UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

MÔNICA MARTINS

CAMPO GRANDE - MS
OUTUBRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

MÔNICA MARTINS

ORIENTADOR: Prof. Dr. CLAUDEMIR ANIZ

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

CAMPO GRANDE - MS
OUTUBRO DE 2015

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

MÔNICA MARTINS

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovada pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudemir Aniz - UFMS
Profa. Dra. Elen Viviani Pereira Spreafico - UFMS
Prof. Dr. Fabrício Sérgio de Paula - UEMS

CAMPO GRANDE - MS

OUTUBRO DE 2015

Dedico este trabalho à Gilda, minha mãe, pelo apoio. Ao meu pai, Ramão, por ser meu exemplo de determinação; e ao meu esposo Sérgio pelo incentivo.

"Na maior parte das ciências uma
geração põe abaixo o que a outra construiu
e o que uma estabeleceu, a outra desfaz.
Somente na matemática é que cada geração
constrói um novo andar sobre a antiga estrutura".

Hankel

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por não ter permitido que eu perdesse o equilíbrio nos momentos de desânimo.

Aos meus pais, pelo apoio incondicional em todos os momentos da minha vida.

Ao meu marido que sempre me apoiou e incentivou, contribuindo para que meus momentos de estudos e pesquisas se tornassem o mais agradável possível.

Ao meu irmão por sempre me encorajar e apoiar nos momentos difíceis.

À minha amada sobrinha, pela abdicação da minha presença e pelas palavras de conforto.

Aos meus colegas do PROFMAT, Elton Barbosa, Everton Melo e Nivaldo Alves, que tive a imensa sorte de conhecer, e que tiveram o papel fundamental no sucesso do nosso grupo de estudo durante todo o período do mestrado. Obrigada por sempre terem se deslocado de suas residências até a minha, e pelas longas horas de estudos. Levarei comigo para sempre a frase de superação do nosso grupo: "Vamos lá, porque a noite é longa".

Ao meu colega do PROFMAT e de trabalho, Diego Saochine, pela companhia agradável nos almoços às sextas-feiras e pelas palavras de incentivo.

Ao Prof. Dr. Claudemir Aniz, por ter aceitado meu pedido para ser o meu orientador e que durante a orientação sempre esteve disponível para me auxiliar nos momentos em que precisei. Obrigada pela paciência com minhas limitações. Obrigada, principalmente, por ter me proporcionado excelentes aulas, passando a ser uma referência profissional em minha vida.

Aos professores do PROFMAT por terem me proporcionado um crescimento intelectual com suas aulas.

À Profa. Dra. Elisabete Sousa Freitas, por ter me proporcionado excelentes aulas na graduação (1992) e agora, também no mestrado. As suas aulas no mestrado reforçaram a minha admiração pelo seu profissionalismo.

À minha diretora Maria Eliza Rodrigues da Silva por ter cooperado com as mudanças dos horários de aulas para que eu pudesse ingressar no mestrado, pelo incentivo e por ter compreendido a minha ausência em alguns momentos. Muito obrigada.

Aos meus diretores Dulce Botelho Ferreira (a tia Dolly) e Vítor Hugo Bordignon por sempre incentivarem os seus professores a se capacitarem. Muito obrigada.

Às minhas amigas Alissandra e Laura, por terem tido paciência com minhas ansiedades e com a minha ausência.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos uma revisão bibliográfica dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$ e os métodos de resoluções de equações algébricas aplicados no Ensino Médio. Será feito um breve estudo dos números complexos, pois esses são fundamentais no cálculo das soluções das equações algébricas. Trataremos de abranger todas as propriedades necessárias para se resolver uma equação algébrica no Ensino Médio, além de apresentarmos o método de Viète para encontrarmos a fórmula de Bháskara. Também serão apresentadas a fórmula de Cardano e uma fórmula de se resolver uma equação específica do quarto grau. Finalizaremos o estudo apresentando alguns artigos da Revista do Professor de Matemática que tratam de relevantes propriedades dos polinômios e algumas variações para a demonstração da fórmula resolvente de equações do segundo grau.

Palavras-chave: números complexos, equações, fórmula de Cardano.

Abstract

We present a literature review of the polynomials with coefficients in $\mathbb{C}$ and methods of resolutions of algebraic equations applied in high school. A brief study of complex numbers, as these are critical in the calculation of solutions of algebraic equations will be done. We will try to cover all the properties needed to solve an algebraic equation in high school, as well as presenting the Viète method to quadratic equation. They will also be presented to Cardano formula and a formula to solve a specific equation of the fourth degree. We finalize the study showing some articles of Professor of Mathematics Magazine dealing with relevant properties of polynomials and some variations to demonstrate the formula of solving quadratic equations.

Keywords: complex numbers, equations, formulas of Cardano.

Sumário

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, faremos uma revisão bibliográfica de livros, dissertações e revistas especializadas, tais como a Revista do Professor de Matemática e Matemática Universitária sobre polinômios e equações algébricas, motivada pelo interesse que os alunos têm em resolver problemas que envolvem os referidos assuntos. Além das propriedades mais conhecidas para a manipulação de polinômios e resolução de equações algébricas, apresentaremos outras que, no mínimo, aprimorará nosso conhecimento em relação ao assunto.

Inicialmente, será feita uma abordagem sobre números complexos. As demonstrações exibidas nesse capítulo abrangem o inverso multiplicativo, a raiz quadrada de um número complexo, divisão e multiplicação de números complexos na forma polar, potenciação, raiz enésima de um complexo e as fórmulas de Moivre.

No segundo capítulo, daremos ênfase às propriedades dos polinômios, tais como: igualdade de polinômios, divisão de polinômios, teorema do resto, teorema de D'Alembert e divisibilidade de um polinômio por dois fatores do primeiro grau. Essas propriedades são de suma importância para a resolução de equações algébricas.

O terceiro capítulo será dedicado aos teoremas, relações de Girard, método de Viète para a resolução de equações do segundo grau, fórmula de Cardano e um método de resolução para um caso específico de equações do 4º grau.

O trabalho será finalizado no capítulo quatro, com a exibição de artigos que possibilitarão conhecermos um pouco mais sobre raízes racionais, e com a demonstração de duas formas diferentes o cálculo de raízes da equação do segundo grau do tipo $x^2 - sx + p = 0$.

Capítulo 1

NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados básicos sobre a estrutura algébrica dos números complexos, necessários para a compreensão dos conteúdos dos demais capítulos.

1 Forma Algébrica ou Forma Normal

Um número complexo z é um número da forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$, onde i é denominado unidade imaginária. A unidade imaginária é que permite que no conjunto dos números complexos haja raiz de índice par de números negativos, não definida no conjunto $\mathbb{R}$.

Um número complexo possui duas partes:

- $\boldsymbol{a}$ é a parte real de $\boldsymbol{z}$, escrevemos $a = Re(z)$.

- $\boldsymbol{b}$ é a parte imaginária de $\boldsymbol{z}$, escrevemos $b = Im(z)$.

Se $b = 0$, obtemos o número $z = a$ real. No caso $a = 0$ e $b \neq 0$, o número $z = bi$ é chamado de número imaginário puro. Consequentemente $z = a + bi = 0$, se, e somente se, $a = 0$ e $b = 0$.

Os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ são iguais se, e somente se, $a = c$ e $b = d$. Nesse conjunto estão definidas as operações de adição e multiplicação, da seguinte forma:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

e

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Essas operações possuem as seguintes propriedades:

Propriedades da Adição

Para quaisquer números complexos, temos as seguintes propriedades:

A_1) Comutativa

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \text{ para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

A_2) Associativa

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \text{ para todo } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

A_3) Existência de elemento neutro

O complexo $0 = 0 + 0i$ é o elemento neutro, isto é,

$$0 + z = z + 0 = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

A_4) Existência de elemento simétrico

Todo número complexo possui um simétrico. De fato, dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, o complexo $-z = -a - bi$ satisfaz a propriedade

$$(-z) + z = z + (-z) = 0, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Propriedades da Multiplicação

Para quaisquer números complexos, temos as seguintes propriedades:

M_1) Comutativa

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \text{ para todo } z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

M_2) Associativa

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \text{ para todo } z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

M_3) Existência de elemento neutro

O complexo $1 = 1 + 0i$ é o elemento neutro da multiplicação, isto é,

$$1 \cdot z = z, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

M_4) Inverso

Todo número complexo z, não nulo, possui um inverso, ou seja, existe um complexo z_1^{-1} não nulo tal que

$$z \cdot z^{-1} = 1.$$

D) Distributiva

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \text{ para todo } z_1, z_2 \text{ e } z_3 \in \mathbb{C}.$$

Definição 1. *Chama-se conjunto dos números complexos, e denotado por $\mathbb{C}$, o conjunto formado pelos números da forma $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, munidos das operações de adição e multiplicação.*

Exemplo 1 *Sejam os complexos $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = -7 + 2i$, $z_3 = 0$ e $z_4 = 1$. Temos que:*

- $z_1 + z_2 = (4 + 3i) + (-7 + 2i) = (4 - 7) + (3 + 2)i = -3 + 5i$
- $z_1 \cdot z_2 = (4 + 3i) \cdot (-7 + 2i) = [4 \cdot (-7) - 3 \cdot 2] + [4 \cdot 2 + 3 \cdot (-7)]i = -34 - 13i$
- $z_1 + z_3 = (4 + 3i) + 0 = 4 + 3i$
- $z_1 \cdot z_4 = (4 + 3i) \cdot 1 = 4 + 3i$

2 Inverso

Dado um complexo $z = a + bi$ não nulo ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), ou equivalentemente $a^2 + b^2 \neq 0$, vamos determinar o número complexo $z' = x + yi$ também não nulo, tal que, $z \cdot z' = 1$. Desta forma, desenvolvendo a igualdade

$$z \cdot z' = (a + bi) \cdot (x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i = 1 \text{ obtemos:}$$

$$\left\{\begin{array}{l} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} (1), \text{ onde } \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = A.$$

Calculando o determinante da matriz A e a matriz inversa de A, obtemos

$$\det(A) = a^2 + b^2 \neq 0 \text{ e}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.$$

Prosseguindo com a resolução do sistema, temos de (1) que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \text{ e } y = \frac{-b}{a^2+b^2}.$$

Podemos, então, concluir que existe $z' = x + yi$, que multiplicado por z, resulta o elemento neutro da multiplicação. Esse número complexo é chamado inverso ou inverso multiplicativo do complexo z, denotado por z^{-1} ou por $\frac{1}{z}$.

3 Conjugado

Definição 2. *O conjugado do complexo $z = a + bi$ é o número complexo $\bar{z} = a - bi$.*

Dados os complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ e os conjugados $\overline{z_1} = a - bi$ e $\overline{z_2} = c - di$, segue as propriedades:

i) A multiplicação de um número complexo pelo seu conjugado é um número real, pois

$$z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2.$$

ii) Para o número complexo z, temos que:

$$\text{Se } z = \bar{z} \text{ então } z \text{ é real.}$$

iii) Se z_1 e z_2 são números complexos, então $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$.

iv) Se z_1 e z_2 são números complexos, então $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$.

4 Utilização do Conjugado

Sejam z_1, z_2 complexos, com $z_2 \neq 0$. Podemos considerar a divisão de z_1 por z_2, sendo $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$. Multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, transformará esta operação numa divisão por um número real:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Exemplo 2 *A divisão do complexo* $z_1 = 2 + 3i$ *por* $z_2 = 3 + 5i$ *é igual a:*

$$\frac{2+3i}{3+5i} = \frac{(2+3i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)} = \frac{21}{34} - \frac{1}{34}i.$$

5 Representação Geométrica

Uma forma de representação dos números complexos é a geométrica. Estabelecendo-se à associação do complexo $z = a + bi$ ao ponto $P(a, b)$ obtemos uma correspondência biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano xOy, isto é, no $\mathbb{R}^2$. Convencionamos marcar sobre o eixo Ox a parte real e, sobre o eixo Oy a parte imaginária de z. Esse plano é chamado *plano de Argand* [1]*-Gauss* [2] ou *plano complexo*. Dizemos que o ponto $P(a, b)$ é o *afixo* do número complexo $a + bi$. Vejamos a nomenclatura:

- xOy = plano de Argand-Gauss
- Ox = eixo real

[1] Jean Robert Argand (1768-1822), matemático suíço

[2] Carl Friedrich Gauss (1777-1855) matemático alemão

- Oy = eixo imaginário
- $P(a, b)$ = afixo de z

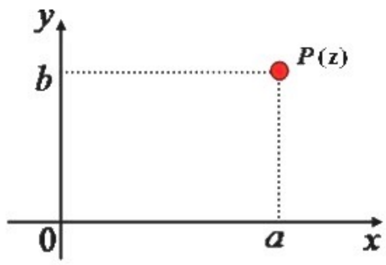

Figura 1.1: Representação geométrica do afixo de z

Agora, podemos visualizar geometricamente o conjugado $\bar{z} = a - bi$ do complexo $z = a + bi$. A representação geométrica do conjugado é o ponto simétrico em relação ao eixo Ox.

