UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

SIMONE MINGORANCI

A GEOMETRIA FRACTAL ALIADA À CONTEXTUALIZAÇÃO, PROTAGONISMO JUVENIL E TECNOLOGIAS COMO PROPOSTA DE MELHORIA NO PROCESSO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

TRÊS LAGOAS - MS
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CAMPUS DE TRÊS LAGOAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

A GEOMETRIA FRACTAL ALIADA À CONTEXTUALIZAÇÃO, PROTAGONISMO JUVENIL E TECNOLOGIAS COMO PROPOSTA DE MELHORIA NO PROCESSO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato César da Silva

TRÊS LAGOAS - MS
2014

Serviço Público Federal
Ministério da Educação
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Pólo de Três Lagoas

A GEOMETRIA FRACTAL ALIADA À CONTEXTUALIZAÇÃO, PROTAGONISMO JUVENIL E TECNOLOGIAS COMO PROPOSTA DE MELHORIA NO PROCESSO ENSINO/APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

por

SIMONE MINGORANCI

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca examinadora:

Renato César da Silva

Prof. Dr. Renato César da Silva (Orientador)

UFMS/CPTL

Osmar Jesus Macedo

Prof. Dr. Osmar Jesus Macedo

UFMS/CPTL

Profa. Dra. Silvia Regina Vieira da Silva

UNESP/ Ilha Solteira

Setembro de 2014

A Deus,

Aos meus pais Donizete e Lourdes,

Ao meu irmão Rogério,

Ao meu namorado Emerson,

Ao meu professor orientador

Renato.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, em primeiro lugar, por ter me dado à oportunidade de desfrutar desta conquista. A meus pais, Lourdes e Donizete, meu irmão Rogério e meu namorado e amigo Emerson pelo amor e incentivo, aos meus amigos de turma pelo companheirismo, ao meu professor orientador Renato pela orientação, pelos conselhos e pela disposição em ajudar, aos professores ministrantes das aulas pelo conhecimento e atenção dispensada.

"Depois de muito refletir, calcular e suar, concluí paradoxalmente que o mundo é composto de uma desordem organizada".

Lorenz[1], 1970.

[1] Edward Norton Lorenz (1917 – 2008) foi meteorologista do Instituto de Meteorologia de Massachusetts, seus estudos meteorológicos deram origem à teoria do Caos.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

RESUMO

O trabalho apresenta a Geometria Fractal de grande importância por modelar geometricamente fenômenos e objetos não contemplados pela Geometria Euclidiana. Este texto faz uso desta geometria não apenas como conteúdo a ser trabalhado em sala de aula, mas vinculado ao ensino/aprendizagem de conteúdos curriculares de grande importância muitas vezes tomados pelos alunos como enfadonhos. As características fractais são utilizadas neste texto como suporte para elaboração de atividades diferenciadas, capazes de abordar três ferramentas fundamentadas em documentos oficiais de educação como propostas de melhoria na educação, são elas: contextualização, protagonismo juvenil e inserção de tecnologias.

Palavras – chaves: fractais, geometria, contextualização, protagonismo, tecnologias.

ABSTRACT

The paper presents the Fractal Geometry of great importance for modeling geometrically phenomena and objects not covered by Euclidean geometry. This text makes use of the geometry not just as content to be worked in the classroom, but linked to the teaching / learning curricula of great importance often taken by students as boring. The fractal features are used in this paper as support for developing differentiated activities, able to address three tools based on official education documents with proposals for improvements in education, they are: contextualization, youth participation and integration of technology.

Words - keys: fractals, geometry, contextualization, protagonism, technologies.

INTRODUÇÃO

A Matemática tem importância fundamental na evolução da humanidade. Associada a esta ciência está a geometria, uma área da Matemática que possibilitou a superação, suprindo necessidades de sobrevivência. O seu surgimento está intimamente ligado às atividades do dia a dia, basta observarmos o significado de Geometria: “medir a terra”. Esta grafia surgiu devido às cheias do rio Nilo no Egito que destruíam as divisas das propriedades; os governantes da época nomeavam pessoas (os agrimensores) com o papel de remarcar as divisas perdidas.

Os conhecimentos geométricos construídos pelo homem com base nas suas experiências deram origem a geometria euclidiana, recebendo essa denominação devido ao estudioso Euclides, tendo até hoje papel principal nos currículos do ensino de Matemática no Brasil.

Frente à atual realidade da educação brasileira, tem - se buscado ferramentas que possibilitem avanços significativos na aprendizagem, capazes de fornecer aos jovens brasileiros formação íntegra tornando - os capazes de exercer a cidadania plenamente. Neste cenário surge a necessidade de novos conhecimentos que melhor expliquem fenômenos e elementos do cotidiano, o que motivou o desenvolvimento das diversas áreas e ciências. Nesta linha, dentro da área geométrica novas geometrias foram criadas como a Elíptica, Hiperbólica e a Fractal, sendo esta última a abordada neste trabalho.

A motivação para a pesquisa desta geometria se deu pelo fato dela permitir o estímulo de diversas habilidades necessárias para o entendimento não só da Matemática, mas do mundo em geral, por exemplo, saber pensar iterativamente e recursivamente e o desenvolvimento da percepção de autossimilaridades e do raciocínio dedutivo. Além do mais, fornece ferramentas ao professor para trabalhar diferentes sentidos como visão, audição e atividades manuais. Possibilita a abordagem de diversos conteúdos matemáticos de áreas não geométricas como também de outras disciplinas, podendo ser utilizado como tema central para um projeto interdisciplinar.

Pensando na modernização e adequação das aulas às linhas pedagógicas atuais, neste trabalho será focada a Geometria fractal como um conteúdo curricular capaz de enriquecer as aulas e, consequentemente o processo ensino/aprendizagem. Os fractais, além de sua importância intrínseca, permitem abordar três ferramentas apontadas pelos norteadores da educação brasileira[2] como fundamentais na melhoria da educação: contextualização, protagonismo juvenil e inserção das tecnologias nas aulas, além do mais, permitem trabalhar conceitos já constituintes dos currículos do ensino fundamental e médio.

Desta forma, espera - se construir um material que apresente a Geometria Fractal com linguagem simplificada, porém completa, fazendo um apanhado de conceitos, definições e informações necessárias a uma compreensão geral sobre o assunto, também, colocar em evidência três ferramentas que segundo os norteadores da educação são caminhos para a melhoria do processo ensino/aprendizagem, a contextualização, o protagonismo juvenil e inserção das tecnologias e, a partir das atividades propostas no capítulo 3, promover uma tentativa de modernização do cotidiano da sala de aula, contribuindo para um enriquecimento nas possibilidades de se trabalhar os diversos conteúdos da matemática, podendo vir a servir de apoio e consulta a professores, alunos e demais pessoas interessadas por essa geometria e pela melhoria do processo ensino/aprendizagem da Matemática na educação básica.

O trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 1 é feita uma breve retrospectiva histórica sobre a origem da geometria, evidenciando a contribuição de Euclides. Além disso, mostra - se fundamentando – se nos currículos de Matemática do ensino médio dos estados de Mato Grosso do Sul e São Paulo, a presença maciça da geometria euclidiana no ensino e a insuficiência da mesma na representação dos elementos e fenômenos da Natureza o que dá abertura à inclusão da geometria fractal.

No capítulo 2 comenta-se a curiosidade do homem em encontrar padrões nos fenômenos e elementos do seu cotidiano, utilizando muitas vezes a Matemática neste trabalho e que ao longo da busca por decifrar o mundo o homem encontrou situações em que acreditava não poder modelá-las matematicamente, para esses casos acreditava-se que ocorria desordem, caos. Neste momento surge a Teoria do Caos e associada a ela, a Geometria Fractal. Neste item, define-se fractal através da característica de autossimilaridade, são apresentados alguns precursores dessa

---

[2] Entende – se como norteadores da educação brasileira as leis e documentos que regem os trabalhos educacionais no país e respectivos estados. Ex.: Parâmetros Curriculares Nacionais e a lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases da Educação).

nova geometria e alguns fractais criados por esses estudiosos. Define-se também a dimensão fractal e é mostrado o significado da dimensão não inteira. Finalizando o capítulo, são disponibilizadas algumas aplicações da geometria fractal em diversas ciências.

No capítulo 3 são analisados os resultados de duas avaliações de larga escala sobre a educação brasileira, constatando - se a necessidade de mudanças no processo ensino/aprendizagem. Visando contribuir à melhoria deste processo são propostas atividades que aliadas a três ferramentas muito divulgadas pelos norteadores da educação (contextualização, protagonismo juvenil e inserção das tecnologias) mostram algumas maneiras de se trabalhar com a geometria fractal na sala de aula, evidenciando sua importância não só como uma nova área com forte ligação à realidade, mas como artifício a ser utilizado como apoio ao estudo de outros conteúdos curriculares.

Nas considerações finais, propõe - se a Geometria Fractal como tema a ser utilizado por professores na elaboração de atividades diferenciadas que permitam o estudo de conteúdos matemáticos e de outras disciplinas buscando melhorias no processo ensino/aprendizagem na educação básica.

1 UM POUCO DE HISTÓRIA, CENÁRIO EDUCACIONAL ATUAL E DEFICIÊNCIAS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA.

A Geometria, segundo a literatura, surgiu da necessidade de resolver situações do dia - a - dia como, por exemplo, o plantio. Para tanto, foi essencial a capacidade do homem de reconhecer configurações físicas e comparar formas e tamanhos.

Além do plantio, a demarcação de terras no Egito esteve associada ao desenvolvimento da Geometria. Durante uma determinada época do ano as inundações do rio Nilo, no Egito, destruíam as marcações que delimitavam as propriedades, o que ocasionava um desconforto entre os indivíduos daquela comunidade sobre o uso da terra não delimitada. Os agricultores não sabiam as limitações de suas propriedades para cultivar. Além disso, essa situação prejudicava a cobrança dos impostos. Foi por ocasião desses problemas que os governantes da época, os faraós, passaram a nomear funcionários para a função de agrimensor. Esse profissional ficou responsável por avaliar os prejuízos das cheias e remarcar as fronteiras das propriedades. Essa delimitação de terras deu base ao conhecimento das formas geométricas mais simples, como o quadrado, retângulo e triângulo.

A Geometria (medir a terra) foi fundamental para subsidiar atividades ligadas à agricultura e à engenharia não só ao longo do rio Nilo, mas por outras áreas do Oriente Antigo, às margens de outros rios como o Tigre e Eufrates da Mesopotâmia, o Indo e o Ganges na região Centro - Sul da Ásia e o Hwang Ho e Yang - Tsé na Ásia Oriental. Nas bacias desses rios se formaram sociedades avançadas, conhecidas por sua habilidade em engenharia na drenagem de pântanos, irrigação, obras de defesa contra inundações e construção de grandes edifícios e estruturas.

Os conhecimentos geométricos foram se construindo através das atividades do dia - a - dia, eram conhecimentos práticos. A noção de vertical, paralela e perpendicular, por exemplo, tiveram início nas construções de muros e moradias. As observações da natureza, como o contorno do sol e da lua, o arco íris, as sementes de algumas plantas, o corte transversal de uma árvore, a parábola descrita pelo arremesso de uma pedra deram a ideia de curvas, superfícies e sólidos. A simetria era vista no corpo dos animais e homens, nas flores, nos troncos de árvores. O volume, nos recipientes utilizados para armazenamento de alimentos e água.

A existência dos conhecimentos geométricos na prática levaram os cientistas a construírem definições, regras e teorias. A partir das observações das semelhanças nas formas, tamanhos e objetos físicos, o homem passou a extrair propriedades gerais passando a ter a noção de leis e regras geométricas. Por exemplo, a constante encontrada ao efetuar o quociente do comprimento pelo diâmetro de dois círculos quaisquer.

Foi na Grécia que surgiu a figura do cientista profissional, homem que buscava conhecimentos em troca de salário. Ptolomeu I estimulado por um filósofo chamado Demétrio, de Falero criou em Alexandria o centro de estudos chamado “Museo” dotado de uma grande biblioteca. Este centro atraiu grandes pensadores da época e teve como associado o notável matemático Euclides que viveu por volta do século de 300 a. C, chamado por muitos o pai da geometria. Esse codinome se deve à importância deste matemático para a Geometria.

Durante muitos séculos estudiosos buscaram sistematizar a Geometria de forma a descrever teoricamente os dados geométricos obtidos através da medição e observação do cotidiano, mas foi Euclides (cerca de 300 a.C.) que escreveu uma sequência lógica mais aprimorada. A Geometria de Euclides propunha algumas afirmações que deveriam ser admitidas sem demonstração e, então utilizadas para demonstrar resultados. Esse sistema é chamado dedutivo, as afirmações tomadas inicialmente como verdadeiras são denominadas postulados ou axiomas.

O sistema dedutivo apresentado por Euclides é constituído por três entes primitivos (ponto, reta e plano), cinco “noções comuns” que deveriam ser aceitas hipóteses a todas as ciências ou admissíveis a qualquer pessoa e os cinco postulados que seriam hipóteses específicas à geometria.

Noções comuns:

- Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Cinco postulados:

1. Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos distintos.
2. Pode-se continuar de uma única maneira qualquer segmento em uma reta.

3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.

4. Todos os ângulos retos são iguais.

5. É verdade que, se uma reta, ao cortar duas outras, formando ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

O pioneirismo em organizar os conhecimentos geométricos já conhecidos, seguindo uma lógica, foi citado por Garbi (2010, p.58):

> O toque de gênio de Euclides está não na descoberta de teoremas, o que ele certamente fez, mas na organização lógica com que os apresentou e provou de forma rigorosa e concatenada, preenchendo as lacunas deixadas por outros.

Dos conhecimentos adquiridos de suas pesquisas e de estudos de outros matemáticos, Euclides escreveu o notável livro “Elementos”; obra essa que o concedeu papel importante na história da Matemática e respeito dos estudiosos sucessores.

> Nenhum outro autor de livros-texto conseguiu êxito comparável a Euclides: seus Elementos são o mais antigo livro de Matemática ainda em vigor nos dias de hoje, uma obra que somente perde para a Bíblia em número de edições e, para muitos, o mais influente livro matemático de todos os tempos. (GARBI, 2010, p. 57)

A Geometria Euclidiana até hoje faz parte do currículo escolar no ensino da Matemática. Podemos constatar esse fato observando os conteúdos geométricos presentes nas propostas curriculares para o ensino médio dos estados Mato Grosso do Sul e São Paulo disponíveis nas tabelas a seguir.

Quadro 1 - Conteúdos curriculares geométricos do ensino médio (Mato Grosso do Sul).

PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE MATO GROSSO DO SUL - GEOMETRIA			
ENSINO MÉDIO			
	1º ANO	2º ANO	3º ANO
1º BIMESTRE		**Geometria** Resolução de Triângulos: lei dos senos; lei dos cossenos; área de um triângulo; área de um triângulo em função de um lado e da altura relativa a esse lado; área de um triângulo em função de dois lados e do ângulo correspondente entre eles.	
2º BIMESTRE			**Geometria Espacial** postulados e teoremas; paralelismo; perpendicularidade; poliedros; prismas; pirâmides; cilindros; cones; esferas.
3º BIMESTRE			
4º BIMESTRE	**Geometria** semelhanças de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo.		

Fonte: Do autor, com dados do Referencial Curricular de Mato Grosso do Sul
.

Quadro 2 - Conteúdos curriculares geométricos do ensino médio (São Paulo).

PROPOSTA CURRICULAR DO ESTADO DE SÃO PAULO – GEOMETRIA			
ENSINO MÉDIO			
	1º ANO	2º ANO	3º ANO
1º BIMESTRE			**Geometria analítica** Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos; Reta: equação e estudo dos coeficientes, problemas lineares; Ponto e reta: distância; Circunferência: equação; Reta e circunferência: posições relativas; Cônicas: noções e aplicações.
2º BIMESTRE			
3º BIMESTRE			
4º BIMESTRE	**Geometria** Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies.	**Geometria métrica espacial** Elementos de geometria de posição; Poliedros, prismas e pirâmides; Cilindros, cones e esferas.	

Fonte: Do autor , com dados da Proposta Curricular de São Paulo.

Habitamos um mundo repleto de formas. Os conceitos geométricos estão inseridos no mundo tridimensional sendo percebidas na natureza, na arquitetura, na arte e nas diversas áreas do conhecimento. Por tantas aparições e utilidades, constitui - se como um dos conhecimentos estruturantes do ensino fundamental e médio.

Além disso, Geometria reúne facilitadores para o estudo das demais áreas da Matemática e proporciona ao homem a aquisição de conhecimentos diversos necessários à compreensão do mundo, possibilitando - o resolver problemas das mais diversas áreas do conhecimento e, portanto, não ser mero expectador das conquistas e desenvolvimentos da sociedade.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1997, p. 39):

> Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive.

Lorenzato (2008, p. 70) refere-se à importância do ensino da geometria na educação básica como fator de alta relevância para o entendimento completo da Matemática:

> Sabemos que, por várias razões, a geometria não tem ocupado o seu devido lugar no ensino da matemática. Porém, é possível, desejável e necessário que o ensino dessa parte importante da matemática seja fortemente enfatizado, porque, como já vimos, sem experiência geométrica não se consegue raciocinar geometricamente e, por consequência, se constrói uma visão capenga, falaciosa e incompleta da matemática.

