sendo $d_t = 2j_t$ se t é ímpar e $d_t = 3j_t$ se t é par.

Reciprocamente, a partir da entrada d_t , com $1 \leq t \leq s$ de qualquer matriz do tipo (2.19) satisfazendo as mesmas condições, consideramos $j_t = \frac{d_t}{2}$, se t é ímpar e $j_t = \frac{d_t}{3}$, se t é par. Então, $n = j_1 \cdot L_1 + j_2 \cdot L_2 + \dots + j_s \cdot L_s$ é uma partição de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$. \square

Exemplo 2.13. Consideramos a partição $(13, 13, 12, 12, 12, 7, 7, 7, 2, 2, 2, 2)$ de 91. Vamos construir a matriz de duas linhas associada. Notemos que $L_6 = 13$ é a maior parte congruente a $\pm 2 \pmod{5}$. Então,

$$91 = \underbrace{4}_{j_1} \cdot \underbrace{2}_{L_1} + \underbrace{0}_{j_2} \cdot \underbrace{3}_{L_2} + \underbrace{3}_{j_3} \cdot \underbrace{7}_{L_3} + \underbrace{0}_{j_4} \cdot \underbrace{8}_{L_4} + \underbrace{3}_{j_5} \cdot \underbrace{12}_{L_5} + \underbrace{2}_{j_6} \cdot \underbrace{13}_{L_6}$$

Assim,

• $d_1 = 2 \cdot j_1 = 8$	• $d_4 = 3 \cdot j_4 = 0$
• $d_2 = 3 \cdot j_2 = 0$	• $d_5 = 2 \cdot j_5 = 6$
• $d_3 = 2 \cdot j_3 = 6$	• $d_6 = 3 \cdot j_6 = 6$
• $c_1 = 5 \cdot \frac{d_3}{2} + 5 \cdot \frac{d_5}{2} = 15 + 15 = 30$	• $c_4 = 5 \cdot \frac{d_6}{3} = 10$
• $c_2 = 5 \cdot \frac{d_4}{3} + 5 \cdot \frac{d_6}{3} = 0 + 10 = 10$	• $c_5 = 0$
• $c_3 = 5 \cdot \frac{d_5}{2} = 15$	• $c_6 = 0$

Portanto, a matriz é

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 10 & 15 & 10 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Agora dada a matriz (2.23) para obtermos a partição associada olhamos para a segunda linha da matriz, isto é, para cada d_t , com $1 \leq t \leq 6$. Assim, a maior parte congruente a $\pm 2 \pmod{5}$ da partição desejada é $L_6 = 13$. Então,

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 & 15 & 10 & 0 & 0 \\ \underbrace{8}_{2 \cdot j_1} & \underbrace{0}_{3 \cdot j_2} & \underbrace{6}_{2 \cdot j_3} & \underbrace{0}_{3 \cdot j_4} & \underbrace{6}_{2 \cdot j_5} & \underbrace{6}_{3 \cdot j_6} \end{pmatrix}.$$

Logo, obtemos

$$j_1 \cdot L_1 + j_2 \cdot L_2 + j_3 \cdot L_3 + j_4 \cdot L_4 + j_5 \cdot L_5 + j_6 \cdot L_6 = 4 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 0 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 2 \cdot 13.$$

Portanto, a partição associada é $(13, 13, 12, 12, 12, 7, 7, 7, 2, 2, 2, 2)$.

Exemplo 2.14. Na tabela abaixo, para $n = 10$ apresentamos as partições com partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ e suas respectivas matrizes associadas, pelo Teorema 2.5.

Partições de 10 com partes $\equiv \pm 2 \pmod{5}$	Matrizes
$(8, 2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
$(7, 3)$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$(3, 3, 2, 2)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$
$(2, 2, 2, 2, 2)$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

2.2.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 2.5

De acordo com a representação matricial da subseção anterior, para n fixo, classificamos suas partições em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ conforme a soma de cada entrada $\frac{d_t}{2}$, para t ímpar e $\frac{d_t}{3}$ para t par, da segunda linha da matriz associada. Por meio da ocorrência de cada número nestas somas descritas, organizamos os dados na tabela abaixo. A entrada na linha n e coluna $n - k$ é o número de vezes que k aparece como resultado de tais somas.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39			
1	0																																										
2	0	1																																									
3	0	0	1																																								
4	0	0	1	0																																							
5	0	0	0	1	0																																						
6	0	0	0	1	1	0																																					
7	0	0	0	0	1	0	1																																				
8	0	0	0	0	1	1	0	1																																			
9	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0																																	
10	0	0	0	0	1	1	0	2	0																																		
11	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0																																	
12	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	0	1																															
13	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	0	1																														
14	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	2	1	2	0																													
15	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	0	3	0																												
16	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	2	2	2	0																												
17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	1	4	0	1																											
18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	2	2	4	0	1																										
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	2	2	4	2	2	0																									
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	2	3	5	0	4	0																								
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	4	4	3	2	0																								
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	2	4	5	2	6	0	1																						
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	2	5	3	6	0	1																						
24	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	3	4	5	4	7	3	3	0																				
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	2	6	5	8	0	5	0																			
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	3	4	6	5	7	7	4	3	0																	
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3	6	5	7	9	3	9	0	1																
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	4	7	5	9	9	5	9	0	1																
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3	6	6	8	9	7	11	4	3	0															
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	5	7	5	11	10	8	14	0	6	0															
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3	6	7	8	11	9	12	11	5	3	0														
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	5	7	6	12	10	12	16	5	12	0	1														
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3	7	7	8	13	10	15	16	6	12	0	1													
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	3	3	5	7	7	12	12	14	17	12	16	5	4	0													
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3	7	7	9	14	10	19	18	12	20	0	7	0												
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	3	5	8	7	12	14	15	20	17	18	16	7	4	0											
37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3	7	7	10	14	12	21	19	19	25	6	16	0	1										
38	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	3	3	5	8	7	13	15	15	24	19	24	9	16	0	1											
39	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	2	3	3	7	8	10	14	22	22	24	24	9	16	0	1											
40	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	3	3	5	8	7	14	15	17	26	20	31	30	17	30	17	30	17	30	17			

Tabela 2 – Caracterização dada pelo Teorema 2.5

Exemplo 2.15. Do Exemplo 2.14, temos que

Partições de 10 com partes $\equiv \pm 2 \pmod{5}$	Matrizes	$\sum \left(\frac{d_{2i+1}}{2} + \frac{d_{2i}}{3} \right)$
(8, 2)	$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	2
(7, 3)	$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	2
(3, 3, 2, 2)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	4
(2, 2, 2, 2, 2)	$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$	5

Para um melhor entendimento dos dados da Tabela 2 temos a seguinte definição.

Definição 2.2. Para todo $k \geq 1$, seja $p_{\pm 2(5)}(n, k)$ o número de partições de n em exatamente k partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$.

Exemplo 2.16. Da Definição 2.2, olhando a linha $n = 10$ da Tabela 2, da direita para a esquerda,

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0	0	0	0	0	1	1	0	2	0

temos os seguintes valores $p_{\pm 2(5)}(10, 1) = 0$, $p_{\pm 2(5)}(10, 2) = 2$, $p_{\pm 2(5)}(10, 3) = 0$, $p_{\pm 2(5)}(10, 4) = 1$, $p_{\pm 2(5)}(10, 5) = 1$, $p_{\pm 2(5)}(10, 6) = 0$, $p_{\pm 2(5)}(10, 7) = 0$, $p_{\pm 2(5)}(10, 8) = 0$, $p_{\pm 2(5)}(10, 9) = 0$ e $p_{\pm 2(5)}(10, 10) = 0$.

2.2.3 Novos Resultados

Nesta subseção apresentamos resultados obtidos a partir da observação dos dados da Tabela 2. Alguns dos resultados foram análogos aos das partições com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$. Destacamos que resultados envolvendo os números triangulares também foram obtidos para as partições aqui consideradas. Primeiramente, notamos que as colunas se tornam constantes iguais a 0 a partir de um n ímpar e acima destas colunas de zeros sempre temos o número 1. Isto é resumido na proposição abaixo.

Proposição 2.9. Para todo n e $i \geq 0$ temos que

(a) $p_{\pm 2(5)}(2n + 1 + i, n + 1 + i) = 0$;

(b) $p_{\pm 2(5)}(2n, n) = 1$.

Demonstração. (a) Suponhamos que exista uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(2n + 1 + i, n + 1 + i)$.

Como 2 é o menor número natural congruente a $\pm 2 \pmod{5}$ temos que

$$2(n + 1 + i) = 2n + 2 + 2i > 2n + 1 + i,$$

o que é uma contradição.

- (b) Notamos que $\underbrace{(2, 2, \dots, 2)}_{n \text{ vezes}}$ é uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(2n, n)$. Suponha que exista outra partição $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, logo existe λ_j , $1 \leq j \leq n$ tal que $\lambda_j \geq 3$. Assim,

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j + \dots + \lambda_n > \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n \text{ vezes}} = 2n,$$

o que é uma contradição.

□

Observação 2.2. Ao olharmos a primeira diagonal da Tabela 2, que contabiliza o número de partições com exatamente uma parte congruente a $\pm 2 \pmod{5}$, temos que $p_{\pm 2(5)}(n, 1) = 1$ se, e somente se, $n \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Os seguintes resultados obtemos examinando os dados da segunda diagonal da Tabela 2.

Proposição 2.10. Para todo n temos que $p_{\pm 2(5)}(5n, 2) = n$.

Demonstração. A prova é análoga à da Proposição 2.2, substituindo 1 e 4 por 2 e 3, respectivamente.

□

Proposição 2.11. Para todo n temos que

$$(a) \quad p_{\pm 2(5)}(10n - 6, 2) = p_{\pm 2(5)}(10n - 1, 2) = n;$$

$$(b) \quad p_{\pm 2(5)}(10n - 4, 2) = p_{\pm 2(5)}(10n + 1, 2) = n.$$

Demonstração. Provamos o item (a), o outro item segue de maneira análoga. Para a primeira igualdade, notamos que ambas as partes das partições contadas por $p_{\pm 2(5)}(10n - 6, 2)$ ou por $p_{\pm 2(5)}(10n - 1, 2)$ devem ser congruentes a 2 $\pmod{5}$. Assim, dada uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(10n - 6, 2)$, adicionando-se 5 na maior parte obtemos uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(10n - 1, 2)$. Reciprocamente, dada uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(10n - 1, 2)$ subtraindo-se 5 da maior parte obtemos uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(10n - 6, 2)$.

Para a segunda igualdade, consideramos $(5k_1 - 3, 5k_2 - 3)$, com $k_1, k_2 \geq 1$, uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(10n - 1, 2)$. Então,

$$\begin{aligned} (5k_1 - 3) + (5k_2 - 3) &= 10n - 1 \\ 5(k_1 + k_2) &= 10n + 5 \\ k_1 + k_2 &= 2n + 1. \end{aligned}$$

Como o número de partições de $2n + 1$ em exatamente duas partes é $\left\lfloor \frac{2n + 1}{2} \right\rfloor = n$, temos que $p_{\pm 2(5)}(10n - 1, 2) = n$.

□

Exemplo 2.17. Considerando $n = 5$ ilustramos a prova do item (a) da Proposição 2.11.

$P_{\pm 2(5)}(44, 2)$	$P_{\pm 2(5)}(49, 2)$		$P(11, 2)$
(44, 2)	(49, 2)	$(5 \cdot 10 - 3, 5 \cdot 1 - 3)$	(10, 1)
(37, 7)	(42, 7)	$(5 \cdot 9 - 3, 5 \cdot 2 - 3)$	(9, 2)
(32, 12)	(37, 12)	$(5 \cdot 8 - 3, 5 \cdot 3 - 3)$	(8, 3)
(27, 17)	(32, 17)	$(5 \cdot 7 - 3, 5 \cdot 4 - 3)$	(7, 4)
(22, 22)	(27, 22)	$(5 \cdot 6 - 3, 5 \cdot 5 - 3)$	(6, 5)

Olhando os dados da terceira diagonal da Tabela 2 encontramos os resultados abaixo. Dentre estes, também obtemos relações que envolvem os números triangulares. Para o próximo teorema necessitamos do seguinte lema.

Lema 2.4. *Para todo n temos que*

- (a) *O número de partições de $10n + 2$ em exatamente três partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5, é igual a n , ou seja,*

$$p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 2, 3) = n.$$

- (b) *O número de partições de $10n + 7$ em exatamente três partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual a $n + 1$, ou seja,*

$$p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 7, 3) = n + 1.$$

Demonstração. A prova de cada item é análoga aos do Lema 2.1. No caso do item (a) notamos que as possíveis diferenças entre as duas maiores partes de uma partição $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ contada por $p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 2, 3)$ é 0, 1 ou 4. \square

Teorema 2.6. *Para todo n temos que*

- (a) $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) - p_{\pm 2(5)}(10n - 3, 3) = n$;
- (b) $p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) - p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = n + 1$.

Demonstração. Provamos o primeiro item, sendo o outro análogo. Consideramos a união disjunta, $P_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 2, 3) \cup P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 2, 3)$. Notamos que existe uma bijeção entre os conjuntos $P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 2, 3)$ e $P_{\pm 2(5)}(10n - 3, 3)$.

Então, $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = |P_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3)| = |P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(10n + 2, 3)| + |P_{\pm 2(5)}(10n - 3, 3)|$. Pelo item (a) do Lema 2.4 temos que $|P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(10n + 2, 3)| = n$, logo

$$p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) - p_{\pm 2(5)}(10n - 3, 3) = n.$$

\square

Exemplo 2.18. *Considerando $n = 3$ ilustramos a prova do item (a) do Teorema 2.6 na tabela abaixo. Constatamos que existem 3 partições cuja diferença entre as duas maiores partes é 0 ou 1 ou 4 e tais partições não possuem correspondentes no conjunto $P_{\pm 2(5)}(27, 3)$.*

$P_{\pm 2(5)}(32, 3)$		$P_{\pm 2(5)}(27, 3)$
(28, 2, 2)	(28 - 5, 2, 2)	(23, 2, 2)
(27, 3, 2)	(27 - 5, 3, 2)	(22, 3, 2)
(23, 7, 2)	(23 - 5, 7, 2)	(18, 7, 2)
(22, 8, 2)	(22 - 5, 8, 2)	(17, 8, 2)
(22, 7, 3)	(22 - 5, 7, 3)	(17, 7, 3)
(18, 12, 2)	(18 - 5, 12, 2)	(13, 12, 2)
(18, 7, 7)	(18 - 5, 7, 7)	(13, 7, 7)
(17, 12, 3)	(17 - 5, 12, 3)	(12, 12, 3)
(17, 8, 7)	(17 - 5, 8, 7)	(12, 8, 7)
(17, 13, 2)		
(13, 12, 7)		
(12, 12, 8)		

Combinando os itens do teorema acima, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 2.2. *Para todo n , sendo T_n o n -ésimo número triangular, temos que*

$$(a) \ p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = 2T_n;$$

$$(b) \ p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) = T_n + T_{n+1}.$$

Demonstração. (a) Pelos itens (a) e (b) do Teorema 2.6, respectivamente, temos

$$p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) - p_{\pm 2(5)}(10n - 3, 3) = n \quad (2.24)$$

e

$$p_{\pm 1(5)}(10(n - 1) + 7, 3) - p_{\pm 1(5)}(10(n - 1) + 2, 3) = n. \quad (2.25)$$

Nas equações (2.24) e (2.25), se substituirmos n por $n - 1$, $n - 2$, \dots , 2 e 1, obtemos a seqüência de equações

$$p_{\pm 2(5)}(10(n - 1) + 2, 3) - p_{\pm 2(5)}(10(n - 1) - 3, 3) = n - 1 \quad (2.26)$$

$$p_{\pm 2(5)}(10(n - 2) + 7, 3) - p_{\pm 2(5)}(10(n - 2) + 2, 3) = n - 1 \quad (2.27)$$

$$p_{\pm 2(5)}(10(n - 2) + 2, 3) - p_{\pm 2(5)}(10(n - 2) - 3, 3) = n - 2 \quad (2.28)$$

$$p_{\pm 2(5)}(10(n - 3) + 7, 3) - p_{\pm 2(5)}(10(n - 3) + 2, 3) = n - 2 \quad (2.29)$$

$$p_{\pm 2(5)}(10(n - 3) + 2, 3) - p_{\pm 2(5)}(10(n - 3) - 3, 3) = n - 3 \quad (2.30)$$

$$p_{\pm 2(5)}(10(n - 4) + 7, 3) - p_{\pm 2(5)}(10(n - 4) + 2, 3) = n - 3 \quad (2.31)$$

\dots

$$p_{\pm 2(5)}(12, 3) - p_{\pm 2(5)}(7, 3) = 1 \quad (2.32)$$

$$p_{\pm 2(5)}(7, 3) - p_{\pm 2(5)}(2, 3) = 1 \quad (2.33)$$

Somando-se as equações (2.24) até (2.33) e observando que $p_{\pm 2(5)}(2, 3) = 0$, temos que

$$p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = 2n + 2(n - 1) + 2(n - 3) + \dots + 2 = 2T_n.$$

- (b) Pelo item anterior, $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = 2T_n$ e do item (b) do Teorema 2.6, $p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) - p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = n + 1$. Somando-se estas duas equações, obtemos que

$$p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) = 2T_n + (n + 1) = T_n + T_{n+1}$$

□

Proposição 2.12. Para todo n temos que $p_{\pm 2(5)}(5n, 3) = 0$.