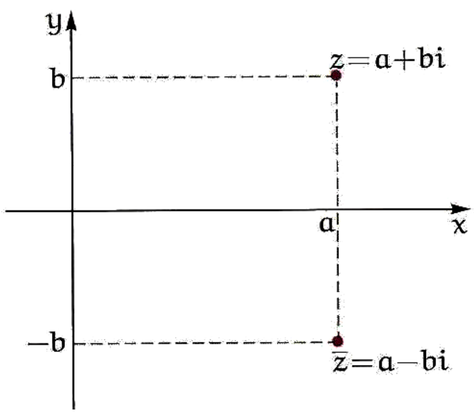

Figura 1.2: Representação geométrica do conjugado $\overline{z}$

Podemos associar a cada complexo $z = a + bi$ um vetor de origem em $O(0, 0)$ e de extremidade no ponto $P(a, b)$.

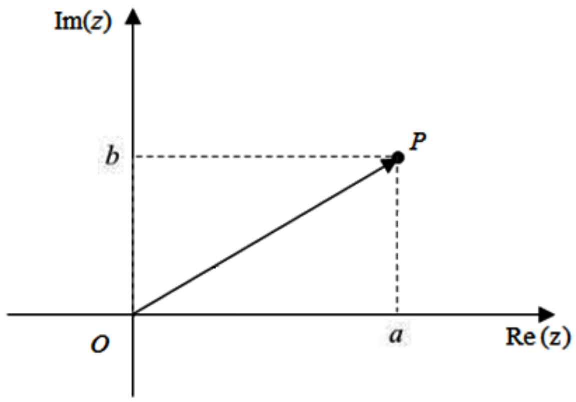

Figura 1.3: Representação geométrica do vetor $\overrightarrow{OP}$

6 Módulo de um Número Complexo

O módulo de um número complexo $z = a + bi$ é a distância da origem do sistema de coordenadas, $(0, 0)$, ao afixo de z, denotado por $|z|$ ou ρ. Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

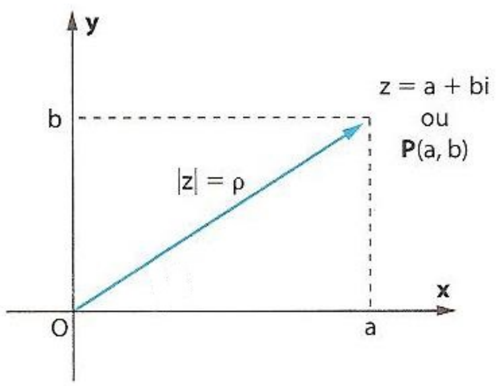

Figura 1.4: Gráfico com a representação de $|z|$

7 A Raiz Quadrada de um Número Complexo

Dado um número complexo α, a raiz quadrada de α são as soluções da equação $z^2 = \alpha$. Seja o complexo α, isto é, $\alpha = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Suponhamos que $b = 0$, isto é $\alpha = a \in \mathbb{R}$. Se $a \geq 0$ então a equação $z^2 = a$ tem soluções $\sqrt{a}$ e $-\sqrt{a}$. Se $a < 0$ então a equação $z^2 = a$ tem duas soluções: $\sqrt{a}i$ e $-\sqrt{a}i$. Tomemos agora $b \neq 0$. Vamos encontrar um número complexo $z = c + di$ tal que

$$a + bi = (c + di)^2 = c^2 - d^2 + 2cdi.$$

Pela igualdade de números complexos temos que

$$\left\{ \begin{array}{c} a = c^2 - d^2 \\ b = 2cd \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2 = (c^2 - d^2)^2 \\ b^2 = 4c^2d^2 \end{array} \right. \Rightarrow a^2 + b^2 = c^4 + d^4 + 2c^2d^2 = (c^2 + d^2)^2.$$

Daí, $c^2 + d^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $c^2 - d^2 = a$. Somando e subtraindo essas equações, obtemos, respectivamente,

$$c^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \text{ e } d^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$$

Observamos que $\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a|$, donde $\sqrt{a^2 + b^2} + a \geq 0$ e $\sqrt{a^2 + b^2} - a \geq 0$. Extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, chegamos aos seguintes resultados,

$$|c| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \text{ e } |d| = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \cdot (1)$$

Como $b \neq 0$ e $b = 2cd$, devemos escolher os números reais c e d, com a propriedade (1), de modo que o sinal do seu produto seja o mesmo sinal de b. Assim, quando $b > 0$, tomamos $c > 0$ e $d > 0$, ou $c < 0$ e $d < 0$; quando $b < 0$, tomamos $c > 0$ e $d < 0$, ou $c < 0$ e $d > 0$. Dessa maneira temos exatamente dois números complexos δ e $-\delta$ cujo quadrado é $\alpha = a + bi$. Denotamos um deles por $\sqrt{\alpha}$ e o outro por $-\sqrt{\alpha}$.

Exemplo 3 *Resolva a equação* $z^2 = \sqrt{5} + i$.

Solução: Lembremos que queremos um número complexo $z = c + di$ tal que $(c + di)^2 = \sqrt{5} + i$.

Como $a = \sqrt{5}$ e $b = 1$, temos que $a^2 + b^2 = 6$.

Aplicando esses valores em (1) encontramos

$$|c| = \sqrt{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{6} + \sqrt{5})}}{2} \text{ e}$$
$$|d| = \sqrt{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{2(\sqrt{6} - \sqrt{5})}}{2}.$$

Temos, ainda, que $b > 0$. Logo, as soluções da equação são

$$z = \frac{\sqrt{2(\sqrt{6} + \sqrt{5})}}{2} + \frac{\sqrt{2(\sqrt{6} - \sqrt{5})}}{2} i \text{ e } z = -\frac{\sqrt{2(\sqrt{6} + \sqrt{5})}}{2} - \frac{\sqrt{2(\sqrt{6} - \sqrt{5})}}{2} i$$

8 Forma Polar

Uma outra forma de representar os números complexos é a forma polar ou forma trigonométrica.

Um número complexo $z = a + bi$, não nulo, é representado por um ponto do plano, de coordenadas cartesianas (a, b), diferente da origem $O = (0, 0)$. Esse ponto pode ser representado por suas coordenadas polares, que são:

i) O módulo do vetor $\overrightarrow{Oz}$ indicado por $|z|$ ou ρ, representando a distância do afixo P à origem $O(0, 0)$, ou seja, $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

ii) O ângulo θ formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ com eixo real. Esse ângulo θ pode assumir infinitos valores, congruentes dois a dois, diferindo entre si pelo número de voltas. Assim, o complexo $z \neq 0$ tem argumento $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, com $\theta_0 \in [0, 2\pi[$. O ângulo θ_0 é chamado *argumento principal* de z ou apenas, *argumento* de z e é indicado por $arg(z)$.

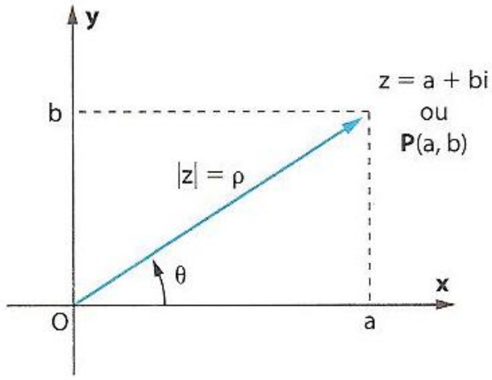

Figura 1.5: Representação geométrica do ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ com eixo real

Da Trigonometria, sabemos que:

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ e } sen\theta = \frac{b}{|z|}, \text{ com } 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Segue que,
$cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cdot cos\theta$ e $b = |z| \cdot sen\theta$
Substituindo em $z = a + bi$, temos:

$$z = |z|.cos\theta + |z| \cdot sen\theta i$$

Portanto,

$$z = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta) \text{ ou } z = \rho(cos\theta + i \cdot sen\theta)$$

que é a forma polar de z.

Exemplo 4 *Determine a forma polar e a forma geométrica do número complexo* $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Solução: Temos que,

$$|z| = |1 + \sqrt{3}i| = \sqrt{(1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

Assim,

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{2}$$
$$sen\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo,

$$\theta = arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

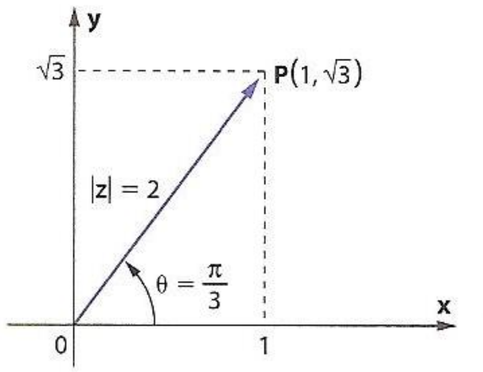

Figura 1.6: Representação geométrica do complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$

Portanto a forma polar é igual a $z = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta) = 2(cos\frac{\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\pi}{3})$.

8.1 Multiplicação de Números Complexos na Forma Polar

Teorema 1 *Sejam os números complexos z_1 e z_2 na forma polar:*

$$z_1 = |z_1|(cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$$

O produto $z_1 \cdot z_2$ é igual a

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

Demonstração: Calculando o produto de z_1 com z_2, temos:

$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1) \cdot |z_2|(cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2) \Rightarrow$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 + i \cdot cos\theta_1 sen\theta_2 + i \cdot sen\theta_1 cos\theta_2 + i^2 sen\theta_1 sen\theta_2) \Rightarrow$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(cos\theta_1 \cdot cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2 + i \cdot cos\theta_1 sen\theta_2 + i \cdot sen\theta_1 cos\theta_2)$

Portanto,

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

■

Exemplo 5 *O produto de* $z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right)$ *por* $z_2 = 3\left(cos\frac{\pi}{2} + i \cdot sen\frac{\pi}{2}\right)$ *é dado por:*

Utilizando a fórmula, temos

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2 \cdot 3\left[cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= 6\left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sen\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

8.2 Divisão de Números Complexos na Forma Polar

Teorema 2 *Sejam os números complexos* z_1 *e* z_2 *na forma polar:*

$$z_1 = |z_1|(cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$$
$$z_2 = |z_2|(cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$$

A divisão $\frac{z_1}{z_2}$, *para* $z_2 \neq 0$ *é igual a:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demonstração: Calculando o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(cos\theta_1 + isen\theta_1)}{|z_2|(cos\theta_2 + isen\theta_2)} \cdot \frac{|z_2|(cos\theta_2 - isen\theta_2)}{|z_2|(cos\theta_2 - isen\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1||z_2|[(cos\theta_1 cos\theta_2 - icos\theta_1 sen\theta_2 + isen\theta_1 cos\theta_2 - i^2 sen\theta_1 sen\theta_2]}{|z_2|^2[cos^2\theta_2 - i^2 sen^2\theta_2)]}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1[(cos\theta_1 cos\theta_2 + sen\theta_1 sen\theta_2 + i(sen\theta_1 cos\theta_2 - cos\theta_1 sen\theta_2)]}{|z_2|[cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2]}$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)].$$

$\blacksquare$

Exemplo 6 *A divisão de* $z_1 = 2\left(cos\dfrac{\pi}{4} + i \cdot sen\dfrac{\pi}{4}\right)$ *por* $z_2 = 3\left(cos\dfrac{\pi}{2} + i \cdot sen\dfrac{\pi}{2}\right)$ *é dada por:*

Utilizando a fórmula, temos

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3}\left[cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{2}{3}\left[cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \frac{2}{3}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot sen\frac{7\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

8.3 Potenciação - Primeira Fórmula de De Moivre

Teorema 3 *Dado* z*, não nulo, escrito na forma trigonométrica* $z = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta)$ *e considerando a potência* z^n*, com* $z \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$*, temos que:*

$$z^n = |z|^n[cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)].$$

Demonstração: *Seja o complexo* $z = |z|(cos\theta + i \cdot sen\theta)$ *não nulo e* $n \in \mathbb{N}$*. Assim temos que:*

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{\text{produto de } n \text{ fatores}} \\ &= \underbrace{|z| \cdot |z| \cdot |z| \cdots |z|}_{\text{produto de } n \text{ módulos}} \cdot [cos\underbrace{(\theta + \theta + \theta + \cdots + \theta)}_{\text{soma de } n \text{ argumentos}} + isen\underbrace{(\theta + \theta + \theta + \cdots + \theta)}_{\text{soma de } n \text{ argumentos}}]. \end{aligned}$$

Provaremos a fórmula para o caso de n *inteiro negativo. Seja* $n = -m$*, com* m *inteiro e* *positivo. Temos:*

$$
\begin{aligned}
(|z|\cdot[cos\theta + isen\theta])^n &= (|z|\cdot[cos\theta + isen\theta])^{-m}\\
&= \frac{1}{(|z|\cdot[cos\theta + isen\theta])^m}\\
&= \frac{1\cdot cos0 + isen0}{|z|^m\cdot[cos(m\theta)+isen(m\theta)]}\\
&= \frac{1}{|z|^m}\cdot cos(0-m\theta)+isen(0-m\theta)\\
&= |z|^{-m}\cdot[cos(-m\theta)+isen(-m\theta)]\\
&= |z|^n\cdot[cos(n\theta)+isen(n\theta)].
\end{aligned}
$$

■

A fórmula acima é conhecida como Primeira Fórmula de De Moivre. [3]

Exemplo 7 *Dado* $z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$*, calcular* z^8*.*

Solução: Primeiramente vamos escrever o complexo z na forma polar.