Apesar da importância, mesmo que propostos nos documentos oficiais, o ensino da Geometria na maioria das escolas públicas brasileiras passa a ser item em segundo plano, sendo omitido ou abandonado, muitas vezes motivado pela falta de tempo, pela falta ou má elaboração dos materiais didáticos e até mesmo pela falta de preparação dos educadores.

Quanto aos materiais didáticos, Lorenzato (1995, p.4) diz que talvez pela falta de preparação dos professores ou mesmo pelas cansativas jornadas de trabalho, o apoio que os professores buscam nos livros didáticos se torna exagerado. Esses materiais apresentam a Geometria como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica, quando apresenta alguma contextualização a Geometria é reduzida a meia dúzia de formas banais do mundo físico. Os livros apresentam os conteúdos geométricos ao final do livro aumentando a probabilidade de não serem estudados pela falta de tempo.

Sobre o despreparo dos professores Lorenzato (1995, p. 3) escreveu:

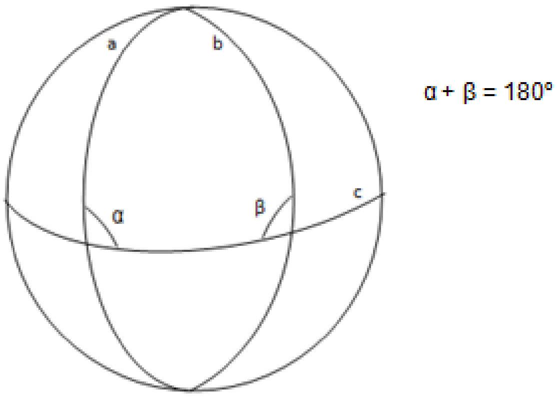
> Considerando que o professor que não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la.

Como podemos perceber, a Geometria teve sua origem nas atividades cotidianas do homem, nas observações do meio em que vivia, na admiração das formas presentes na natureza. A descoberta da roda, por exemplo, foi um marco na evolução humana, porém novas necessidades surgiram e com elas o homem procurou novas invenções, chegando até o cenário atual, em que a rapidez da transmissão de informação e as inovações estão cada vez mais presentes no cotidiano, que perguntas surgem a todo instante procurando preencher as lacunas do saber, procurando desenvolver soluções para problemas cujas descobertas feitas até o momento já não são suficientes para explicar.

O quinto postulado de Euclides promoveu uma abertura para busca de novos conhecimentos geométricos, vários matemáticos tentaram deduzi-lo dos demais axiomas e postulados devido à sua complexa formulação e insuficiente apelo intuitivo. Essas tentativas perduram até hoje.

Deste postulado foi levantada a questão: A Geometria Euclidiana considera superfícies planas, como tratar a geometria existente sobre uma superfície curva como a da Terra? Se tomarmos uma pequena superfície, localmente poderíamos supor que estamos trabalhando em um plano, ao considerar grandes superfícies como as longas distâncias entre países a geometria Euclidiana já não é suficiente. O quinto postulado, que trata da existência de retas paralelas, para a Terra não poderia ser aplicado, linhas em uma esfera são grandes círculos, se considerarmos uma linha a paralela a linha b que intercepta a linha c (linha do Equador no caso da Terra) teremos que a soma dos ângulos α e β somam 180º, porém as duas linhas se encontram nos polos e qualquer linha que passe pela origem do ângulo α encontrará a linha b em algum lugar (Figura 1).

Figura 1 - Negação do quinto postulado de Euclides para regiões esféricas.



Fonte: do autor.

Questões como esta e outras que se basearam no quinto postulado levaram matemáticos à descoberta de novas Geometrias como a Geometria Esférica, Geometria Elíptica e Hiperbólica,

As inquietações sobre como a Geometria Euclidiana modela matematicamente a Natureza deram suporte ao surgimento da Geometria Fractal. Inquietações essas: a natureza é constituída apenas de quadrados, esferas e cubos? Há espaço na Geometria apenas para a beleza dos alvéolos hexagonais das abelhas?E os amorfos cupinzeiros? E a beleza das nuvens, das montanhas, das árvores, das sinuosidades dos rios? Como se nota, a Geometria Euclidiana apesar de ser originária das atividades do dia a dia não consegue traduzir tais belezas, apresenta deficiências para o estudo de formas da natureza, tendo como foco as figuras do mundo pensadas pelo homem, como construções de casas, prédios, pontes, estradas.

Segundo Ricieri (1990, p. 17):

> Do ponto de vista geométrico, a matemática moderna não rejeita as formas irregulares da natureza, como faziam os gregos. Não existem, para ela, formas perfeitas ou imperfeitas: todas as manifestações da vida são merecedoras de estudo e compreensão.

Neste trabalho, apresentaremos a Geometria Fractal, uma geometria que visa complementar a Geometria Euclidiana. É importante salientar que a Geometria de Euclides não perde em nenhum momento sua importância. Como escreve Ricieri

(1990, p. 59), a geometria euclidiana serviu às exigências do homem, na revolução industrial, permitiu a produção de produtos por meio de máquinas em larga escala, já que para esse feito era necessário um modelo geométrico. O autor comenta: “Que dizer de latinhas de cerveja não cilíndricas?" Não dá sequer para imaginar! As Geometrias não euclidianas devem ser tomadas como forma de modernização da Matemática, com a finalidade de preencher lacunas, de responder questões do mundo que vive permeado de tecnologias e tornar a escola um local de aprendizagens significativas, contextualizadas em seu tempo real e não mais teoria pela teoria.

Apesar da grande importância da Geometria Euclidiana para a evolução do homem, ela não foi suficiente para satisfazer todos os anseios da humanidade. Foi necessária a presença de novos conhecimentos geométricos que abrangesse o máximo possível de formas existentes no mundo. Neste contexto surge a Geometria Fractal. No próximo capítulo serão apresentados os entes constituintes desta nova geometria: os fractais, com suas definições, precursores e aplicações. Como será visto, as características fractais carregam grande apelo estético, possibilitam construções utilizando diversos materiais, permitem o desenvolvimento de diversas competências e habilidades e possuem grande aplicação no cotidiano. Desta forma, no capítulo 3, com base nos conceitos disponibilizados no capítulo 2 será mostrada a utilização deste tema na elaboração de atividades que levam em conta três ferramentas propostas pelos norteadores da educação brasileira como fundamentais na melhoria do processo de ensino/aprendizagem, a contextualização, o protagonismo juvenil e a inserção das tecnologias na sala de aula.

2 GEOMETRIA FRACTAL

O interesse da humanidade em decifrar padrões na Natureza sempre existiu. Os calendários sofisticados e as regras astronômicas para prever eclipses são exemplos desse interesse.

> Viam figuras nas estrelas do céu e teciam lendas em torno delas. Inventavam panteons de divindades para explicar as extravagâncias de um mundo que, sem isso, seria aleatório e sem sentido. (STEWART, 2011, p.11)

E a Matemática serviu de apoio à representação de padrões encontrados na Natureza. Isaac Newton (1643 – 1727), reconhecido matemático e físico, descreveu muitos de seus estudos por meio de equações matemáticas, como a lei de gravitação universal que é representada pela equação:

$$\overrightarrow{F_{12}} = G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}$$

onde $\overrightarrow{F_{12}}$ é a força de atração gravitacional entre os dois corpos, medida em Newtons;

G é constante gravitacional universal, que determina a intensidade da força,

$$G = \frac{6{,}67 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}$$

m_1 e m_2 são as massas dos corpos que se atraem entre si, medidas em quilogramas;

r é a distância entre os dois corpos, medida em metros e,

$\hat{r}$ o versor do vetor que liga o corpo 1 ao corpo 2.

Nas últimas décadas o homem, com o apoio das tecnologias, vem tentando e, muitas vezes conseguindo, interpretar o crescimento e complexidade da natureza. Tem notado que as leis que regem o natural nem sempre seguem padrões e se tornam em inúmeras ocasiões imprevisíveis. Foi com base nessas observações e na curiosidade por decifrar tantos mistérios que surgiu a Teoria do Caos. Cientistas das mais diversas áreas passaram por meio desta nova teoria a entender, ou pelo menos começar a entender, fenômenos naturais de suas respectivas áreas, como descreveu Barbosa (2005, p. 10):

> Essa ciência trouxe consigo o ver ordem e padrões, onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o caótico. Entretanto, nota-se que o Caos colocou elos entre temas não relacionados, justamente pelas suas irregularidades. Seus cientistas, de áreas diversas, tiveram dificuldades e desânimo até mesmo para publicar, para colocar suas ideias e resultados de forma publicável. Temas como desordem na atmosfera, turbulência nos fluidos, variação populacional de espécies, oscilações do coração e cérebro, interligações microscópicas de vasos sanguíneos, ramificações alveolares, cotações da bolsa, forma das nuvens, relâmpagos, aglomerações estelares, etc. eram estudados buscando – se então ligações entre diferentes tipos de irregularidades: e surpreendentes ordens no caos foram descobertas.

Nos dicionários, caos se refere a confusão, desordem, perturbação que não transmitem o verdadeiro significado da palavra caos quando entendida como teoria. Segundo Stewart (2011, p.23), uma definição foi proposta em conferência internacional sobre caos em 1986. Até então, nenhum dos estudiosos dessa ciência havia se arriscado a conceituá-la. Segundo Stewart (2011, p.11), a conceituação matemática apresentada foi: ”Comportamento estocástico que ocorre num sistema determinístico”.

O autor tenta explicar a definição proposta:

> Temos aqui mais dois termos de jargão – “estocástico” e “determinístico”. O determinismo laplaciano já é nosso conhecido. “Estocástico” significa “aleatório”. Para compreender o fenômeno do caos precisaremos discutir mais detidamente seus significados, porque, em sua presente forma, esta definição é um paradoxo. O comportamento determinístico é governado por uma lei exata e não passível de infração. O comportamento estocástico é o oposto: sem lei e irregular, governando pelo acaso. Stewart (2011, p.23)

E apresenta a sua conclusão: O Caos é, portanto: “comportamento sem lei inteiramente governado pela lei”. Stewart (2011, p.23)

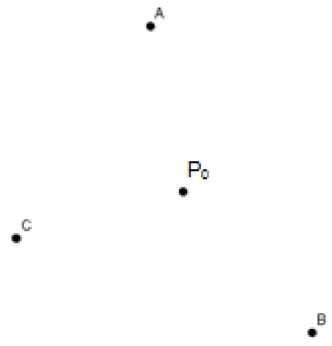
A ordem na desordem procurada pela Teoria do Caos pode ser percebida na marcação aparentemente desordenada de pontos no plano apresentada por Barbosa (2005, p. 15) e Janos (2008, p. 32) que intitula essa atividade como “O jogo do Caos”. O primeiro parte de três pontos e o segundo de um triângulo equilátero. Vamos seguir os passos propostos por Barbosa (2005, p. 15):

Considere 3 (três) pontos A, B e C e um ponto qualquer Pi (preferencialmente do triângulo ABC, exceto no seu baricentro)

Sigamos as instruções dadas pelos passos seguintes:

Passo 1 – Faça i = 0; (Figura 2).

Figura 2 – Passo 1 do Jogo do Caos.



Fonte: do autor.

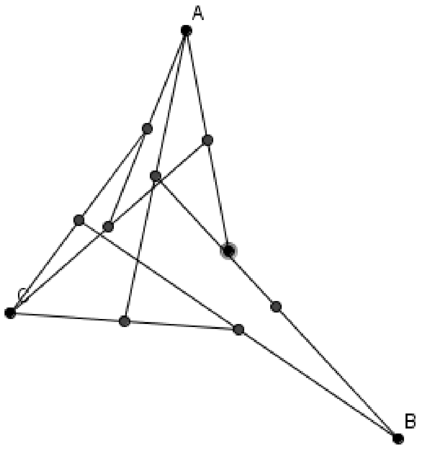
Passo 2 – Por um processo de sorteio escolha um dos vértices, A, B e C. (Para usar um dado usual nos sorteios associe ao vértice A os números 1 e 4, ao vértice B os números 2 e 5, e a C os números 3 e 6);

Passo 3 – Troque i por i + 1;

Passo 4 – Marque o ponto Pi+1 médio do segmento PiV (onde V é o vértice sorteado);

Passo 5 – Vá ao passo 2. (Figura 3)

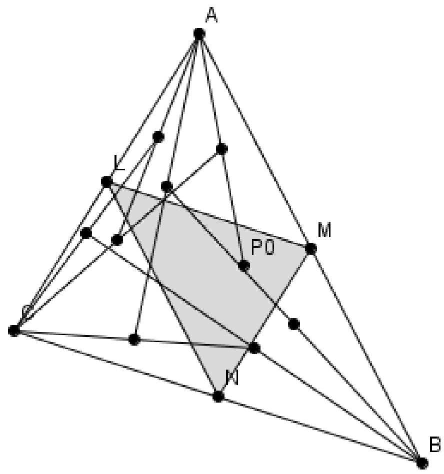
Figura 3 – Jogo do Caos após sete jogadas.



Fonte: do autor.

A aleatoriedade gera sensação de desordem, porém ao construir o triângulo cujos vértices são os pontos médios M, N e L dos segmentos AB, BC e AC respectivamente, não existem pontos nesse triângulo além de P_0 (Figura 4).

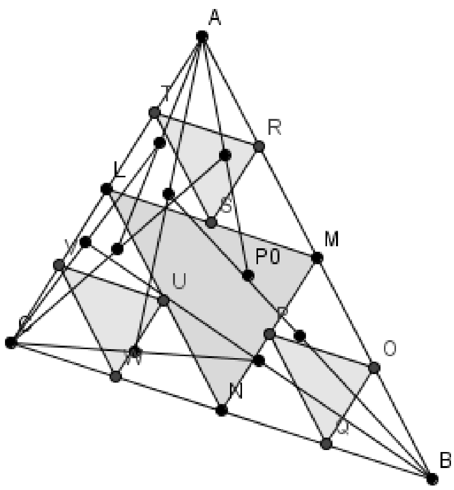
Figura 4 – Triângulo central contendo apenas o ponto P0.



Fonte: do autor.

Ainda, ao construir os triângulos centrais nos triângulos ALM, CLM e BMN, não teremos pontos interiores a esses polígonos. (figura 5)

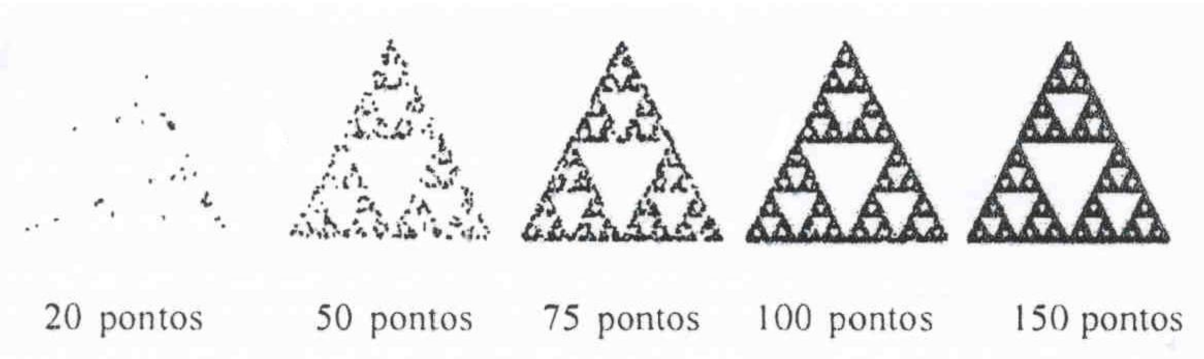
Figura 5 – Triângulos ALM, CLM e BMN contendo apenas o ponto P_0.



Fonte: do autor.

Em Janos (2008, p. 32) é proposta a mesma atividade partindo de um triângulo equilátero e de um ponto P_0 qualquer. Após aproximadamente 75 jogadas é obtida a Cesta de Sierpinski (Triângulo de Sierpinski) (Figura 6). O autor comenta o resultado: “Produzimos, então, uma estrutura extremamente ordenada gerada por um método totalmente aleatório!”.

Figura 6 – Triângulo de Sierpinski obtido através do Jogo do Caos.



Fonte: Janos (2008, p. 33).

Segundo Janos (2008, p. X) à ciência do Caos normalmente estão associadas duas áreas relativamente novas e interligadas da Matemática: Os Sistemas Dinâmicos e a Geometria Fractal.

Neste trabalho apresentaremos a Geometria Fractal. Barbosa (2005, p. 9) explica o elo existente entre essa nova geometria e a teoria do Caos:

> Contudo, a Geometria dos Fractais está intimamente ligada a uma ciência chamada CAOS. As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa geometria, fornecem certa ordem ao Caos, razão de ser, às vezes, considerada como a sua linguagem, que busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório. Ambas, Geometria Fractal e Caos se desenvolveram principalmente pelo rápido aprimoramento das técnicas computacionais; a primeira teve e tem como poderoso propulsor o seu inegável apelo estético, daí sua entrada no domínio das artes.

Para Janos (2008, p. X) a geometria fractal: “é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza”.