Demonstração. A prova é análoga à da Proposição 2.4.

□

Proposição 2.13. Para todo n temos que

- (a) $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3) = p_{\pm 2(5)}(10n + 3, 3)$;
 (b) $p_{\pm 2(5)}(10n + 7, 3) = p_{\pm 2(5)}(10n + 8, 3)$.

Demonstração. A prova desta proposição é similar à da Proposição 2.5, observando que no caso do item (a) a partir da parte congruente a 3 $\pmod{5}$ de uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(10n + 2, 3)$ acrescentamos 1 na parte congruente a 2 $\pmod{5}$ imediatamente menor. E da parte congruente a 2 $\pmod{5}$ de uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(10n + 3, 3)$ subtraímos 1 da parte congruente a 3 $\pmod{5}$ imediatamente maior.

□

Exemplo 2.19. Considerando $n = 2$ ilustramos o resultado do item (a) da Proposição 2.13.

$P_{\pm 2(5)}(22, 3)$		$P_{\pm 2(5)}(23, 3)$
(18, 2, 2)	(18, 2 + 1, 2)	(18, 3, 2)
(17, 3, 2)	(17, 3, 2 + 1)	(17, 3, 3)
(13, 7, 2)	(13, 7 + 1, 2)	(13, 8, 2)
(12, 8, 2)	(12, 8, 2 + 1)	(12, 8, 3)
(12, 7, 3)	(12 + 1, 7, 3)	(13, 7, 3)
(8, 7, 7)	(8, 7 + 1, 7)	(8, 8, 7)

Proposição 2.14. Para todo n temos que

$$p_{\pm 2(5)}(5n + 4, 3) = p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 3) = p(n + 2, 3).$$

Demonstração. Para a primeira igualdade, consideramos uma partição (μ_1, μ_2, μ_3) contada por $p_{\pm 2(5)}(5n+4, 3)$, notamos que as três partes são congruentes a 3 $\pmod{5}$. Assim, subtraindo-se 1 de cada uma destas partes obtemos uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n+1, 3)$. Reciprocamente, dada uma partição $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ contada por $p_{\pm 2(5)}(5n+1, 3)$, notamos que estas três partes devem ser congruentes a 2 $\pmod{5}$. Adicionando-se 1 em cada uma destas partes obtemos uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n+4, 3)$.

Para a segunda igualdade, consideramos uma partição $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ contada por $p_{\pm 2(5)}(5n+1, 3)$, então $\lambda_i = 5k_i + 2$ com $i = 1, 2, 3$. Assim, $(k_1 + 1, k_2 + 1, k_3 + 1)$ é uma partição contada por $p(n+2, 3)$. Reciprocamente, seja $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ uma partição contada por $p(n+2, 3)$, então $(5(\alpha_1 - 1) + 2, 5(\alpha_2 - 1) + 2, 5(\alpha_3 - 1) + 2)$ é uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n+1, 3)$. \square

Exemplo 2.20. Considerando $n = 5$ ilustramos a prova da Proposição 2.14.

$P_{\pm 2(5)}(29, 3)$	$P_{\pm 2(5)}(26, 3)$			$P(7, 3)$
(23, 3, 3)	(22, 2, 2)	$(5 \cdot 4 + 2, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	$(4 + 1, 0 + 1, 0 + 1)$	(5, 1, 1)
(18, 8, 8)	(17, 7, 7)	$(5 \cdot 3 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2)$	$(3 + 1, 1 + 1, 1 + 1)$	(4, 2, 2)
(13, 13, 3)	(12, 12, 2)	$(5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	$(2 + 1, 2 + 1, 0 + 1)$	(3, 3, 1)
(13, 8, 8)	(12, 7, 7)	$(5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2)$	$(2 + 1, 1 + 1, 1 + 1)$	(3, 2, 2)

Para o próximo teorema, que também apresenta uma relação com os números triangulares, obtido observando-se os dados da quarta diagonal da Tabela 2, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.5. Para todo n e $i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$, temos que

- (a) $p_{\pm 2(5)}(10n, 4, \text{menor parte } S_{2i-1}) = p_{\pm 2(5)}(10(n - (2i - 1)) + 8, 3)$;
- (b) $p_{\pm 2(5)}(10n + 5, 4, \text{menor parte } S_{2i-1}) = p_{\pm 2(5)}(10(n - 2(i - 1)) + 2, 3)$;
- (c) $p_{\pm 2(5)}(10n, 4, \text{menor parte } S_{2i}) = p_{\pm 2(5)}(10(n - 2i) + 7, 3)$;
- (d) $p_{\pm 2(5)}(10n + 5, 4, \text{menor parte } S_{2i}) = p_{\pm 2(5)}(10(n - (2i - 1)) + 2, 3)$.

Demonstração. A prova de cada item é análogo ao Lema 2.2, fazendo as devidas substituições. \square

Teorema 2.7. Para todo $n \geq 1$ temos que

$$(a) \quad p_{\pm 2(5)}(10n, 4) = 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(b) \quad p_{\pm 2(5)}(10n + 5, 4) = 2 \cdot \sum_{i=1}^n T_i = 2 \cdot \binom{n+2}{3}.$$

Demonstração. (a) Lembramos que L_i é o i -ésimo número congruente a $\pm 2 \pmod{5}$. Classificamos as partições contadas por $p_{\pm 2(5)}(10n, 4)$ de acordo com sua menor parte. Notamos que o valor máximo para esta parte é L_n , que poderá ser

$$L_{2i} = 5(i-1) + 3, \text{ para } i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad \text{ou} \quad L_{2i-1} = 5(i-1) + 2, \text{ para } i \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Após esta classificação, temos que

$$\begin{aligned} p_{\pm 2(5)}(10n, 4) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} p_{\pm 2(5)}(10n, 4, \text{menor parte } L_{2i-1}) \\ &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{\pm 2(5)}(10n, 4, \text{menor parte } L_{2i}). \end{aligned}$$

Pelos itens (a) e (c) do Lema 2.5, esta igualdade torna-se

$$\begin{aligned} p_{\pm 2(5)}(10n, 4) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} p_{\pm 2(5)}(10(n - (2i - 1)) + 8, 3) \\ &+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} p_{\pm 2(5)}(10(n - 2i) + 7, 3). \end{aligned}$$

Pelo item (b) da Proposição 2.13, temos que

$$p_{\pm 2(5)}(10(n - 2i) + 7, 3) = p_{\pm 2(5)}(10(n - 2i) + 8, 3).$$

Combinando-a com o item (b) do Corolário 2.2, podemos escrever

$$\begin{aligned} p_{\pm 2(5)}(10n, 4) &= \sum_{i=1}^n p_{\pm 2(5)}(10(n - i) + 7, 3) \\ &= \sum_{i=1}^n (T_{n-i} + T_{n-i+1}) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n. \end{aligned}$$

A segunda igualdade segue por indução.

(b) A prova é análoga ao item anterior, usando os itens (b) e (d) do Lema 2.5 e o item (a) do Corolário 2.2. □

Para o próximo teorema, que também é um resultado extraído da observação dos dados da quarta diagonal da Tabela 2, precisamos do lema e da proposição abaixo.

Lema 2.6. *O número de partições de $5n - 1$ em quatro partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ e cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual ao número de partições de $n - 2$ em até três partes, ou seja,*

$$p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n - 1, 4) = p(n - 2, \leq 3).$$

Demonstração. A prova é análoga a do Lema 2.3, observando que a diferença possível entre as duas maiores partes de uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n - 1, 4)$ é 0, 1 ou 4. □

Exemplo 2.21. *Para ilustrarmos a bijeção apresentada no lema anterior, consideramos $n = 5$. Na primeira tabela, a partir das partições contadas por $p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(24, 4)$, obtemos as contadas por $p(3, \leq 3)$.*

$P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(24, 4)$			$P(3, \leq 3)$
(12, 8, 2, 2)	$(5 \cdot (\mathbf{1} + 1) + 2, 5 \cdot \mathbf{1} + 3, 5 \cdot \mathbf{0} + 2, 5 \cdot \mathbf{0} + 2)$	(2 · 1 + 1, 0, 0)	(3, 0, 0)
(8, 7, 7, 2)	$(5 \cdot \mathbf{1} + 3, 5 \cdot \mathbf{1} + 2, 5 \cdot \mathbf{1} + 2, 5 \cdot \mathbf{0} + 2)$	(2 · 1, 1, 0)	(2, 1, 0)
(7, 7, 7, 3)	$(5 \cdot \mathbf{1} + 2, 5 \cdot \mathbf{1} + 2, 5 \cdot \mathbf{1} + 2, 5 \cdot \mathbf{0} + 3)$	(1 + 0, 1, 1)	(1, 1, 1)

Na tabela abaixo, apresentamos o processo inverso.

	$P(3, \leq 3)$		$P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(24, 4)$
μ_1 par, $\frac{\mu_1}{2} \geq \mu_2$	(2, 1, 0)	$(5 \cdot \frac{2}{2} + 3, 5 \cdot \frac{2}{2} + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(8, 7, 7, 2)
μ_1 ímpar, $\frac{\mu_1 - 1}{2} \geq \mu_2$	(3, 0, 0)	$(5 \cdot \frac{3-1}{2} + 3, 5 \cdot \frac{3+1}{2} + 2, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(12, 8, 2, 2)
μ_1 ímpar, $\frac{\mu_1 - 1}{2} < \mu_2$	(1, 1, 1)	$(5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot (1-1) + 3, 5 \cdot 1 + 2)$	(7, 7, 7, 3)

Proposição 2.15. Para todo n temos que

$$p_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) - p_{\pm 2(5)}(5n - 6, 4) = p(n - 2, \leq 3).$$

Demonstração. Consideramos $P_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) = P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n - 1, 4) \cup P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(5n - 1, 4)$. Notamos que $|P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(5n - 1, 4)| = |P_{\pm 2(5)}(5n - 6, 4)|$. Por outro lado, pelo Lema 2.6, $|P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n - 1, 4)| = p(n - 2, \leq 3)$. Assim,

$$p_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) - p_{\pm 2(5)}(5n - 6, 4) = p(n - 2, \leq 3).$$

□

Com os dois resultados acima, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 2.8. Para todo $n \geq 2$ temos que

$$p_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) = p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 4) = \sum_{i=0}^{n-2} p(i, \leq 3).$$

Demonstração. Para a primeira igualdade, notamos que qualquer partição de $5n - 1$ em exatamente quatro partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ deve possuir três partes congruentes a $2 \pmod{5}$ e uma parte congruente a $3 \pmod{5}$. Além disso, qualquer partição de $5n + 1$ em exatamente quatro partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ deve possuir três partes congruentes a $3 \pmod{5}$ e uma parte congruente a $2 \pmod{5}$.

Assim, uma bijeção entre os conjuntos destes dois tipos de partições é obtida adicionando-se 1 em cada uma das duas partes consecutivas congruentes a $2 \pmod{5}$ menores do que a única parte congruente $3 \pmod{5}$. Quando há menos de duas partes menores do que a única parte congruente a $3 \pmod{5}$, continuamos o processo a partir da maior parte. A aplicação inversa é facilmente construída.

Para a segunda igualdade, da Proposição 2.15, temos que

$$\begin{aligned} p_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) - p_{\pm 2(5)}(5n - 6, 4) &= p(n - 2, \leq 3) \\ p_{\pm 1(5)}(5n - 6, 4) - p_{\pm 2(5)}(5n - 11, 4) &= p(n - 3, \leq 3) \\ &\vdots \\ p_{\pm 2(5)}(9, 4) - p_{\pm 2(5)}(4, 4) &= p(0, \leq 3). \end{aligned}$$

Somando-se todas as equações acima, obtemos que

$$p_{\pm 2(5)}(5n - 1, 4) - p_{\pm 2(5)}(4, 4) = \sum_{i=0}^{n-2} p(i, \leq 3).$$

Como $p_{\pm 2(5)}(4, 4) = 0$, segue o resultado. \square

Exemplo 2.22. Para ilustrarmos a bijeção descrita na prova do Teorema 2.8, consideramos $n = 4$. Então,

$P_{\pm 2(5)}(19, 4)$		$P_{\pm 2(5)}(21, 4)$
(13 , 2, 2, 2)	(13 , 2 + 1, 2 + 1, 2)	(13, 3 , 3, 2)
(12, 3 , 2, 2)	(12, 3 , 2 + 1, 2 + 1)	(12 , 3, 3, 3)
(8 , 7, 2, 2)	(8 , 7 + 1, 2 + 1, 2)	(8, 8, 3 , 2)
(7, 7, 3 , 2)	(7 + 1, 7, 3 , 2 + 1)	(8, 7 , 3, 3)

Proposição 2.16. Para todo $n \geq 2$ temos que

$$p_{\pm 2(5)}(5n - 2, 4) = p_{\pm 2(5)}(5n + 2, 4) = p(n - 2, \leq 4).$$

Demonstração. Para a primeira igualdade. Seja $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n - 2, 4)$, notamos que as quatro partes são congruentes a $2 \pmod{5}$. Adicionando-se 1 em cada parte obtemos uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n + 2, 4)$, a qual possui todas as partes congruentes a $3 \pmod{5}$. A aplicação inversa é facilmente descrita.

Para a segunda igualdade, consideramos uma partição $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ contada por $p_{\pm 2(5)}(5n + 2, 4)$, ou seja, $\mu_i = 5k_i + 3$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Então (k_1, k_2, k_3, k_4) é uma partição contada por $p(n - 2, \leq 4)$. \square

Exemplo 2.23. Para ilustrarmos o resultado da Proposição 2.16, consideramos $n = 7$. Então,

$P_{\pm 2(5)}(33, 4)$	$P_{\pm 2(5)}(37, 4)$		$P(5, \leq 4)$
(27, 2, 2, 2)	(28, 3, 3, 3)	$(5 \cdot 5 + 3, 5 \cdot 0 + 3, 5 \cdot 0 + 3, 5 \cdot 0 + 3)$	(5, 0, 0, 0)
(22, 7, 2, 2)	(23, 8, 3, 3)	$(5 \cdot 4 + 3, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 0 + 3, 5 \cdot 0 + 3)$	(4, 1, 0, 0)
(17, 12, 2, 2)	(18, 13, 3, 3)	$(5 \cdot 3 + 3, 5 \cdot 2 + 3, 5 \cdot 0 + 3, 5 \cdot 0 + 3)$	(3, 2, 0, 0)
(17, 7, 7, 2)	(18, 8, 8, 3)	$(5 \cdot 3 + 3, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 0 + 3)$	(3, 1, 1, 0)
(12, 12, 7, 2)	(13, 13, 8, 3)	$(5 \cdot 2 + 3, 5 \cdot 2 + 3, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 0 + 3)$	(2, 2, 1, 0)
(12, 7, 7, 7)	(13, 8, 8, 8)	$(5 \cdot 2 + 3, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 1 + 3)$	(2, 1, 1, 1)

Para o próximo teorema, o qual é um resultado extraído da observação dos dados da quinta diagonal da Tabela 2, precisamos do lema e da proposição abaixo.

Lema 2.7. *O número de partições de $5n + 1$ em cinco partes congruentes a $\pm 2 \pmod{5}$ e cuja diferença entre as duas maiores partes é menor do que 5 é igual ao número de partições de $n - 2$ em até quatro partes, ou seja, $p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n + 1, 5) = p(n - 2, \leq 4)$.*

Demonstração. As diferenças possíveis entre as duas maiores partes, de acordo com o teorema são: 0, 1 ou 4. Analisamos os três casos.

- **Diferença 0:** Temos que $\lambda_1 = \lambda_2 \equiv 2 \pmod{5}$ e $\lambda_i \equiv 3 \pmod{5}$ para algum $i \in \{3, 4, 5\}$ e as outras duas partes restantes congruentes a $2 \pmod{5}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $i = 3$. Então,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 5n + 1 \\ (5k + 2) + (5k + 2) + (5k_3 + 3) + (5k_4 + 2) + (5k_5 + 2) &= 5n + 1 \\ 5(2k + k_3 + k_4 + k_5) &= 5n - 10 \\ 2k + k_3 + k_4 + k_5 &= n - 2, \end{aligned}$$

com $k_5 \leq k_4 \leq k_3 < k$.