- Cálculo de $|z|$

$$
\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\\
&= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

- Cálculo de $\theta = arg(z)$

$$
\begin{aligned}
cos\theta &= \frac{a}{|z|} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}\\
sen\theta &= \frac{b}{|z|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

Então,

[3] Abraham de Moivre (1667-1754), matemático francês.

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Assim,

$$z = |z|(cos\theta + isen\theta) \Rightarrow z = cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}.$$

Como

$$z^n = |z|^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)),$$

temos que,

$$\begin{aligned} z^8 &= 1^8\left(cos(8\cdot\frac{\pi}{3}) + isen(8\cdot\frac{\pi}{3})\right) \\ &= cos\frac{8\pi}{3} + isen\frac{8\pi}{3} \\ &= cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Logo,

$$z^8 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

8.4 Raiz Enésima

Definição 3. *Uma raiz enézima de um complexo z, indicada por $\sqrt[n]{z}$, é um complexo w tal que $w^n = z$.*

Exemplo 8 *O número complexo $w = 1-3i$ é uma raiz cúbica de $z = -26+18i$, pois*

$$(1-3i)^3 = -26+18i.$$

Teorema 4 *A raiz enésima do número complexo $z = |z|(cos\theta + isen\theta)$ é dado pela fórmula $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + isen\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq n-1$.*

Demonstração: Sejam os números complexos na forma polar $z = \rho(cos\theta + isen\theta)$ e $w = r(cos\varphi + isen\varphi)$, em que $\rho = |z|, \theta = arg(z), r = |w|$ e $\varphi = arg(w)$.

Aplicando a fórmula de Moivre, vem:

$$w^n = z \Rightarrow r^n(cosn\varphi + isen\ n\varphi) = \rho(cos\theta + isen\theta)$$

A igualdade é verdadeira se, e somente se, $\begin{cases} r^n = \rho \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho},\ r \in \mathbb{R}\ e\ r > 0 \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in Z \end{cases}$

Mas, para que tenhamos $0 \leq \varphi < 2\pi$, é necessário que $0 \leq k \leq n-1$. Assim, encontraremos diferentes valores para w, já que os arcos $\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$ não são congruentes. Caso $k = n, n+1, n+2, \ldots$ os arcos começam a passar pelos mesmos pontos, daí os valores de w se repetem.

Portanto,

$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(cos\dfrac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq n-1$.

$\blacksquare$

A fórmula acima é conhecida como Segunda Fórmula de De Moivre

Exemplo 9 *Calcule as raízes cúbicas da unidade.*

Solução: Escrevendo $z = 1$ na forma polar temos:

- Cálculo de ρ

$$\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

- Cálculo de $\theta = arg(z)$

$$cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{1} = 1 \text{ e}$$

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{0}{1} = 0$$

Daí,

$$\theta = 0\ rad.$$

Assim,

$$z = \rho(cos\theta + isen\theta) \Rightarrow z = cos0 + isen0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{\rho}\left(cos\frac{0+2k\pi}{n} + isen\frac{0+2k\pi}{n}\right) \\ &= \sqrt[3]{1}\left(cos\frac{0+2k\pi}{3} + isen\frac{0+2k\pi}{3}\right) \\ &= cos\frac{2k\pi}{3} + isen\frac{2k\pi}{3} \end{aligned}$$

Como $n = 3$, então k poderá ser 0, 1 ou 2. Assim, temos:

- Para $k = 0$:

$$w_0 = cos0 + isen0 = 1$$

- Para $k = 1$:

$$w_1 = cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

- Para $k = 2$:

$$w_2 = cos\frac{4\pi}{3} + isen\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Logo, as raízes cúbicas de $z = 1$ são os complexos $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Capítulo 2

POLINÔMIOS

Neste capítulo, estudaremos o conceito de polinômios com coeficientes complexos, propriedades dos polinômios, métodos de divisão de polinômios e demonstraremos alguns teoremas necessários para a resolução de equações algébricas.

1 Polinômio com Coeficientes em $\mathbb{C}$

Definição 4. *Um polinômio p na variável x e coeficientes em $\mathbb{C}$ é uma expressão formal do tipo*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde, $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ são números complexos, chamados coeficientes do polinômio, e x é a variável.

Se $a_n \neq 0$ então n é o grau do polinômio, denotado por $gr(p(x))$; e também a_n é o *coeficiente líder* ou *coeficiente dominante* do polinômio. Se o coeficiente líder for igual a unidade, isto é , $a_n = 1$ então o polinômio é chamado de *polinômio mônico.* O coeficiente a_0 é chamado *termo constante* ou *termo independente.*

Exemplo 10

1. *$p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 15$ é um polinômio do 3^o grau e $a_3 = 2, a_2 = 5, a_1 = -7$ e $a_0 = 15$.*

2. $p(x) = x^2 - 3x + 4$ *é um polinômio do* 2^o *grau e* $a_2 = 1, a_1 = -3,$ *e* $a_0 = 4.$

2 Função Polinomial em $\mathbb{C}$

Definição 5. *Uma função* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é chamada função polinomial se existe* $n \in \mathbb{N}$ *e os números complexos* $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$*, tais que:*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Observações:

$i)$ Como estamos trabalhando com polinômios com coeficientes complexos, a cada função polinomial corresponde um único polinômio e vice-versa. Portanto não há nenhum problema em falarmos polinômio ou função polinomial.

$ii)$ O polinômio constante é da forma $p(x) = a_0$. Quando $a_0 \neq 0$, $p(x)$ tem grau zero, ou seja, $gr(p(x)) = 0$.

$iii)$ O polinômio nulo é da forma polinômio $p(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{C}$, ou seja, $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0 = 0$ se, e somente se, $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ e, seu grau não é definido.

3 Valor Numérico

Definição 6. *O valor numérico de um polinômio* $p(x) = a_nx^n + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *para* $x = \beta$*, com* $\beta \in \mathbb{C}$*, é a imagem de* β *pela função polinomial* $p(x)$*, isto é,*

$$p(\beta) = a_n\beta^n + \cdots + a_2\beta^2 + a_1\beta + a_0.$$

Exemplo 11 *Qual é o valor de* $q(x) = 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$ *para* $x = 2i$*?*

Solução: Substituindo x por 2 temos:

$$\begin{aligned} q(2i) &= 3 \cdot (2i)^4 + (2i)^3 - 2 \cdot (2i)^2 + 2i - 1 \\ &= 48i^4 + 8i^3 - 8i^2 + 2i - 1 \\ &= 55 - 6i. \end{aligned}$$

4 Raiz de um Polinômio

Definição 7. *Se β é um número complexo e p é um polinômio tal que $p(\beta) = 0$ então β é raiz ou zero do polinômio.*

Exemplo 12 *Dado $p(x) = x^3 + 2x^2 + 25x + 50$, tem-se que $5i$ é raiz de $p(x)$.*

Substituindo x por $5i$ temos,

$$\begin{aligned} p(5i) &= (5i)^3 + 2(5i)^2 + 25(5i) + 50 \\ &= 125i^3 + 50i^2 + 125i + 50 \\ &= -125i - 50i + 125i + 50 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $5i$ é raiz de $p(x)$.

5 Igualdade de Polinômios

Definição 8. *Os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $f(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$, com $a_n \neq 0$ e $b_n \neq 0$, são iguais se, e somente se, $n = m$ e $a_i = b_i$ para todo i.*

Exemplo 13 *Determine m e n de modo que $(2m-3)x^2 + (n-1)x - 5 = 5x^2 - 7x - 5$.*

Solução:

Fazendo

$$\begin{cases} 2m - 3 = 5 \\ n - 1 = -7 \end{cases}$$

temos,

$$m = 4 \text{ e } n = -6.$$

6 Operações

6.1 Adição de Polinômios

Definição 9. *Sejam $p(x)$ e $g(x)$ dois polinômios com coeficientes complexos na variável x,*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

e

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

a soma de p com g é o polinômio

$$(p+g)(x) = (a_n + b_n)x^n + \cdots + (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

$$(p+g)(x) = (a_i + b_i)x^i = \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i$$

Exemplo 14 *Sejam os polinômios $p(x) = -7x^3 + 5^{x^2} + 9x - 3$ e $g(x) = 3x^{^3} + 4x^2 + 6x + 3$. A soma de $p(x)$ com $g(x)$ é igual a*

$$\begin{aligned}(p+g)(x) = p(x) + g(x) &= (-7+3)x^3 + (5+4)x^2 + (9+6)x + (-3+3)\\ &= -4x^{^3} + 9x^{^2} + 15x.\end{aligned}$$

Exemplo 15 *Sejam os polinômios $p(x) = 3x^5 - x^4 + 7x^3 + x^2 - 1$ e $g(x) = -8x^4 + x^3 + 4$. A soma de $p(x)$ com $g(x)$ é igual a*

$$\begin{aligned}(p+g)(x) = p(x) + g(x) &= 3x^5 + (-1-8)x^4 + (7+1)x^3 + x^2 + (-1+4)\\ &= 3x^5 - 9x^4 + 8x^3 + x^2 + 3.\end{aligned}$$

Teorema 5 *Se $p(x)$, $g(x)$ e $(p+g)(x)$ são polinômios não nulos, então o grau de $(p+g)(x)$ é menor ou igual ao maior dos números $gr(p(x))$ e $gr(g(x))$. Podemos escrever essa afirmação da seguinte forma:*

$$gr(p(x)+g(x)) \leq \text{máx}\{gr(p(x)), gr(g(x))\}$$

Demonstração: Sejam $p(x) = a_n x^n + a_{(n-1)}x^{(n-1)} + a_{(n-2)}x^{(n-2)} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + b_{(m-1)}x^{(m-1)} + b_{(m-2)}x^{(m-2)} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$, com $gr(p(x)) = n$, $gr(g(x)) = m$ e $n \neq m$. Suponhamos $n > m$ e sendo $c_i = a_i + b_i$, temos

$$c_n = a_n + b_n = a_n \neq 0$$

e

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \text{ para todo } i > n.$$

Portanto, $gr(p(x) + gr(x)) = n = \text{máx}\ \{gr(p(x)), gr(g(x))\}$.
Suponhamos agora, $n = m$. Assim, temos que

$$c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \text{ para todo } i > n.$$

e

$$c_n = a_n + b_n \text{ pode ser nulo.}$$

Logo,

$$gr(p(x) + g(x)) \leq n = \text{máx}\ \{gr(p(x)), gr(g(x))\}.$$

■

Propriedades da adição

Para quaisquer polinômios $f(x)$, $g(x)$ e $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$, temos as seguintes propriedades:

A_1)Associativa

$$(f(x)+g(x))+p(x)=f(x)+(g(x)+p(x))$$

A_2)Comutativa

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$$

A_3)Existência de elemento neutro aditivo

O elemento neutro da adição é o polinômio nulo $f(x)=0$.