2.1 Definindo fractal.

O pioneiro no estudo dos fractais, Mandelbrot, denominou essas formas geométricas encontradas na Natureza como fractais [...] baseando - se no latim, do adjetivo fractus, cujo verbo correspondente frangere significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar. Decorre que quando se diz Geometria Fractal refere-se ao estudo dos fractais. (BARBOSA, 2005, p. 9)

Com base em Barbosa (2005, p. 18) foram várias as definições de fractais dadas por diferentes estudiosos:

Inicialmente, Mandelbrot conceituou fractal baseando-se em ideias de dimensão:

- um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff – Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica.

J. Feder (1988) em sua obra preocupou - se em não excluir alguns objetos da física considerados fractais formulando a seguinte definição:

- um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos.

K. J. Falconer, autor de duas importantes obras sobre fractais (1985 e 1990), sugeriu a definição de fractal por caracterizações:

Um conjunto F é fractal se, por exemplo:

- F possui alguma forma de “autossimilaridade” ainda que aproximada ou estatística;

- A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;

- O conjunto F pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.

O fato é que, uma definição que conceitue de forma precisa um fractal ainda não foi estabelecida. Desta forma, para simplificar os estudos da Geometria Fractal, utilizaremos a conceituação de autossimilaridade. Segundo Barbosa (2005, p. 9):

> Essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial, que pode ser considerada característica. Esses entes constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhe são semelhantes; propriedade conhecida como autossimilaridade.

Em outras palavras, pode-se dizer que uma figura dispõe de autossimilaridade se apresenta sempre o mesmo aspecto visual, em qualquer escala, após sofrer uma redução ou ampliação, quando uma parte da figura se assemelha à figura inteira.

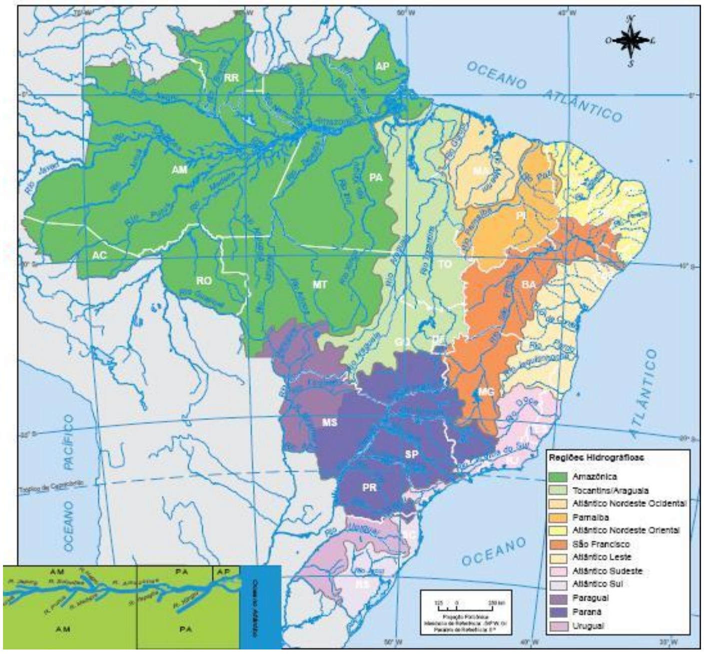
2.1.1 Exemplos de fractais na natureza.

Nas Figuras 7, 8 e 9 são mostrados três fractais presentes na Natureza.

Figura 7 – Ondas se propagam no mar formando uma cadeia de ondas similares as anteriores.

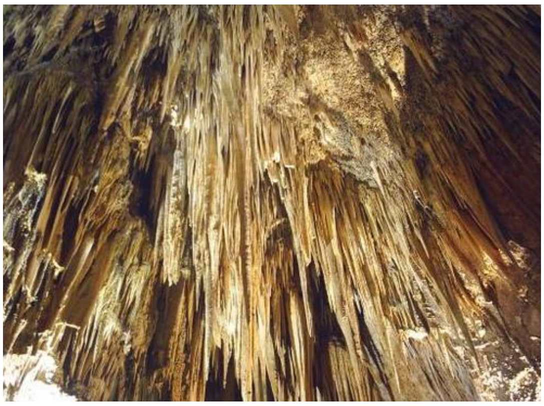
Fonte: Disponível em <http://revistageo.uol.com.br/cultura-expedicoes/16/artigo180354-1.asp> Acesso em 23 de abril de 2014.

Figura 8 - Mapa hidrográfico brasileiro.



Fonte: <http://asnovidades.com.br/2010/mapa-da-bacia-hidrografica-brasileira/> Acesso em 23 de abril de 2014.

Figura 9 – Estalactites - Caverna do diabo – Eldorado - SP.



Fonte: < http://www.fotolog.com/geografia_global/23650236/> Acesso em 23 de abril de 2014.

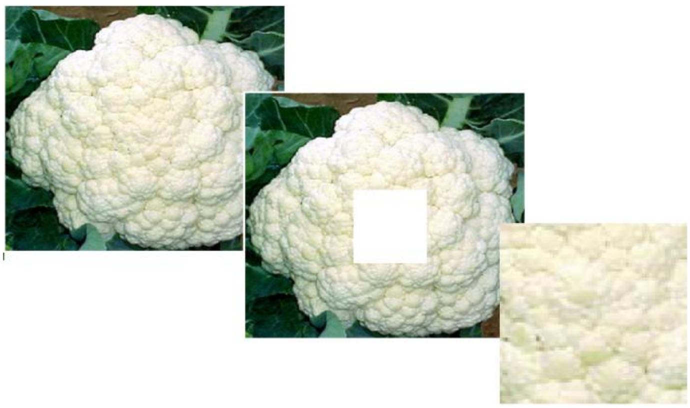
2.2 Autossimilaridade

Janos (2008, p. X) trata da autossimilaridade da seguinte forma:

> Tire uma foto de uma couve-flor e de uma pequena parte de seu corpo e amplie as duas fotos no mesmo tamanho. Se a foto não tiver fundo, será geralmente impossível dizer qual é a couve-flor inteira e qual é o pedaço. Isto é assim porque pequenos pedaços da couve-flor são semelhantes ao todo. Dizemos, então, que a couve-flor é autossemelhante.

Na figura 10 pode ser observado o que Janos (2008, p. X) descreveu.

Figura 10 - Autossimilaridade presente na couve – flor.



Fonte: Adaptado de <http://www.frasesparafacebook.info/tags/couve+flor/Page/9/>. Acesso em 044 de março de 2014.

A autossimilaridade também pode ser observada na samambaia (Figura 11).

Figura 11 – Autossimilaridade presente nas folhas da samambaia.

Fonte: Adaptado de < http://ultradownloads.com.br/papel-de-parede/Samambaia/>. Acesso em 04 de março de 2014.

Carvalho [et al.] ([data desconhecida], p. 10) escreve que uma forma autossimilar é "Uma forma que se repete dentro de si mesma de maneira semelhante e independente de proporção ou escala é denominada autossimilar".

De acordo com Nunes (2006, p. 29) devemos considerar dois tipos de autossimilaridade (ou autossemelhança), a exata e a aproximada.

A primeira ocorre em figuras geradas por processos matemáticos, ado conjunto formado de réplicas da figura inicial ou através de funções, ambos através de um processo iterativo. A autossemelhança aproximada atinge muitas formas da natureza, elas possuem a característica de autossemelhança uma vez que cada parte se assemelha ao todo, porém não são réplicas exatas do mesmo. É importante notar que diferente do triângulo de Sierpinski em que podemos fazer quantas iterações desejar, uma forma da natureza pode ser modelada como um fractal, desde que seja considerado que as iterações encontradas serão finitas.

2.2.1 Processo iterativo

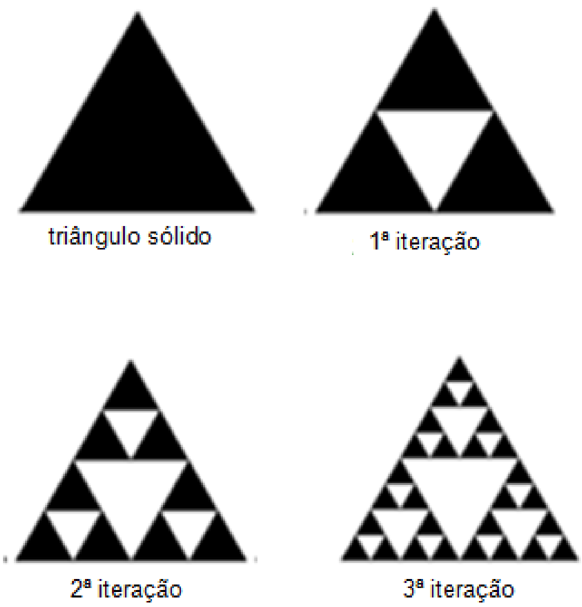
Iteração: Diz-se do processo que se repete diversas vezes para se chegar a um resultado e a cada vez gera um resultado parcial que será usado na vez seguinte. Feito de novo; repetido. Repetido muitas vezes.[3]

Podemos verificar o processo de iteração na construção do Triângulo de Sierpinski. Iniciamos com um triângulo equilátero e retiramos o triângulo central

[3] Dicionário informal, disponível em <http://www.dicionarioinformal.com.br/iterativo/>. Acesso em 10 de abril de 2014.

(formado pelos pontos médios dos lados) essa atividade é tomada como primeira iteração. Ao substituir cada um dos três triângulos restantes por uma figura semelhante à resultante na iteração 1 obtemos a 2ª iteração. Para a 3ª iteração, aplica-se a mesma regra para os triângulos restantes. Esse processo deve ser repetido indefinidamente para obter a figura limite denominado “Triângulo de Sierpinski” (Figura 12).

Figura 12 - Sequência do processo iterativo para construção do Triângulo de Sierpinski



Fonte: do autor.

Neste exemplo temos um processo iterativo por meio da manipulação de figuras. Mas é possível ocorrer um processo iterativo por meio de funções iterativas ou função iterada. Para tanto, toma-se uma função F(x), com x real (que denominaremos função iterativa). Partindo de um x_0 obtemos sua imagem $F(x_0)$ que é a primeira iteração. Aplica-se a essa imagem a mesma função para se obter x_1:

$$x_1 = F(F(x_0)),$$

Para obter x_2 aplica – se a função F à x_1:

$$x_2 = F(x_1) = F(F(F(x_0))$$

E assim sucessivamente.

Logo, função iterativa (ou função iterada) é toda função definida em um conjunto X, tal que F: X → X e $F^{X_{n+1}} = FoF^n$, onde $F^0 = id_x$ (id_x é a função identidade em X)

O Triângulo de Sierpinski pode ser obtido também através de função iterativa. Consideremos que o triângulo inicial possui vértices em (0,0), (1,0) e (0,5 , 1,5v) com v > 0, ou seja, um triângulo isósceles. Temos após a 1ª iteração que os triângulos restantes são originados da combinação de redução com fator 0,5 do triângulo inicial com translação.

1. O triângulo inferior esquerdo é obtido da redução com fator 0,5.

2. O triângulo inferior direito é obtido por redução com fator 0,5 e translação horizontal de 0,5 unidade.

3. O triângulo superior é obtido por redução com fator 0,5, translação horizontal de 0,25 e translação vertical de 0,75v unidades.

Tomando T_1, T_2 e T_3 os triângulos obtidos após as combinações descritas em 1, 2 e 3 respectivamente, chegamos às três transformações geradoras do Triângulo de Sierpinski:

$$T_1 (x,y) = (0.5x, 0.5y);$$

$$T_2 (x,y) = (0.5x+0.5, 0.5y);$$

$$T_3 (x,y) = (0.5x+0.25, 0.5y+0,75v).$$

Para chegar ao Triângulo de Sierpinski, escolhe-se aleatoriamente um ponto (x, y) e aplicam - se as transformações sucessivamente a cada triângulo obtido.

2.3 Precursores da geometria fractal e suas criações

Algumas figuras ou objetos que tinham características de fractais já eram conhecidos anteriormente à divulgação dessa geometria por Benoit Mandelbrot em 1975 e, possivelmente, deram base aos seus estudos.

Veremos alguns criadores e objetos ou figuras, que muitas vezes foram tomados como “monstros” ou “entes patológicos” devido às características e resultados inusitados.

2.3.1 Benoit Mandelbrot

O precursor da Geometria Fractal foi Benoit Mandelbrot (Figura 13). Segundo BARBOSA (2005, página 11), Mandelbrot nasceu em Varsóvia (1924), de família judia, da Lituânia. Em 1936 sua família mudou-se para Paris. Antecipando-se ao nazismo, deslocaram-se para Tulle. Quando Paris foi libertada da opressão alemã, submeteu-se aos exames de admissão da Escola Normal e da Escola Politécnica, sendo aprovado mesmo sem preparo, em ambas as instituições de prestígio. Iniciou pela Escola Normal, onde pouco tempo permaneceu, passando à Politécnica.

Figura 13 – Benoit Mandelbrot

Fonte: <http://www.santarita.g12.br/matematicos/gm3/benoit_mandelbrot.htm>. Acesso em 05 de março de 2014.

Na época havia o movimento do grupo Bourbaki, talvez iniciadas como reação ao grande pensador Poincaré, que não tinha muitas exigências em relação ao rigor, visavam uma matemática formal e pura, sem influências possivelmente enganosas pelo visual geométrico. As ideias se propagaram por vários países, atingindo inclusive os Estados Unidos, e nós brasileiros chegamos a ter os mesmos excessos, principalmente na educação, de muitos de seus adeptos fanáticos. A matemática tornou-se mais rigorosa, pautando-se pelo método axiomático. É claro que os preceitos de Bourbaki tornaram-se quase obrigatoriedade e trouxeram louros para a própria matemática, desvinculando-a de outras ciências, ressaltando o seu primado entre elas.

Entretanto, mesmo diante das ideias de seu tio, Mandelbrot não suportou o domínio da abstração imposta por Bourbaki. Deixou a França em 1948, indo estudar

Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos, tendo conseguido posteriormente um cargo na IBM – Centro de Pesquisas Thomas Watson, que na época prestigiava projetos de pesquisa. Mandelbrot trabalhou, então, com problemas de economia.

Na IBM deparou-se com questões de ruídos nas linhas telefônicas utilizadas em rede entre os computadores. Mandelbrot soube dos engenheiros que algum ruído não podia ser eliminado e interferia nos sinais; a aleatoriedade e a irregularidade dos ruídos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Mandelbrot resolveu o problema empregando um trabalho antigo de Georg Cantor chamado Poeira de Cantor, pensando nos erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor.

A geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação.

É famosa sua indagação: “Que extensão tem o litoral da Grã-Bretanha?”

A resposta possível variará conforme a escala de medição. Baías e penínsulas aparecerão ou não, dependendo da escala adotada. Sabe-se, por exemplo, que em documentos dos dois países vizinhos, a fronteira da Espanha com Portugal difere cerca de 20%, o mesmo acontecendo, por exemplo, com a fronteira da Holanda e da Bélgica. Claro é que ao efetuar as medidas cada país empregou instrumentos com unidades de escala diferentes.

Mandelbrot, pesquisador protegido pelos recursos computacionais da IBM, entre outras investidas, pesquisou em Economia sem ter grandes conhecimentos do assunto; assim, estudou a distribuição de pequenas e grandes rendas. Nessa ocasião, convidado para proferir uma palestra, por Hendrick Houthaker, professor de Economia em Harvard, deparou-se com esquematizações, conforme seus estudos, no quadro do colega, mas com dados relativos aos preços de algodão correspondentes a oito anos. De volta à IBM, levava os dados do colega aos quais acrescentou dados do Departamento de Agricultura, desde o início de 1900, constituindo uma enorme e invejável fonte para os computadores. Verificou-se então, que as aberrações estatísticas dos preços, imprevisíveis, apresentavam analisados à maneira de Mandelbrot, uma ordem inesperada.

Benoit Mandelbrot chegou à fama e obteve honrarias, passando a ocupar vários cargos acadêmicos, desde professor em Harvard ou professor de Fisiologia na Faculdade Einstein de Medicina.

Sua gama vasta e variada de trabalhos publicados inclui os seguintes livros: Les objects fractals, forme, hassard ET dimensio, Paris, Flamarion, 1975, Fractals: form, chance and dimension, San Francisco, Freeman, 1977, e a sua obra reformulada e mais famosa: The Fractal Geometry of Nature, New Yor, Freeman, 1977.

2.3.1.1 Fractal de Mandelbrot

Apesar de tentar descrever os elementos presentes na Natureza, alguns fractais foram construídos pelo homem através de meios computacionais, é o caso do Fractal de Mandelbrot. A sua beleza e mistério atraem amantes e não amantes da Matemática. Ele é gerado através de uma função iterativa que usa o sistema de duas equações:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2\, x_n y_n + b \end{cases}$$

Neste sistema, cada ponto é obtido do anterior. A última imagem é gerada pelo deslocamento dos pontos da última iteração. Os valores de a e b (constantes) determinam a que distância e em que direção será colocado o próximo ponto.

Vamos obter o Fractal de Mandelbrot, como descreve JANOS (2008, p. 86):

(i) desenhe um círculo de raio 2, com centro na origem do plano (x,y);

(ii) selecione um valor para a e um valor para b;

(iii) com estes valores de a e b, calcule os pontos x_n e y_n e faça n = 100 por exemplo;

(iv) transporte os pontos (utilizando as equações 1 e 2) até chegar a x_{100} e y_{100}.