Consideramos a partição $(k + k_3, k, k_4, k_5)$, claramente contada por $p(n - 2, \leq 4)$. Para as outras possibilidades da parte congruente a $3 \pmod{5}$, consideramos

$$(k + k_4, k, k_3, k_5), \text{ para } i = 4,$$

e

$$(k + k_5, k, k_3, k_4), \text{ para } i = 5.$$

Notamos que $\frac{k + k_i - 1}{2} < k$ com $i = 3, i = 4$ ou $i = 5$.

- **Diferença 1:** Temos que $\lambda_1 = 5k + 3, \lambda_2 = 5k + 2, \lambda_i = 5k_i + 2$ com $i = \{3, 4, 5\}$, sujeitas a $k_5 \leq k_4 \leq k_3 \leq k$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 5n + 1 \\ (5k + 3) + (5k + 2) + (5k_3 + 2) + (5k_4 + 2) + (5k_5 + 2) &= 5n + 1 \\ 2k + k_3 + k_4 + k_5 &= n - 2. \end{aligned}$$

Consideramos a partição $(2k, k_3, k_4, k_5)$ claramente contada por $p(n - 2, \leq 4)$ e notamos que $\frac{2k_1}{2} \geq k_3$.

- **Diferença 4:** Temos que $\lambda_1 = 5(k+1) + 2$, $\lambda_2 = 5k + 3$ e $\lambda_i = 5k_i + 2$ com $i = \{3, 4, 5\}$, sujeitas a $k_5 \leq k_4 \leq k_3 \leq k$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 &= 5n + 1 \\ (5(k+1) + 2) + (5k + 3) + (5k_3 + 2) + (5k_4 + 2) + (5k_4 + 2) &= 5n + 1 \\ 2k + 1 + k_3 + k_4 + k_5 &= n - 2. \end{aligned}$$

Consideramos a partição $(2k+1, k_3, k_4, k_5)$ que é contada por $p(n-2, \leq 4)$. Notamos que $\frac{(2k+1)-1}{2} \geq k_3$.

A aplicação definida é uma bijeção. De fato, consideramos (μ_1, μ_2, μ_3) uma partição de $n-2$, cujas partes podem ser zero. Precisamos dividir a primeira parte em duas para estabelecermos uma parte congruente $2 \pmod{5}$ e uma a $3 \pmod{5}$. As restantes serão $5\mu_i + 2$, $i \in \{2, 3, 4\}$. Pela classificação que fizemos, somos capazes de reescrevê-las como segue, ordenando as partes, se necessário:

- μ_1 par e $\frac{\mu_1}{2} \geq \mu_2$: Tome a partição

$$\left(5 \cdot \frac{\mu_1}{2} + 3, 5 \cdot \frac{\mu_1}{2} + 2, 5\mu_2 + 2, 5\mu_3 + 2, 5\mu_4 + 2 \right).$$

- μ_1 par e $\frac{\mu_1}{2} < \mu_2$: Tome a partição

$$\left(5\mu_2 + 2, 5\mu_2 + 2, 5(\mu_1 - \mu_2) + 3, 5\mu_3 + 2, 5\mu_4 + 2 \right).$$

- μ_1 ímpar e $\frac{\mu_1 - 1}{2} \geq \mu_2$: Tome a partição

$$\left(5 \cdot \frac{\mu_1 - 1}{2} + 3, 5 \cdot \frac{\mu_1 - 1}{2} + 2, 5\mu_2 + 2, 5\mu_3 + 2, 5\mu_4 + 2 \right).$$

- μ_1 ímpar e $\frac{\mu_1 - 1}{2} < \mu_2$: Tome a partição

$$(5\mu_2 + 2, 5\mu_2 + 2, 5(\mu_1 - \mu_2) + 3, 5\mu_3 + 2, 5\mu_4 + 2).$$

□

Exemplo 2.24. Para ilustrarmos a bijeção apresentada no lema anterior, consideramos $n = 5$. Na primeira tabela, a partir de partições contadas por $p_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(36, 5)$, obtemos as partições contadas por $p(5, \leq 4)$.

$P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(36, 5)$			$P(5, \leq 4)$
(17, 13, 2, 2, 2)	$(5 \cdot 3 + 2, 5 \cdot 2 + 3, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(3 + 2, 0, 0, 0)	(5, 0, 0, 0)
(13, 12, 7, 2, 2)	$(5 \cdot 2 + 3, 5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(2 + 2, 1, 0, 0)	(4, 1, 0, 0)
(12, 12, 8, 2, 2)	$(5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(2 + 1, 2, 0, 0)	(3, 2, 0, 0)
(12, 12, 7, 3, 2)	$(5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 0 + 3, 5 \cdot 0 + 2)$	(2 + 0, 2, 1, 0)	(2, 2, 1, 0)
(12, 8, 7, 7, 2)	$(5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(2 + 1, 1, 1, 0)	(3, 1, 1, 0)
(8, 7, 7, 7, 7)	$(5 \cdot 1 + 3, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2)$	(1 + 1, 1, 1, 1)	(2, 1, 1, 1)

Na tabela abaixo, apresentamos o processo inverso.

	$P(5, \leq 4)$		$P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(36, 5)$
μ_1 par,	(4, 1, 0, 0)	$\left(5 \cdot \frac{4}{2} + 3, 5 \cdot \frac{4}{2} + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2\right)$	(13, 12, 7, 2, 2)
$\frac{\mu_1}{2} \geq \mu_2$	(2, 1, 1, 1)	$\left(5 \cdot \frac{2}{2} + 3, 5 \cdot \frac{2}{2} + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2\right)$	(8, 7, 7, 7, 7)
μ_1 par,	(2, 2, 1, 0)	$(5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot (2 - 2) + 3, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(12, 12, 7, 3, 2)
$\frac{\mu_1}{2} < \mu_2$			
μ_1 ímpar,	(5, 0, 0, 0)	$\left(5 \cdot \frac{5+1}{2} + 3, 5 \cdot \frac{5-1}{2} + 2, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2\right)$	(17, 13, 2, 2, 2)
$\frac{\mu_1 - 1}{2} \geq \mu_2$	(3, 1, 1, 0)	$\left(5 \cdot \frac{3+1}{2} + 3, 5 \cdot \frac{3-1}{2} + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 1 + 2, 5 \cdot 0 + 2\right)$	(12, 8, 7, 7, 2)
μ_1 ímpar,	(3, 2, 0, 0)	$(5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot 2 + 2, 5 \cdot (3 - 2) + 3, 5 \cdot 0 + 2, 5 \cdot 0 + 2)$	(12, 12, 8, 2, 2)
$\frac{\mu_1 - 1}{2} < \mu_2$			

Proposição 2.17. Para todo n temos que

$$p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5) - p_{\pm 2(5)}(5n - 4, 5) = p(n - 2, \leq 4).$$

Demonstração. Dividindo o conjunto $P_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5)$ em dois subconjuntos disjuntos de acordo com a diferença entre as duas maiores partes de cada partição, temos que:

$$P_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5) = P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n + 1, 5) \cup P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(5n + 1, 5).$$

Temos que $|P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 \geq 5}(5n + 1, 5)| = p_{\pm 2(5)}(5n - 4, 5)$, sendo a bijeção descrita apenas subtraindo-se 5 da maior parte. Por outro lado, pelo Lema 2.7 temos que $|P_{\pm 2(5)}^{\lambda_1 - \lambda_2 < 5}(5n + 1, 5)| = p(n - 2, \leq 4)$. Portanto, $p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5) - p_{\pm 2(5)}(5n - 4, 5) = p(n - 2, \leq 4)$. \square

Teorema 2.9. *Para todo n temos que*

$$p_{\pm 2(5)}(5n + 4, 5) = p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5) = \sum_{i=0}^{n-2} p(i, \leq 4).$$

Demonstração. Para a primeira igualdade, notamos que qualquer partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n + 4, 4)$ possui quatro partes congruentes a $3 \pmod{5}$ e uma parte congruente a $2 \pmod{5}$. Além disso, qualquer partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 4)$ possui quatro partes congruentes a $2 \pmod{5}$ e uma parte congruente a $3 \pmod{5}$.

Seja $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ tal partição e suponha que λ_i é a única parte congruente a $2 \pmod{5}$. Subtraímos 1 de cada uma das três partes anteriores a esta, se a quantidade for menor do que três continuamos o processo a partir da menor parte. Assim, obtemos uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 4)$. Reciprocamente, consideramos $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5)$ uma partição contada por $p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 4)$, adiciona-se 1 em cada parte depois da única parte congruente a $3 \pmod{5}$. Se a quantidade de partes depois desta for menor do que três continuamos o processo pela maior parte.

Para a segunda igualdade, da Proposição 2.17, temos que

$$\begin{aligned} p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5) - p_{\pm 2(5)}(5n - 4, 5) &= p(n - 2, \leq 4) \\ p_{\pm 2(5)}(5n - 4, 5) - p_{\pm 2(5)}(5n - 9, 5) &= p(n - 3, \leq 4) \\ &\vdots \\ p_{\pm 2(5)}(11, 5) - p_{\pm 2(5)}(6, 5) &= p(0, \leq 4). \end{aligned}$$

Somando-se todas as equações acima, obtemos que

$$p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5) - p_{\pm 2(5)}(6, 5) = \sum_{i=0}^{n-2} p(i, \leq 4).$$

Como $p_{\pm 2(5)}(6, 5) = 0$, segue o resultado. □

Exemplo 2.25. *Para ilustrarmos a bijeção descrita na prova do Teorema 2.9, considere $n = 5$. Então,*

$P_{\pm 2(5)}(29, 5)$		$P_{\pm 2(5)}(26, 5)$
(18, 3, 3, 3, 2)	(18, 3 - 1, 3 - 1, 3 - 1, 2)	(18, 2, 2, 2, 2)
(17 , 3, 3, 3, 3)	(17 , 3, 3 - 1, 3 - 1, 3 - 1)	(17, 3, 2, 2, 2)
(13, 8, 3, 3, 2)	(13, 8 - 1, 3 - 1, 3 - 1, 2)	(13, 7, 2, 2, 2)
(12 , 8, 3, 3, 3)	(12 , 8, 3 - 1, 3 - 1, 3 - 1)	(12, 8, 2, 2, 2)
(13, 7 , 3, 3, 3)	(13 - 1, 7 , 3, 3 - 1, 3 - 1)	(12, 7, 3, 2, 2)
(8, 8, 8, 3, 2)	(8, 8 - 1, 8 - 1, 3 - 1, 2)	(8, 7, 7, 2, 2)
(8, 8, 7 , 3, 3)	(8 - 1, 8 - 1, 7 , 3, 3 - 1)	(7, 7, 7, 3, 2)

Corolário 2.3. *Para todo $n \geq 2$ temos que*

$$\sum_{i=2}^n p_{\pm 2(5)}(5i - 2, 4) = p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5).$$

Demonstração. Da Proposição 2.16 temos que $p_{\pm 2(5)}(5i - 2, 4) = p(i - 2, \leq 4)$, para todo $i \geq 2$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n p_{\pm 2(5)}(5i - 2, 4) &= \sum_{i=2}^n p(i - 2, \leq 4) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} p(i, \leq 4) \\ &= p_{\pm 2(5)}(5n + 1, 5). \quad (\text{Teorema 2.9}) \end{aligned}$$

□

Proposição 2.18. *Para todo n temos que*

$$p_{\pm 2(5)}(5n + 2, 5) = p_{\pm 2(5)}(5n + 3, 5).$$

Demonstração. A prova é análoga a Proposição 2.7. □

Exemplo 2.26. *Para ilustrarmos a bijeção da Proposição 2.18, consideramos $n = 5$, notamos que na coluna da esquerda temos duas partes congruentes a $3 \pmod{5}$ e na da direita temos três (todas em negrito). Então,*

$P_{\pm 2(5)}(26, 5)$		$P_{\pm 2(5)}(29, 5)$
(17, 3 , 3 , 2, 2)	(17, 3 , 3 , 2 + 1, 2)	(17, 3 , 3 , 3 , 2)
(13 , 8 , 2, 2, 2)	(13 , 8 , 2 + 1, 2, 2)	(13 , 8 , 3 , 2, 2)
(13 , 7, 3 , 2, 2)	(13 , 7, 3 , 2 + 1, 2)	(13 , 7, 3 , 3 , 2)
(12, 8 , 3 , 2, 2)	(12, 8 , 3 , 2 + 1, 2)	(12, 8 , 3 , 3 , 2)
(12, 7, 3 , 3 , 2)	(12, 7, 3 , 3 , 2 + 1)	(12, 7, 3 , 3 , 3)
(8 , 8 , 7, 2, 2)	(8 , 8 , 7 + 1, 2, 2)	(8 , 8 , 8 , 2, 2)
(8 , 7, 7, 3 , 2)	(8 , 7, 7, 3 , 2 + 1)	(8 , 7, 7, 3 , 3)
(7, 7, 7, 3 , 3)	(7 + 1, 7 + 1, 7, 3 , 3 - 1)	(8 , 8 , 7, 3 , 2)

2.3 Generalizações

Nas seções anteriores apresentamos a partir das partições, para um n fixo, com partes congruentes a $\pm 1 \pmod{5}$ e a $\pm 2 \pmod{5}$ suas representações matriciais de acordo com os Teorema 2.1 e 2.5, respectivamente. Apresentamos também duas tabelas com os dados das somas definidas a partir da segunda linha destas matrizes e vários resultados obtidos pela observação dos dados das mesmas. Assim, nesta seção apresentamos generalizações de alguns dos resultados exibidos, sendo as demonstrações facilmente adaptáveis.

Teorema 2.10. *Para todo n e $r \geq 3$, o número de partições de n em partes congruentes a $\pm 1 \pmod{r}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

cujas entradas não negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0, \quad (2.35)$$

$$c_{2i-1} = rd_{2i+1} + rd_{2i+3} + \dots, \quad (2.36)$$

$$c_{2i} = r \frac{d_{2i+2}}{r-1} + r \frac{d_{2i+4}}{r-1} + \dots, \quad (2.37)$$

$$r-1 \mid d_t, \text{ se } t \text{ é par.}$$

Teorema 2.11. Para todo n e $r \geq 3$, o número de partições de n em partes congruentes a $\pm 2 \pmod{r}$ é igual ao número de matrizes de duas linhas

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

cujas entradas não negativas somam n e satisfazem as seguintes relações:

$$c_s = c_{s-1} = 0, \quad (2.39)$$

$$c_{2i-1} = r \frac{d_{2i+1}}{2} + r \frac{d_{2i+3}}{2} + \dots, \quad (2.40)$$

$$c_{2i} = r \frac{d_{2i+2}}{r-2} + r \frac{d_{2i+4}}{r-2} + \dots, \quad (2.41)$$

$$2 \mid d_t, \text{ se } t \text{ é ímpar,}$$

$$r-2 \mid d_t, \text{ se } t \text{ é par.}$$

Definição 2.3. Para todo $k \geq 1$, seja $p_{\pm 1(r)}(n, k)$ o número de partições de n em k partes congruentes a $\pm 1 \pmod{r}$.

Definição 2.4. Para todo $k \geq 1$, seja $p_{\pm 2(r)}(n, k)$ o número de partições de n em k partes congruentes a $\pm 2 \pmod{r}$.

Proposição 2.19. Para todo n e $r \geq 3$ temos que

$$(a) \ p_{\pm 1(r)}(rn, 2) = n;$$

$$(b) \ p_{\pm 2(r)}(rn, 2) = n;$$

Proposição 2.20. Para todo n temos que

$$(a) \ p_{\pm 1(r)}(rn, 3) = 0;$$

$$(b) \ p_{\pm 2(r)}(rn, 3) = 0.$$

Teorema 2.12. Para todo n e $r \geq 3$ temos que

$$(a) \ p_{\pm 1(r)}(2rn + 1, 3) - p_{\pm 1(r)}(2rn - (r-1), 3) = n;$$

$$(b) \ p_{\pm 2(r)}(2rn + 2, 3) - p_{\pm 2(r)}(2rn - (r-2), 3) = n;$$

$$(c) \ p_{\pm 1(r)}(2rn + (r + 1), 3) - p_{\pm 1(r)}(2rn + 1, 3) = n + 1;$$

$$(d) \ p_{\pm 2(r)}(2rn + (r + 2), 3) - p_{\pm 2(r)}(2rn + 2, 3) = n + 1.$$

Combinando os itens do teorema acima, obtemos o próximo corolário.