A_4)Existência de inverso aditivo (ou simétrico)

Sendo

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

o simétrico de $f(x)$ é o polinômio

$$-f(x)=(-a_n)x^n+(-a_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(-a_2)x^2+(-a_1)x+(-a_0)=\sum_{i=0}^{n}(-a_i)x^i.$$

De fato,

$$f(x)+(-f(x))=0$$

6.2 Multiplicação de Polinômios

Definição 10. *Sejam dois polinômios*

$$p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$$

e

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+b_{m-2}x^{m-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i$$

o produto $p(x)\cdot g(x)$ é o polinômio

$$(p \cdot g)(x) = a_n b_m x^{m+n} + \cdots + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + a_0 b_0.$$

Logo o produto pg é o polinômio

$$h(x) = c_{m+n} x^{m+n} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0,$$

em que o coeficiente c_k é obtido da seguinte forma:

$$c_k = a_k b_0 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

Teorema 6 *Sendo $p(x)$ e $g(x)$ dois polinômios não nulos, o grau de $p \cdot g$ é igual à soma dos graus de p e g, isto é,*

$$gr(p(x).g(x)) = gr(p(x)) + gr(g(x)).$$

Demonstração: Sejam $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdot + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ e $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + b_{m-2} x^{m-2} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, com $gr(p(x)) = n$ e $gr(g(x)) = m$.

Tomando $c_k = a_k b_0 + \cdots + a_1 b_{k-1} + a_0 b_k$ um coeficiente qualquer de $(p.g)(x)$,
Temos que,

$$c_{m+n} = a_n \cdot b_m \neq 0 \text{ e } c_k = 0, \text{ para todo } k > m + n.$$

Portanto,

$$gr(p.g) = n + m = gr(p) + gr(g).$$

■

Exemplo 16 *Dados $p(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$ e $g(x) = 4x^2 + 2x + 6$, multiplicar $p(x)$ por $g(x)$.*

Solução:

Temos que,

$$\begin{aligned}
(p.g)(x) &= (2x^3 + 5x^2 - 3x)(4x^2 + 2x + 6) \\
&= 2x^3(4x^2 + 2x + 6) + 5x^2(4x^2 + 2x + 6) + (-3x)(4x^2 + 2x + 6) \\
&= (8x^5 + 4x^4 + 12x^3) + (20x^4 + 10x^3 + 30x^2) + (-12x^3 - 6x^2 - 18x) \\
&= 8x^5 + (4 + 20)x^4 + (12 + 10 - 12)x^3 + (30 - 6)x^2 - 18x \\
&= 8x^5 + 24x^4 + 10x^3 + 24x^2 - 18x.
\end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação

Para quaisquer polinômios $f(x)$, $g(x)$ e $p(x)$ com coeficientes em $\mathbb{C}$, seguem as propriedades:

M_1) Associativa

$$(f(x) \cdot g(x)) \cdot p(x) = f(x) \cdot (g(x) \cdot p(x)).$$

M_2) Comutativa

$$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x).$$

M_3) Existência de elemento neutro multiplicativo

O elemento neutro da multiplicação é o polinômio constante $f(x) = 1$. De fato,

$$f(x) \cdot g(x) = 1 \cdot g(x) = g(x).$$

D) Distributiva

$$f(x) \cdot (g(x) + p(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot p(x).$$

6.3 Divisão de Polinômios

Teorema 7 ***(Divisão Euclidiana)*** *Sejam os polinômios $p(x)$ e $d(x)$ com coeficientes complexos e $d(x) \neq 0$. Então existem um único polinômio $q(x)$ e um único polinômio $r(x)$, com coeficientes complexos, tais que*

$$p(x) = d(x)q(x) + r(x), \text{ onde } r(x) = 0 \text{ ou } gr(r(x)) < gr(d(x)).$$

Demonstração: (*Prova da existência*) Sejam os polinômios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $d(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0$, com $b_m \neq 0$.

Se $p(x) = 0$, então tome $q(x) = 0$ e $r(x) = 0$.

Se $p(x) \neq 0$ e $n < m$ tome, $q(x) = 0$ e $r(x) = p(x)$. Suponhamos então $n \geq m$ e consideremos $q_1(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m}$. Temos que

$$\begin{aligned} p(x) = q_1(x)d(x) + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-1}\right)x^{n-1} + \left(a_{n-2} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-2}\right)x^{n-2} + \cdots \Rightarrow \\ p(x) - q_1(x)d(x) = \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-1}\right)x^{n-1} + \left(a_{n-2} - \frac{a_n}{b_m}b_{m-2}\right)x^{n-2} + \cdots, \end{aligned}$$

que tem grau, no máximo, igual a $n-1$. Chamemos $p(x) - q_1(x)d(x) = r_1(x)$ que é o resto desta primeira divisão. Aplicando o mesmo processo a $p(x) - q_1(x)d(x)$, encontramos um polinômio $q_2(x)$ tal que

$$p(x) - q_1(x)d(x) - q_2(x)d(x) = p(x) - d(x)(q_1(x) + q_2(x)) = r_2(x),$$

que tem grau, no máximo, $n - 2$. Efetuando um número finito de vezes esse processo, concluímos que existe um polinômio $q(x)$ tal que $q(x) = q_1(x) + q_2(x) + \cdots + q_{n-m}(x)$ de modo que $p(x) - q(x)d(x) = r(x)$ tem grau, no máximo, igual a $m - 1$. Portanto, existem os polinômios $q(x)$ e $r(x)$.

(*Prova da unicidade*) Suponhamos que existam os polinômios $q_1(x), q_2(x), r_1(x)$ e $r_2(x)$ tais que

$$\begin{aligned} p(x) = d(x)q_1(x) + r_1(x) \text{ e} \\ p(x) = d(x)q_2(x) + r_2(x), \end{aligned}$$

com $r_1(x) = 0$ ou $gr(r_1(x)) < gr(d(x))$, e $r_2(x) = 0$ ou $gr(r_2(x)) < gr(d(x))$. Da igualdade de polinômios temos que

$$d(x)q_1(x) + r_1(x) = d(x)q_2(x) + r_2(x) \Rightarrow d(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_2(x) - r_1(x).$$

Se $q_1(x) - q_2(x) \neq 0$ então $gr(d(x)(q_1(x) - q_2(x)) > gr(d(x)))$. Mas pela hipótese, segue que $gr(r_2(x) - r_1(x)) < gr(d(x))$. Logo $q_1(x) = q_2(x)$ e, portanto, $r_1(x) = r_2(x)$. ■

Por meio do exemplo 16, mostraremos passo a passo o processo da divisão euclidiana, armando e efetuando os cálculos necessários, utilizando um dispositivo prático chamado *Método da Chave*.

Método da Chave

Exemplo 17 *Determine o quociente e o resto da divisão de* $p(x) = 2x^3 + x^2 - x + 2$ *por* $d(x) = x^2 + 3x + 1$.

1º) Primeiramente vamos calcular $q_1(x)$ que é o quociente da divisão do termo de maior grau de $p(x)$ pelo termo de maior grau de $d(x)$, ou seja, $q_1(x) = \dfrac{2x^3}{x^2} = 2x$.
2º) Agora calcularemos $r_1(x)$. Assim, $r_1(x) = p(x) - q_1(x)d(x) = 2x^3 + x^2 - x + 2 - 2x(x^2 + 3x + 1) = -5x^2 - 3x + 2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + x^2 - x + 2 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} -(2x^3 + 6x^2 + 2x) & \quad 2x \\ \hline -5x^2 - 3x + 2 & \end{array}$$

3º) Como $2 = gr(r_1(x)) \geq gr(d(x)) = 2$ devemos prosseguir na divisão de $r_1(x)$ por $d(x)$. Lembrando que a divisão euclidiana termina somente quando o grau do resto for menor que o grau do divisor.
4º) Calculando $q_2(x)$, que é a divisão do coeficiente líder de $r_1(x)$ pelo coeficiente líder de $d(x)$, temos que $q_2(x) = \dfrac{-5x^2}{x^2} = -5$.
5º) Faremos o cálculo para obtermos $r_2(x)$. Daí, $r_2(x) = r_1(x) - q_2(x)d(x) = -5x^2 - 3x + 2 - (-5)(x^2 + 3x + 1) = 12x + 7$.

$$\begin{array}{r|l} -5x^2 - 3x + 2 & x^2 + 3x + 1 \\ \cline{2-2} -(-5x^2 - 15x - 5) & \quad -5 \\ \hline 12x + 7 & \end{array}$$

6º) Como $1 = gr(r_2(x)) < gr(d(x)) = 2$, encerramos o algoritmo da divisão euclidiana. O resto da divisão é $r_2(x)$.
7º) Encontramos $q(x) = q_1(x) + q_2(x) = 2x - 5$ e $r(x) = r_2(x) = 12x + 7$.

Agora, resolveremos o mesmo exemplo utilizando um outro método, chamado *Método de Descartes* ou *Método dos coeficientes a determinar*, que estabelece os fatores próprios de um polinômio, considerando a igualdade de polinômios e a propriedade multiplicativa do grau.

Método de Descartes [1]

Exemplo 18 *Determine o quociente e o resto da divisão de* $p(x) = 2x^3 + x^2 - x + 2$ *por* $d(x) = x^2 + 3x + 1$.

Solução:
1º passo) Calculamos $gr(q(x))$ e $gr(r(x))$.
Se $gr(p(x)) = 3$ e $gr(d(x)) = 2$, então $gr(q(x)) = 1$ e o resto é no máximo do primeiro grau também.
2º passo) Construímos os polinômios $q(x)$ e $r(x)$, conforme seus graus e com coeficientes diferentes. Assim,

$$q(x) = ax + b \text{ e } r(x) = cx + d.$$

3º passo) Calculam-se os coeficientes utilizando-se a divisão euclidiana, isto é, $p(x) = d(x)q(x) + r(x)$. Segue que,

$$2x^3 + x^2 - x + 2 = (x^2 + 3x + 1)(ax + b) + cx + d \Rightarrow$$
$$2x^3 + x^2 - x + 2 = ax^3 + (3a + b)x^2 + (a + 3b + c)x + b + d$$

pela igualdade de polinômios temos que,

$$a = 2$$
$$3a + b = 1 \Rightarrow b = -5$$
$$a + 3b + c = -1 \Rightarrow c = 12$$
$$b + d = 2 \Rightarrow d = 7$$

Logo,

[1] René Descartes (1596-1650), matemático francês

$$q(x) = 2x - 5 \text{ e } r(x) = 12x + 7.$$

Segue agora alguns teoremas importantes envolvendo divisibilidade entre polinômios.

Teorema 8 *(Teorema do Resto) O resto da divisão de $p(x)$ por $x - a$ é igual a $p(a)$.*

Demonstração: Pelo Teorema da Divisão Euclidiana, temos que

$$p(x) = (x - a)q(x) + r(x),$$

onde $q(x)$ e $r(x)$ são, respectivamente, o quociente e o resto. Como $x - a$ tem grau 1, o resto $r(x)$ tem grau zero ou é nulo. Logo, $r(x)$ é uma constante. Calculando o valor numérico de ambos os lados para $x = a$ obtemos

$$p(a) = (a - a)q(a) + r(a) = r(a).$$

Portanto,

$$p(a) \text{ é o resto.}$$

■

Exemplo 19 *Determine o resto da divisão de $p(x) = -5x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 2x + 2$ por $x - 2$.*

Solução: Calculando o valor de $p(x)$ para $x = 2$ obtemos

$$p(2) = -5 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = -86.$$

Logo, o resto é igual a -86.

Teorema 9 *(Teorema de D'Alembert) Um polinômio $p(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $p(a) = 0$.*

Demonstração:

Se o polinômio $p(x)$ é divisível por $x-a$, então o resto $r(x)$ da divisão é igual a zero. Pelo teorema do resto, podemos concluir que $p(a) = 0$. Considerando agora que $p(a) = 0$, pelo Teorema do Resto, temos que $r(x) = p(a) = 0$. Logo, $p(x)$ é divisível por $x - a$.

$\blacksquare$

Exemplo 20 *Determine o valor de m, para que o polinômio $p(x) = 2x^3+5x^2-mx+2$ seja divisível por $x - 2$.*

Solução: Se $p(x)$ é divisível por $x - 2$ então pelo Teorema de D'Alembert temos que $p(2) = 0$. Assim,

$$p(2) = 2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2^2 - 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = 19.$$

Teorema 10 *Um polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, com $a \neq b$, se, e somente se, $p(x)$ for divisível por $(x - a)(x - b)$.*

Demonstração:

Como $p(x)$ é divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$, pelo Teorema de D'Alembert, temos que a é raiz de $p(x)$ e b é raiz de $p(x)$. Tem que,

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x),$$

e daí,

$$p(b) = (b - a) \cdot q(b) = 0.$$

Mas $a \neq b$, daí $q(b) = 0$. Assim,

$$q(x) = (x - b) \cdot q_1(x).$$

Logo,

$$p(x) = (x - a)(x - b) \cdot q_1(x).$$

Portanto,

$$p(x) \text{ é divisível por } (x - a)(x - b).$$

De outra forma, se $p(x)$ é divisível por $(x - a)(x - b)$ temos que

$$p(x) = (x - a)(x - b) \cdot q(x).$$

Fazendo,

$$(x - b) \cdot q(x) = q_1(x)$$

segue que,

$$p(x) = (x - a) \cdot q_1(x).$$

Calculando $p(a)$, obtemos

$$p(a) = (a - a) \cdot q_1(a) = 0.$$

Logo, $p(x)$ é divisível por $(x - a)$. Analogamente, temos que $p(x)$ é divisível por $(x - b)$. Portanto, $p(x)$ é divisível por $(x - a)$ e por $(x - b)$.