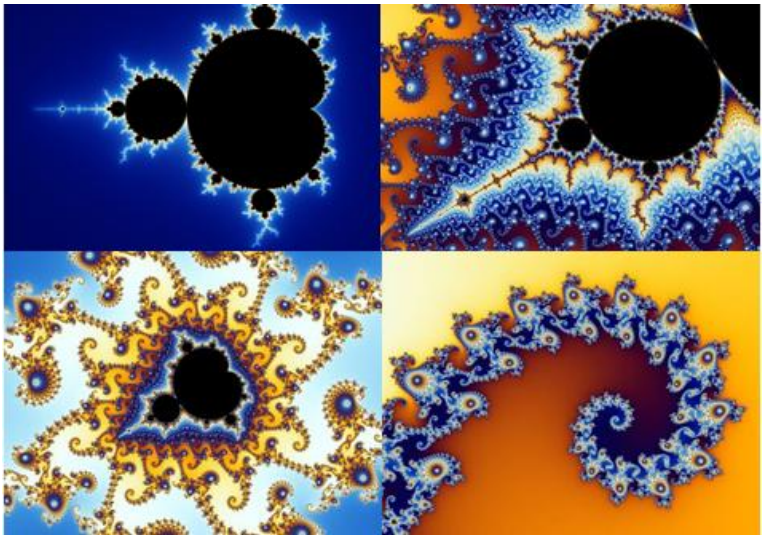
(v) se o ponto permanecer dentro do círculo, pinte-o de preto, caso contrário, despreze-o;

(vi) selecione novos valores para a e b, e volte para (iii).

O Fractal de Mandelbrot é a figura formada pelos pontos pretos que sobraram após k seleções de a e b.

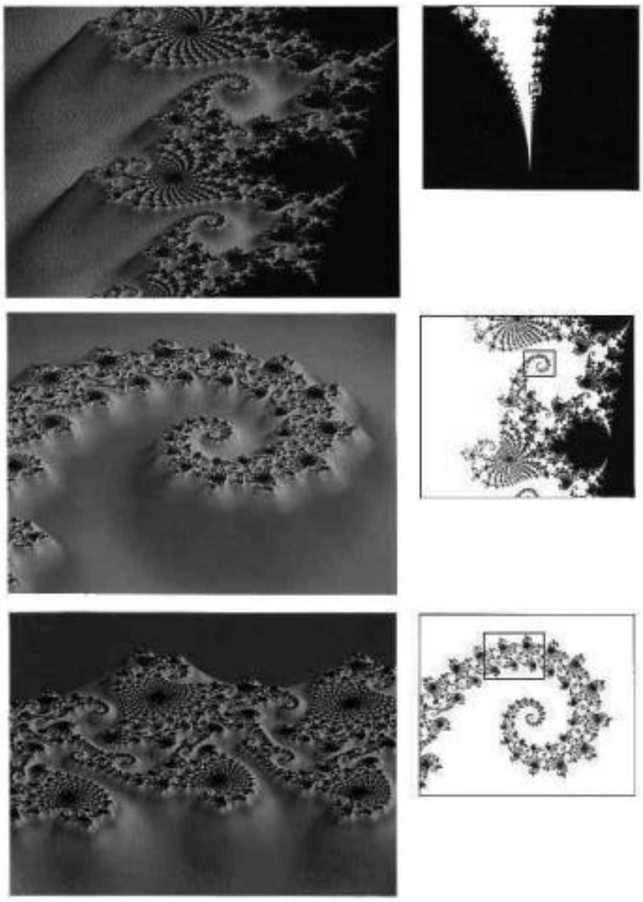
Nas figuras que seguem são apresentados o Fractal de Mandelbrot, cujos pontos que escapam para o infinito também foram plotados (Figura 14) e uma ampliação 3D do mesmo conjunto (Figura 15).

Figura 14 – Fractal de Mandelbrot e detalhes do mesmo.



Fonte: Adaptado de <http://aidobonsai.com/2011/10/18/fractais-e-o-bonsai/> Acesso em 05 de março de 2014.

Figura 15 - Segunda, terceira e quarta ampliação 3D do Conjunto de Mandelbrot.



Fonte: (Pietgen et al., 1992 – extraído de Diban, 2000, p. 42).

2.3.2 Georg Cantor (1845 – 1918)

De acordo com BARBOSA (2005, p. 24), matemático com descendência portuguesa, nascido na Rússia, Georg Cantor (1845 – 1918) (Figura 16) adotou nacionalidade alemã, lecionou na Universidade de Hale, dedicou-se às pesquisas referentes à fundamentação da matemática, principalmente o relacionado à parte conhecida hoje como Teoria dos Conjuntos.

Figura 16 - Georg Cantor.

Fonte:<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm25/cantor.htm> Acesso em 06 de março de 2014.

2.3.2.1 Conjunto de Cantor

Foi em 1883 que Cantor publicou um trabalho que traz a construção de um conjunto, chamado atualmente "Conjunto de Cantor" ("Polvo de Cantor" ou "Poeira de Cantor") (Figura 17).

Pode-se construir esse fractal seguindo os passos:

1. Considerar um segmento de reta;
2. Dividir o segmento em três partes iguais e eliminar a central;
3. Repetir a construção 2 em cada segmento e assim, sucessivamente e indefinidamente.

Figura 17 - Conjunto de Cantor após quatro iterações.

Fonte: do autor.

2.3.3 Giuseppe Peano

Segundo BARBOSA (2005, p. 32), Giuseppe Peano (Figura 18), italiano, nasceu em Cuneo em 1858 e faleceu em Turim em 1932. Lecionou na Academia Militar de Turim (nesta mesma instituição trabalhou Joseph Louis Lagrange por volta de 1755), contribuindo aos estudos ligados às preocupações dos matemáticos da época.

Figura 18 – Giuseppe Peano

Fonte: <http://www.fisicanet.com.ar/biografias/cientificos/p/peano.php> Acesso em 06 de março de 2014.

Autor de alguns livros, dentre eles, Aplicaciones geométricas Del Calculo Infinitesimal, 1887; Teoria Axiomática, 1889; Arithmetices Principia – Nova methodo exposita, 1889; Lezione di Analisi Infinitesimal, 1893 e Formulaire Mathematique, 1895 (quatro edições em francês e uma em latim).

Seus trabalhos surpreendem pelas notações e rigor da lógica. Em 1890, publica sua famosa curva, que trata do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, que era uma proposta para cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular.

2.3.3.1 Curva de Peano

A Curva de Peano (Figura 19) pode ser obtida seguindo os passos:

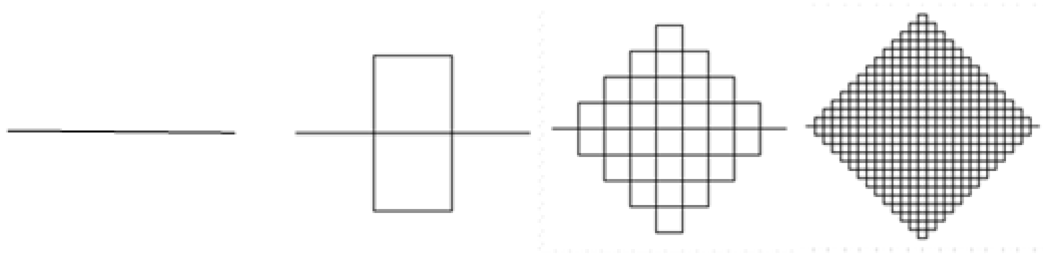
1. Iniciamos com um segmento de reta;
2. Substituímos o segmento de reta por uma curva de nove segmentos;
3. Substituímos cada segmento anterior pela curva de nove segmentos, e assim sucessivamente.

A curva vai preenchendo uma região quadrada em que a diagonal coincide com o segmento tomado inicialmente. A área da região quadrangular, caso o segmento inicial tenha medida 1 será dada por $\mathrm{A} = \mathrm{L}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

O comprimento da curva de Peano pode ser encontrado observando que no início o segmento mede 1. No passo seguinte o comprimento é obtido pela soma das medidas dos nove segmentos, ou seja, $9.\frac{1}{3} = 3$; no segundo passo cada um dos 9 segmentos transformam-se em outros 9 segmentos, o que dá $81.\frac{1}{9} = 9 = 3^2$; no terceiro passo teremos 81 x 9 = 729 segmentos de medida $\frac{1}{27}$, logo o comprimento será igual a $729 \text{ x } \frac{1}{27} = 27 = 3^3$.

Logo, os comprimentos da curva de Peano serão dados pelas potências de 3, com expoentes iguais à ordem de iteração. Desta forma, ao aumentar a ordem da iteração, o comprimento da curva aumenta indefinidamente multiplicando pelo fator 3, tendendo ao infinito.

Figura 19 – Curva de Peano após três iterações.



Fonte: <http://www.avaad.ufsc.br/moodle/mod/hiperbook/view.php?id=2089&pagenum=10&target_navigation_chapter=3713&show_navigation=1> Acesso em 06 de março de 2014.

2.3.4 David Hilbert

De acordo com BARBOSA (2005, p. 36), David Hilbert (Figura 20) nasceu próximo a Königsberg (da antiga Prússia), em 1862, e faleceu em 1943. Obteve seu doutorado em 1885. Convidado por Félix Klein, passou a trabalhar na Universidade de Göttingen, onde permaneceu até 1930 quando encerrou sua atividade acadêmica.

Figura 20 – David Hilbert.

Fonte: <http://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/ge/hilbert.htm> Acesso em 06 de março de 2014.

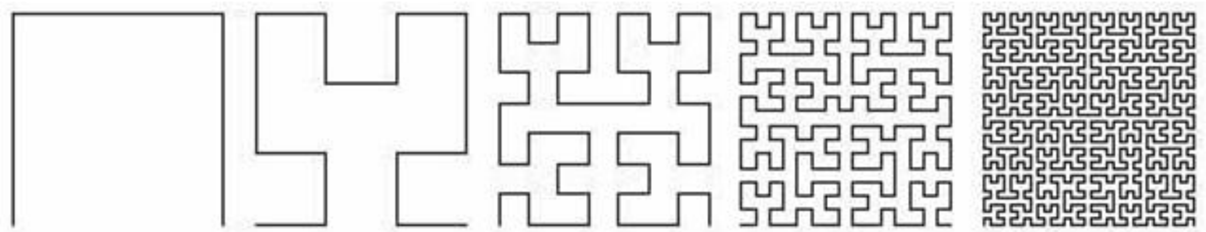
2.3.4.1 Curva de Hilbert

A Curva de Hilbert (Figura 21) pode ser obtida seguindo os passos:

1. Considerar um quadrado e dividi-lo em quatro quadrados, dando início à curva com 3 segmentos consecutivos com extremos nos seus pontos centrais;

2. Substituir cada quadrado por novos 4 quadrados com a mesma construção da curva iniciadora, conectando cada curva parcial com um segmento na mesma ordem dos anteriores, e proceder assim sucessivamente.

Figura 21 – Curva de Hilbert após quatro iterações.



Fonte: Adaptado de <http://argomar.es/mundofractal/peano.htm> Acesso em 06 de março de 2014.

2.3.5 Helge Von Koch

Segundo BARBOSA (2005, p. 38), pouco é conhecido da vida de Helge Von Koch (Figura 22), matemático polonês. No período entre 1904 e 1906 introduziu uma curva que hoje recebe o seu nome.

Sua curva é um exemplo de curva sem tangente, ela pode ser modificada com outras construções análogas e deve ter influenciado Mandelbrot, já que tem muito de uma linha costeira.

Figura 22 – Helge Von Koch

Fonte: < http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308/projects/fung/page.html> Acesso em 06 de março de 2014.

2.3.5.1 Curva de Koch

A Curva de Koch (Figura 23) é construída seguindo os passos:

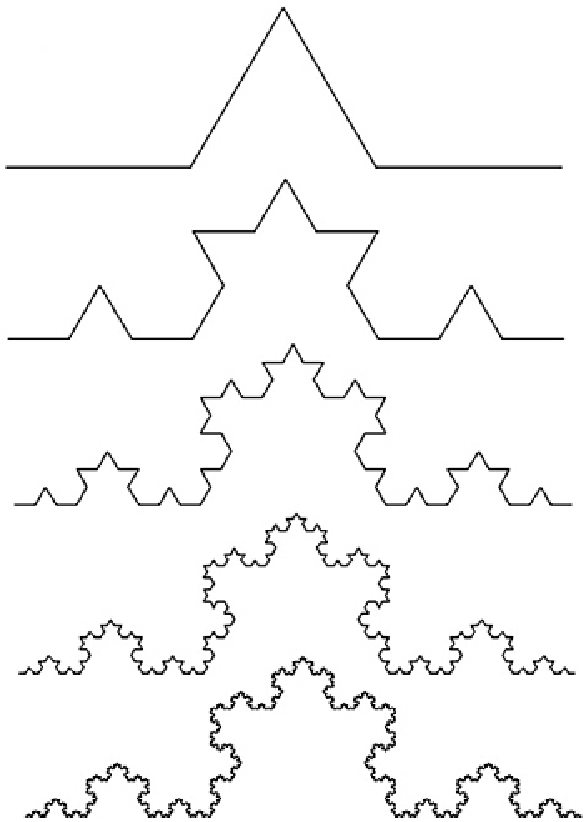
1. Considerar um segmento de reta;

2. Dividir o segmento em 3 segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes; intermediário, por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário (que seria sua base);

3. Substituir cada um dos segmentos conforme a regra 2, e assim sucessivamente e iterativamente.

A curva de Koch é uma curva gerada fazendo cópias de cópias. Da construção resulta a autossemelhança, bastando por exemplo escolher numa determinada fase um segmento a ser substituído e observar que ele gerará a seguir uma curva semelhante à curva completa de Koch; a escala de redução adotada será dada por uma potência de 1/3.

Figura 23 – Cinco iterações da curva de Koch.

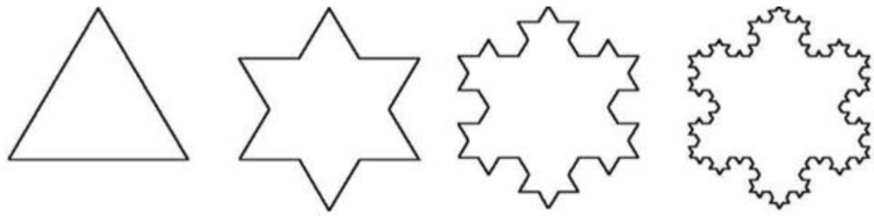


Fonte: < http://ojovemarquiteto.wordpress.com/2010/05/31/ron-eglash-e-os-fractais-africanos/> Acesso em 06 de março de 2014.

2.3.5.2 Ilha de Koch (floco de neve)

Iniciando com um polígono regular e construindo sobre cada lado a sua curva de Koch, teremos o que se chama Ilha de Koch (Figura 24). Abaixo, a figura obtida a partir do triângulo equilátero, que aparenta um floco de neve, uma formação cristalina, denominado “Floco de Neve”.

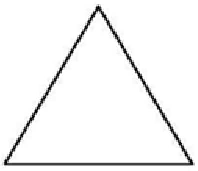
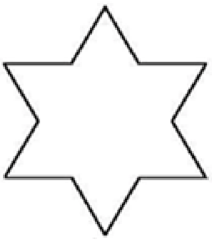
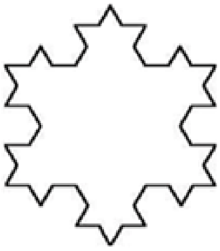
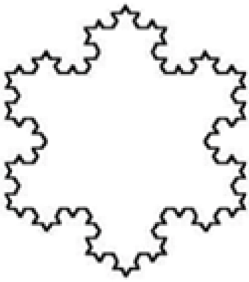
Figura 24 – Três primeiras iterações da Ilha de Koch.



Fonte: Adaptado de < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172008000200005> Acesso em 06 de março de 2014.