Corolário 2.4. *Para todo n e $r \geq 3$ temos que*

$$(a) \ p_{\pm 1(r)}(2rn + 1, 3) = 2T_n;$$

$$(b) \ p_{\pm 2(r)}(2rn + 2, 3) = 2T_n;$$

$$(c) \ p_{\pm 1(r)}(2rn + (r + 1), 3) = T_n + T_{n+1}.$$

$$(d) \ p_{\pm 2(r)}(2rn + (r + 2), 3) = T_n + T_{n+1}.$$

Teorema 2.13. *Para todo n e $r \geq 3$ temos que*

$$(a) \ p_{\pm 1(r)}(2rn, 4) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n;$$

$$(b) \ p_{\pm 2(r)}(2rn, 4) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} T_i + T_n;$$

$$(c) \ p_{\pm 1(r)}(2rn + r, 4) = 2 \sum_{i=1}^n T_i;$$

$$(d) \ p_{\pm 2(r)}(2rn + r, 4) = 2 \sum_{i=1}^n T_i;$$

$$(e) \ p_{\pm 1(r)}(rn + 2, 4) = p_{\pm 1(r)}(rn + (2r - 2), 4) = \sum_{i=0}^{n-1} p(i, \leq 3).$$

3 Funções mock theta $\phi(q)$ e $\psi(q)$

Neste capítulo, a partir da representação matricial das versões sem sinais das funções mock theta ϕ e ψ , cujos termos gerais são interpretados como funções geradoras para certos tipos de partições, construímos tabelas para cada uma destas funções, onde os dados são as somas definidas a partir da segunda linha das matrizes. Observando estas tabelas conseguimos algumas interessantes identidades e por fim obtemos uma relação entre estas funções.

3.1 Função mock theta ϕ

Consideramos a função mock theta ϕ de ordem 3, dada por

$$\phi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q^2; q^2)_n}.$$

Para o nosso propósito, estamos interessados na versão sem sinal da função mock theta ϕ , isto é,

$$\phi^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n}. \quad (3.1)$$

Seu termo geral

$$\frac{q^{1+3+5+\dots+(2s-1)}}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2s})},$$

geram as partições de n em que cada parte ímpar de 1 até $2s-1$, aparece exatamente uma vez e as partes pares são menores do que ou iguais a $2s$.

3.1.1 Representação matricial

Em [7], os autores apresentam uma representação combinatória para esta função ϕ^* em termos de matrizes de duas linhas, enunciada no teorema abaixo.

Teorema 3.1. *O coeficiente de q^n na expansão de (3.1) é igual ao número de elementos no conjunto de matrizes da forma*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_s \\ d_1 & d_2 & \cdots & d_s \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

com entradas inteiras não negativas somando n e satisfazendo

$$d_t \equiv 0 \pmod{2}; \quad (3.3)$$

$$c_s = 1; \quad (3.4)$$

$$c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \quad 1 \leq t \leq s-1. \quad (3.5)$$

Demonstração. Para algum $s \geq 1$, dada uma partição de n em que cada parte ímpar de 1 até $2s - 1$ aparece exatamente uma vez e as partes pares, menores do que ou iguais a $2s$, aparecem em quaisquer quantidades, podemos decompor n como

$$n = (1 + 3 + 5 + \dots + (2s - 1)) + (2e_1 + 4e_2 + 6e_3 + \dots + 2se_s).$$

Considerando, $d_t = 2te_t$, com $1 \leq t \leq s$, $c_s = 1$ e $c_t = 2 + c_{t+1} + d_{t+1}$ para $1 \leq t \leq s - 1$, obtemos a matriz de duas linhas correspondente, conforme (3.2), satisfazendo as condições de (3.3), (3.4) e (3.5).

Reciprocamente, dada uma matriz do tipo (3.2), como esta possui s colunas temos que sua partição correspondente contém as partes ímpares de 1 até $2s - 1$ ocorrendo exatamente uma vez e a quantidade de partes pares menores do que ou iguais a $2s$ são determinadas por $\frac{d_t}{2}$, para $1 \leq t \leq s$. \square

Notamos que a segunda linha das matrizes do tipo (3.2) descrevem quantas partes pares existem na partição, para isto, basta somarmos o $\frac{d_t}{2}$, para $1 \leq t \leq s$.

Exemplo 3.1. Na tabela abaixo, na coluna da esquerda temos as partições de 13 em que cada parte ímpar de 1 até $2s - 1$, para algum $s \geq 1$, aparece exatamente uma vez e as partes pares, menores do que ou iguais a $2s$ em quaisquer quantidades e na coluna da direita as matrizes associadas a partir do Teorema 3.1.

Partições	Matrizes
(5, 4, 3, 1)	$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
(5, 3, 2, 2, 1)	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(2, 2, 2, 2, 2, 1)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 12 \end{pmatrix}$

3.1.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 3.1

Nesta subseção construímos uma tabela cujos dados são as somas de cada $\frac{d_t}{2}$, a partir das entradas da segunda linha das matrizes do tipo (3.2). Para isto temos a seguinte definição.

Definição 3.1. Para $k \geq 0$, seja $p_{\phi^*}(n, k)$ o número de partições de n em partes ímpares distintas, a partir do 1 sem saltos e com k partes pares menores do que ou iguais a maior parte ímpar mais 1.

Para n fixo, classificamos suas partições descritas na Definição 3.1 de acordo com a soma de cada $\frac{d_t}{2}$ da segunda linha da matriz associada. Contando a ocorrência de cada número nesta soma, organizamos os dados na tabela abaixo. A entrada na linha n e coluna $n - k$ é o número de vezes em que k aparece como resultado de tais somas. Ou ainda, este número é igual a $p_{\phi^*}(n, k)$.

Exemplo 3.2. De acordo com a Definição 3.1, lemos os números $p_{\phi^*}(n, k)$ na tabela, da direita para a esquerda. Por exemplo, consideramos a linha $n = 8$ da tabela,

	1	2	3	4	5	6	7	8
8	0	0	0	0	0	1	1	0

então $p_{\phi^*}(8, 0) = 0$, $p_{\phi^*}(8, 1) = p_{\phi^*}(8, 2) = 1$, $p_{\phi^*}(8, 3) = p_{\phi^*}(8, 4) = p_{\phi^*}(8, 5) = p_{\phi^*}(8, 6) = p_{\phi^*}(8, 7) = 0$.

3.1.3 Novos resultados

Nesta subseção, a partir da observação dos dados da Tabela 3 conseguimos encontrar várias relações, que apresentamos abaixo. Destacamos entre estes os teoremas obtidos por meio da observação dos dados da quarta e quinta diagonais da Tabela 3. Primeiramente, notamos que as colunas na tabela se tornam constantes iguais a 0 a partir de um n par e acima destas colunas de zeros sempre temos o número 1. Isto é resumido na proposição abaixo.

Proposição 3.1. Para todo n e $i \geq 0$, temos

(a) $p_{\phi^*}(2n + i, n + i) = 0$;

(b) $p_{\phi^*}(2n - 1, n - 1) = 1$.

Demonstração. (a) Como qualquer número par é maior do que ou igual a 2, para qualquer $s \geq 1$ e $i \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + 2s - 1 + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_{n+i} &\geq 1 + 3 + \dots + 2s - 1 + 2 \cdot (n + i) \\ &> 2n + i \end{aligned}$$

Assim, o resultado segue.

(b) Temos que $(1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n-1 \text{ vezes}})$ é uma partição contada por $p_{\phi^*}(2n - 1, n - 1)$, pois

$$1 + \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{n-1 \text{ vezes}} = 1 + 2 \cdot (n - 1) = 2n - 1.$$

Notamos que não existe outra partição contada por $p_{\phi^*}(2n - 1, n - 1)$, pois caso contrário,

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \dots + 2s - 1 + 2l_1 + 2l_2 + \dots + 2l_{n-1} &\geq 1 + 3 + \dots + 2s - 1 + 2 \cdot (n - 1) \\ &\geq 1 + 3 + 2 \cdot (n - 1) \\ &= 2n + 2 > 2n - 1. \end{aligned}$$

□

Observação 3.1. Pela observação dos dados da primeira diagonal da Tabela 3, que contabiliza às partições em que as partes ímpares a partir do 1 aparecem exatamente uma vez e com nenhuma parte par, temos que $p_{\phi^*}(n, 0) = 1$, se e somente se, n é um quadrado perfeito.

Proposição 3.2. *Para todo n temos que*

- (a) $p_{\phi^*}(n^2, 1) = 0$;
- (b) $p_{\phi^*}(n^2 - i, 1) = 0$, i par e $i \leq 2n - 2$;
- (c) $p_{\phi^*}(n^2 - i, 1) = 1$, i ímpar e $i \leq 2n - 3$.

Demonstração. (a) Suponhamos que exista uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2, 1)$, isto é, com $t \leq s \leq n - 1$ temos que

$$\begin{aligned} n^2 &= 1 + 3 + \cdots + (2s - 1) + 2t \\ n^2 - s^2 &= 2t \\ (2(s + 1) - 1) + \cdots + (2n - 1) &= 2t. \end{aligned}$$

Então,

$$2s < (2(s + 1) - 1) + \cdots + (2n - 1) = 2t \leq 2s,$$

o que é uma contradição.

- (b) Suponhamos que exista uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - i, 1)$, com i par e $i \leq 2n - 2$. Então, sendo $t \leq s \leq n - 1$ temos que

$$\begin{aligned} n^2 - i &= 1 + 3 + \cdots + (2s - 1) + 2t \\ n^2 - s^2 &= 2t + i \\ (2(s + 1) - 1) + \cdots + (2n - 1) &= 2t + i \leq 2s + 2n - 2. \end{aligned}$$

Então,

$$2s + 2n - 2 = 2s - 1 + 2n - 1 < (2(s + 1) - 1) + \cdots + (2n - 1) = 2t + i \leq 2s + 2n - 2,$$

o que é uma contradição.

- (c) Para i ímpar e $i \leq 2n - 3$ temos que $(1, 3, 5, \dots, 2n - 3, 2n - 1 - i)$, com $2n - 1 - i$ par, é uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - i, 1)$. Agora, suponhamos que exista outra partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - i, 1)$, ou seja, com $r \leq s \leq n - 2$,

$$\begin{aligned} n^2 - i &= 1 + 3 + \cdots + 2(s - 1) + 2r \\ n^2 - s^2 &= 2r + i \\ (2(s + 1) - 1) + \cdots + (2n - 1) &= 2r + i \leq 2s + 2n - 3. \end{aligned}$$

Então,

$$2s + 2n - 3 < (2(s + 1) - 1) + \cdots + (2n - 1) = 2r + i \leq 2s + 2n - 3,$$

o que é uma contradição. Portanto, $p_{\phi^*}(n^2 - i, 1) = 1$, com i ímpar e $i \leq 2n - 3$.

□

Olhando os dados da terceira diagonal da Tabela 3, que contabiliza as partições com duas partes pares, além das ímpares que aparecem exatamente uma vez a partir do 1, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Para todo n temos que*

- (a) $p_{\phi^*}(n^2, 2) = 0$;
- (b) $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n, 2) = p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 2, 2) = p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 4, 2) = n$;
- (c) $p_{\phi^*}(4n^2 - 3, 2) = p_{\phi^*}(4n^2 - 1, 2) = n - 1$;
- (d) $p_{\phi^*}(4n^2 + 1, 2) = n$.

Demonstração. Provamos os itens (a) e (b). Os outros são análogos ao item (b).

- (a) Suponhamos que exista uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2, 2)$, ou seja, com $1 \leq i, j \leq s < n$ temos que

$$n^2 = 1 + 3 + \cdots + 2s - 1 + 2i + 2j.$$

Então, $n^2 - s^2 = 2i + 2j$, ou ainda, $(1 + 3 + \cdots + 2n - 1) - (1 + 3 + \cdots + 2s - 1) = 2i + 2j$.

Assim,

$$2(s + 1) - 1 + \cdots + 2n - 1 = 2i + 2j \leq 4s.$$

Como $n > s$, temos

$$4s = 2(s + 1) - 1 + 2s - 1 < 2(s + 1) - 1 + \cdots + 2n - 1 = 2i + 2j \leq 4s,$$

o que é uma contradição.

- (b) Notamos que qualquer partição contada por $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n, 2)$ ou $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 2, 2)$ ou $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 4, 2)$ possui $4n - 1$ como a maior parte ímpar. De fato, vamos provar para o primeiro tipo sendo os outros dois análogos. Se $4n + 1$ fosse a maior parte ímpar de uma partição contada por $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n, 2)$, com $1 \leq i, j \leq 2n + 1$ teríamos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + 4n - 1 + 4n + 1 + 2i + 2j &= (2n + 1)^2 + 2i + 2j \\ &\geq 4n^2 + 4n + 5 > 4n^2 + 4n. \end{aligned}$$

Agora, se $4n - 3$ fosse a maior parte ímpar, com $1 \leq i, j \leq 2n - 1$, teríamos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \cdots + 4n - 3 + 2i + 2j &\leq (2n - 1)^2 + 2(2n - 1) + 2(2n - 1) \\ &= 4n^2 + 4n - 3 < 4n^2 + 4n. \end{aligned}$$

Seja $(1, 3, 5, \dots, 4n - 1, 2i, 2j)$ uma partição contada por $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n, 2)$ com $1 \leq i \leq j \leq 2n$. Para obtermos uma partição contada por $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 2, 2)$ e uma contada por $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 4, 2)$ escrevemos, respectivamente,

$$(1, 3, 5, \dots, 4n - 1, 2i, 2(j + 1)) \text{ e } (1, 3, 5, \dots, 4n - 1, 2(i + 1), 2(j + 1)).$$

Reciprocamente, dada $(1, 3, 5, \dots, 4n-1, 2l, 2t)$ uma partição de $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 4, 2)$, temos $4n^2 + 4n + 4 = (2n)^2 + 2l + 2t$. Isto resulta em $l + t = 2n + 2$ e assim $l + t \geq 4$. Notamos que $l \neq 1$ e $t \neq 1$, pois se $l = 1$ então $t = 2n + 1$ implicando que $2t = 2(2n + 1) = 4n + 2 > 4n - 1$. Logo, temos que $l \geq 2$ (analogamente se $t \geq 2$) e a menor parte par de uma partição contada por $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 4, 2)$ é 4. Desta maneira, a aplicação é invertível.

Temos que $p_{\phi^*}(4n^2 + 4n + 4, 2)$ é o número de soluções da equação $l + t = 2n + 2$, com $l, t \geq 2$. Escrevendo $l = l' + 1$ e $t = t' + 1$, com $l', t' \geq 1$ temos que $l' + t' = 2n$, que possui $\left\lfloor \frac{2n}{2} \right\rfloor = n$ soluções positivas e o teorema está provado. □

Exemplo 3.3. Para ilustrarmos a bijeção apresentada no item (b) do Teorema 3.2 consideramos $n = 3$, então

$P_{\phi^*}(48, 2)$	$P_{\phi^*}(50, 2)$	$P_{\phi^*}(52, 2)$
$(11, \mathbf{10}, 9, 7, 5, 3, \mathbf{2}, 1)$	$(\mathbf{12}, 11, 9, 7, 5, 3, \mathbf{2}, 1)$	$(\mathbf{12}, 11, 9, 7, 5, \mathbf{4}, 3, 1)$
$(11, 9, \mathbf{8}, 7, 5, \mathbf{4}, 3, 1)$	$(11, \mathbf{10}, 9, 7, 5, \mathbf{4}, 3, 1)$	$(11, \mathbf{10}, 9, 7, \mathbf{6}, 5, 3, 1)$
$(11, 9, 7, \mathbf{6}, \mathbf{6}, 5, 3, 1)$	$(11, 9, \mathbf{8}, 7, \mathbf{6}, 5, 3, 1)$	$(11, 9, \mathbf{8}, \mathbf{8}, 7, 5, 3, 1)$

Na quarta diagonal da Tabela 3, que contabiliza as partições com três partes pares, além das ímpares que aparecem exatamente uma vez a partir do 1, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.3. Para todo $n \geq 2$, sendo $p(i, 3)$ o número de partições de i em três partes, temos que

- (a) $p_{\phi^*}(n^2, 3) = p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3) = p(n - 1, 3)$;
- (b) $p_{\phi^*}(n^2 + 2n + 2, 3) = p_{\phi^*}(n^2 + 2n - 1, 3) = p(n + 1, 3)$;
- (c) $p_{\phi^*}(n^2 + 2n + 3, 3) = p_{\phi^*}(n^2 + 2n - 2, 3) = p(n - 1, 3)$;
- (d) $p_{\phi^*}(n^2 + 4n + 8, 3) = p_{\phi^*}(n^2 + 4n - 1, 3) = p(n - 1, 3)$.

Demonstração. Provamos o primeiro item, as provas dos outros sendo facilmente adaptáveis. Para a primeira igualdade, notamos que a maior parte ímpar de uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2, 3)$ é $2n - 5$ e a maior de uma contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3)$ é $2n - 3$.