$\blacksquare$

Exemplo 21 *Qual é o valor do produto $\alpha \cdot \beta$, de forma que o polinômio $p(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x + \beta$ seja divisível por $(x - 1)(x - 2)$?*

Solução: Como o polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - 1)(x - 2)$, pelo teorema 10 temos que

$$p(1) = 0 \text{ e } p(2) = 0.$$

Substituindo em $p(x)$ temos,

$$(1)^3 - 6(1)^2 + \alpha \cdot 1 + \beta = 0 \;\Rightarrow\; \alpha + \beta = 5$$

e

$$(2)^3 - 6(2)^2 + \alpha \cdot 2 + \beta = 0 \;\Rightarrow\; 2\alpha + \beta = 16.$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\alpha = 11 \text{ e } \beta = -6.$$

Logo, $\alpha \cdot \beta = -66$.

Capítulo 3

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Neste capítulo observamos alguns teoremas que são fundamentais para a resolução de equações polinomiais. Observe que encontrada pelo menos uma raiz α do polinômio p, podemos escrever o polinômio original como um produto $p(x) = (x-\alpha)q(x)$ e, a partir daí, calcular as raízes de $q(x) = 0$ que tem o grau uma unidade a menos que o grau de p. Mas nada nos garante que encontraremos de imediato as raízes de $p(x)$ e $q(x)$. Estudaremos alguns métodos que nos ajudem a determinar uma ou mais soluções da equação e, desta forma, calcular todas elas.

1 Equações Algébricas

Definição 11. *Denomina-se equação algébrica ou equação polinomial de grau n, na variável x, toda equação que pode ser reduzida à forma*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

onde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ são os coeficientes, com $a_n \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

2 Solução da Equação Algébrica

Definição 12. *Dada uma equação algébrica $p(x) = 0$, chama-se solução da equação ou raiz de $p(x)$, todo número que, substituído no lugar de x, torna a sentença verdadeira. Assim, o número α é solução da equação $p(x) = 0$ se, e somente se, $p(\alpha) = 0$.*

Exemplo 22 *Verifique se os números* $1, 2$ *e* -2 *são soluções da equação* $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$.

Solução:

Para $x = 1$ temos que $1^3 + 1^2 - 1 - 1 = 0$ (verdadeira).

Para $x = 2$ temos $2^3 + 2^2 - 2 - 1 = 9$ (falsa).

Para $x = -1$ temos $(-2)^3 + (-2)^2 - (2) - 1 = -3$ (falsa).

Somente $x = 1$ é solução da equação.

O Teorema Fundamental da Álgebra será apresentado a seguir. Sua demonstração encontra-se em [6], p.190-192.

Teorema 11 ***(Teorema Fundamental da Álgebra)*** *Todo polinômio complexo de grau* $n \geq 1$ *admite pelo menos uma raiz complexa.*

Teorema 12 ***(Teorema da Decomposição)*** *Todo polinômio* $p(x)$ *com coeficientes complexos de grau* $n \geq 1$,

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 (a_n \neq 0)$$

pode ser decomposto de maneira única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de n *fatores do primeiro grau, isto é,*

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_n),$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$ *são as raízes complexas, não necessariamente distintas, de* p *e* a_n *é o coeficiente líder.*

Demonstração:

(Existência) Se $p(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, então pelo Teorema Fundamental da Álgebra temos que $p(x)$ têm pelo menos uma raiz α_1, tal que $p(\alpha_1) = 0$. Pelo Teorema de D'Alembert, p é divisível por $(x - \alpha_1)$. Assim,

$$p(x) = (x - \alpha_1)q_1(x), \quad (1)$$

com $q_1(x)$ de grau $n-1$ e coeficiente líder a_n. Se $n=1$ então $q_1(x)$ tem grau zero e é um polinômio constante igual a a_n. Segue que,

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)$$

Mas se $n \geq 2$, então o grau de $q_1(x)$ é $n-1 \geq 1$. Novamente, pelo Teorema Fundamental da Álgebra o polinômio $q_1(x)$ tem pelo menos uma raiz α_2, tal que $q_1(\alpha_2) = 0$. Daí, aplicando outra vez o Teorema de D'Alembert temos que $q_1(x)$ é divisível por $(x-\alpha_2)$ e temos,

$$q_1(x) = (x-\alpha_2)q_2. \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)q_2.$$

Repetindo sucessivamente esse processo, obteremos o polinômio

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n).$$

(Unicidade) Suponhamos que o polinômio p tenha duas decomposições:

$$p = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n)$$

$$p = a'_m(x-\alpha'_1)(x-\alpha'_2)(x-\alpha'_3)\cdots(x-\alpha'_m)$$

Depois de reduzirmos e ordenarmos os dois polinômios temos

$$a_nx^n - a_nS_1 \cdot x^{n-1} + \cdots = a'_mx^m - a_mS'_1 \cdot x^{m-1} + \cdots ,$$

onde S_k é a soma das raízes tomadas k a k.

Pela igualdade de polinômios, obtemos

$$n = m \text{ e } a_n = a'_m.$$

Cancelando os termos iguais

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) = (x-\alpha'_1)(x-\alpha'_2)(x-\alpha'_3)\cdots(x-\alpha'_m) \quad (1)$$

Substituindo α_1 no lugar de x, temos

$$0 = (\alpha_1 - \alpha'_1)(\alpha_1 - \alpha'_2)(\alpha_1 - \alpha'_3)\cdots(\alpha_1 - \alpha'_n)$$

e como o produto é nulo, um dos fatores $\alpha_1 - \alpha'_j$ é nulo. Fazendo uma mudança na ordem dos fatores, podemos fazer $\alpha_1 = \alpha'_1$.
A igualdade (1) se transforma em:

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) = (x-\alpha_1)(x-\alpha'_2)(x-\alpha'_3)\cdots(x-\alpha'_m).$$

Assim,

$$(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) = (x-\alpha'_2)(x-\alpha'_3)\cdots(x-\alpha'_m).$$

Substituindo α_2 em x, temos

$$0 = (\alpha_2 - \alpha'_2)(\alpha_2 - \alpha'_3)\cdots(\alpha_2 - \alpha'_n)$$

e como o produto é nulo, um dos fatores $r_2 - r'_k$ é nulo. Fazendo uma mudança na ordem dos fatores, podemos fazer $\alpha_2 = \alpha'_2$.
Repetindo esse processo n vezes, temos $\alpha_i = \alpha'_i$ para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.
Portanto as igualdades $m = n$, $a'_m = a_n$, $\alpha'_1 = \alpha_1$, $\alpha'_2 = \alpha_2$, $\alpha'_3 = \alpha_3$,...,$\alpha'_n = \alpha_n$ provam a unicidade da decomposição.

■

Observação: A decomposição do polinômio $p(x)$ pode apresentar fatores iguais. Isso significa que um polinômio pode ter raízes, não necessariamente diferentes entre si.

Exemplo 23 *Decomponha o polinômio $p(x) = x^5 - 81x$ em fatores do primeiro grau e encontre suas raízes.*

Solução: Fatorando o polinômio, obtemos

$$p(x) = x^5 - 81x = x(x^4 - 81) = x(x^2-9)(x^2+9) = x(x-3)(x+3)(x-3i)(x+3i).$$

As raízes são $-3, 0, 3, 3i$ e $-3i$. Como o polinômio é de grau 5, temos 5 raízes que, nesse caso, são todas distintas.

Para determinarmos a fatoração dos polinômios, em todos os métodos, se faz necessário que conheçamos pelo menos uma raiz. Existem métodos computacionais eficientes para tal. No entanto, em sala de aula, podemos utilizar alguns resultados para obtermos raízes.

Teorema 13 *Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Seja $\beta \in \mathbb{Q}$, $\beta \neq 0$, uma raiz de $p(x)$. Escrevendo $\beta = \dfrac{r}{s}$, com $r, s \in \mathbb{Z}^*$ e $mdc(r, s) = 1$, então $r|a_0$ e $s|a_n$.*

Demonstração:
Temos que,

$$0 = p\left(\frac{r}{s}\right) = a_n \cdot \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1} \cdot \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \cdots + a_1 \cdot \frac{r}{s} + a_0.$$

Multiplicando essa igualdade por s^n, obtemos:

$$0 = a_n \cdot r^n + \underbrace{a_{n-1} \cdot r^{n-1} \cdot s + \cdots + a_1 \cdot r \cdot s^{n-1} + a_0 \cdot s^n}_{b},$$

isto é,

$$b = -a_n \cdot r^n.$$

Como $s|b$, então $s|a_n \cdot r^n$, mas $mdc(r, s) = 1$, logo $s|a_n$.
Analogamente, definindo $a = a_n \cdot r^n + a_{n-1} \cdot r^{n-1} \cdot s + \cdots + a_1 \cdot r \cdot s^{n-1}$, temos $a = -a_0 \cdot s^n$.
Como $r|a$, então $r|a_0 \cdot s^n$, mas $mdc(r, s) = 1$, logo $r|a_0$.

$\blacksquare$

Exemplo 24 *Resolva a equação $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$.*

Solução: Como os coeficientes da equação são números inteiros, vamos verificar se existe raiz racional. Pelo teorema, os possíveis valores das raízes racionais são dados pela razão $\dfrac{r}{s}$, onde r é um divisor de 4 e s é um divisor da unidade. Logo $\dfrac{r}{s} \in \{-1, -2, -4, 1, 2, 4\}$.

Fazendo a verificação de quais desses números satisfaz a equação, encontramos a raiz $x = 2$. Assim, $p(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ é divisível por $x - 2$.
Efetuando a divisão, podemos escrever a equação como

$$(x - 2)(x^3 - 2x^2 + x - 2) = 0.$$

Agora, basta resolver a equação

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0.$$

Fatorando a equação, obtemos

$$x^2(x - 2) + (x - 2) = 0$$

Daí,

$$(x - 2)(x^2 + 1) = 0.$$

Fazendo o mesmo processo, resolveremos a equação

$$x^2 + 1 = 0.$$

Logo, as raízes dessa equação são $x = i$ e $x = -i$.
Portanto,

$$S = \{2, -i, i\}.$$

Vejamos alguns resultados com a especificidade de que agora temos os polinômios com os coeficientes reais.

Teorema 14 ***(Raízes Conjugadas)*** *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $z = a + bi (b \neq 0)$, então o conjugado de z, $\overline{z} = a - bi$ também é raiz da equação.*

Demonstração: Seja a equação $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ e coeficientes reais. Por hipótese, z é raiz de $p(x)$, isto é, $p(z) = 0$. Queremos provar que $\overline{z}$ também é raiz dessa equação, isto é, $p(\overline{z}) = 0$.

Assim,

$$p(\overline{z}) = a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + a_{n-2}(\overline{z})^{n-2} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0.$$

Aplicando a propriedade da potência de conjugados, $(\overline{z})^n = \overline{z^n}$ obtemos

$$p(\overline{z}) = a_n\overline{z^n} + a_{n-1}\overline{z^{n-1}} + a_{n-2}\overline{z^{n-2}} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0.$$

Como a_n é real, temos que $a_n = \overline{a_n}$, para todo n.

Daí,

$$p(\overline{z}) = \overline{a_n}\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\overline{z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}}\overline{z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}.$$

Aplicando a propriedade de produto de conjugados $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$, temos

$$p(\overline{z}) = \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \overline{a_{n-2}z^{n-2}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0}.$$

Pela propriedade da adição de conjugados $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$, temos que,

$$p(\overline{z}) = \overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0.$$

Portanto,

$$p(\overline{z}) = 0.$$

■

Exemplo 25 *Resolva a equação* $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 33x + 20 = 0$, *sabendo que o complexo* $1 + 2i$ *é raiz da equação.*

Solução: Como $1 + 2i$ é raiz da equação, temos pelo teorema que $1 - 2i$ também é raiz da equação. Podemos escrever o polinômio $p(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 33x + 20$ da seguinte forma:

$$p(x) = x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 33x + 20 = (x - 1 + 2i)(x - 1 - 2i).q(x) = (x^2 - 2x + 5)q(x).$$

Dividindo $p(x)$ por $x^2 - 2x + 5$ obtemos $q(x) = x^2 - 5x + 4$.