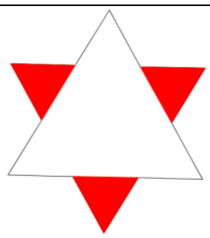
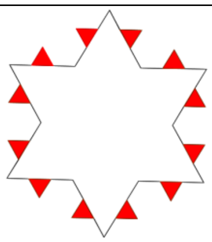
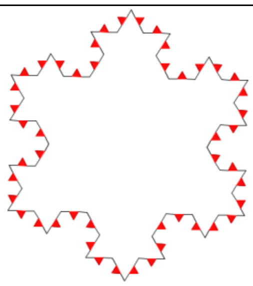
Interessante perceber que a Curva de Koch, pode ter perímetro infinito abrangendo uma área finita. Para mostrar esse fato, vamos determinar o perímetro da curva e a área formada por essa linha. Com o intuito de facilitar o entendimento, será feito uso dos quadros 3 e 4 a seguir:

Quadro 3 - Perímetro da Ilha de Koch

nº de iterações*	configuração	comprimento do lado	perímetro	Progressão
0		1	3	$3.\left(\frac{4}{3}\right)^0$
1		$\frac{1}{3}$	$3.4.\frac{1}{3}$	$3.\left(\frac{4}{3}\right)^1$
2		$\frac{1}{9}$	$3.4.4.\frac{1}{9}$	$3.\left(\frac{4}{3}\right)^2$
3		$\frac{1}{27}$	$3.4.4.4.\frac{1}{27}$	$3.\left(\frac{4}{3}\right)^3$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	Figura limite	$\frac{1}{3^n}$	$3.\underbrace{4.4.4\,\ldots.4}.\frac{1}{3^n}$	$3.\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Fonte: Adaptado Carvalho et al. ([data desconhecida], p. 161)

Quadro 4 - Área delimitada pela Curva de Koch.

nº de iterações	configuração	Comprimento do lado	Área do triângulo colorido	Número de triângulos coloridos	Área dos triângulos coloridos
0		1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
1		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4}$	3	$\frac{3}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4}$
2		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}.\frac{\sqrt{3}}{4}$	12	$\frac{12}{81}.\frac{\sqrt{3}}{4}$
3		$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{729}.\frac{\sqrt{3}}{4}$	48	$\frac{48}{729}.\frac{\sqrt{3}}{4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
n	Figura limite	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{1}{3^{2n}}.\frac{\sqrt{3}}{4}$	3.4^{n-1}	$\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}.\frac{\sqrt{3}}{4}$

Fonte: Adaptado de Carvalho et al. ([data desconhecida], p. 162)

Podemos perceber no quadro 3 que a sequência formada pelos perímetros em cada iteração é uma progressão geométrica cuja razão é $\frac{4}{3}$ e o n-ésimo termo é dado por $3.\left(\frac{4}{3}\right)^{n}$. Como $\frac{4}{3}$ é maior que 1, a sequência será divergente, e podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty} 3.\left(\frac{4}{3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 3 . \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

Concluímos que o perímetro da Ilha de Koch poderá ser tanto maior quanto maior for o valor de n, tendendo ao infinito após infinitas iterações.

Agora, analisando os dados disponíveis na última coluna do quadro 4, verificamos que a área da curva para n iterações (n > 0) é dada por:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}+\left(\frac{3}{9}.\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{12}{81}.\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{48}{729}.\frac{\sqrt{3}}{4}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}.\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

Simplificando e colocando o fator $\frac{\sqrt{3}}{4}$ em evidência obtemos o produto:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.\left[1+\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{27}+\frac{16}{243}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}\right)\right]$$

Podemos notar que a série formada por $\frac{1}{3}, \frac{4}{27}, \frac{16}{243}, \ldots , \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}$ é uma progressão geométrica de razão r = $\frac{4}{9}$ e, como r é menor que 1, a série converge.

Desta forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}} = \frac{3}{5}$$

Logo, a área total será:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}.\left(1+\frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

e, portanto, ao contrário do perímetro, a área delimitada pela Ilha de Koch não tem crescimento ilimitado, ou seja, não ultrapassa o valor $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

2.3.6 Waclaw Sierpinski

Waclaw Sierpinski (1882-1969) (Figura 25), matemático polonês, foi professor em Lvov e Wariaw. Uma das crateras lunares possui o seu nome devido a sua grande reputação na década 1920-1930. Destacamos a obra “Leçons sur les nombres transfini”, de 1928. Em 1916 apresentou sua curva.

Figura 25 - Waclaw Sierpinski

Fonte: < http://www.corbisimages.com/stock-photo/rights-managed/42-21184288/waclaw-sierpinski> Acesso em 07 de março de 2014.

2.3.6.1 Curva de Sierpinski

A Curva de Sierpinski (Figura 26) é obtida seguindo os passos:

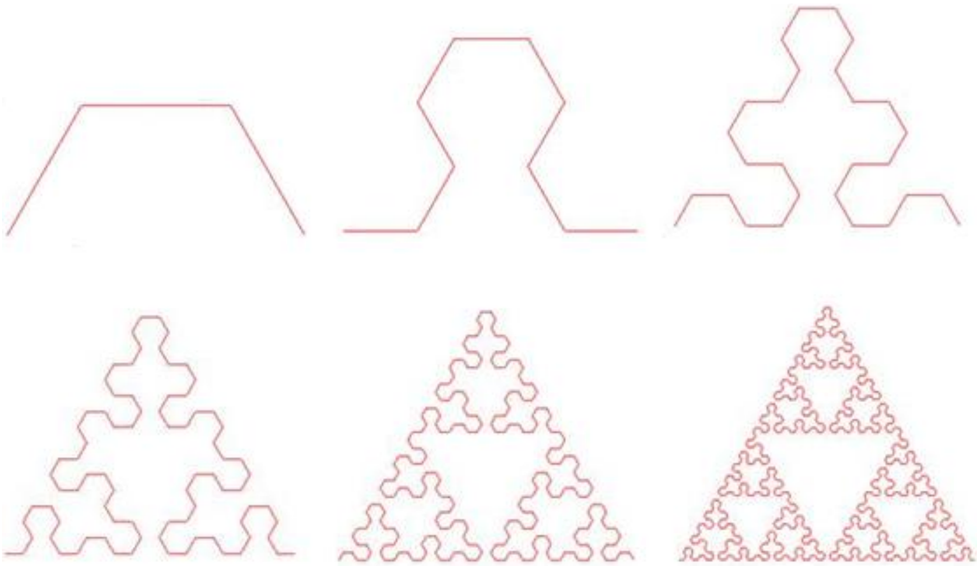
1. Considerar um segmento de reta e o triângulo equilátero tendo esse segmento por lado;

2. Substituir o segmento por uma poligonal de 3 segmentos formando os 3 lados de um trapézio isósceles com vértices nos extremos do segmento inicial e nos pontos médios dos outros dois do triângulo;

3. Substituir cada segmento anterior por 3 segmentos conforme a ação 2, em cada um dos 4 triângulos equiláteros de vértices nos pontos médios, com exceção do central;

4. Repetir sucessivamente a ação 3.

Figura 26 – Seis iterações para a curva de Sierpinski.



Fonte: Adaptado de <http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/sierpinski.htm> Acesso em 07 de março de 2014.

2.3.6.2 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski (Figura 27) é obtido seguindo os passos:

1. Considerar inicialmente um triângulo equilátero;

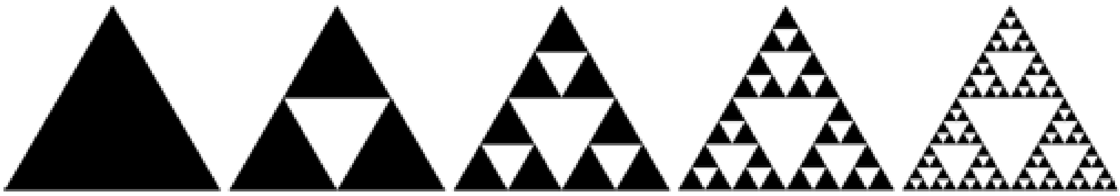
2. Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;

3. Eliminar (remover) o triângulo central, o que pode ser codificado, por exemplo, com cor preta e os outros com uma cor cinza;

4. Repetir em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3;

5. Repetir a operação 4 sucessivamente.

Figura 27 – Quatro primeiras iterações do triângulo de Sierpinski.

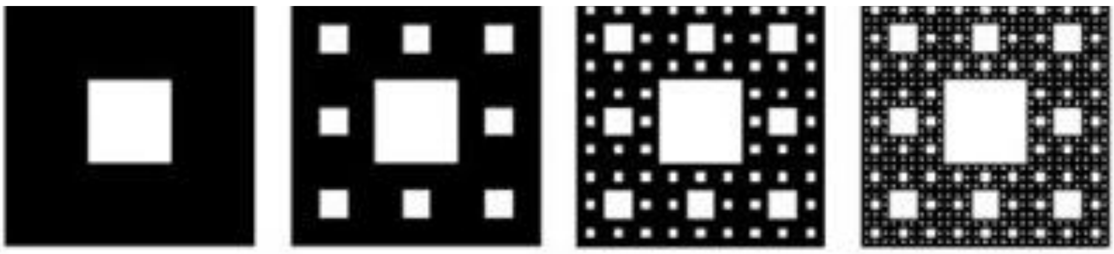


Fonte: Adaptado de <http://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski> Acesso em 07 de março de 2014.

2.3.6.3 Tapete de Sierpinski

Aplica-se a mesma técnica de eliminação (remoção) usada no Triângulo de Sierpinski, partindo de um quadrado, dividindo-o em 9 pequenos quadrados congruentes, e eliminando o central. Em seguida, aplicar-se esse mesmo procedimento em cada um dos 8 quadrados restantes, e assim sucessivamente e iterativamente (Figura 28).

Figura 28 – Quatro primeiras iterações do tapete de Sierpinski.



Fonte: Adaptado de <http://professorandrios.blogspot.com.br/2011/06/geometria-fractal-arte-e-matematica-em.html> Acesso em 07 de março de 2014.

2.3.7 Pierre Fatou e Gaston Julia

De acordo com BARBOSA (2005, p. 45), Pierre Fatou (1878 – 1929) e Gaston Julia (1893 – 1978) ambos franceses não trabalharam em pesquisas conjuntas. Seus estudos serviram de base à Mandelbrot, que os aproveitou juntamente com os recursos computacionais disponíveis para chegar ao conhecido Conjunto de Mandelbrot e os Conjuntos de Julia.

Julia, servindo como soldado foi gravemente ferido, perdendo seu nariz. Sua pesquisa foi desenvolvida hospitalizado, originando seu principal trabalho sobre sistemas dinâmicos complexos, com o estudo de iterações de funções, apenas com 25 anos.

2.3.7.1 Conjunto de Julia

O Conjunto de Julia (Figura 29) é obtido através da imagem no plano complexo quando se aplica iteradamente a transformação $f(z) = z^2 + c$, para um z complexo inicial e c, complexo constante.

Figura 29 - Conjuntos de Julia para quatro coordenadas diferentes.

Fonte: Adaptado de <http://www.dmae.upm.es/cursofractales/capitulo5/4.html> Acesso em 08 de março de 2014.

2.4 Dimensão fractal

2.4.1 Recordando o conceito de dimensão

Janos (2008, p. 64) apresenta o conceito de dimensão como a seguir:

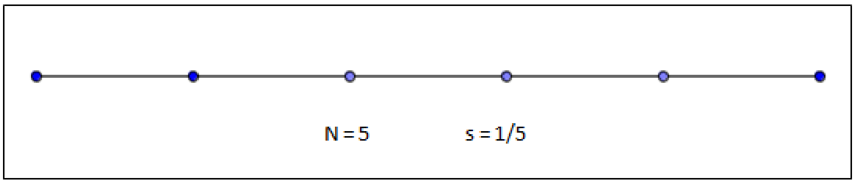
> Para entender porque uma linha tem dimensão 1 ou um quadrado tem dimensão 2, recorremos ao conceito de massa. Considere um “fio” de comprimento l e “massa” m unitários, cujo diâmetro é desprezível. Cortando o fio pela metade, obtemos dois pedaços de comprimento ½ e “massa” ½. Cortando de novo ao meio, obtemos 4 pedaços de “massa” ¼ e comprimento ¼, etc. Ou seja, a “massa” e o comprimento do fio são “iguais”. Isto é, na dimensão d = 1
> $m = l^1$
> Se aplicarmos um raciocínio equivalente a um quadrado de lado unitário e massa unitária, resultam 4 quadrados de lado ½ e “massa” ¼ e depois16 quadrados de lado ¼ e “massa” 1/16, etc., ou seja, na dimensão d = 2
> $m = l^2$
> Repetindo o raciocínio acima para o cubo de lado e massa unitários, obtemos, para d = 3
> $m = l^3$

2.4.2 Encontrando a dimensão fractal

Com base no raciocínio exposto por CARVALHO et al. ([data desconhecida], p. 19) chegaremos a generalização da dimensão fractal.

Um objeto de uma dimensão, por exemplo, um segmento de reta pode ser dividido em N partes idênticas, cada qual reduzidas em uma razão s = 1/N. Na figura 30 temos o caso em que N = 5

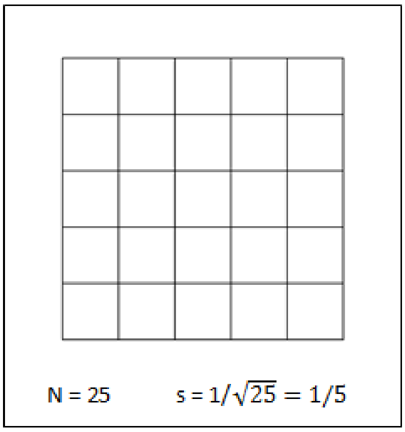
Figura 30 – Segmento de reta divido em 5 partes iguais reduzidos em uma razão s = 1/5.



Fonte: do autor.

Ao dividir um objeto bidimensional em N partes, um quadrado, por exemplo, teremos que a razão ao qual cada lado do quadrado obtido foi reduzido é $s = 1/\sqrt{N}$. Na figura 31 temos o caso em que N = 25.

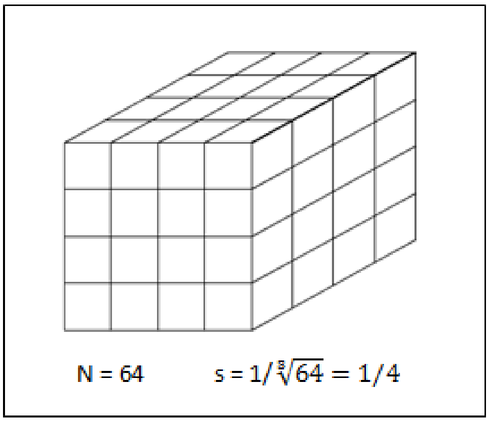
Figura 31 – Quadrado dividido em 25 quadrados menores (N = 25) com comprimento dos lados reduzidos em uma razão s = 1/5.



Fonte: do autor.

Para um objeto tridimensional, um cubo, por exemplo, ao dividi - lo em N pequenos cubos obtemos arestas reduzidas pela razão $s = 1/\sqrt[3]{N}$. Na figura 32, temos o caso em que N = 64.

Figura 32 – Cubo dividido em 64 cubos menores (N = 64) com arestas reduzidas na razão s = ¼.



Fonte: do autor.

Desta forma, um objeto de dimensão d com a característica de autossimilaridade, pode ser dividido em N partes, sendo cada parte uma redução da primeira em uma escala s = $1/\sqrt[d]{N}$. Assim:

$$s.\sqrt[d]{N} = 1$$

Elevando a d a equação:

$$s^d.N = 1$$

Para obtermos d, aplicamos o logaritmo decimal:

$$\log\,(s^d.N) = \log 1$$

Utilizando as propriedades dos logaritmos:

$$\log s^d + \log N = \log 1$$

$$d.\log s + \log N = 0$$

Logo,

$$d = \frac{-\log N}{\log s} = \frac{\log N}{-\log s} = \frac{\log N}{\log s^{-1}}$$

Portanto,

$$d = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{s}\right)}$$

Concluímos que qualquer objeto constituído de N objetos idênticos (sendo que esses objetos idênticos são as cópias reduzidas do próprio objeto) possui dimensão d onde:

$$d = \frac{\log\ N}{\log\frac{1}{s}}$$

em que s é o fator de escala da redução do objeto.

Esse fato pode ser verificado para a reta, o quadrado e o cubo:

Para uma reta, ao dividi-la em duas partes, teremos N = 2 e s = ½ o que nos dá (Figura 33):

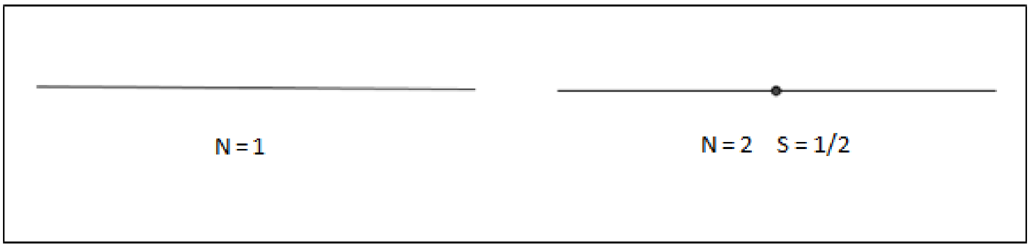
$$d = \frac{\log\ N}{\log\frac{1}{s}}$$

$$d = \frac{\log\ 2}{\log\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$d = \frac{\log\ 2}{\log 2}$$

$$d = 1$$

Figura 33 - Reta divida ao meio (duas semirretas de mesma origem e sentido opostos)



Fonte: do autor.