Seja $(1, 3, 5, \dots, 2n - 5, 2i, 2j, 2k)$ uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2, 3)$, sendo $i \leq j \leq k \leq n - 2$. Para obtermos uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3)$, associamos toda parte ímpar $2s - 1$ com a parte $2(n - s) - 1$ e toda parte par $2s$ com $2(n - s - 1)$. Então, adicionamos uma parte igual a 1. Reciprocamente, a partir de uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3)$ para obtermos uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2, 3)$, primeiro eliminamos a parte 1 e em seguida associamos toda parte ímpar $2s - 1$ com a parte $2(n - s) - 1$ e toda parte par $2s$ com $2(n - s - 1)$.

Para a segunda igualdade, dada uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3)$ removemos todas as partes ímpares e as três pares, que somam $2n - 2$, dividimos cada uma por 2 obtendo uma partição contada por $p(n - 1, 3)$. □

Exemplo 3.4. Considerando $n = 10$, na prova do item (a) do Teorema 3.3 temos que

$P_{\phi^*}(100, 3)$	$P_{\phi^*}(99, 3)$	$P(9, 3)$
(16, 16 , 15, 13, 11, 9, 7, 5, 4 , 3, 1)	(17, 15, 14 , 13, 11, 9, 7, 5, 3, 2, 2 , 1)	(7, 1, 1)
(16 , 15, 14 , 13, 11, 9, 7, 6 , 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 12 , 11, 9, 7, 5, 4 , 3, 2 , 1)	(6, 2, 1)
(16 , 15, 13, 12 , 11, 9, 8 , 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 10 , 9, 7, 6 , 5, 3, 2 , 1)	(5, 3, 1)
(16 , 15, 13, 11, 10 , 10 , 9, 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 9, 8 , 8 , 7, 5, 3, 2 , 1)	(4, 4, 1)
(15, 14 , 14 , 13, 11, 9, 8 , 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 10 , 9, 7, 5, 4 , 4 , 3, 1)	(5, 2, 2)
(15, 14 , 13, 12 , 11, 10 , 9, 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 9, 8 , 7, 6 , 5, 4 , 3, 1)	(4, 3, 2)
(15, 13, 12 , 12 , 12 , 11, 9, 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 9, 7, 6 , 6 , 6 , 5, 3, 1)	(3, 3, 3)

Para o próximo teorema, sugerido pelos dados da quinta diagonal da Tabela 3, precisamos da proposição abaixo.

Proposição 3.3. Seja $p_e(4n - 8, 4, \lambda_2 = \lambda_3)$ o número de partições de $4n - 8$ em quatro partes pares menores do que ou iguais a $2n - 4$ e $\lambda_2 = \lambda_3$. Então $p_e(4n - 8, 4, \lambda_2 = \lambda_3) = p(n - 1, 3)$.

Demonstração. Separamos a demonstração em dois casos, de acordo com a paridade de n . Se n é par, vamos definir uma bijeção que corresponde as partes centrais iguais a menor parte de uma partição contada por $p(n - 1, 3)$.

- Se as partes centrais forem iguais a $n + 2k - 2$, para $k \geq 0$, consideramos a partição correspondente

$$(\lambda_1, n + 2k - 2, n + 2k - 2, \lambda_4) \mapsto \left(\frac{\lambda_1 - 4k}{2}, \frac{\lambda_4 + 4k}{2}, 2k + 1 \right),$$

a qual é claramente uma partição contada por $p(n - 1, 3)$.

- Se as partes centrais forem iguais a $n - 2k$, para $k \geq 2$, a partição correspondente será

$$(\lambda_1, n - 2k, n - 2k, \lambda_4) \mapsto \left(\frac{\lambda_1 - 8k + 10}{2}, \frac{\lambda_4}{2}, 2k - 2 \right).$$

Das condições $\lambda_4 \leq n - 2k \leq \lambda_1 \leq 2n - 4$ e $\lambda_1 + \lambda_4 = 2n - 8 + 4k$ resulta que $\frac{\lambda_4}{2} \geq 2k - 2$.

Se n ímpar, a bijeção é similar a anterior.

- Se as partes centrais são iguais a $n + 2k - 3$, com $k \geq 1$, a partição correspondente será

$$(\lambda_1, n + 2k - 3, n + 2k - 3, \lambda_4) \mapsto \left(\frac{\lambda_1 - 4k + 2}{2}, \frac{\lambda_4 + 4k - 2}{2}, 2k + 2 \right)$$

- Se as partes centrais são iguais a $n - 2k - 1$, com $k \geq 1$, a partição correspondente contada por $p(n - 1, 3)$ será

$$(\lambda_1, n - 2k - 1, n - 2k - 1, \lambda_4) \mapsto \left(\frac{\lambda_1 - 8k + 6}{2}, \frac{\lambda_4}{2}, 2k - 1 \right).$$

Das condições $\lambda_4 \leq n - 2k - 1 \leq \lambda_1 \leq 2n - 4$ e $\lambda_1 + \lambda_4 = 2n - 6 + 4k$ resulta que $\frac{\lambda_4}{2} \geq 2k - 1$.

□

Exemplo 3.5. Para ilustrarmos a bijeção da proposição acima, para $n = 12$ temos

$P_e(40, 4, \lambda_2 = \lambda_3)$		$P(11, 3)$
$(18, 10, 10, 2)$	$\left(\frac{18 - 4 \cdot 0}{2}, \frac{2 + 4 \cdot 0}{2}, 1\right)$	$(9, 1, 1)$
$(16, 10, 10, 4)$	$\left(\frac{16 - 4 \cdot 0}{2}, \frac{4 + 4 \cdot 0}{2}, 1\right)$	$(8, 2, 1)$
$(14, 10, 10, 6)$	$\left(\frac{14 - 4 \cdot 0}{2}, \frac{6 + 4 \cdot 0}{2}, 1\right)$	$(7, 3, 1)$
$(12, 10, 10, 8)$	$\left(\frac{12 - 4 \cdot 0}{2}, \frac{8 + 4 \cdot 0}{2}, 1\right)$	$(6, 4, 1)$
$(10, 10, 10, 10)$	$\left(\frac{10 - 4 \cdot 0}{2}, \frac{10 + 4 \cdot 0}{2}, 1\right)$	$(5, 5, 1)$
$(20, 8, 8, 4)$	$\left(\frac{20 - 8 \cdot 2 + 10}{2}, \frac{4}{2}, 2\right)$	$(7, 2, 2)$
$(18, 8, 8, 6)$	$\left(\frac{18 - 8 \cdot 2 + 10}{2}, \frac{6}{2}, 2\right)$	$(6, 3, 2)$
$(16, 8, 8, 8)$	$\left(\frac{16 - 8 \cdot 2 + 10}{2}, \frac{8}{2}, 2\right)$	$(5, 4, 2)$
$(14, 12, 12, 2)$	$\left(\frac{14 - 4 \cdot 1}{2}, \frac{2 + 4 \cdot 1}{2}, 3\right)$	$(5, 3, 3)$
$(12, 12, 12, 4)$	$\left(\frac{12 - 4 \cdot 1}{2}, \frac{4 + 4 \cdot 1}{2}, 3\right)$	$(4, 4, 3)$

Agora para $n = 13$ temos

$P_e(44, 4, \lambda_2 = \lambda_3)$		$P(12, 3)$
$(22, 10, 10, 2)$	$\left(\frac{22 - 8 \cdot 1 + 6}{2}, \frac{2}{2}, 1\right)$	$(10, 1, 1)$
$(20, 10, 10, 4)$	$\left(\frac{20 - 8 \cdot 1 + 6}{2}, \frac{4}{2}, 1\right)$	$(9, 2, 1)$
$(18, 10, 10, 6)$	$\left(\frac{18 - 8 \cdot 1 + 6}{2}, \frac{6}{2}, 1\right)$	$(8, 3, 1)$
$(16, 10, 10, 8)$	$\left(\frac{16 - 8 \cdot 1 + 6}{2}, \frac{8}{2}, 1\right)$	$(7, 4, 1)$
$(14, 10, 10, 10)$	$\left(\frac{14 - 8 \cdot 1 + 6}{2}, \frac{10}{2}, 1\right)$	$(6, 5, 1)$
$(18, 12, 12, 2)$	$\left(\frac{18 - 4 \cdot 1 + 2}{2}, \frac{2 + 4 \cdot 1 - 2}{2}, 2\right)$	$(8, 2, 2)$
$(16, 12, 12, 4)$	$\left(\frac{16 - 4 \cdot 1 + 2}{2}, \frac{4 + 4 \cdot 1 - 2}{2}, 2\right)$	$(7, 3, 2)$
$(14, 12, 12, 6)$	$\left(\frac{14 - 4 \cdot 1 + 2}{2}, \frac{6 + 4 \cdot 1 - 2}{2}, 2\right)$	$(6, 4, 2)$
$(12, 12, 12, 8)$	$\left(\frac{12 - 4 \cdot 1 + 2}{2}, \frac{8 + 4 \cdot 1 - 2}{2}, 2\right)$	$(5, 4, 2)$
$(22, 8, 8, 6)$	$\left(\frac{22 - 8 \cdot 2 + 6}{2}, \frac{6}{2}, 3\right)$	$(6, 3, 3)$
$(20, 8, 8, 8)$	$\left(\frac{20 - 8 \cdot 2 + 6}{2}, \frac{8}{2}, 3\right)$	$(5, 4, 3)$
$(14, 14, 14, 2)$	$\left(\frac{14 - 4 \cdot 2 + 2}{2}, \frac{2 + 4 \cdot 2 - 2}{2}, 4\right)$	$(4, 4, 4)$

Teorema 3.4. Para todo $n \geq 3$, sendo $p(i-1, 3)$ o número de partições de $i-1$ em três partes, temos que

$$p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4) = \sum_{i=1}^n p(i-1, 3).$$

Demonstração. Primeiramente, provamos que

$$p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4) - p_{\phi^*}((n-1)^2 - 4, 4) = p(n-1, 3). \quad (3.6)$$

Observamos que qualquer partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4)$ possui $2n - 5$ como maior parte ímpar e qualquer contada por $p_{\phi^*}((n-1)^2 - 4, 4)$ possui $2n - 7$ como maior parte ímpar. Dada uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4)$ as suas quatro partes pares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ somam $4n - 8$ e são classificadas em dois tipos: (i) $\lambda_2 > \lambda_3$; (ii) $\lambda_2 = \lambda_3$.

Existe uma bijeção entre as partições do tipo (i) e as contadas por $p_{\phi^*}((n-1)^2 - 4, 4)$. De fato, dada uma partição do tipo (i), removemos a parte $2n - 5$ e subtraímos 2 de cada umas das duas maiores partes pares, λ_1 e λ_2 . A aplicação inversa é facilmente construída.

Agora, pela Proposição 3.3 temos que o total de partições do tipo (ii) é $p(n-1, 3)$. Assim, $p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4) - p_{\phi^*}((n-1)^2 - 4, 4) = p(n-1, 3)$.

Para concluirmos a prova do teorema, faremos uma indução sobre n . Para $n = 3$ temos que $p_{\phi^*}(5, 4) = 0 = p(0, 3) + p(1, 3) + p(2, 3)$. Suponhamos que para $n-1$ temos que

$$p_{\phi^*}((n-1)^2 - 4, 4) = \sum_{i=1}^{n-1} p(i-1, 3). \quad (3.7)$$

Então,

$$\begin{aligned} p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4) - p_{\phi^*}((n-1)^2 - 4, 4) &= p(n-1, 3) \\ p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4) &= \sum_{i=1}^{n-1} p(i-1, 3) + p(n-1, 3) \quad (\text{por 3.7}) \\ p_{\phi^*}(n^2 - 4, 4) &= \sum_{i=1}^n p(i-1, 3). \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.6. Para ilustrarmos a bijeção da prova do teorema anterior consideramos $n = 8$. Notamos que as quatro últimas partições do conjunto $P_{\phi^*}(60, 4)$ cuja diferença entre as partes pares centrais são iguais, não possuem partições correspondentes no conjunto $P_{\phi^*}(45, 4)$ e esta quantidade é igual ao número $p(7, 3)$.

$P_{\phi^*}(60, 4)$		$P_{\phi^*}(45, 4)$
(12, 11, 9, 8, 7, 5, 3, 2, 2, 1)	(12, 8, 2, 2)	(10, 9, 7, 6, 5, 3, 2, 2, 1)
(12, 11, 9, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)	(12, 6, 4, 2)	(10, 9, 7, 5, 4, 4, 3, 2, 1)
(11, 10, 10, 9, 7, 5, 3, 2, 2, 1)	(10, 10, 2, 2)	(9, 8, 8, 7, 5, 3, 2, 2, 1)
(11, 10, 9, 8, 7, 5, 4, 3, 2, 1)	(10, 8, 4, 2)	(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)
(11, 10, 9, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 1)	(10, 6, 4, 4)	(9, 8, 7, 5, 4, 4, 4, 3, 1)
(11, 9, 8, 8, 7, 6, 5, 3, 2, 1)	(8, 8, 6, 2)	(9, 7, 6, 6, 6, 5, 3, 2, 1)
(11, 9, 8, 8, 7, 5, 4, 4, 3, 1)	(8, 8, 4, 4)	(9, 7, 6, 6, 5, 4, 4, 3, 1)
(12, 11, 9, 7, 5, 4, 4, 4, 3, 1)		
(11, 10, 9, 7, 6, 6, 5, 3, 2, 1)		
(11, 9, 8, 7, 6, 6, 5, 4, 3, 1)		
(11, 9, 7, 6, 6, 6, 6, 5, 3, 1)		

3.2 Função mock theta ψ

Consideramos a função mock theta ψ de order 3, dada por

$$\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q^2)_n}.$$

Para o nosso propósito, estamos interessados na versão sem sinal da função mock theta ψ , isto é,

$$\psi^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q^2)_n}. \tag{3.8}$$

Seu termo geral é

$$\frac{q^{1+3+5+\dots+(2s-1)}}{(1-q)(1-q^3)\dots(1-q^{2s-1})}$$

o qual gera as partições em partes ímpares de n contendo pelo menos uma parte igual a cada um dos números ímpares de 1 até $2s - 1$.

3.2.1 Representação matricial

Em [7], os autores apresentam uma interpretação combinatória para ψ^* em termos de matrizes de duas linhas, a qual enunciamos no teorema abaixo.

Teorema 3.5. *O coeficiente de q^n na expansão de $\psi^*(q)$ é igual ao número de elementos do conjunto de matrizes da forma*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ d_1 & d_2 & \dots & d_s \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

com entradas inteiras não negativas somando n e satisfazendo as condições abaixo

$$c_s = 1; \tag{3.10}$$

$$c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \quad 1 \leq t \leq s - 1. \tag{3.11}$$

Demonstração. Tomemos uma partição em partes ímpares de n em que cada parte ímpar de 1 até $2s - 1$ aparece pelo menos uma vez. Sendo $d_t \geq 0$, com $1 \leq t \leq s$, podemos decompor n da seguinte maneira

$$n = 1 \cdot (1 + d_1) + 3 \cdot (1 + d_2) + 5 \cdot (1 + d_3) + \cdots + (2s - 1) \cdot (1 + d_s).$$

Considerando, $c_s = 1$ e $c_t = 2 + c_{t+1} + 2d_{t+1}$ para $1 \leq t \leq s - 1$, obtemos a matriz de duas linhas correspondente, conforme (3.9), satisfazendo as condições (3.10) e (3.11).

Reciprocamente, dada uma matriz do tipo (3.9), como esta possui s colunas temos que sua partição correspondente contém as partes ímpares de 1 até $2s - 1$, sem saltos. Cada parte ocorre um total de $1 + d_t$ vezes, com $1 \leq t \leq s$ e $d_t \geq 0$, logo $n = 1 \cdot (1 + d_1) + 3 \cdot (1 + d_2) + 5 \cdot (1 + d_3) + \cdots + (2s - 1) \cdot (1 + d_s)$. \square

Dada uma partição como descrita acima, a segunda linha de sua matriz associada descreve quantas partes ímpares a mais existem além das obrigatórias. Para calcularmos este número, somamos cada entrada d_t , para $t = 1, 2, \dots, s$.

Exemplo 3.7. Na tabela abaixo, na coluna da esquerda temos as partições de 11 em que cada parte ímpar de 1 até $2s - 1$, para algum $s \geq 1$, aparece pelo menos uma vez, sem saltos. Na coluna da direita temos as matrizes associadas a partir do Teorema 3.5.