Logo a equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 33x + 20 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 - 5x + 4) = 0.$$

Calculando as raízes de $q(x)$ encontramos $x = 1$ e $x = 4$.

Portanto, o conjunto solução da equação $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 33x + 20 = 0$ é:

$$S = \{1, 4, 1 + 2i, 1 - 2i\}.$$

O próximo teorema não será demonstrado, porém é uma ferramenta importante na resolução de equações polinomiais. Sua demonstração se encontra em [6], p. 138-139.

Definição 13. *Um número complexo α é raiz de multiplicidade k de p se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)^k$ e não é divisível por $(x - \alpha)^{k+1}$.*

Teorema 15 ***(Multiplicidade da raiz conjugada)*** *Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite a raiz $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ com multiplicidade m, então essa equação admite a raiz $\overline{z} = a - bi$ com multiplicidade m.*

Corolário 16 *Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais, tem pelo menos uma raiz real.*

Demonstração: Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais e seja $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tal que $p(z) = 0$. Então, $z \neq \overline{z}$ e $p(z) = 0$ se, e somente se, $p(\overline{z}) = 0$, ambas com a mesma multiplicidade. Portanto, se o polinômio tem grau ímpar, tem que ter pelo menos uma raiz real.

$\blacksquare$

3 Relações de Girard

Nessa seção, vamos apresentar as relações entre os coeficientes e as raízes de um polinômio. Desenvolveremos para os polinômios de graus $2, 3, 4$ e também para grau n.

3.1 Polinômio do 2º grau

Considere o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e consideremos suas raízes x_1 e x_2. Pelo Teorema 12, temos a seguinte igualdade:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Desenvolvendo o produto, encontramos:

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2]$$

Dividindo ambos os membros por a, vem:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

Pela igualdade de polinômios, temos que:

$$-(x_1 + x_2) = \frac{b}{a} \Longrightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

e

$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

3.2 Polinômio do 3º grau

Consideremos o polinômio do 3º grau $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$ e sejam suas raízes x_1, x_2 e x_3. Pelo Teorema 12, temos a seguinte igualdade:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

Desenvolvendo o produto, encontramos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a[x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3]$$

Dividindo ambos os membros por a, vem:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3$$

Pela igualdade de polinômios, temos que:

$$-(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

3.3 Polinômio do 4º grau

Consideremos o polinômio do 4º grau $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a \neq 0$ e sejam suas raízes x_1, x_2, x_3 e x_4. Pelo Teorema 12, temos a seguinte igualdade:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4).$$

Desenvolvendo o produto, obtemos:

$$\begin{gathered} ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a[x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + \\ x_2x_4 + x_3x_4)x^2 - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3x_4]. \end{gathered}$$

Dividindo ambos os membros por a temos

$$\begin{gathered} x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a} = x^4 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)x^3 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + \\ x_2x_4 + x_3x_4)x^2 - (x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)x + x_1x_2x_3. \end{gathered}$$

Pela igualdade de polinômios temos que:

$$\begin{gathered} -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = \frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a}. \end{gathered}$$

3.4 Polinômio de grau n

Utilizando os passos descritos nos casos anteriores, podemos fazer a generalização. Considerando o polinômio de grau n

$$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e suas raízes $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n$, de forma análoga obtemos as relações entre os coeficientes e as raízes. Seja S_k a soma dos produtos das raízes de $p(x)$ tomados k a k. Assim,

I) A soma das raízes, é:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} = (-1)^1\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

II) A soma dos produtos das raízes tomadas duas a duas, é:

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} = (-1)^2\frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

III) A soma dos produtos das raízes tomadas três a três, é:

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n} = (-1)^3\frac{a_{n-3}}{a_n}.$$

IV) A soma dos produtos das raízes tomadas k a k, é:

$$S_k = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

V) O produto das raízes, é:

$$S_n = x_1x_2x_3x_4\cdots x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.$$

Exemplo 26 *Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, sabendo que a soma de duas raízes é 1.*

Solução: Temos que $a = 1, b = -6, c = 3$ e $d = 10$ e utilizando as Relações de Girard para o polinômio de grau 3, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 6 \quad (1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = 3 \quad (2)$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -10, \quad (3)$$

mas,

$$x_1 + x_2 = 1 \quad (4)$$

substituindo (4) em (1) temos,

$$1 + x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 5.$$

Daí,

$$x_1x_2 = -\frac{10}{5} = -2 \quad (3)$$

e

$$x_1 + x_2 = 1. \quad (4)$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$x_1 = -1 \; e \; x_2 = 2, \text{ ou vice-versa }.$$

Portanto,

$$S = \{-1, 2, 5\}.$$

4 Equações Algébricas de 2º grau

Método de Viète [1] para resolução de equações do 2º grau

João Tomas do Amaral, em [1], demonstra a fórmula de Bháskara, utilizando o método de Viète e também apresenta a resolução de uma equação de 2º grau completa, sem que se aplique uma fórmula.

Vamos descrever o método de Viète para a resolução de equações do 2º grau.

Seja $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Fazendo-se $x = u + v$, onde u e v são incógnitas auxiliares, e substituindo na equação, temos:

$$a(u+v)^2 + b(u+v) + c = 0$$
$$a(u^2 + 2uv + v^2) + bu + bv + c = 0$$
$$au^2 + 2auv + av^2 + bu + bv + c = 0$$

E colocando v como incógnita, obtemos a equação

$$av^2 + (2au + b)v + au^2 + bu + c = 0$$

Viète transformou essa equação numa equação incompleta de 2º grau, anulando o coeficiente de v, isto é, escolhendo $u = \dfrac{-b}{2a}$. Obteve assim a equação:

$$av^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$$

[1] Fraçois Viète (1540-1603), matemático francês.

$$\begin{aligned}
av^2 + \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0\\
av^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c &= 0\\
av^2 - \frac{b^2}{4a} + c &= 0\\
av^2 &= \frac{b^2}{4a} - c\\
av^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$v^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Se $b^2 - 4ac \geq 0$ então $v = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Logo,

$$x = u + v = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

que é a fórmula de Bháskara.

Exemplo 27 *(Aplicação do método de Viète) Resolva a equação* $x^2 - 3x + 2 = 0$ *pelo método de Viète.*

Solução: Fazendo $x = u + v$ e substituindo na equação dada, temos:

$$\begin{aligned}
(u + v)^2 - 3(u + v) + 2 &= 0\\
u^2 + 2uv + v^2 - 3u - 3v + 2 &= 0,
\end{aligned}$$

Reescrevendo essa igualdade como uma equação na incógnita v, obtemos

$$v^2 + (2u - 3)v + u^2 - 3u + 2 = 0. \ (1)$$

Para anular o coeficiente de v e isolando u, temos que

$$\begin{aligned}
2u - 3 &= 0\\
u &= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Substituindo u em (1) fica,

$$v^2 + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = 0$$
$$v^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Daí,

$$v = \pm\frac{1}{2}.$$

Como $x = u + v$, encontramos

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Portanto, as soluções da equação são 1 e 2.

5 Equações Algébricas de 3º grau

Nesta seção justificaremos a fórmula resolvente de uma equação do 3º grau, chamada Fórmula de Cardano [2].

Consideremos a equação geral do 3º grau com coeficientes complexos, que sem perda de generalidade, pode ser da forma:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0. \quad (1)$$

Fazendo uma mudança de variável, vamos reescrever o polinômio (1) de forma que não apareça o termo de 2º grau.

Substituindo x por $y + d$ em (1), desenvolvendo e colocando o polinômio na variável y, temos que

$$(y+d)^3+a_2(y+d)^2+a_1(y+d)+a_0 = y^3+(3d+a_2)y^2+(3d^2+2da_2+a_1)y+(d^3+d^2a_2+da_1+a_0). \quad (2)$$

Como queremos que não figure o termo do 2º grau, vamos tomar $3d + a_2 = 0$, isto é, $d = -\frac{a_2}{3}$; e substituindo d na equação (2) obtemos

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = y^3 + py + q,$$

sendo

$$x = y - \frac{a_2}{3}, \quad p = a_1 - \frac{{a_2}^2}{3} \quad e \quad q = \frac{2{a_2}^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_0. \quad (3)$$

[2]Girolamo Cardano (1501-1576), matemático italiano

Logo, para calcularmos as raízes da equação (1), basta acharmos as raízes da equação

$$y^3 + py + q = 0,$$

com p e q como em (3) e de cada uma subtrair $\frac{a_2}{3}$.
Vamos, assim, encontrar as raízes da equação

$$y^3 + py + q = 0. \qquad (4)$$

Sejam u e v duas novas indeterminadas. Fazendo $y = u+v$ e substituindo em (4), obtemos

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = (u^3 + v^3 + q) + (u+v)(p + 3uv) = 0. \qquad (5)$$

Note que encontramos um polinômio na variável $u + v$. Pela igualdade de polinômios, temos que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \cdot v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos uma solução (u, v) de (5) e, portanto, uma solução da forma $y = u + v$ de (4).
Elevando ao cubo a segunda equação do sistema, segue que

$$u^3 \cdot v^3 = -\frac{p^3}{27} \Rightarrow u^3 = -\frac{p^3}{27v^3}. \qquad (6)$$

Substituindo (6) na primeira equação do sistema, segue

$$v^6 + qv^3 - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Pondo $v^3 = t$, encontramos a equação do 2º grau:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0 \qquad (7),$$

cujas raízes são u^3 e v^3. Fixando uma das raízes quadradas de $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ e denotando-a por $\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$, temos que as raízes de (7) são

$$t_1 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad e \quad t_2 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Pela simetria do papel que desempenham u e v, podemos supor que $u^3 = t_1$ e $v^3 = t_2$. Escolhendo uma das raízes cúbicas de t_1 e denotando-a por $\sqrt[3]{t_1}$, segue-se que as soluções de $u^3 = t_1$ são $\sqrt[3]{t_1}$, $w\sqrt[3]{t_1}$ e $w^2\sqrt[3]{t_1}$, em que $w = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ é uma das raízes cúbicas da unidade.

Denotando agora por $\sqrt[3]{t_2}$ a raiz cúbica de t_2 tal que $\sqrt[3]{t_1}\sqrt[3]{t_2} = -\dfrac{p}{3}$, de modo que a segunda equação do sistema seja satisfeita. O sistema admite as seguintes soluções:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt[3]{t_1}, \qquad & v_1 &= \sqrt[3]{t_2}\\
u_2 &= w\sqrt[3]{t_1}, \qquad & v_2 &= w^2\sqrt[3]{t_2}\\
u_3 &= w^2\sqrt[3]{t_1}, \qquad & v_3 &= w\sqrt[3]{t_2}.
\end{aligned}
$$

Portanto a Equação (4) possui como soluções as chamadas *Fórmulas de Cardano:*

$$y_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$y_2 = u_2 + v_2 = w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad e$$

$$y_3 = u_3 + v_3 = w^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + w\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

As raízes da Equação (1) são obtidas mediante as substituições em (3).

■

Exemplo 28 *Determine o conjunto solução da equação* $x^3 - 3x - 2 = 0$.

Solução: Temos que $p = -3$ e $q = -2$. Aplicando a Fórmula de Cardano temos que:

$$
\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - \frac{3^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{(-2)^2}{4} - \frac{3^3}{27}}}\\
&= \sqrt[3]{1+\sqrt{0}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{0}} = 2.
\end{aligned}
$$

Daí basta dividirmos o polinômio $p(x) = x^3 - 3x - 2$ por $x - 2$ e obteremos um polinômio de 2º grau, que tem raízes 2 e -1.

Exemplo 29 *Determine o conjunto solução da equação* $x^3 - 6x - 4 = 0$.