No caso do quadrado, temos N = 4 e s = ½ (o lado do quadrado é divido ao meio) (Figura 34), logo:

$$d = \frac{\log N}{\log\frac{1}{s}}$$

$$d = \frac{\log\ 4}{\log\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

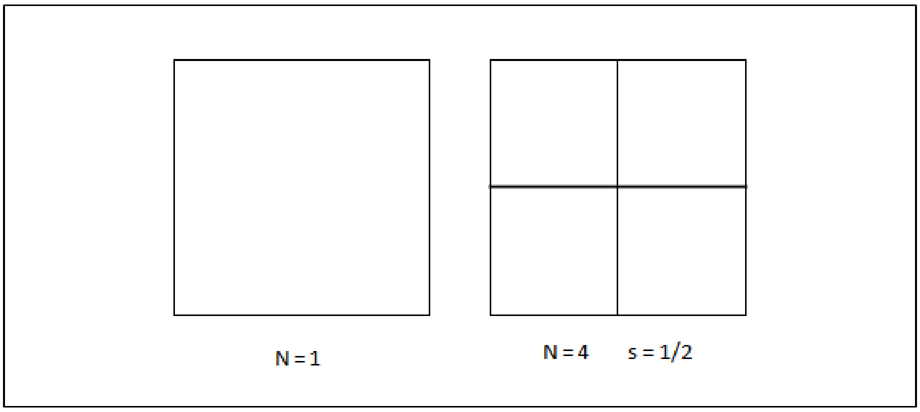
$$d = \frac{\log 4}{\log 2}$$

$$d = \frac{\log 2^2}{\log 2}$$

$$d = \frac{2\log 2}{\log 2}$$

$$d = 2$$

Figura 34 – Quadrado dividido em quatro quadrados com comprimento dos lados reduzidos na razão s = ½.



Fonte: do autor.

No caso de um cubo temos N = 8 e s = ½ (a aresta do cubo é dividida ao meio) (Figura 35) logo:

$$d = \frac{\log N}{\log\frac{1}{s}}$$

$$d = \frac{\log\ 8}{\log\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

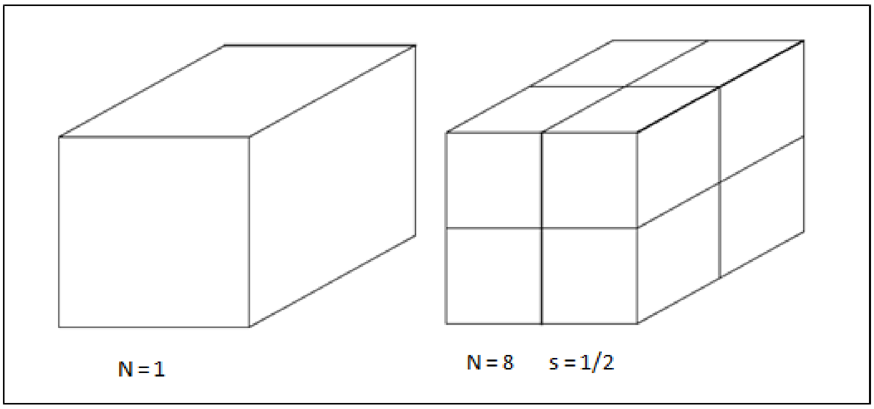
$$d = \frac{\log 8}{\log 2}$$

$$d = \frac{\log 2^3}{\log 2}$$

$$d = \frac{3\log 2}{\log 2}$$

$$d = 3$$

Figura 35 – Cubo dividido em 8 cubos menores com comprimento das arestas reduzido na razão s = ½.



Fonte: do autor.

2.4.2.1 Dimensão do Conjunto de Cantor.

Temos N = 2, pois a figura obtida após a iteração consiste de duas cópias idênticas à figura inicial, reduzidas por uma escala s = 1/3 (Figura 36), logo:

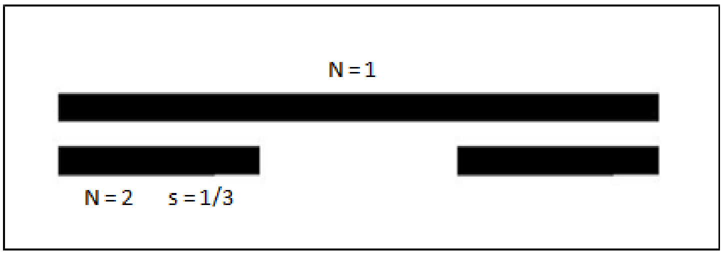
$$d = \frac{\log(N)}{\log \frac{1}{s}}$$

$$d = \frac{\log\ 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

$$d = \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$d \cong 0{,}6309$$

Figura 36 – Primeira iteração do conjunto de Cantor resultando em dois segmentos (N = 2) com comprimento reduzido na razão s = 1/3.



Fonte: do autor.

2.4.2.2 Dimensão da Curva de Koch.

Temos N = 4, pois a figura obtida após a iteração consiste de 4 cópias idênticas à figura inicial, reduzidas em uma escala s = 1/3 (Figura 37), logo:

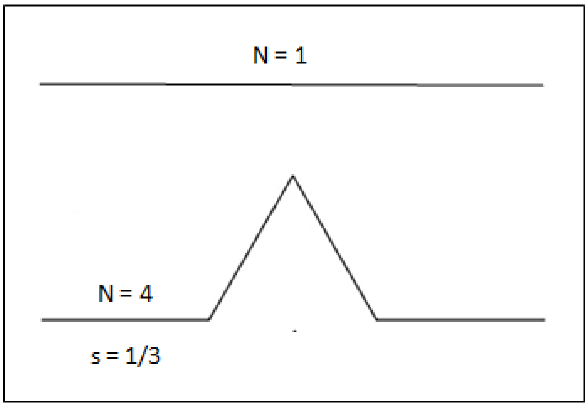
$$d = \frac{\log(N)}{\log\frac{1}{s}}$$

$$d = \frac{\log\ 4}{\log\frac{1}{\frac{1}{3}}}$$

$$d = \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$d \cong 1{,}261$$

Figura 37 – Primeira iteração da curva de Koch resultando em 4 segmentos com comprimentos reduzidos na razão 1/3



Fonte: do autor.

2.4.2.3 Dimensão do triângulo de Sierpinski

Temos N = 3, pois a figura obtida após a primeira iteração consiste de 3 cópias idênticas à figura inicial reduzidas em uma escala s = 1/2 (Figura 38), logo:

$$d = \frac{\log\ N}{\log \frac{1}{s}}$$

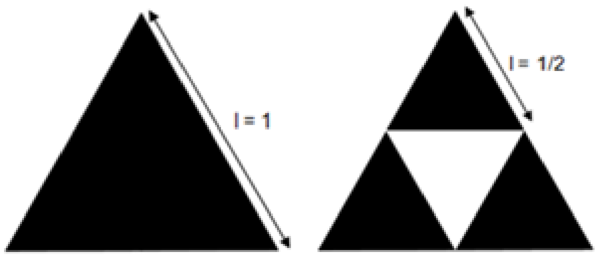
$$d = \frac{\log\ 3}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

$$d = \frac{\log\ 3}{\log 2}$$

$$d \cong \frac{0{,}477121}{0{,}30103}$$

$$d \cong 1{,}5849$$

Figura 38 –Triângulo de Sierpinski com lado inicial unitário.



Fonte: do autor.

Desta forma, a dimensão do Triângulo de Sierpinski é aproximadamente 1,58496.

2.4.3 Significado geométrico da dimensão não inteira.

Dimensão está relacionada à maneira como medimos um objeto, a linha só pode ser medida em uma dimensão, um quadrado em duas dimensões e o cubo em três. Janos (2008, p. 67) propõe supor a existência do “comprimento” de um quadrado e executar a medição do mesmo cobrindo o quadrado com linhas horizontais e verticais levando a concluir que como a linha não possui espessura, o comprimento final será infinito. Com esse mesmo raciocínio, o autor propõe supor a existência do “volume” de um quadrado. Ao tentar preencher um cubo utilizando-se desses quadriláteros concluiremos que por não existir espessura o preenchimento do cubo nunca ocorrerá, mostrando que o volume do quadrado é zero.

Desta forma, o quadrado tem uma área (dimensão 2), seu “comprimento” (dimensão 1) tende para o infinito e seu “volume” (dimensão 3) tende para zero.

Janos (2008, p. 67) diz que quando se tem uma dimensão não inteira ocorrerá que “a medição usando uma dimensão abaixo será infinita e usando uma dimensão acima será zero”.

Um exemplo de um objeto cuja dimensão está entre 2 e 3 é uma bola obtida de uma folha de papel amassada (Figura 39). Objetos que tentam representar 3 dimensões a partir de duas, são estruturas fractais quebradiças, com espaços vazios irregulares.

Figura 39 – Bola obtida de uma folha de papel amassada que representa a dimensão não inteira

Fonte: do autor.

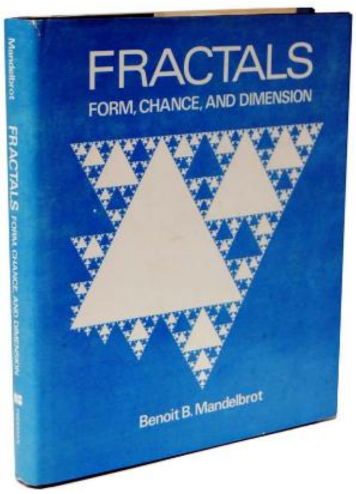
2.5 Aplicações da geometria fractal.

A geometria euclidiana serviu ao desenvolvimento das mais diversas áreas. Com o descobrimento e divulgação da geometria fractal muitas delas passaram a fazer uso dessa nova geometria para tentar explicar fenômenos até então não explicados pela geometria euclidiana. A seguir são apresentadas algumas aplicações da geometria fractal sem levar em conta o aprofundamento teórico de cada uma, visando apenas divulgar as contribuições que esses entes têm dado nas variadas atividades do homem.

2.5.1 Computação gráfica

Em 1978, na Boing Aircraft, em Seattle, de acordo com o documentário "Fractais – Uma jornada pela dimensão oculta" de Scientific American Brasil, Loren Carpenter, cientista da computação, ajudava a criar a visualização do comportamento de uma aeronave durante o voo. Tentando tornar mais real a animação, o cientista passou a imaginar como poderia ilustrar montanhas ao fundo da imagem. As ferramentas e tecnologias de animação até então conhecidas não eram o bastante já que para compor as montanhas seriam necessários milhões de polígonos. Consultando o livro "Fractals: Form, Chance and Dimension" de Benoit Mandelbrot (Figura 40) que dizia que muitos elementos da natureza poderiam ser representados matematicamente por fractais, fractais estes que poderiam ser obtidos a partir de uma figura, partindo-a em pedaços repetidas vezes.

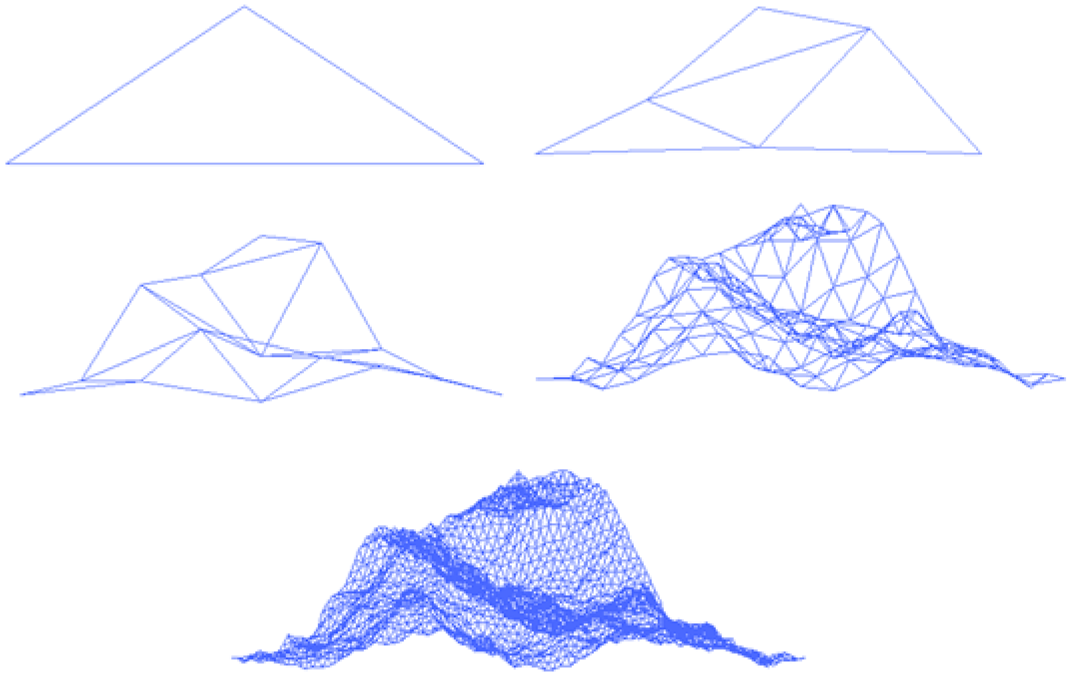
Figura 40 – Livro Fractals: Form, Chance and Dimension de Benoit Mandelbrot.



Fonte: Adaptado de < http://www.raptisrarebooks.com/pages/books/1584/benoit-mandelbrot/fractals-form-chance-and-dimension> Acesso em 29 de abril de 2014.

Com esta ideia em mente, Loren Carpenter conseguiu construir as montanhas. Começando de uma paisagem feita de grandes triângulos, parte-se cada triângulo em quatro triângulos, fazendo esse processo muitas vezes (processo iterativo) (Figura 41).

Figura 41 – Primeiros passos da construção da montanha fractal idealizada por Loren Carpenter com base nos estudos de Benoit Mandelbrot.



Fonte: Adaptado de < http://aidobonsai.com/tag/fractais/ >Acesso em 29 de abril de 2014.

Essa descoberta abriu portas para o mundo de criação de imagens, pois era um método relativamente fácil para a computação gráfica, dando suporte para a criação de inúmeros efeitos especiais hoje vistos nos desenhos, filmes e demais comunicações visuais (Figura 42)

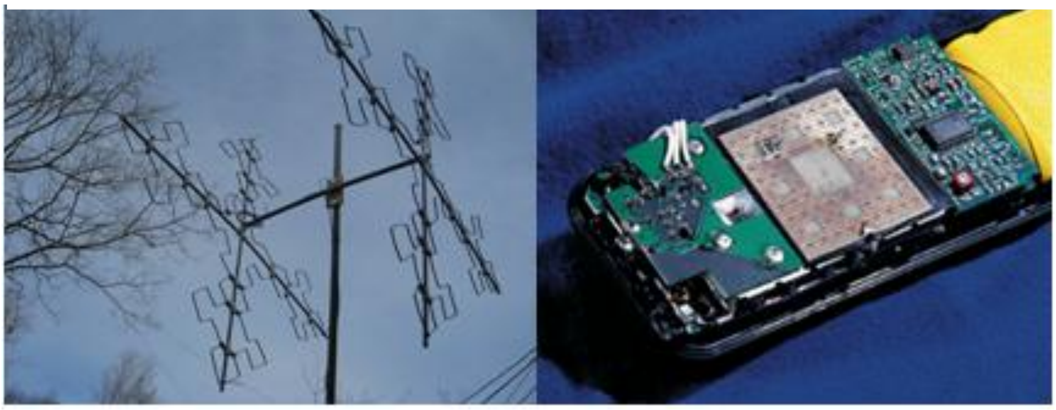
Figura 42 - Cena do filme Star Wars – Episódio III, em que a lava do vulcão foi construída com base nos fractais.

Fonte: Documentário “Fractais – Uma jornada pela dimensão oculta” de Scientific American Brasil.

2.5.2 Otimização de objetos que dependem da radiação eletromagnética

Os fractais têm sido utilizados na melhoria da eficiência de variados objetos. A adoção das antenas fractais (Figura 43) na telefonia móvel, por exemplo, tem ocorrido satisfatoriamente. As antenas usuais são sensíveis a um número limitado de frequências. No caso das antenas fractais quanto maior o número de iterações, maior o número de frequências que a antena sensibiliza ocupando um espaço menor.

Figura 43 – Dois modelos de antenas fractais.



Fonte: Disponíveis em <http://ag1le.blogspot.com.br/2011/12/antenna-experiments-fractal-quad-for-28.html> e <http://circuit-diagram.hqew.net/Fractal-antenna-constructions_13876.html> respectivamente. Acesso em 23 de abril de 2014.

2.5.3 Elementos da natureza

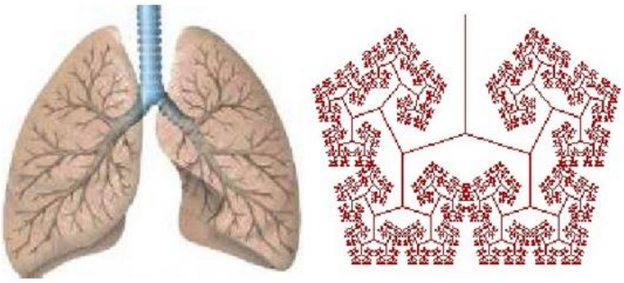
Cada objeto ou ser vivo possui suas moléculas organizadas de forma a melhor atender suas necessidades de sobrevivência. As plantas e árvores (Figura 44), por exemplo, demandam luz do sol, água e oxigênio. A estrutura fractal é essencial para que esses elementos sejam mais facilmente absorvidos, oportunizando um maior contato do ser com o exterior.

Figura 44 - Raízes de uma árvore em um manguezal e uma árvore cujas formas apresentam características fractais.

Fonte: Disponível em < http://pt.wikipedia.org/wiki/Raiz> e <http://essetalmeioambiente.com/dia-da-arvore-%E2%80%93-jogando-pelo-meio-ambiente/>respectivamente. Acesso em 23 de abril de 2014.