<i>Partições</i>	<i>Matrizes</i>
(5, 3, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(3, 3, 3, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
(3, 3, 1, 1, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$

3.2.2 Construção da tabela referente a representação matricial do Teorema 3.5

Nesta subseção, a partir das matrizes definidas no Teorema 3.5, construímos uma tabela cujos dados são as somas de cada d_t , entradas da segunda linha das matrizes. Para tal construção necessitamos da definição abaixo.

Definição 3.2. O excesso de uma parte λ_i relacionada a uma partição λ é o número de vezes que λ_i aparece mais de uma vez. Notação: $x(\lambda_i)$. Da mesma forma, o excesso de uma partição λ é a soma dos excessos de todas as partes. Notação: $x(\lambda)$.

Exemplo 3.8. Consideramos $\lambda = (15, 13, 11, 9, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 1)$, uma partição de 75 em partes ímpares, sem saltos, a partir de 1. Então,

- $x(1) = 2$,

- $x(9) = 1$,
- $x(3) = x(5) = x(7) = x(11) = x(13) = x(15) = 0$,
- $x(\lambda) = 3$.

A próxima definição nos auxiliará na interpretação dos dados da tabela.

Definição 3.3. Para $k \geq 0$, seja $p_{\psi^*}(n, k)$ o número de partições de n em partes ímpares a partir do 1, sem saltos e com excesso k .

Para n fixo, classificamos suas partições descritas na Definição 3.3 de acordo com a soma de cada d_t da segunda linha da matriz associada. Contando a ocorrência de cada número nesta soma, organizamos os dados na tabela abaixo. A entrada na linha n e coluna $n - k$ é o número de vezes em que k aparece como resultado de tais somas. Ou ainda, este número é igual a $p_{\psi^*}(n, k)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40										
1	1																																																	
2	1	0																																																
3	1	0	0																																															
4	1	0	0	1																																														
5	1	0	0	1	0																																													
6	1	0	0	1	0	0																																												
7	1	0	0	1	0	1	0																																											
8	1	0	0	1	0	1	0	0																																										
9	1	0	0	1	0	1	0	0	1																																									
10	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0																																								
11	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0																																							
12	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0																																						
13	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0																																						
14	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0																																					
15	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	2	0	0																																				
16	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	0	0	1																																			
17	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	0	1	1	0																																		
18	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	0	2	1	0	0																																	
19	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	1	1	0																																	
20	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	0	0																															
21	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1	0	1	0																														
22	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	1	1	2	0	0																													
23	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	1	2	2	0	1	0																												
24	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	1	3	2	1	2	0																												
25	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	2	2	3	0	1																											
26	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	2	3	2	0	2	1	0																									
27	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	2	4	3	1	3	1	0	0																								
28	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	2	3	4	1	3	1	1	1	0																							
29	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	3	4	2	3	1	0	0																							
30	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	3	4	1	1	1	0																							
31	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																					
32	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
33	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
34	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
35	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
36	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
37	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
38	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
39	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			
40	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	2	0																			

Tabela 4 – Tabela da caracterização dada pelo Teorema 3.5

3.2.3 Novos resultados

Nesta subsecção, a partir da observação dos dados da Tabela 4 conseguimos encontrar várias relações, que apresentamos abaixo. Destacamos o resultado obtido a partir dos dados da quarta diagonal e o próximo resultado que nos diz que a partir de determinada linha as entradas em cada coluna tornam-se constantes e iguais a quantidade de um tipo específico de partição.

Teorema 3.6. *Para todo $i \geq 2$ e $n \geq 3 \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - 2$, temos que*

$$p_{\psi^*}(n, n - i) = o_{d,1}(i),$$

sendo $o_{d,1}(i)$ o número de partições de i em partes ímpares distintas, tendo 1 como uma parte.

Demonstração. Consideramos uma partição contada por $p_{\psi^*}(n, n - i)$, com $i \geq 2$ e $n \geq 3 \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - 2$. Então, uma possível maneira de particionarmos n é

$$n = 1 + 1 \cdot x(1) + 3 + 3 \cdot x(3) + \dots + (2s - 1) + (2s - 1) \cdot x(2s - 1),$$

com $x(1) + x(3) + \dots + x(2s - 1) = n - i$. Como esta partição possui s partes diferentes, obtemos uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_s)$ contada por $o_{d,1}(i)$, também com s partes, definida abaixo.

$$\begin{aligned} \lambda_s &= 1 \\ \lambda_{s-1} &= 3 + 2 \cdot x(2s - 1) \\ \lambda_{s-2} &= 5 + 2 \cdot x(2s - 1) + 2 \cdot x(2(s - 1) - 1) \\ &\vdots \\ \lambda_k &= (2(s - k + 1) - 1) + 2 \cdot x(2s - 1) + \dots + 2 \cdot x(2(k + 1) - 1) \\ &\vdots \\ \lambda_1 &= (2s - 1) + 2 \cdot x(2s - 1) + \dots + 2 \cdot x(3). \end{aligned}$$

A recíproca é construída facilmente.

□

Exemplo 3.9. *Para $n = 22$ e $i = 17$, temos que*

$P_{\psi^*}(22, 5)$		$O_{d,1}(17)$
$(5, 5, 5, 3, 1, 1, 1, 1)$	$x(5) = 2, x(3) = 0, x(1) = 3$	$(9, 7, 1)$
$(5, 5, 3, 3, 3, 1, 1, 1)$	$x(5) = 1, x(3) = 2, x(1) = 2$	$(11, 5, 1)$
$(5, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 1)$	$x(5) = 0, x(3) = 4, x(1) = 1$	$(13, 3, 1)$

Observação 3.2. *Olhando para a primeira diagonal da Tabela 4, que contabiliza as partições com nenhum excesso, observarmos que os quadrados perfeitos são os únicos números particionados em partes ímpares a partir do 1, sem saltos e sem excessos. Assim, $p_{\psi^*}(n^2, 0) = 1$.*

Pela observação dos dados da terceira diagonal da Tabela 4, que contabilizam as partições com excesso igual a 2 temos algumas propriedades apresentadas abaixo.

Teorema 3.7. *Para todo $n \geq 1$, temos que $p_{\psi^*}(4n^2 + 3, 2) = n - 1$.*

Demonstração. Consideramos uma partição contada por $p_{\psi^*}(4n^2 + 3, 2)$, logo sua maior parte é $4n - 3$. Então,

$$4n^2 + 3 = 1 + 3 + \cdots + (4n - 3) + (2x - 1) + (2y - 1),$$

com $1 \leq x \leq y \leq 2n - 1$. Como $4n^2 + 3 - (2n - 1)^2 = 4n + 2$, devemos particionar $4n + 2$ em duas partes ímpares $2x - 1$ e $2y - 1$, sujeito a $1 \leq x \leq y \leq 2n - 1$. Isto significa que

$$\begin{aligned} 2x - 1 + 2y - 1 &= 4n + 2 \\ x + y &= 2n + 2. \end{aligned}$$

O número de soluções com nenhuma restrição, sem contar a ordem, é $\left\lfloor \frac{2n + 2}{2} \right\rfloor = n + 1$, mas devemos remover as soluções $(2n, 2)$ e $(2n + 1, 1)$. Logo o teorema está provado. \square

Teorema 3.8. *Para $n \geq 4$, temos*

$$p_{\psi^*}(n^2 - 2n - 2, 2) = p_{\psi^*}(n^2 - 2n + 2, 2) = p_{\psi^*}(n^2 - 5, 2) = \left\lfloor \frac{n - 2}{2} \right\rfloor$$

Demonstração. Vamos verificar três igualdades.

1^a : Construimos uma bijeção entre os dois conjuntos de partições, as contadas por $p_{\psi^*}(n^2 - 2n - 2, 2)$ e por $p_{\psi^*}(n^2 - 2n + 2, 2)$. Dada uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 2n - 2, 2)$, escrevemos-a como

$$n^2 - 2n - 2 = 1(1 + x(1)) + 3(1 + x(3)) + \cdots + (2s - 1)(1 + x(2s - 1)).$$

Como tem excesso 2, devemos ter no máximo, dois excessos não nulos. Consideramos $x(i) = x(j) = 1$, com $1 \leq i \leq j \leq (2s - 1)$, i e j ímpares, então

$$n^2 - 2n - 2 = 1 + 3 + \cdots + 2s - 1 + i \cdot x(i) + j \cdot x(j).$$

Adicionando-se 2 a cada excesso i e j , o resultado é uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 2n + 2, 2)$, como segue:

$$1 + 3 + \cdots + (2s - 1) + (i + 2) \cdot x(i) + (j + 2) \cdot x(j) = n^2 - 2n + 2.$$

Para termos a bijeção descrita, devemos garantir que podemos subtrair 2 de qualquer excesso de uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 2n + 2, 2)$. Em outras palavras, que os excessos são maiores do que ou iguais 3. Suponha que cada um dos dois excessos são iguais a 1. Então,

$$n^2 - 2n + 2 = 1 + 3 + \cdots + (2s - 1) + 1 + 1,$$

onde $2 \leq s \leq n - 1$. Assim,

$$\begin{aligned} n^2 - 2n + 2 &= s^2 + 1 + 1 \\ (n - 1)^2 - s^2 &= 1 \\ 2(s + 1) - 1 + \cdots + 2(n - 1) - 1 &= 1, \end{aligned}$$

que é uma contradição, pois $2 \leq s \leq n - 1$ e $n \geq 4$.

2^a : Primeiramente, temos que a maior parte de uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 2n + 2, 2)$ é $2n - 5$. Seja $(1, 3, \dots, 2n - 5, 2i - 1, 2j - 1)$ tal partição, com $1 \leq i \leq j \leq 2n - 2$. Da primeira igualdade, vimos que $2i - 1, 2j - 1 \geq 3$, então adicionando uma parte igual a $2n - 3$ e subtraindo 2 de $2i - 1$ e de $2j - 1$ obtemos uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 5, 2)$.

Reciprocamente, dada uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 5, 2)$ sua maior parte é $2n - 3$ e neste caso $x(2n - 3) = 0$. Retiramos a parte $2n - 3$ e adicionamos 2 em cada um dos dois excessos, obtendo uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 2n + 2, 2)$.

3^a : A maior parte de uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 5, 2)$ é $2n - 3$. Assim, $n^2 - 5 - (n - 1)^2 = 2n - 6$, logo devemos particionar $2n - 6$ em duas partes ímpares menores do que ou iguais a $2n - 3$. Então, temos a equação

$$\begin{aligned} 2i - 1 + 2j - 1 &= 2n - 6 \\ i + j &= n - 2, \text{ com } 1 \leq i, j \leq n - 1, \end{aligned}$$

que possui $\left\lfloor \frac{n - 2}{2} \right\rfloor$ soluções.

□

Olhando para os dados da quarta diagonal da Tabela 4, qua contabilizam as partições cujo excesso é 3, obtemos quatro propriedades similares. Provamos apenas uma delas, as outras seguem de maneira análoga.

Teorema 3.9. *Para todo $n \geq 3$ temos que*

- (a) $p_{\psi^*}(n^2 - 5, 3) = p_{\psi^*}(n^2 - 2, 3) = p(n - 3, \leq 3)$;
- (b) $p_{\psi^*}(n^2 + 2n - 2, 3) = p_{\psi^*}(n^2 + 2n - 3, 3) = p(n - 3, \leq 3)$;
- (c) $p_{\psi^*}(n^2 + 4n + 3, 3) = p_{\psi^*}(n^2 + 4n - 2, 3) = p(n - 3, \leq 3)$;
- (d) $p_{\psi^*}(n^2 + 6n + 10, 3) = p_{\psi^*}(n^2 + 6n + 1, 3) = p(n - 3, \leq 3)$.

Demonstração. Provamos o item (a). Consideramos uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 5, 3)$, logo sua maior parte é $2n - 5$. Assim,

$$\begin{aligned}
 n^2 - 5 &= 1 + 3 + \cdots + 2n - 5 + \sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ ímpar}}}^{2n-5} x(i) \cdot i \\
 n^2 - 5 &= (n - 2)^2 + \sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ ímpar}}}^{2n-5} x(i) \cdot i \\
 4n - 9 &= \sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ ímpar}}}^{2n-5} x(i) \cdot i \tag{3.12}
 \end{aligned}$$

Consideramos a sequência de todos os excessos desta partição $(x(1), x(3), \dots, x(k), \dots, x(2n - 5))$. Invertendo esta sequência, isto é, substituindo k por $2n - 5 - k + 1 = 2n - k - 4$, a sequência torna-se $(x(2n - 5), \dots, x(2n - k - 4), \dots, x(3), x(1))$.

Agora, consideramos a partição

$$(2n - 3) + (2n - 5)(1 + x(1)) + \cdots + k \cdot (1 + x(2n - k - 4)) + \cdots + 1 \cdot (1 + x(2n - 5)).$$

Notamos que tal partição é contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 2, 3)$. De fato, como o número de excessos não nulos, neste caso igual a 3, permanece o mesmo, podemos rearranjar os termos e a soma das partes da nova partição é

$$\begin{aligned}
 &= (2n - 3) + \sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ ímpar}}}^{2n-5} (1 + x(i)) \cdot (2n - i - 4) \\
 &= (n - 1)^2 + \sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ ímpar}}}^{2n-5} x(i) \cdot (2n - i - 4) \\
 &= (n - 1)^2 + (2n - 4) \cdot \underbrace{\sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ ímpar}}}^{2n-5} x(i)}_3 - \underbrace{\sum_{\substack{i=1, \\ i \text{ ímpar}}}^{2n-5} x(i) \cdot i}_{4n-9} \\
 &= n^2 - 2.
 \end{aligned}$$

Para a segunda igualdade, a maior parte de uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 2, 3)$ é $2n - 3$, então $(n^2 - 2) - (1 + 3 + \cdots + 2n - 3) = (n^2 - 2) - (n - 1)^2$ é a soma de seus três excessos, que podemos escrever como

$$(2i - 1) + (2j - 1) + (2k - 1) = 2n - 3.$$

Assim, $(i - 1, j - 1, k - 1)$ é uma partição de $n - 3$ em até 3 partes. □

Exemplo 3.10. Para ilustrarmos a bijeção do item (a) do Teorema 3.9, consideramos $n = 8$, então

$P_{\psi^*}(59, 3)$	$P_{\psi^*}(62, 3)$		$P(5, \leq 3)$
(11, 11, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 1)	(13, 11, 11, 9, 7, 5, 3, 1, 1, 1)	$(2 \cdot 6 - 1, 2 \cdot 1 - 1, 2 \cdot 1 - 1)$	(5, 0, 0)
(11, 11, 9, 9, 7, 5, 3, 3, 1)	(13, 11, 9, 9, 7, 5, 3, 3, 1, 1)	$(2 \cdot 5 - 1, 2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 1 - 1)$	(4, 1, 0)
(11, 11, 9, 7, 7, 5, 5, 3, 1)	(13, 11, 9, 7, 7, 5, 5, 3, 1, 1)	$(2 \cdot 4 - 1, 2 \cdot 3 - 1, 2 \cdot 1 - 1)$	(3, 2, 0)
(11, 9, 9, 9, 7, 5, 5, 3, 1)	(13, 11, 9, 7, 7, 5, 3, 3, 3, 1)	$(2 \cdot 4 - 1, 2 \cdot 2 - 1, 2 \cdot 2 - 1)$	(3, 1, 1)
(11, 9, 9, 7, 7, 7, 5, 3, 1)	(13, 11, 9, 7, 5, 5, 5, 3, 3, 1)	$(2 \cdot 3 - 1, 2 \cdot 3 - 1, 2 \cdot 2 - 1)$	(2, 2, 1)

3.3 Relação entre as funções ϕ^* e ψ^* .

Nesta seção, por meio da observação paralela das Tabelas 3 e 4 exibimos resultados relacionando os números $p_{\phi^*}(n, k)$ e $p_{\psi^*}(n, k)$.

Teorema 3.10. *Para todo n e $k \geq 1$ ímpar, temos que*

$$p_{\phi^*}(n^2 - k, 1) = p_{\psi^*}(n^2 - (k + 1), 1).$$

Demonstração. Seja λ uma partição contada por $p_{\phi^*}(n^2 - k, 1)$, com maior parte ímpar $2s - 1$ e $2i$ como parte par, com $1 \leq i \leq s$. Se associarmos a parte $2i$ com a parte $2i - 1$ obtemos uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - (k + 1), 1)$. Claramente, a aplicação é invertível. □

Teorema 3.11. *Para todo $n \geq 2$ temos que*

- (a) $p_{\psi^*}(n^2 - 3, 3) = p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3)$;
- (b) $p_{\psi^*}(n^2 - 5, 3) = p_{\phi^*}(n^2 - 2, 3) = p(n, 3)$;
- (c) $p_{\psi^*}(n^2 - 1, 3) = p_{\phi^*}(n^2 - 3, 3)$;
- (d) $p_{\psi^*}(n^2 + 2n - 7, 3) = p_{\phi^*}(n^2 + 2n - 4, 3) = p(n - 2, 3)$.