Solução: Temos que $p = -6$ e $q = -4$. Aplicando a Fórmula de Cardano temos que:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{4-8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4-8}} \\ &= \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} \\ &= \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}. \end{aligned}$$

O radicando é negativo, logo teremos três raízes reais distintas.

$$\begin{aligned} u^3 &= 2 + 2i \\ &= \sqrt{8}\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} u &= \sqrt[3]{\sqrt{8}\left(cos\frac{\pi}{4} + i \cdot sen\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \sqrt[6]{8}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\frac{\pi}{4} + k2\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

- Para $k = 0$ temos:

$$u_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{12} + i \cdot sen\frac{\pi}{12}\right).$$

Sabendo que:

$$cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ e } sen\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} u_1 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

Relembrando que $v_1 = -\dfrac{p}{3u_1}$, temos:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{6}{3\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} - i \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)i}{2} \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + v_1 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \\ &= \sqrt{3}+1. \end{aligned}$$

- Para $k = 1$ temos:

$$\begin{aligned} u_2 &= \sqrt[6]{8}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i \cdot sen\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) \\ &= \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i \cdot sen\frac{3\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$sen\frac{3\pi}{4} = sen\frac{\pi}{4} \text{ e } cos\frac{3\pi}{4} = -cos\frac{\pi}{4}.$$

Temos que,

$$\begin{aligned} u_2 &= \sqrt{2}\left(-\frac{-\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -1+i. \end{aligned}$$

Como $v_2 = -\dfrac{p}{3u_2}$, temos:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{6}{3(-1+i)} \\ &= -1-i \end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned} x_2 &= u_2 + v_2 \\ &= (-1+i)+(-1-i) \\ &= -2. \end{aligned}$$

- Para $k = 2$ temos:

$$
\begin{aligned}
u_2 &= \sqrt[6]{8}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + i\cdot sen\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right)\\
&= \sqrt{2}\left(cos\frac{17\pi}{12} + i\cdot sen\frac{17\pi}{12}\right).
\end{aligned}
$$

Sabendo que:

$$
cos\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \text{ e } sen\frac{17\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
u_3 &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)\\
&= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}
$$

Como $v_3 = -\frac{p}{3u_3}$, temos:

$$
\begin{aligned}
v_3 &= \frac{6}{3\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}\\
&= \frac{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i}{2}.
\end{aligned}
$$

Daí

$$
\begin{aligned}
x_3 &= u_3 + v_3\\
&= \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2} - i\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 1-\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = -2; 1-\sqrt{3}; \sqrt{3}+1$.

6 Um Método de Resolução de Equações Algébricas de 4º Grau para uma Equação Particular

Edvalter da Silva Sena Filho, em [4], traz um método de resolução de equações de 4º grau, reduzindo-as a equações de segundo e terceiro graus. Se o método não for novo ao leitor, certamente é de rara ocorrência na literatura.

Consideremos, primeiramente, uma equação de tipo

$$y^4 + Ky^3 + My^2 + Ry + L = 0$$

em que $LK^2 = R^2$. Caso tivéssemos $K = 0$, teríamos também $R = 0$: a equação seria biquadrada e fácil de resolver. Caso $K \neq 0$, podemos escrever $L = \left(\dfrac{R}{K}\right)^2$. Se $R = 0$ então y^2 é fator comum e o problema se reduz a uma equação de segundo grau. Se $R \neq 0$ então $y = 0$ não é solução e, dividindo-se por y^2, a equação pode ser escrita como

$$y^2 + Ky + M + \frac{R}{y} + \frac{R^2}{K^2y^2} = 0$$

ou

$$y^2 + \frac{R^2}{K^2y^2} + Ky + \frac{R}{y} + M = 0$$

Completando o quadrado da expressão formada pelas duas primeiras parcelas da adição e colocando K em evidência entre as 3ª e 4ª parcelas, temos

$$\left(y + \frac{R}{Ky}\right)^2 + K\left(y + \frac{R}{Ky}\right) + \left(M - 2\frac{R}{K}\right) = 0.$$

Assim, fazendo $z = y + \dfrac{R}{Ky}$, reduzimos a equação à equação do segundo grau

$$z^2 + Kz + \left(M - 2\frac{R}{K}\right) = 0.$$

Uma vez resolvida essa equação (em z), obtemos os valores de y resolvendo a equação $z = y + \dfrac{R}{Ky}$, que é equivalente a uma (outra) equação do segundo grau em y.

Exemplo 30 *Encontre as soluções da equação* $y^4 + y^3 + 2y^2 + y + 1 = 0.$

Solução: Neste caso, $M = 2$, $R = 1$, $L = 1$ e $K = 1$, e a igualdade $LK^2 = R^2$ é verdadeira. Portanto podemos aplicar o método descrito anteriormente. A equação

$$z^2 + Kz + \left(M - 2\frac{R}{K}\right) = 0$$

é igual a $z^2 + z = 0$, cujas soluções são 0 ou -1.

i) Para $z = 0$
A equação $z = y + \dfrac{R}{Ky}$ é igual a $0 = y + \dfrac{1}{y}$, que é equivalente a $y^2 + 1 = 0$. As soluções de $y^2 + 1 = 0$ são i ou $-i$.

ii) Para $z = -1$
$-1 = y + \dfrac{1}{y}$ é equivalente a $y^2 + y + 1 = 0$. As soluções de $y^2 + y + 1 = 0$ são $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ e $\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

Logo, as soluções de $y^4 + y^3 + 2y^2 + y + 1 = 0$ são i, $-i$, $\dfrac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ e $\dfrac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$.

Capítulo 4

APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo apresentaremos alguns artigos interessantes da Revista do Professor de Matemática, que tratam de assuntos como: resolução de equações, raízes racionais, equação do 2º grau.

1 Raízes Racionais de uma Equação Algébrica de Coeficientes Inteiros

Lenimar Nunes de Andrade em [2], traz um artigo sobre a resolução de equações algébricas (ou polinomiais), que é relevante na Matemática Elementar.
Um fato bastante conhecido, é que não existem fórmulas de resolução para equações de grau maior do que 4. No entanto, se pudermos determinar alguma raiz de uma equação desse tipo, a tarefa de resolvê-la pode ser simplificada.
O teorema a seguir fornece uma condição adicional para que uma fração $\dfrac{p}{q}$ possa ser raiz de uma determinada equação.
Poucos professores de Matemática conhecem a parte (c) do teorema 17.
Para o próximo teorema precisaremos do seguinte resultado:

Proposição 17 *Dado um polinômio com coeficientes em* $\mathbb{C}$*, isto é,* $p(x) = a_n x^n +$

$a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_{1x} + a_0$ e um complexo qualquer $m \in \mathbb{C}$, existem complexos b_n, b_{n-1}, $\cdots, b_1, b_0$ tal que $p(x) = b_n(x-m)^n + b_{n-1}(x-m)^{n-1} + \cdots + b_1(x-m) + b_0$, onde $b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0$ são os restos da divisão de $p(x)$ por $(x-m)$ e b_n é o coeficiente líder.

Demonstração: Seja $p(x)$ um polinômio de grau n. Dividindo $p(x)$ por $(x-m)$ podemos escrever

$$p(x) = q_1(x)(x-m) + b_0.$$

Dividindo agora $q_1(x)$ por $(x-m)$ podemos escrever

$$q_1(x) = q_2(x-m) + b_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p(x) &= (q_2(x)(x-m) + b_1)[(x-m) + b_0] \\ &= q_2(x)(x-m)^2 + b_1(x-m) + b_0. \end{aligned}$$

Os graus dos quocientes q_i decrescem de uma unidade a cada passo e o processo para quando $q_n(x)$ é constante e igual a b_n. Neste ponto, teremos obtido

$$p(x) = b_n(x-m)^n + b_{n-1}(x-m)^{n-1} + \cdots + b_1(x-m) + b_0.$$

Exemplo 31 *Desenvolva $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ segundo as potências de $(x-1)$.*

Solução: Dividindo $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ por $(x-1)$, podemos escrever

$$p(x) = (x^2 + 4x)(x-1) - 12.$$

Dividindo $x^2 + 4x$ por $(x-1)$, podemos escrever $p(x)$ como

$$\begin{aligned} p(x) &= [(x+5)(x-1) + 5][(x-1) - 12] \\ &= (x+5)(x-1)^2 - 12(x+5)(x-1) + 5(x-1) - 60. \qquad (1) \end{aligned}$$

Dividindo $(x+5)$ por $(x-1)$, temos que

$$x+5=(x+1)+6. \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos

$$p(x)=[(x-1)+6](x-1)^2-12[(x-1)+6](x-1)+5(x-1)-60.$$

Portanto,

$$p(x)=(x-1)^3+6(x-1)^2+5(x-1)-12.$$

Exemplo 32 *Escreva* $p(x)=3x^2+2x+5$ *como potências de* $(x-7)$.

Solução: Dividindo $p(x)=3x^2+2x+5$ por $(x-7)$, escrevemos

$$p(x)=(3x+23)(x-7)+166.$$

Dividindo $(3x+23)$ por $(x-7)$, escrevemos $p(x)$ como

$$p(x)=[3(x-7)+44](x-7)+166.$$

Portanto,

$$p(x)=3(x-7)^2+44(x-7)+166.$$

Teorema 18 *Seja* $\frac{p}{q}$ *uma raiz de* $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ *onde* $p,q,a_n,...,a_1,a_0\in\mathbb{Z}$, *e m.d.c.*$(p,q)=1$. *Então:*

(a) $p|a_0$ *(isto é, "p divide* a_0*" ou "p divisor de* a_0*")*

(b) $q|a_n$

(c) $(p - mq)|f(m)$*, para todo* $m \in \mathbb{Z}$*. Em particular,* $(p - q)|f(1)$ *e* $(p + q)|f(-1)$*.*

Os itens (a) e (b) fornecem todas as possíveis raízes racionais. O item (c) nos permite eliminar muitas dessas possíveis raízes, sem fazermos quase nenhum cálculo. Observe que $f(1)$ *e* $f(-1)$ *sempre são fáceis de serem calculados.*

Demonstração: Os itens (a) e (b) já se encontram demonstrados no Teorema 15 e podem ser encontrados em muitos livros de Matemática da 3º ano do Ensino Médio. Será demonstrado aqui apenas o item (c).

Seja $m \in \mathbb{Z}$ qualquer. Existem inteiros b_i, tais que

$$f(x) = b_n(x - m)^n + b_{n-1}(x - m)^{n-1} + \cdots + b_1(x - m) + b_0.$$ (Cada b_i é o resto da divisão de $f(x)$ por um polinômio $p_1(x)$ de coeficientes inteiros).

Usando o fato de que $\frac{p}{q}$ é raiz de $f(x)$, temos

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = b_n\left(\frac{p}{q} - m\right)^n + \cdots + b_1\left(\frac{p}{q} - m\right) + b_0 = 0$$

que é o mesmo que

$$b_n(p - mq)^n + qb_{n-1}(p - mq)^{n-1} + \cdots + q^{n-1}b_1(p - mq) = -b_0q^n.$$

O primeiro membro desta última equação é um inteiro múltiplo de $(p-mq)$. Logo, $(-b_0q^n)$ também é múltiplo de $(p - mq)$. Seja $d \in \mathbb{Z}$ tal que $d|q$ e $d|(p - mq)$. Daí temos que $d|(mq)$ o que implica $d|(mq + (p - mq))$, ou seja, $d|p$. Assim, d é um divisor de p e $-q$, logo, $d = 1$ ou $d = -1$. Portanto, $m.d.c.(p - mq, q) = 1$. Aplicando agora "n" vezes o resultado "*Se* $a|(bc)$ e $m.d.c.(a, b) = 1$, então $a|c$", temos que $(p - mq)|(b_0q^n)$ implica $(p - mq)|b_0$, ou seja, $(p - mq)$ é um divisor de $f(m) = b_0$, para todo $m \in \mathbb{Z}$.

■

A seguir, veremos alguns exemplos de aplicação deste Teorema.

Exemplo 33 *Verifique se os números* $\frac{2}{9}$ *e* $\frac{-1}{27}$*, que são dois "candidatos à raiz racional" da equação* $f(x) = 27x^5 - x^2 - 6x - 4 = 0$*, satisfazem a igualdade.*

Solução: Sem nos darmos ao trabalho de substituí-las diretamente na equação, podemos garantir que elas não são raízes, apenas observando que $f(1) = 16$ e que $(2 - 9)$ e $((-1) - 27)$ não são divisores de 16.

Exemplo 34 *Determine as raízes da equação* $f(x) = 6x^3 + x^2 + x - 5 = 0$.

Solução: As possíveis raízes racionais da equação $f(x) = 6x^3 + x^2 + x - 5 = 0$ são $\pm 1, \pm 5, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{5}{6}$. Como $f(1) = 3$, temos que $\pm 5, -\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}$ e $-\frac{5}{6}$ não podem ser raízes porque a diferença entre o numerador e o denominador desses números não é divisor de 3. Como $f(-1) = -11$, temos que $\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{2}$ não são raízes, porque -11 não é múltiplo de $(1 + 2)$ e nem de $(5 + 2)$. Restaram apenas duas possíveis raízes: $-\frac{1}{2}$ e $\frac{5}{6}$. Substituindo diretamente na equação, vemos que apenas $\frac{5}{6}$ é raiz. Podemos ver que $-\frac{1}{2}$ não é raiz também da seguinte forma: $f(2) = 49$ e $(-1 - 2(2))$ não divide 49. Dividindo $f(x)$ por $\left(x - \frac{5}{6}\right)$, podemos determinar as outras raízes da equação que são $\frac{(-1 \pm \sqrt{3}i)}{2}$.