No caso dos seres humanos, de acordo com o vídeo “Os Fractais na Natureza” [4] os corpos são fractais ao contrário, por fora são constituídos por elementos que os protegem dos riscos exteriores, possuem orifícios de entrada e saída que mantém contato com o interior, possibilitando a entrada de alimentos e o descarte de toxinas. Mas por dentro os órgãos muitas vezes se apresentam na forma fractal. O corpo necessita de um sistema que consiga transportar nutrientes e substâncias por todo o corpo e os fractais são perfeitos nesse caso. Pode-se citar o sistema renal, o sistema respiratório (Figura 45), o sistema nervoso (Figura 46), os brônquios, o aparelho digestivo e o sistema circulatório (Figura 47). No caso do sistema circulatório, o coração bombeia sangue e os vasos sanguíneos que se ramificam e se dividem até constituírem os capilares (formando um sistema com forma fractal) são responsáveis pelo transporte, permitindo que o sangue chegue a todas as partes do corpo.

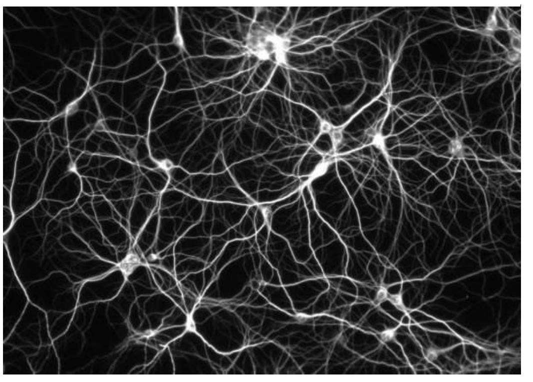
Figura 45 - Pulmões e um modelo fractal para o mesmo.



Fonte: Disponível em Alves (2007, p. 145).

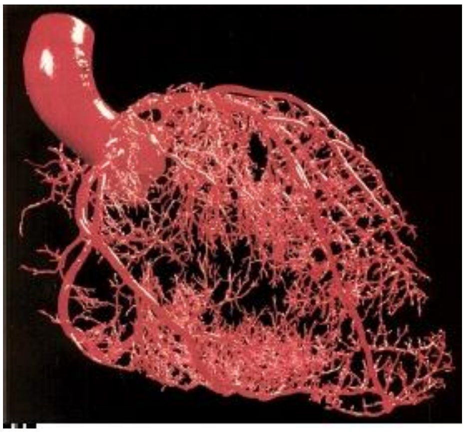
[4] Disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=DwsoxSN-8Xg>.

Figura 46 - Neurônios.



Fonte: <http://tecnologia.br.msn.com/noticias/artigo.aspx?cp-documentid=26125744> Acesso em 23 de abril de 2014.

Figura 47 - Modelo do sistema de irrigação do coração humano.



Fonte: Alves (2007, p. 146)

As bactérias de acordo com Alves (2007, p. 150) podem formar padrões interessantes quando crescem em laboratório. As estruturas formadas mostram como esses seres vivos (Figura 48) se adaptam às condições impostas pelos estudiosos que tentam simular as condições naturais. As imagens formadas possibilitam o entendimento do modo em que as bactérias se comunicam e tentam vencer os obstáculos, permitindo conhecer o comportamento desses seres perante antibióticos.

Figura 48 - Padrão formado por bactérias em crescimento, em laboratório, em prato petri. A imagem é da autoria de Eshel Ben

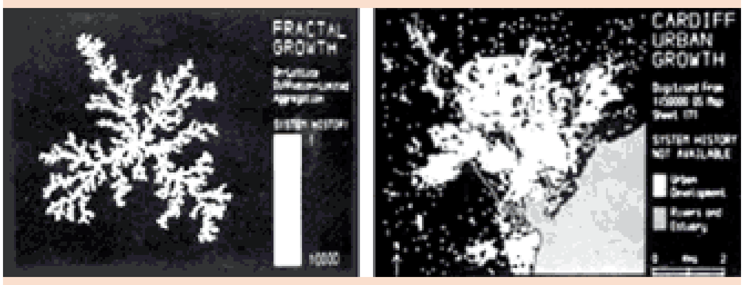
Fonte: Alves (2007, p. 150).

2.5.4 Arquitetura e urbanismo

De acordo com Martins e Librantz,(2006, p. 2) a geometria fractal permite representar planetas, nuvens, costas geográficas, morfologia urbana, pois consegue através de formas simples descrever entes geométricos complexos. Possibilita tratamentos gráficos como sombra, cor e luminosidade e vem sendo utilizada na elaboração de projetos urbanos e arquitetônicos não só como elemento de inspiração, mas como ciência que representa as cidades e as urbanizações já que as características presentes nos fractais são as mesmas características do urbanismo, como não homogeneidade, fragmentação, rugosidade, organização hierárquica interna, mesmo princípio de distribuição dos elementos em várias escalas entre outras. “Nesse sentido, pensar a cidade como um múltiplo fractal representa um grande avanço na ciência do urbanismo” (BATTY; LONGLEY, 1994; FRANKHAUSER, 1994; SALINGAROS, 2005 citado por Martins e Librantz, 2006).

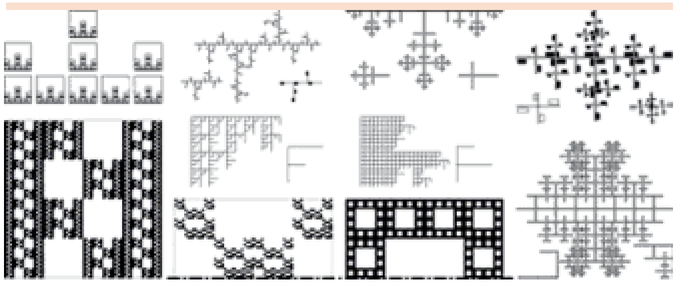
Os conhecimentos da geometria fractal estão sendo adotados no urbanismo para o estudo de modelos de crescimento, como ferramenta de desenho e estudos comparativos entre padrões fractais e outros índices, como o de violência, o de qualidade urbana, aspectos funcionais e evolução das cidades (Figuras 49 e 50).

Figura 49 - Simulação do crescimento elaborada com modelos fractais de uma cidade “real” Cardiff, capital do País de Gales.



Fonte: Martins e Librantz, 2006 de (BATTY; LONGLEY, 1994)

Figura 50 - Simulações de fractais matemáticos para planejamentos de ruas e distribuição, localização e dimensionamento de imóveis.



Fonte: Martins e Librantz, 2006 de (BATTY; LONGLEY, 1994).

Neste capítulo foram apresentados conceitos pertinentes à Geometria Fractal, que permite de forma natural interligar conceitos matemáticos, algébricos ou geométricos, com elementos e fenômenos presentes no cotidiano. Podendo assim contribuir na elaboração de atividades para o ensino da matemática na educação básica.

No próximo capítulo serão tratadas três importantes ferramentas: contextualização, protagonismo juvenil e inserção de tecnologias na sala de aula, colocadas em evidência por alguns autores e norteadores da educação como importantes colaboradoras na melhoria do processo ensino/aprendizagem. Complementando o capítulo serão expostas atividades que utilizam a Geometria Fractal como base e que visam contemplar essas três vertentes.

3 GEOMETRIA FRACTAL NA SALA DE AULA

Iniciaremos este capítulo com alguns dados extraídos de uma avaliação de larga escala e de um relatório sobre a educação brasileira. A primeira é o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa[5]), aplicada em 2012 que indica que entre os 44 países avaliados o Brasil ocupou o 38º lugar em raciocínio e resoluções de problemas do dia a dia. Dentre 65 países comparados, o Brasil ficou em 58º lugar em matemática, 55º em leitura e 59º em ciências. (Revista Exame.com). A segunda é o Relatório de Capital Humano, promovido pelo Fórum Econômico Mundial (WEF[6], sigla em inglês) que colocou o país em 88º lugar em um total de 122 países em relação à educação. Em Matemática, o Brasil ficou entre os 15 piores, no 112º lugar. (Revista Exame.com)

Sabe – se que a educação é essencial para o desenvolvimento sócio – cultural, político e econômico da sociedade. O crescimento de uma comunidade, de uma sociedade, de um país deve-se aos talentos, competências e habilidades de sua população. Se a educação de um país vai mal, não há crescimento sustentável.

Toda a sociedade deve estar engajada em procurar soluções para um problema de tão alta magnitude e o que tem se discutido é a necessidade de se renovar o processo ensino/aprendizagem. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1997, p. 12) já registraram esta preocupação:

> A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama. (BRASIl, 1997, p. 12)

Visando a melhoria, os norteadores da educação brasileira sugerem o uso de novas metodologias de ensino/aprendizagem, entre eles o protagonismo juvenil, a contextualização e a inserção de tecnologias .

---

[5] O *Programme for International Student Assessment* (Pisa) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.
O programa é desenvolvido e coordenado pela Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Em cada país participante há uma coordenação nacional. No Brasil, o Pisa é coordenado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep).

[6]Word Economic Forum (WEF) é uma instituição internacional empenhada em melhorar o estado do mundo através da cooperação público-privada.

3.1 Contextualização e protagonismo juvenil.

Para o protagonismo juvenil o foco do processo ensino/aprendizagem passa do professor para o aluno, o docente deixa de ser transmissor e se torna mediador do conhecimento. Continua a ter papel fundamental já que é dele a responsabilidade identificar o contexto em que os seus alunos estão inseridos, de escolher a melhor metodologia a ser adotada, sempre levando em conta as peculiaridades regionais, as reais necessidades e interesses da comunidade. Nesta circunstância é papel do professor, pesquisar, estimular e promover ambientes de aprendizagem com situações e condições que aproximem a sala de aula à realidade, para que o jovem construa seu próprio conhecimento, tornando-o capaz de resolver problemas e participar ativamente da sociedade em que está inserido. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996, p. 14), artigo 35º, inciso III propõe essa formação para a vida: "o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico".

Quanto à contextualização, a temos presente na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996, p. 14), artigo 35º, inciso IV. Ela é colocada como finalidade do ensino médio: "a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina."

É importante ressaltar que na ânsia por se conseguir contextualizar o ensino/aprendizagem, muitos educadores excluem conteúdos dos currículos quando não encontram atividades que os contextualizem. No caso da Matemática, além de ser uma ciência com papel fundamental na formação do aluno é essencial para o aprendizado de outras áreas, é o que mostra os Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática (1997, p.15):

> A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno. (BRASIL, 1997, p. 15)

Desta forma, a Matemática possui um forte caráter integrador e interdisciplinar. O conhecimento não é propriedade privada dos matemáticos, ele tem evoluído também no contexto de outras ciências. Isso significa que a maneira de pensar matematicamente deve ser aprendida não apenas por aqueles que irão dedicar-se à Matemática. (FERNANDES, [data desconhecida], p. 6).

A importância de se aprender a Matemática em sua plenitude, requer dos professores consciência de que nem todos os conteúdos poderão ser contextualizados no momento da aprendizagem. Como exemplo, podemos citar o conteúdo equações. Aprende - se em Matemática, porém seu uso será evidenciado e aplicado no estudo de outras disciplinas como Física, ao se estudar a lei de gravitação universal já vista neste trabalho por exemplo.

Bachelard (1996) citado por Fernandes ([data desconhecida], p. 6) diz que, o conhecimento é um só, e é o contexto de interesses que faz ora ser Matemática aplicada, ora ser pura. Mesmo que se considere esse contexto, há de se observar que uma depende da outra se o que se deseja é aprimorar a formação do espírito científico.

Mas não é fácil contextualizar, fazer com que o aluno perceba a importância dos conteúdos, domine as habilidades e competências e consiga os aplicar em sua relação com o mundo externo à escola. Fernandes ([data desconhecida], p. 8) propõe formas de contextualizar. A primeira seria fazer uso da história da Matemática possibilitando situar o conhecimento no tempo e no espaço bem como motivar os alunos para um despertar para a aprendizagem Matemática, lembrando que ela foi construída ao longo do tempo pelo homem visando suprir suas necessidades. A segunda é a contextualização do conhecimento matemático em conteúdos de outras disciplinas como forma de mostrar a contribuição da Matemática para a leitura dos diversos fenômenos naturais e sociais em que as outras ciências se apresentam, é a interdisciplinaridade que propõe a solução de um problema ou compreensão de um fenômeno com diferentes pontos de vista. O terceiro pode ser usado quando o nível de abstração é alto e o professor tem dificuldades em explanar sobre o assunto, o docente poderá situar raciocínio do aluno a partir de um conceito que seja uma forma mais elementar daquele conhecimento considerado, ou valer-se de uma estrutura de pensamento elementar para atingir outra mais elevada.

3.1.1 Contextualização e protagonismo juvenil através de atividades com fractais

O estudo dos fractais na sala de aula pode contribuir para o ensino da Matemática, possibilitando o preenchimento de lacunas da Geometria Euclidiana. Por exemplo, pode viabilizar a representação das formas presentes na natureza até então não modeladas pelos conhecimentos existentes. Além disso, pode dar condições de desenvolver competências e habilidades ligadas ao raciocínio-lógico, ao senso estético, a criatividade, entre muitas outras, além de integrar conceitos matemáticos e elementos cotidianos.

O trabalho com fractais em sala de aula[7] pode criar oportunidades em que se consiga valorizar os conhecimentos pré - existentes dos alunos, adquiridos de suas vivências em família, entre amigos de suas descobertas individuais buscando reconhecer e entender o meio em que vive, possibilita a vinculação do conhecimento à sua origem e à sua utilidade no dia-a-dia dos alunos, é o que chamamos de contextualização.

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. (PCN, 1997, p. 29)

De acordo com Sallum (2005, p. 1):

> A introdução de fractais no ensino médio, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviram falar neles, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzir uma ideia intuitiva do conceito de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométrica e estímulo ao uso de tabelas.

Nas Diretrizes Curriculares do estado do Paraná - Matemática (2008, p. 55) pode - se observar o estudo dos fractais como componente curricular do ensino médio, sendo abordado como noções básicas de geometrias não euclidianas. Neste mesmo texto:

> Também, no Ensino Médio, aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades

[7] Considera-se neste trabalho que sala de aula é todo ambiente utilizado para promover a aprendizagem, seja a sala propriamente dita, o pátio da escola ou o entorno.

> geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da "regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades" (PARANÁ, 2008, p. 57)

3.1.1.1 Atividades para sala de aula

Neste item, são propostas atividades que possam servir de base para o estudo de alguns conteúdos presentes no currículo do ensino médio. Vale ressaltar que não são suficientes e, fica longe de ser, para a aquisição de todas as competências e habilidades necessárias aos alunos, o estudo deverá ser sempre complementado com os demais materiais didáticos disponíveis no ambiente escolar.

3.1.1.1.1 Grupo de atividades 1 – Descobrindo uma nova geometria. [8]

- Conteúdo curricular abordado:

Formas geométricas planas, formas geométricas espaciais, geometria fractal.

- Objetivos:

Despertar nos alunos por meio da observação do ambiente a insuficiência da Geometria Euclidiana na representação de elementos da natureza.

- Atividades:

1. Desenhe as formas geométricas (planas e espaciais) que você conhece.

2. Observando a Natureza, preencha o quadro 5 listando 10 elementos e a respectiva forma geométrica que você conhece que mais a assemelha.

[8] Atividades adaptadas de Padilha, et al, ([data desconhecida], p. 2)

Quadro 5 - Elementos da natureza e formas geométricas que os representa.

Elemento observado	Forma geométrica

Fonte: do autor.

3. Para facilitar o seu trabalho, nesta atividade já foram listados 5 elementos da natureza (Quadro 6) para que você o associe a uma forma geométrica:

Quadro 6 - Alguns elementos da natureza e forma geométrica que os representam.

Elemento observado	Forma geométrica
 folha de samambaia	
 espécie de couve-flor	
 raio	

 galhos	
 caracol	

Fonte: do autor. Imagens disponíveis em <http://pt.dreamstime.com/fotos-de-stock-royalty-free-samambaia-com-gota-de-orvalho-no-fundo-branco-image32712468> <http://bdasartes.blogspot.com.br/2011/01/couve-romanesca-fractal-natural.html> <http://www.redemaranatha.com.br/?p=8745> <http://photoconversa.blogspot.com.br/2011/04/galhos-secos.html> e <http://dodecaedroverde.blogspot.com.br/2011/06/las-nubes-no-son-esferas.html> respectivamente. Acesso em 11 de maio de 2014.

Observação: Na atividade 1 os alunos deverão recordar as formas geométricas conhecidas, espera-se que os alunos desenhem as formas usualmente exploradas no ensino fundamental e médio como quadrado, retângulo, triângulo, círculo, cubo, paralelepípedo, esfera entre outros. Na atividade 2 é esperado que os alunos encontrem dificuldade em listar os 10 elementos naturais e suas respectivas formas geométricas e a atividade 3 tem o propósito de confirmar e evidenciar aos alunos esta dificuldade. O interessante é que o aluno utilizará a sua vivência e experiências para preencher os quadros e a partir de suas próprias observações chegará ao entendimento de que a geometria euclidiana não consegue abranger todas as formas encontradas no dia a dia, que existe a necessidade de uma nova geometria. Neste momento, o professor poderá promover uma roda de conversa com o propósito de discutir e refletir sobre as dificuldades encontradas na execução das atividades, além de motivar os alunos a concluírem que existem novas geometrias dentre elas, a geometria fractal.