Demonstração. Provamos o item (a) por meio de uma bijeção, sendo o argumento similar para os outros itens. Seja λ uma partição contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 3, 3)$, com maior parte $2s - 1$. Associamos todos os três excessos da forma $2i - 1$ de λ com a parte $2(n - i - 1)$ e adicionamos uma parte igual a $2s + 1$, obtendo uma partição μ contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3)$.

Reciprocamente, dada uma partição μ contada por $p_{\phi^*}(n^2 - 1, 3)$, sendo $2s - 1$ sua maior parte ímpar, removemos esta parte e associamos toda parte $2i$ de μ com a parte $2(n - i - 1) - 1$, obtendo uma partição λ contada por $p_{\psi^*}(n^2 - 3, 3)$. □

Exemplo 3.11. *Consideramos $n = 10$ no item (a) do Teorema 3.11 temos as partições relacionadas.*

$P_{\psi^*}(97, 3)$	$P_{\phi^*}(99, 3)$
(15, 15, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 3 , 1)	(17, 15, 14, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 2 , 2 , 1)
(15, 15, 13, 13 , 11, 9, 7, 5, 5 , 3, 1)	(17, 15, 13, 12 , 11, 9, 7, 5, 4 , 3, 2 , 1)
(15, 15, 13, 11, 11 , 9, 7, 7 , 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 10 , 9, 7, 6 , 5, 3, 2 , 1)
(15, 15, 13, 11, 9, 9 , 9 , 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 9, 8 , 8 , 7, 5, 3, 2 , 1)
(15, 13, 13 , 13 , 11, 9, 7, 7 , 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 10 , 9, 7, 5, 4 , 4 , 3, 1)
(15, 13, 13 , 11, 11 , 9, 9 , 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 9, 8 , 7, 6 , 5, 4 , 3, 1)
(15, 13, 11, 11 , 11 , 11 , 9, 7, 5, 3, 1)	(17, 15, 13, 11, 9, 7, 6 , 6 , 6, 5, 3, 1)

4 Índice de Paridade

Neste capítulo apresentamos duas soluções para o Problema 5 e uma para o Problema 6 conjecturados por Andrews em [3]. Para a primeira solução do problema 5 exibimos uma bijeção entre os conjuntos D_n^0 e D_n^1 definidos no Teorema de Fine, [14], e o conjunto de partições indexadas pelo seu índice de paridade inferior. Para a segunda solução do Problema 5 e do Problema 6 utilizamos representação matricial para partições. Parte dos resultados aqui apresentados estão contidos no artigo Parity indices and two-line matrix representation for partitions, [9], publicado na *Trends in Applied and Computational Mathematics*.

4.1 Teorema de Fine

Nesta seção enunciamos um dos famosos teoremas de Fine, cuja prova combinatória pode ser encontrada em [14]. Esta prova é considerada elegante e simples.

Teorema 4.1. (*Fine*) *Seja D_n^0 (D_n^1) o conjunto de partições λ de n em partes distintas, tais que a maior parte λ_1 é par (ímpar), respectivamente. Então*

$$|D_n^0| - |D_n^1| = \begin{cases} 1, & \text{if } n = \frac{k(3k+1)}{2}; \\ -1, & \text{if } n = \frac{k(3k-1)}{2}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Problemas que envolvem paridade estão relacionados com identidades clássicas de partições, como por exemplo as identidades de Euler, Rogers, Ramanujan e Gordon. O teorema que acabamos de enunciar é um exemplo de problema que envolve o conceito de paridade no estudo de identidades relacionadas à teoria de partições. Diversos autores pesquisaram questões que envolvem paridade de partições, [10], [11], [12]. Em [3], Andrews descreveu vários resultados sobre esse assunto e no final enumerou quinze problemas. Os problemas 1, 2 e 3 foram solucionados em [21], 9 e 10 foram resolvidos em [8], sendo que sua demonstração é puramente analítica. Em [20], outra solução para os problemas 9 e 10 são apresentadas, e neste mesmo artigo é dado uma prova para o problema 5, cuja demonstração é baseada em alguns resultados relacionados com funções geradoras para partições e q-séries. Em [18] também é dada uma outra solução para o problema 5 baseada na prova involutiva de Franklin.

4.2 Problema 5 dado em [3]

Nesta seção apresentamos a primeira solução para o problema 5 de [3], estabelecemos uma bijeção entre os conjuntos D_n^0 e D_n^1 , definidos no Teorema de Fine e o conjunto de partições indexadas por meio do seu índice inferior de paridade ímpar.

4.2.1 Índice de Paridade

Nesta subseção apresentamos o conceito de índice inferior de paridade par e ímpar para partições e suas respectivas funções geradoras, apresentadas em [3].

Definição 4.1. *Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ uma partição, com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$. O índice inferior de paridade par (ímpar) de λ , denotado por $I_{le}(\lambda)$ ($I_{lo}(\lambda)$) é definido, como sendo o comprimento máximo de subsequências crescentes de $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\}$ cujos termos alternam a paridade iniciando com um par (ímpar), λ_i .*

Exemplo 4.1. *Consideramos $\lambda = (8, 7, 7, 6, 5, 4, 4, 2, 2, 1)$ uma partição de 46. Então, $I_{le}(\lambda) = 5$ e $I_{lo}(\lambda) = 6$.*

Definição 4.2. *Seja $p_e(r, m, n)$ ($p_o(r, m, n)$) o número de partições λ de n em m partes distintas com $I_{le}(\lambda)$ ($I_{lo}(\lambda)$) igual a r . Denotamos por $P_e(y, x; q)$ ($P_o(y, x; q)$) a função geradora para as partições λ de n em m partes distintas com $I_{le}(\lambda) = r$ ($I_{lo}(\lambda) = r$), ou seja,*

$$P_e(y, x; q) = \sum_{r, m, n \geq 0} p_e(r, m, n) y^r x^m q^n \quad (4.1)$$

$$P_o(y, x; q) = \sum_{r, m, n \geq 0} p_o(r, m, n) y^r x^m q^n \quad (4.2)$$

No resultado abaixo, apresentado em [3], temos uma fórmula explícita para $P_o(y, x; q)$.

Teorema 4.2 (Teorema 7, [3]). *A função geradora para as partições enumeradas por $p_o(r, m, n)$ é dada por:*

$$P_o(y, x; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n y^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(-\frac{q}{y}\right)_n}{(q^2; q^2)_n}. \quad (4.3)$$

4.2.2 Primeira solução do Problema 5

Nesta subseção apresentamos a primeira solução do Problema 5, proposto em [3], o qual enunciamos abaixo.

Problema 4.1. *Resulta de uma fórmula antiga de Rogers que*

$$P_o(-1, 1; q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(3n+1)/2} (1 - q^{2n+1}).$$

Prove de maneira combinatória que

$$\sum_{r, m \geq 0} p_o(r, m, n) (-1)^r = \begin{cases} 1, & \text{se } n = k(3k + 1)/2 \\ -1, & \text{se } n = k(3k + 5)/2 + 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.4)$$

Avaliando 4.2 em $y = -1$ e $x = 1$ temos que

$$P_o(-1, 1; q) = \sum_{r, m, n \geq 0} p_o(r, m, n) (-1)^r q^n.$$

Para solucionar o problema acima necessitamos do seguinte lema.

Lema 4.1. Consideramos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ uma partição do inteiro positivo n em m partes distintas, cujo $I_{lo}(\lambda) = r$. Então,

(a) r é par se, e somente se, λ_1 é par;

(b) r é ímpar se, e somente se, λ_1 é ímpar.

Demonstração. Provamos o item (a) sendo o outro análogo. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ uma partição do inteiro positivo n em m partes distintas, cujo $I_{lo}(\lambda) = r$ e r é par. Logo, existe uma subsequência crescente $(\lambda_{i+r-1}, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i)$ de comprimento igual a r , de $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, com λ_{i+r-1} ímpar.

Sendo λ_{i+r-1} ímpar e r par, então λ_i é par. Da mesma forma, podemos concluir que se λ_i é par, então r é par, pois caso contrário, λ_{i+r-1} seria par e teríamos uma contradição. Se $\lambda_1 = \lambda_i$ então o resultado segue. Suponhamos que $\lambda_1 > \lambda_i$. Para todo $i > j$, temos que λ_j é par, pois caso contrário, se λ_j fosse ímpar teríamos mais um termo na sequência que alterna a paridade com λ_i que é par e assim, a subsequência teria comprimento $r + 1$. Mas, $I_{lo}(\lambda) = r$, logo λ_j é par. Fazendo $j = 1$ segue que λ_1 é par.

Reciprocamente, seja λ_1 par. Suponhamos por absurdo que $I_{lo}(\lambda) = r$ com r ímpar, então existiria uma subsequência crescente $(\lambda_{i+r-1}, \dots, \lambda_{i+1}, \lambda_i)$ de $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, com λ_{i+r-1} ímpar, sendo r o máximo com essa propriedade. Logo λ_i é ímpar. Temos que $\lambda_1 \neq \lambda_i$, pois λ_1 é par. Desta forma, λ_i terá que alternar a paridade com λ_1 e com isso $I_{lo}(\lambda) \geq r + 1$. O que é uma contradição. Portanto r é par. \square

Definição 4.3. Seja \mathbb{P}_n^r o conjunto das partições λ de n com partes distintas tal que $I_{lo}(\lambda) = r$. De maneira geral, quando r for par (ímpar) consideramos o conjunto \mathbb{P}_n^0 (\mathbb{P}_n^1).

Demonstração. (**Problema 4.1**) Dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ de n em m partes distintas, cujo $I_{lo}(\lambda) = r$, do Lema 4.1 segue que

$$\lambda \in \mathbb{P}_n^0 \iff \lambda \in D_n^0$$

ou

$$\lambda \in \mathbb{P}_n^1 \iff \lambda \in D_n^1.$$

Isso estabelece uma bijeção entre os conjuntos definidos no Teorema 4.1 e o conjunto das partições λ indexadas pelo $I_{lo}(\lambda) = r$. Assim, concluímos que

$$\sum_{\substack{r, m \geq 0, \\ r \text{ par}}} p_o(r, m, n)(-1)^r = |D_n^0| \quad (4.5)$$

e

$$\sum_{\substack{r, m \geq 0, \\ r \text{ ímpar}}} p_o(r, m, n)(-1)^r = -|D_n^1|. \quad (4.6)$$

Temos de (4.5) e (4.6) que

$$\sum_{r, m \geq 0} p_o(r, m, n)(-1)^r = |D_n^0| - |D_n^1|. \quad (4.7)$$

Segue do Teorema 4.1 que

$$\sum_{r,m \geq 0} p_o(r, m, n)(-1)^r = |D_n^0| - |D_n^1| = \begin{cases} 1, & \text{se } n = k(3k + 1)/2 \\ -1, & \text{se } n = k(3k + 5)/2 + 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

o que conclui a demonstração. □

Exemplo 4.2. Consideramos as partições em m partes distintas de $n = 5, 6, 7$, com $r = I_{l_o}(\lambda)$. Então,

Partições em partes distintas de 5	
(5)	
(4, 1)	
(3, 2)	

m	r	$p_o(r, m, 5)(-1)^r$
1	0	0
1	1	-1
2	0	0
2	1	-1
2	2	1

Assim,

$$\sum_{r,m \geq 0} p_o(r, m, 5)(-1)^r = -1.$$

Partições em partes distintas 6	
(6)	
(5, 1)	
(4, 2)	
(3, 2, 1)	

m	r	$p_o(r, m, 6)(-1)^r$
1	0	1
1	1	0
2	0	1
2	1	-1
2	2	0
3	0	0
3	1	0
3	2	0
3	3	-1

Assim,

$$\sum_{r,m \geq 0} p_o(r, m, 6)(-1)^r = 0.$$

<i>Partições em partes distintas 7</i>
(7)
(6, 1)
(5, 2)
(4, 3)
(4, 2, 1)

m	r	$p_o(r, m, 7)(-1)^r$
1	0	0
1	1	-1
2	0	0
2	1	-1
2	2	2
3	0	0
3	1	0
3	2	1
3	3	0

Assim,

$$\sum_{r,m \geq 0} p_o(r, m, 7)(-1)^r = 1.$$

4.2.3 Índice de paridade inferior e representação matricial

Nesta subseção apresentamos uma interpretação combinatória para $P_o(-1, 1; q)$ em termos de matrizes de duas linhas e a segunda solução para o Problema 4.1.

Segue do Teorema 4.2 que

$$P_o(-1, 1; q) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} (q; q)_n}{(q^2; q^2)_n}. \tag{4.8}$$

Para o nosso propósito, consideramos a versão sem sinal de (4.8), ou seja,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}} (-q; q)_n}{(q^2; q^2)_n}. \tag{4.9}$$

Seu termo geral

$$\frac{q^{1+2+\dots+s} (1+q)(1+q^2) \dots (1+q^s)}{(1-q^2)(1-q^4) \dots (1-q^{2s})} \tag{4.10}$$

gera as partições de n com partes iguais a $1, 2, \dots, s$ tais que a quantidade de cada parte é igual a $2d_t + j_t + 1$, sendo $j_t \in \{0, 1\}$ e $1 \leq t \leq s$.

Observação 4.1. *Salientamos que a expressão (4.10) poderia ser simplificada, isto é,*

$$\frac{q^{1+2+\dots+s}}{(1-q)(1-q^2) \dots (1-q^s)}. \tag{4.11}$$

Mas para a construção matricial enunciada no próximo teorema, essencial para a segunda solução do Problema 4.1, utilizaremos a expressão (4.10).

Teorema 4.3. *O coeficiente de q^n na expansão de (4.9) é igual ao número de elementos no conjunto de matrizes da forma*

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ 2d_1 & 2d_2 & \dots & 2d_s \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

cujas entradas inteiras não negativas somam n e satisfazem

$$c_s = 1 + j_s, \text{ com } j_s \in \{0, 1\} \quad (4.13)$$

$$c_t = 1 + j_t + c_{t+1} + 2d_{t+1}, \text{ com } j_t \in \{0, 1\} \text{ e } 1 \leq t \leq s-1. \quad (4.14)$$

Demonstração. De acordo com o termo geral de (4.8), podemos decompor n como

$$n = [2d_1 + (j_1 + 1)] \cdot 1 + [2d_2 + (j_2 + 1)] \cdot 2 + \dots + [2d_s + (j_s + 1)] \cdot s,$$

em que $d_1, d_2, \dots, d_s \geq 0$ e $j_1, j_2, \dots, j_s \in \{0, 1\}$. Considerando $c_s = 1 + j_s$ e $c_t = 1 + j_t + c_{t+1} + d_{t+1}$ para $1 \leq t \leq s-1$, obtemos a matriz de duas linhas correspondente, conforme (4.12), satisfazendo as condições (4.13) e (4.14).

Reciprocamente, dada uma matriz do tipo (4.12), a qual possui s colunas, temos que sua partição correspondente possuirá as partes de 1 até s , sem saltos, cuja quantidade de cada parte t é dada por $2d_t + j_t + 1$, para $1 \leq t \leq s$. \square

Exemplo 4.3. *Na tabela abaixo, temos as partições e as matrizes para $n = 7$ associadas pelo Teorema 4.3.*

Partições	Matrizes
(3, 2, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(2, 2, 2, 1)	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
(2, 2, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
(2, 1, 1, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Definição 4.4. *Dada uma matriz A do tipo (4.12), definimos o seu peso, $\omega(A)$, como sendo $(-1)^{c_1}$. Da mesma forma, para uma partição λ de n da forma $n = [2d_1 + (j_1 + 1)] \cdot 1 + [2d_2 + (j_2 + 1)] \cdot 2 + \dots + [2d_s + (j_s + 1)] \cdot s$ definimos seu peso, $\omega(\lambda)$, por $(-1)^{s+j_1+\dots+j_s}$.*

Proposição 4.1. *Dada a matriz A e a partição λ associadas pelo Teorema 4.3 temos que $\omega(A) = \omega(\lambda)$.*

Demonstração. Consideramos A uma matriz do tipo (4.12) cuja soma das entradas é n e λ uma partição de n gerada por (4.9), associadas pelo Teorema 4.3, então

$$\omega(A) = (-1)^{c_1} = (-1)^{s+j_1+\dots+j_s+2d_2+\dots+2d_s} = (-1)^{s+j_1+\dots+j_s} = \omega(\lambda).$$

□

Na proposição abaixo apresentamos uma representação matricial para as partições geradas por (4.8).