Exemplo 35 *Verifique se a equação* $f(x) = 25x^{100} + 7x^4 + 2x^3 - 81 = 0$ *possui raiz racional.*

Solução: A equação não possui raiz racional pois $f(1)$ é ímpar, e se $p|81$ e $q|25$, então p e q também são ímpares. Logo, $(p - q)$ é par e portanto $(p - q)$ não divide $f(1)$.

2 A Equação do Segundo Grau

Elon Lages Lima, em [9], faz duas demonstrações diferentes para obtermos as raízes da equação do segundo grau do tipo $x^2 - sx + p = 0$, conhecidas a soma e o produto das raízes.

Um modo diferente

Mesmo um tema tão antigo como a equação do segundo grau, admite variações. Podemos fugir da rotina e pensar em outras maneiras diferentes de chegar à fórmula das raízes. Uma delas é a seguinte:

Só para simplificar a escrita, chamemos de $m = \dfrac{s}{2} = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ a média aritmética das raízes α e β da equação $x^2 - sx + p = 0$. O produto $\alpha\beta$ continuará sendo chamado p. Evidentemente, $2m = \alpha + \beta \Rightarrow$m+m=$\alpha + \beta \Rightarrow \alpha - m = m - \beta$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por $\alpha - m$ obtemos

$$\begin{aligned}
(\alpha - m)^2 &= (\alpha - m)\cdot(m - \beta)\\
&= \alpha m + \beta m - m^2 - \alpha\beta\\
&= (\alpha+\beta)m - m^2 - \alpha\beta\\
&= 2m^2 - m^2 - p\\
&= m^2 - p.
\end{aligned}$$

Se α for a maior das raízes, então $\alpha - m \geq 0$. Logo, temos que

$$\alpha - m = \sqrt{m^2 - p}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\alpha &= m + \sqrt{m^2 - p}\\
&= \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}\\
&= \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2}{4} - p}\\
&= \frac{s}{2} + \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}}\\
&= \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.
\end{aligned}$$

Para a menor raiz β temos $\beta - m \leq 0$. Multiplicando ambos os membros da igualdade $\beta - m = m - \alpha$ por $\beta - m$, obtemos

$$\begin{aligned}
(\beta - m)^2 &= (\beta - m)\cdot(m - \alpha)\\
&= \beta m - \alpha\beta - m^2 + m\alpha\\
&= (\alpha+\beta)m - m^2 - \alpha\beta\\
&= 2m^2 - m^2 - p\\
&= m^2 - p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\beta - m = -\sqrt{m^2 - p}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\beta &= m - \sqrt{m^2 - p} \\ &= \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \\ &= \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - p} \\ &= \frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2 - 4p}{4}} \\ &= \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.\end{aligned}$$

Outro modo

Para achar dois números α e β cuja soma é s e cujo produto é p, podemos também raciocinar assim:

Supondo $\alpha \geq \beta$, temos $\alpha - \beta \geq 0$ e assim, $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha - \beta)^2}$.

Usando a identidade

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$$

$$= s^2 - 4p,$$

resulta então que

$$\alpha - \beta = \sqrt{s^2 - 4p}.$$

Portanto,

$$\alpha = \frac{1}{2}[(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)] = \frac{1}{2}[s + \sqrt{s^2 - 4p}] = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ e}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}[(\alpha + \beta) - (\alpha - \beta)] = \frac{1}{2}[s - \sqrt{s^2 - 4p}] = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}.$$

3 Identificando Números Irracionais através de Polinômios

Em [13], Antonio Carlos Tamarrozi utiliza o Teorema 13 para verificar se um número é irracional.

Em geral costuma chocar a afirmação de que existem mais números irracionais do que racionais, em razão da popularidade destes últimos no conjunto dos números reais. Há, porém, pelo menos um certo conformismo ao saber que é possível obter uma quantidade infinita de números irracionais, dados pelas raízes $\sqrt[n]{a}$, não inteiros, de um número natural a.

A verificação usual dessa afirmativa é feita por redução ao absurdo, ao admitir $\sqrt[n]{a}$ racional, utilizando decomposições de inteiros em fatores primos. Essa abordagem, no entanto, quase nunca é apresentada aos alunos do ensino médio.

Contudo, podemos fazer a verificação utilizando polinômios, a partir do conhecido teorema das raízes racionais:

Se o número racional r/s (r e s inteiros primos entre si) é raiz do polinômio $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$, com coeficientes inteiros, então r é divisor de a_0 e s é divisor de a_n.

Aplicando esse resultado ao polinômio $p(x) = x^n - a$ ($a \in \mathbb{N}$ tal que $\sqrt[n]{a}$ é não inteiro), temos $a_n = 1$ e $a_0 = -a$; logo, se um número racional r/s é raiz, então $s = \pm 1$, o que mostra que r/s é um número inteiro. Como, por hipótese, nenhum inteiro d satisfaz $d^n = a$, concluímos que o polinômio $p(x) = x^n - a$ não admite raízes racionais. Como $\sqrt[n]{a}$ é raiz, $\sqrt[n]{a}$ não pode ser um número racional, sendo, portanto, irracional.

Polinômios e o Teorema 13 são úteis também na verificação da irracionalidade ou racionalidade de alguns números reais específicos. Vejamos dois exemplos:

1. O número $\sqrt{3} - \sqrt{2} = a$, ou ainda, $(\sqrt{3})^2 = (a + \sqrt{2})^2$, obtém-se a igualdade $1 - a^2 = 2\sqrt{2}a$, a qual, após mais um quadramento para escrevermos a equação com coeficientes inteiros, mostra ser a raiz do polinômio $x^4 - 10x^2 + 1$. Pelo teorema, as únicas raízes racionais possíveis desse polinômio são ± 1, e como, por verificação direta, esses números não são raízes, a não pode ser racional.

2. Surpreendentemente, o número $a = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é racional.

   De fato, elevando-se ao cubo ambos os membros da igualdade, obtém-se

$$4 - 3(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}) = a^3$$

   isto é, a é raiz do polinômio $p(x) = x^3 + 3x - 4$.

   É fácil verificar que $x = 1$ é raiz desse polinômio e que o quociente da divisão de $p(x)$ por $(x-1)$ é $q(x) = x^2 + x + 4$, que não admite raízes reais. Portanto, $x = 1$ é a única raiz real de $p(x)$. Logo,

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} = 1$$

Números irracionais conjugados

Existe um fato interessante envolvendo polinômios e alguns números irracionais da forma $a + b\sqrt{c}$, que pode ser assim enunciado:

Se o número real $a + b\sqrt{c}$ (onde $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$ e $c \in \mathbb{N}$ não é quadrado perfeito) é raiz de um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes são racionais, então, $a - b\sqrt{c}$ também é raiz de $p(x)$.

Os números $a + b\sqrt{c}$ e $a - b\sqrt{c}$ são ditos números conjugados, devido, talvez, à semelhança do resultado anterior com o caso de raízes complexas conjugadas.
A verificação do resultado acima é análoga à demonstração do caso complexo: basta mostrar que $p(x)$ é múltiplo do polinômio $f(x) = (x - a - b\sqrt{c})(x - a + b\sqrt{c})$.
De fato, temos que $f(x)$ também tem coeficientes racionais, pois $f(x) = (x-a)^2 - b^2c$.
Logo, o mesmo ocorre com o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ na divisão de $p(x)$ por $f(x)$.
Se $p(x) = f(x)q(x) + r(x)$, podemos então escrever $r(x) = mx + n$, com $m, n \in \mathbb{Q}$.
De $p(a+b\sqrt{c}) = 0$ e $f(a+b\sqrt{c}) = 0$, obtemos $r(a+b\sqrt{c}) = 0$, ou seja, $ma+mb\sqrt{c}+n = 0$.
Daí, $m = n = 0$, pois, caso contrário, $\sqrt{c} = \dfrac{-ma-n}{mb}$ seria um número racional, o que não ocorre.

Exemplo 36 *Resolva a equação $x^3 - 5x^2 - 10x + 14 = 0$, sabendo que uma das raízes é $2 + 3\sqrt{2}$.*

Solução: Pelo Teorema $2 - 3\sqrt{2}$ também é raiz da equação.
Logo $p(x)$ é divisível por

$$\begin{aligned} d(x) &= [x - (2 - 3\sqrt{2})][x - (2 + 3\sqrt{2})] \\ &= [x^2 - 4x - 14]. \end{aligned}$$

Efetuando a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ obtemos $q(x) = x - 1$, que tem como raiz $x = 1$.
Portanto o conjunto solução da equação é

$$S = \left\{ 2 - 3\sqrt{2}; 1; 2 + 3\sqrt{2} \right\}.$$

Capítulo 5

CONCLUSÃO

Com essa dissertação, tivemos a chance de estudar um pouco mais sobre os conceitos de polinômios e equações algébricas. Foram exibidas propriedades sobre números complexos, polinômios e equações algébricas.

Quanto aos números complexos, o estudo foi muito aprimorado, pois foram demonstrados conteúdos que pouco estudamos na literatura didática do Ensino Médio, tais como o inverso multiplicativo e a raiz quadrada de um número complexo, que por sua vez nos possibilita calcular a mesma quando não temos um ângulo conhecido. A demonstração do cálculo da raiz enésima, que não é apresentada nos livros didáticos do Ensino Médio, nos agregou mais conhecimento a respeito do assunto.

Ao estudarmos polinômios, o enriquecimento sobre o referido assunto foi incontestável, pois devido à nossa pesquisa, tivemos a oportunidade de conhecer novas propriedades.

Quanto ao capítulo três, conhecemos um pouco mais dos critérios de resolução de equações . O trabalho traz uma forma diferente da apresentada nos livros didáticos, de encontrar a fórmula de Bháskara por meio do método de Viète, o qual não conhecíamos. Nesse capítulo, também constam a demonstração da fórmula de Cardano e uma fórmula para a resolução de um tipo específico de equações do quarto grau, que nos agregou importantes informações.

Em relação ao quarto capítulo, tomamos conhecimento de outro critério para eliminar as possíveis raízes de uma equação algébrica, além de identificarmos números racionais por meio de polinômios.

Devido a qualidade do material pesquisado, esse trabalho contribuiu muito para o nosso crescimento intelectual, pois os resultados serão aplicados em sala de aula, tornando as aulas mais atrativas e enriquecedoras.

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, João Tomas do, *Método de Viète para resolução de Equações do 2º grau.* Revista do Professor de Matemática, nº13, 1988, p. 18-20.

[2] ANDRADE, Lenimar Nunes de, *Raízes racionais de uma equação algébrica de coeficientes inteiros.* Revista do Professor de Matemática, nº14, 1989, p. 39-41.

[3] DANTE, Luiz Roberto, *Matemática contexto e aplicações.* Vol.3, 3ª Ed, São Paulo, Atica, 2007.

[4] FILHO, Edvalter da Silva Sena, *Um método de resolução de equações polinomiais de grau 4.* Revista Matemática Universitária, nº46, 2009, pg 17.

[5] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto, *Matemática.* Vol.3., São Paulo, FTD, 1992.

[6] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres, *Polinômios e Equações Algébricas.* Coleção PROFMAT, 1ª Ed, Rio de Janeiro, SBM, 2012.

[7] IEZZI, Gelson, *Fundamentos de Matemática Elementar.* Vol.6., 6ª Ed, São Paulo, Atual, 1993.

[8] JÚNIOR, Flodoaldo Moreno, *Métodos de Resoluções de Equações do Segundo Grau e Terceiro Grau.* Dissertação de Mestrado - PROFMAT - UFMS, Campo Grande, 2013.

[9] LIMA, Elon Lages, *A equação do 2º grau.* Revista do Professor de Matemática, nº13, 1988, p. 21-24.

[10] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto Carvalho; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César *A Matemática do Ensino Médio.* Coleção do Professor de Matemática, 6ª Ed, Rio de Janeiro. SBM, 2006.

[11] PONTES, Ronaldo da Silva, *Equações polinomiais: Soluções algébricas, geométricas e com o auxílio de derivadas.* Dissertação de Mestrado - PROFMAT - UFPB, Paraíba, 2013.

[12] RIBEIRO, Amanda Gonçalves, *Teorema da decomposição de um polinômio.* Brasil Escola. Disponível em <http://www.brasilescola.com/matematica/teorema-decomposicao-um-polinomio.htm>. Acesso em 06 de setembro de 2015.

[13] TAMARROZI, Antônio Carlos, *Identificando Números Irracionais através de Polinômios.* Revista do Professor de Matemática, nº42, 2000, p. 16-18.