Proposição 4.2. *O coeficiente de q^n na expansão de (4.8) é o número de matrizes da forma 4.12, cujas entradas inteiras não negativas somam n e satisfazem 4.13 e 4.14. Sendo cada matriz contada com seu peso $(-1)^{c_1}$.*

Exemplo 4.4. *Na tabela a seguir listamos alguns casos de partições e matrizes associadas pelo Teorema 4.3, juntamente com seus pesos e os termos que as geraram.*

n	Matrizes	Partições	$w(A) = w(\lambda)$	$w(A)q^n$
1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	(1)	$(-1)^1$	$-q$
2	$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	(1, 1)	$(-1)^2$	$+q^2$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(2, 1)	$(-1)^2$	$+q^3$
	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	(1, 1, 1)	$(-1)^1 = -1$	$-q^3$
4	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(2, 1, 1)	$(-1)^3 = -1$	$-q^4$
	$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	(1, 1, 1, 1)	$(-1)^2 = 1$	$+q^4$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(2, 2, 1)	$(-1)^3 = -1$	$-q^5$
	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	(2, 1, 1, 1)	$(-1)^2 = 1$	$+q^5$
	$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	(1, 1, 1, 1, 1)	$(-1)^1 = -1$	$-q^5$
6	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	(3, 2, 1)	$(-1)^3 = -1$	$-q^6$
	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(2, 2, 1, 1)	$(-1)^4 = 1$	$+q^6$
	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$	(2, 1, 1, 1, 1)	$(-1)^3 = -1$	$-q^6$
	$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	(1, 1, 1, 1, 1, 1)	$(-1)^2 = 1$	$+q^6$

Para um n , na proposição abaixo, estabelecemos uma bijeção entre as matrizes do tipo (4.12) e as partições em partes distintas.

Proposição 4.3. *O número de partições de n em partes distintas é igual ao número de matrizes do tipo (4.12) cuja soma das entradas é n .*

Demonstração. Para um n fixo, dada uma matriz do tipo (4.12), ou seja,

$$\begin{pmatrix} s + j_1 + \cdots + j_s + 2d_2 + \cdots + 2d_s & \cdots & 2 + j_{s-1} + j_s + 2d_s & 1 + j_s \\ & 2d_1 & \cdots & 2d_{s-1} & 2d_s \end{pmatrix},$$

consideramos a seguinte partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ de n com as partes dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= s + j_1 + \cdots + j_s + 2d_1 + 2d_2 + \cdots + 2d_s, \\ \lambda_2 &= (s - 1) + j_2 + \cdots + j_s + 2d_2 + \cdots + 2d_s, \\ &\vdots \\ \lambda_{s-1} &= 2 + j_{s-1} + j_s + 2d_{s-1} + 2d_s, \\ \lambda_s &= 1 + j_s + 2d_s, \end{aligned} \tag{4.15}$$

notamos que essas partes são distintas.

Reciprocamente, dada uma partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ de n em partes distintas queremos encontrar $j_1, j_2, \dots, j_s \in \{0, 1\}$ e d_1, d_2, \dots, d_s satisfazendo (4.15)

Notamos da última linha que se λ_s é par temos que $j_s = 1$ e d_s ficam determinados. Se λ_s é ímpar temos que $j_s = 0$ e novamente d_s fica determinado. Substituindo esses valores na penúltima equação e fazendo a mesma análise de paridade obtemos j_{s-1} e d_{s-1} . Realizando o processo sucessivamente encontramos a matriz associada a tal partição. \square

Exemplo 4.5. *Na tabela abaixo, temos as partições em partes distintas de 7 e as matrizes associadas pelo Proposição 4.3.*

<i>Partições</i>	<i>Matrizes</i>
(7)	$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
(6, 1)	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
(5, 2)	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
(4, 3)	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
(4, 2, 1)	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vimos que dada uma matriz do tipo (4.12), associamos uma partição $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ em partes distintas tal que $\lambda_t = c_t + 2d_t$, com $1 \leq t \leq s$. Notemos que a paridade de c_1 depende da paridade de λ_1 .

Definição 4.5. Dado n um inteiro positivo definimos os conjuntos, de acordo com as matrizes do tipo (4.12),

$$(a) \mathfrak{M}_n^0 = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ 2d_1 & 2d_2 & \dots & 2d_s \end{pmatrix}; c_1 \text{ é par} \right\};$$

$$(b) \mathfrak{M}_n^1 = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ 2d_1 & 2d_2 & \dots & 2d_s \end{pmatrix}; c_1 \text{ é ímpar} \right\}.$$

De acordo com a Definição 4.5 temos que

$$|\mathfrak{M}_n^0| = |D_n^0| \quad e \quad |\mathfrak{M}_n^1| = |D_n^1|.$$

Portanto, segue de (4.7) que

$$\begin{aligned} \sum_{r,m \geq 0} p_o(r, m, n)(-1)^r &= |\mathfrak{M}_n^0| - |\mathfrak{M}_n^1| = |D_n^0| - |D_n^1| \\ &= \begin{cases} 1, & \text{se } n = k(3k + 1)/2 \\ -1, & \text{se } n = k(3k + 5)/2 + 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dessa forma, obtemos uma outra prova combinatória para o Problema 5, conjecturado em [3].

4.3 Problema 6 em [3]

Nesta seção apresentamos uma solução para o Problema 6 enunciado em [3]. Para tanto, precisamos da definição de peso de uma partição irrestrita λ em relação ao seu índice inferior de paridade ímpar.

Em [3] encontra-se a seguinte definição.

Definição 4.6. *Seja $u_o(r, m, n)$ o número de partições λ de n em m partes com $I_{lo}(\lambda) = r$.*

A partir da Definição 4.6 definimos o peso da partição descrita.

Definição 4.7. *Dada uma partição irrestrita $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ de n tal que $I_{lo}(\lambda) = r$, o peso de λ , denotado por $\omega(\lambda)$, é igual a $(-1)^{r+m}$.*

Lema 4.2. *Consideramos $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ uma partição irrestrita do inteiro positivo n , tal que $I_{lo}(\lambda) = r$. Então, r é par (ímpar) se, e somente se, λ_1 é par (ímpar).*

Demonstração. A prova é similar a do Lema 4.1. □

Segue do Lema 4.2 que

$$\omega(\lambda) = (-1)^{m+r} = (-1)^{m+\lambda_1},$$

sendo m o número de partes e λ_1 a maior parte da partição λ .

Exemplo 4.6. *Para $n = 7$ ilustramos suas partições irrestritas e seus respectivos pesos.*

Partições de 7	m	r	$(-1)^{m+r}$
(7)	1	1	$(-1)^{1+1} = 1$
(6, 1)	2	2	$(-1)^{2+2} = 1$
(5, 2)	2	1	$(-1)^{2+1} = -1$
(5, 1, 1)	3	1	$(-1)^{3+1} = 1$
(4, 3)	2	2	$(-1)^{2+2} = 1$
(4, 2, 1)	3	2	$(-1)^{3+2} = -1$
(4, 1, 1, 1)	4	2	$(-1)^{4+2} = 1$
(3, 3, 1)	3	1	$(-1)^{3+1} = 1$
(3, 2, 2)	3	1	$(-1)^{3+1} = 1$
(3, 2, 1, 1)	4	3	$(-1)^{4+3} = -1$
(3, 1, 1, 1, 1)	5	1	$(-1)^{5+1} = 1$
(2, 2, 2, 1)	4	2	$(-1)^{4+2} = 1$
(2, 2, 1, 1, 1)	5	2	$(-1)^{5+2} = 1$
(2, 1, 1, 1, 1, 1)	6	2	$(-1)^{6+2} = 1$
(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)	7	1	$(-1)^{7+1} = 1$

Tabela 5 – Partições irrestritas de 7 com seus respectivos pesos

Em [3] temos que

$$U_o(y, x; q) = \sum_{r, m, n \geq 0} u_o(r, m, n) y^r x^m q^n \quad (4.16)$$

é a função geradora para as partições λ de n em exatamente m partes, cujo $I_{l_o}(\lambda) = r$.

Nosso objetivo é apresentar uma solução do Problema abaixo enunciado.

Problema 4.2. *Prove, de maneira combinatória, que $U_o(-1, -1; q)$ é igual a função mock theta de ordem 3*

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n^2}. \quad (4.17)$$

Avaliando (4.16) em $x = y = -1$ temos que

$$U_o(-1, -1; q) = \sum_{r, m, n \geq 0} u_o(r, m, n) (-1)^{m+r} q^n. \quad (4.18)$$

Notamos que o coeficiente de q^7 em (4.18) é dado por $\sum_{r, m \geq 0} u_o(r, m, 7) (-1)^{m+r}$. Ou seja, é igual a soma dos elementos da quarta coluna da Tabela 5.

Em [6], os autores apresentam uma representação matricial para partições irrestritas de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 4.4. *O número de partições irrestritas de n é igual ao número de elementos no conjunto de matrizes da forma*

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_l \\ d_1 & d_2 & \dots & d_l \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

com entradas inteiras não negativas somando n e satisfazendo

$$c_l \neq 0; \quad (4.20)$$

$$c_t \geq 2 + c_{t+1} + d_{t+1}, \text{ para } 1 \leq t \leq s-1. \quad (4.21)$$

ou ainda,

$$c_l = 1 + j_l; \quad (4.22)$$

$$c_t = (2l - (2t - 1)) + j_t + \dots + j_l + d_{t+1} + \dots + d_l, \quad (4.23)$$

com $j_t \in \mathbb{N}$ para $1 \leq t \leq l$.

Notamos que dada a partição irrestrita $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ de n , para obtermos a matriz associada pelo Teorema 4.4, procedemos da seguinte maneira:

- o lado l do quadrado de Durfee é o número de colunas da matriz;

- os parâmetros d_1, d_2, \dots, d_l indicam as quantidades de partes $1's, 2's, \dots, l's$, respectivamente, que aparecem abaixo do quadrado de Durfee de lado l , com

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = l + j_1 + j_2 + \dots + j_l \\ \vdots \\ \lambda_{l-1} = l + j_{l-1} + j_l \\ \lambda_l = l + j_l \end{array} \right. ,$$

sendo j_1, j_2, \dots, j_l obtidos na solução do sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = (2l - 1) + j_1 + j_2 + \dots + j_l + d_2 + \dots + d_l \\ \vdots \\ c_{l-1} = 3 + j_{l-1} + j_l + d_l \\ c_l = 1 + j_l \end{array} \right. .$$

Observação 4.2. Em [7] o peso de uma matriz A do tipo (4.19) é definido por $\omega(A) = (-1)^{c_1+d_1+1}$. Notamos que $w(A) = w(\lambda)$, sendo λ a partição associada pelo Teorema 4.4.

De fato, primeiramente, em [7] temos que $\lambda_1 = l + j_1 + j_2 + \dots + j_l$ e $m = l + d_1 + d_2 + \dots + d_l$, assim

$$w(A) = (-1)^{c_1+d_1+1} = (-1)^{((2l-1)+j_1+\dots+j_l+d_2+\dots+d_l)+d_1+1} = (-1)^{\lambda_1+m} = \omega(\lambda).$$

Exemplo 4.7. Abaixo apresentamos as partições irrestritas para $n = 5$ e as matrizes associadas pelo Teorema 4.4, bem como os seus pesos.

Matriz A	Partição λ	$w(A) = (-1)^{c_1+d_1+1}$	$w(\lambda) = (-1)^{m+r}$
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$	(5)	$(-1)^{5+0+1} = 1$	$(-1)^{1+1} = 1$
$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	(4,1)	$(-1)^{4+1+1} = 1$	$(-1)^{2+2} = 1$
$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(3,2)	$(-1)^{4+0+1} = -1$	$(-1)^{2+1} = -1$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$	(3,1,1)	$(-1)^{3+2+1} = 1$	$(-1)^{3+1} = 1$
$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	(2,2,1)	$(-1)^{3+1+1} = -1$	$(-1)^{3+2} = -1$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	(2,1,1,1)	$(-1)^{2+3+1} = 1$	$(-1)^{4+2} = 1$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$	(1,1,1,1,1)	$(-1)^{1+4+1} = 1$	$(-1)^{5+1} = 1$

Em [7], os autores apresentam o teorema sobre a função mock theta $f(q)$, que enunciamos abaixo.

Teorema 4.5. *A função mock theta $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n^2}$, é a função geradora para o número de matrizes A do tipo (4.19), sendo a matriz contada com seu peso $\omega(A) = (-1)^{c_1+d_1+1}$.*

A partir da junção da Observação 4.2 e do Teorema 4.5 obtemos a solução para o Problema 4.2 .

Demonstração. (**Problema 4.2**) Vimos que dada a matriz A e a partição λ associadas pelo Teorema 4.4 que $\omega(A) = \omega(\lambda)$. Assim, do Teorema 4.5 temos que a função mock theta $f(q)$ é também a função geradora para partições irrestritas $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ com $I_{l_o}(\lambda) = r$ e $\omega(\lambda) = (-1)^{m+r}$. Portanto,

$$U_o(-1, -1; q) = \sum_{r, m, n \geq 0} u_o(r, m, n) (-1)^{m+r} q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n^2} = f(q). \quad (4.24)$$

□

5 Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos representação matricial para as partições com partes congruentes a ± 1 e $\pm 2 \pmod{5}$. Em [7], os autores apresentam representação matricial para as versões sem sinal das funções mock theta ϕ e ψ . A partir destas representações matriciais construímos tabelas cujos dados nos sugeriram vários resultados interessantes. Dentre estes destacamos os que nos forneceram relações com os números triangulares. Esses resultados, obtidos pela representação matricial, nos motivam a investigar novas ou similares relações para outras funções, que caracterizam certos tipos de partições, encontradas principalmente em [4] e [5]

Também, neste trabalho, apresentamos soluções para dois dos quinze problemas enunciados em um artigo do Andrews, [3]. Dentre estes quinze problemas, um deles sugere estender os conceitos e resultados de índice de paridade de partições para sobrep partições. Pretendemos trabalhar nesta direção.

Referências

- [1] G. E. Andrews. *The theory of partitions*. Cambridge University Press, 1984.
- [2] G. E. Andrews. Mock theta functions. *Proc. Sympos. Pure Math*, 49:283–298, 1989.
- [3] G. E. Andrews. Parity in partition identities. *The Ramanujan Journal*, 23:45–90, 2010.
- [4] G. E. Andrews and B. C. Berndt. *Ramanujan’s Lost Notebook- Part I*. Springer, 2005.
- [5] G. E. Andrews and B. C. Berndt. *Ramanujan’s Lost Notebook- Part II*. Springer, 2008.
- [6] E. H. M. Brietzke, J. P. O. Santos, and R. da Silva. Bijective proofs using two-line matrix representations for partitions. *The Ramanujan Journal*, 23(1-3):265–295, 2010.
- [7] E. H. M. Brietzke, J. P. O. Santos, and R. da Silva. Combinatorial interpretations as two-line array for the mock theta functions. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 44(2):233–253, 2013.
- [8] W. Chu. Two problems of George Andrews on gerating functions for partitions. *Miskolc Mathematical Notes*, 13:293–302, 2012.
- [9] I. M. Craveiro, Wagner A., and D. Domingues. Parity indices and two-line matrix representation for partitions. *Trends in Applied and Computacional Mathematics*, 16:253–260, 2015.
- [10] H. Göllnitz. Einfache partitionen. *Diplomarbeit W. S.*, 65, 1960.
- [11] B. Gordon. Some Ramanujan-like continued fractions. *Int. Congr. of Mathematicians*, pages 29–30, 1962.
- [12] B. Gordon. Some continued fractions of the Rogers-Ramanujan type. *Duke Math Journal*, 31:741–748, 1965.
- [13] B. Gordon and R. J. McIntosh. A survey of classical mock theta functions. *Parttions, q-series, and modular forms*, 23:95–144, 2012.
- [14] I. Pak. On Fine’s partition theorems, Dyson, Andrews and missed opportunities. *The Mathematical Intelligencer*, 25:10–16, 2003.
- [15] J. P. O. Santos, P. Mondek, and A. C. Ribeiro. New two-line arrays representing partitions. *Annals of Combinatorics*, 15(2):341–354, 2011.
- [16] Mello M. e Murari I. T. C. Santos, J. P. O. *Introdução à Análise Combinatória*. Ciência Moderna, 2008.
- [17] A. Selberg. Über die mock-theta funktionen siebenter ordnung. *Arch. Math. Naturvidenskab*, 41:3–15, 1938.

-
- [18] R. Silva, J. C. Filho, and J. P. O. Santos. Proving two partition identities. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, 13:133–142, 2012.
- [19] G. N. Watson. The Final Problem: An Account of the Mock Theta Functions. *Journal London Math. Soc.*, 1:55–80, 1936.
- [20] A. J. Yee. Ramanujan’s partial theta series and parity in partitions. *The Ramanujan Journal*, 23:215–225, 2010.
- [21] A. J. Yee and S. Kim. Göllnitz-Gordon identities and parity questions in partitions. *Submitted*.