4. Apresentar aos alunos o documentário “Hunting the Hidden dimension” de Nova Series Graphics (“Fractais – Uma jornada pela dimensão oculta”).

Observação: Este documentário apresenta a geometria fractal de forma simples, em que cientistas e profissionais de diversas áreas mostram as aplicações dos fractais na solução e estudos de problemas do cotidiano. Destaca - se as entrevistas com Benoit Mandelbrot, precursor da geometria fractal e Loren Carpenter já citado neste trabalho por utilizar e aplicar os estudos de Mandelbrot na computação gráfica. Com esta atividade, os alunos terão uma noção do que é geometria fractal, trabalharão sentidos não utilizados nos métodos tradicionais como o da audição e da visão, além do mais, poderá ocorrer um trabalho concomitante na disciplina de língua estrangeira inglesa (língua em que o vídeo foi editado).

3.1.1.1.2 Grupo de atividades 2 – Geometria fractal com sequências e progressões geométricas.

- Conteúdo curricular abordado:

Sequências e progressões geométricas.

- Competências e Habilidades:

Resolver problemas através de dados expostos em gráficos e tabelas;

Interpretar dados em gráficos e tabelas e utilizá-los para formação de argumentação;

Ler, organizar e interpretar dados fornecidos por diferentes linguagens;

Identificar padrões numéricos;

Identificar regularidades para estabelecer regras, algoritmos e propriedades.

- Atividades:

1. Construção do fractal triminó.[9]

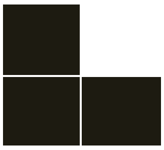
Materiais necessários para construção: Tesoura, uma cópia do anexo 1, folhas sulfites e cola.

Passos para construção:

Cortar os triminós de nível 1 presentes no anexo 1, que são constituídos por três peças quadradas. (Para melhor aproveitamento do tempo, pode se pedir que os alunos tragam cortados de casa). (Figura 51)

[9] Adaptado de Barbosa (2005, p. 92).

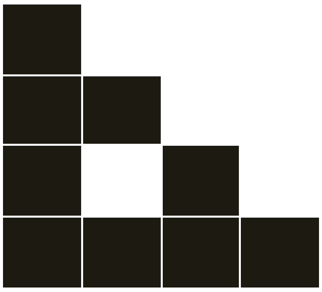
Figura 51 - Fractal triminó nível 1.



Fonte: do autor.

Em uma folha sulfite, os alunos substituirão cada quadrado por um triminó. O fractal obtido será o fractal triminó de nível 2 (Figura 52). Por se tratar de colagem, os alunos construirão o fractal nível 2 ao lado do nível 1. A presença do triminó de nível anterior permite que o aluno não se perca na ordem das peças a serem substituídas (no caso, coladas).

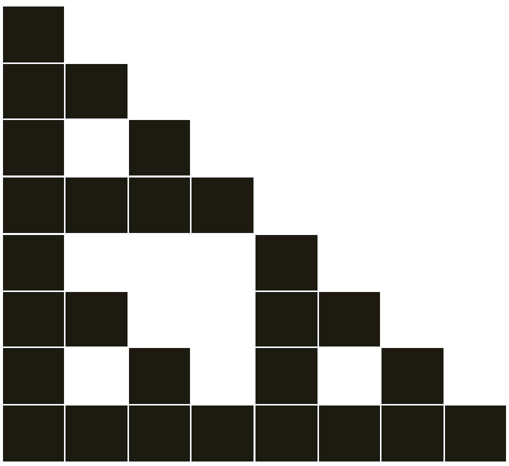
Figura 52 - Fractal nível 2.



Fonte: do autor.

O fractal em nível 3 é obtido trocando cada quadrado por um triminó (Figura 53).

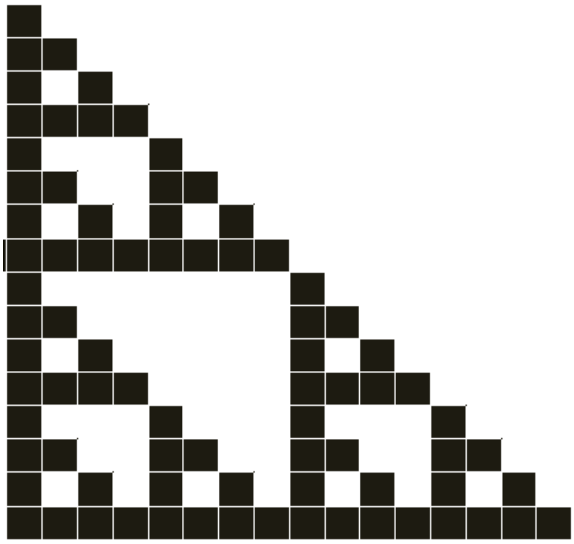
Figura 53 - Fractal nível 3.



Fonte: do autor.

Os fractais de nível 4, 5 e assim por diante são obtidos da mesma forma. A seguir, um fractal triminó nível 4 (Figura 54).

Figura 54 - Fractal triminó de nível 4.



Fonte: do autor.

2. Analisando os fractais triminós construídos, preencha o quadro (Quadro 7):

Quadro 7 - Quantidade de quadrados que constituem o fractal triminó em cada nível.

Nível do fractal	Quantidade de quadrados
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: do autor.

3. Analisando as construções e o quadro responda as questões:

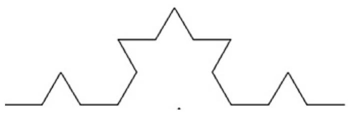
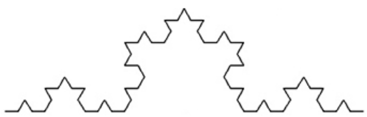
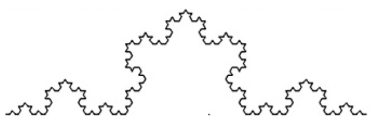
a) Como varia o número de quadrados de um nível para outro?

b) Quantos quadrados haverá no triminó nível 10? E, no nível 14?E, no nível n?

Observação: Espera-se que os alunos percebam que a quantidade de quadrados necessários para construção do triminó de nível subsequente é igual ao anterior multiplicado por 3 ou, que a razão entre o termo subsequente e o anterior é 3. A tabela também permitirá ao aluno deduzir a fórmula do termo geral da progressão geométrica. Ainda para o estudo deste mesmo conteúdo, o professor também poderá fazer uso das atividades 4 e 5 a seguir:

4. Considerando que o segmento inicial da construção da Curva de Koch possui comprimento igual a p, complete o quadro (Quadro 8): [10]

Quadro 8 - Comprimento da curva de Koch.

figura	Número de iterações	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento da curva de Koch
				
				
				
				

Fonte: do autor

5. Quantos segmentos terá a Curva de Koch após n iterações? Qual será o comprimento de cada segmento? Qual será o comprimento da Curva de Koch?

[10] Adaptado de Padilha, et al, ([data desconhecida], p. 12)

Para iniciar o estudo da soma dos termos de uma Progressão Geométrica propomos que os alunos completem a tabela e respondam a questão 6:

6. Em nossa proposta de atividade, os triminós de nível 1 já foram entregues prontos mas, e se fosse necessário recortar cada quadrado, já refletiu sobre quantos seriam necessários? Para auxiliar o raciocínio, preencha o quadro (Quadro 9):

Quadro 9 - Total de quadrados necessários para a construção do fractal triminó.

Níveis dos fractais a serem construídos	Quantidade de quadrados
1	
1 e 2	
1, 2 e 3	
1,2,3 e 4	
1, 2, 3, 4 e 5	

Fonte: do autor.

Provavelmente, os alunos tentarão encontrar uma regra para o cálculo da soma dos termos da progressão geométrica, como foi feito para a quantidade de quadrados necessários para construção de cada nível do fractal triminó, mas não é uma tarefa simples de ser obtida apenas por inspeção, neste momento, o professor aproveitando-se da curiosidade aguçada poderá iniciar, com ajuda dos demais materiais didáticos, o estudo da soma dos termos da progressão geométrica.

3.1.1.1.3 Grupo de atividades 3 – Geometria fractal com funções.

- Conteúdo curricular abordado:

Funções e Funções Exponenciais.

- Competências e habilidades:

Resolver problemas através de dados expostos em gráficos e tabelas;

Interpretar dados em gráficos e tabelas e utilizá-los para formação de argumentação;

Ler, organizar e interpretar dados fornecidos por diferentes linguagens;

Entender os significados e as diferentes formas de representação dos números;

Resolver situações-problema.

- Atividades:

1. Observando o Quadro 7 - Quantidade de quadrados que constituem o fractal triminó em cada nível, construa o gráfico que relaciona o nível do fractal triminó e o número de quadrados necessários para sua construção.

2. Analisando o gráfico, responda:

a) Seria simples a construção de um fractal triminó de nível 20? Por quê?

b) É correto no gráfico construído unir os pontos encontrados? Por quê?

Observação: Espera-se que os alunos percebam que a cada nível a dificuldade para a construção do fractal se eleva rapidamente, por isso, o momento já poderá ser utilizado como uma breve introdução às funções exponenciais. Com o item b da questão 2 é possível abordar domínio, contradomínio e imagem de uma função. As atividades 3 e 4 a seguir, além de trabalhar os mesmos conteúdos das questões 1 e 2 poderão ser utilizadas como forma de iniciar o conceito de crescimento da função exponencial.

Para responder as questões 3 e 4 consulte caso necessite o Quadro 8 – Comprimento da curva de Koch.

3. Construa o gráfico que relaciona o nível do fractal e o número de segmentos da Curva de Koch.

4. Construa o gráfico que relaciona o nível do fractal e o comprimento de cada segmento da Curva de Koch.

3.1.1.1.4 Grupo de atividades 4 - Fractais com geometria espacial (paralelepípedo).

- Conteúdo curricular abordado:

Geometria Espacial – Paralelepípedo

- Competências e habilidades:

Fazer uso da geometria espacial para leitura e representação da realidade;
Reconhecer características de figuras planas e espaciais;
Analisar características e propriedades dos paralelepípedos.

- Atividades:

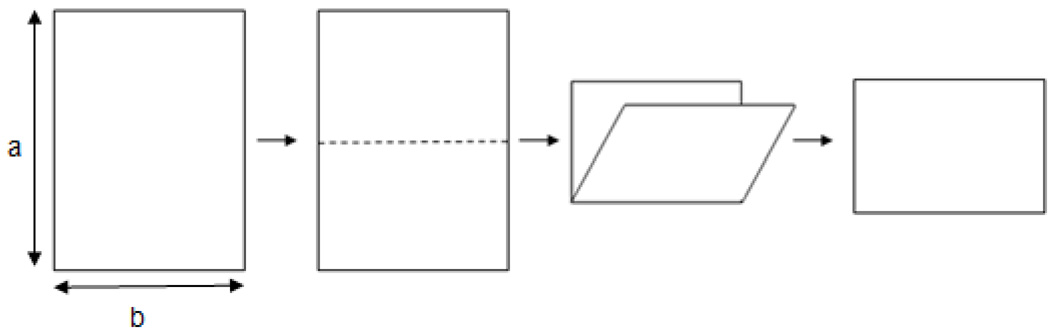
1. Construção do fractal degraus centrais:[11]

Materiais necessários para construção: folha sulfite e tesoura.

Passos para construção;
Passo 1:

Dobre uma folha sulfite A4 ao longo de sua altura. Chamaremos a altura de a e o comprimento de b (Figura 55).

Figura 55 - Passo 1 da construção do fractal Degraus Centrais.



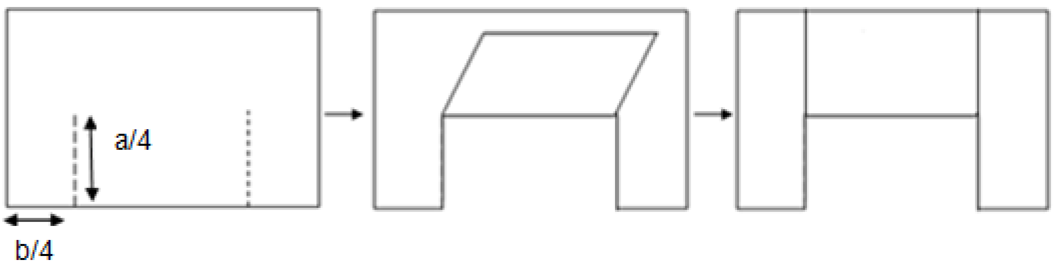
Fonte: do autor.

Passo 2.

Faça dois cortes verticais de comprimento a/4 e à distância b/4 dos lados do retângulo e dobre o retângulo obtido vincando a dobra (Figura 56).

[11] Adaptado de Padilha, et al, ([data desconhecida], p. 30)

Figura 56 - Passo 2 da construção do fractal Degraus Centrais.



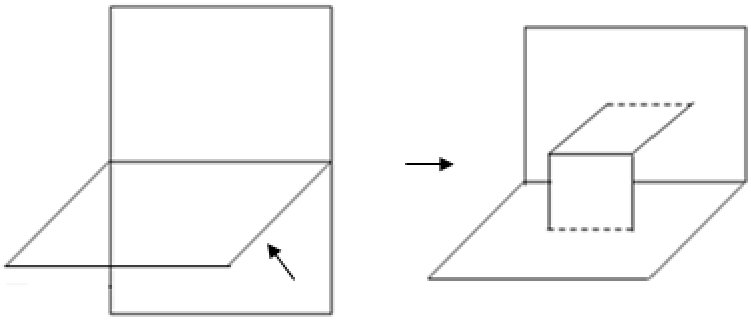
Fonte: do autor.

Passo 3:

Dobre a folha de forma que os segmentos obtidos pelos cortes formem ângulos retos dois a dois. Chegamos ao fractal nível 1 (Figura 57).

.

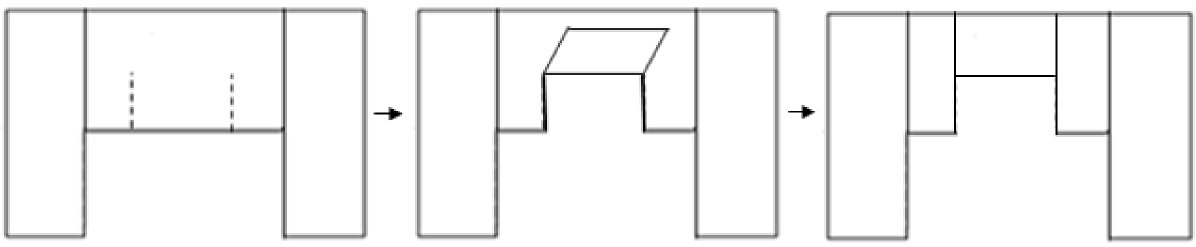
Figura 57 – Nível 1 do fractal degraus centrais.



Fonte: do autor.

Para o nível 2 deve-se fazer o mesmo processo porém, os cortes terão medida a/8 e estarão a uma distância b/8 dos lados (Figura 58).

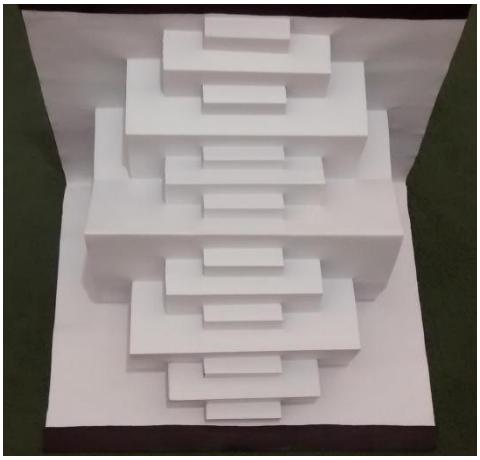
Figura 58 - Passo 4 da construção do fractal Degraus Centrais.



Fonte: do autor.

Para obter as demais iterações, retorne as dobras e recortes à posição obtida no passo 2 e repita quantas vezes conseguir este mesmo passo no retângulo dobrado. Na figura 59 um fractal degraus centrais após 4 iterações.

Figura 59 - Fractal Degraus Centrais.



Fonte: do autor.

Com base na construção do fractal degraus centrais, responda as questões que seguem:

2. Que formas geométricas foram obtidas através dos cortes e dobraduras?

3. Qual o volume da forma geométrica obtida na primeira iteração?

4. Qual o volume da forma geométrica obtida da segundo iteração?

5. Considerando que todas as faces da forma geométrica existam (considerar que as laterais esquerda e direita existam), qual a área total dessa forma no nível 1? E, no nível 2?

6. Qual a medida das diagonais das faces?

7. Qual a medida da diagonal da forma geométrica?

Observação: Esta atividade proporcionará uma estimulação das habilidades manuais dos alunos. Quando ocorrer dificuldades por parte de algum aluno, o professor pode solicitar que outro, com maior habilidade o auxilie promovendo desta forma, uma interação entre o grupo.

Com a construção do próprio material concreto, espera - se que os estudantes se familiarizem com a estrutura da forma, o que provavelmente facilitará o entendimento de seus elementos. Além do mais, poderá fazer a observação da estrutura do ângulo que melhor satisfazer suas necessidades.

A construção permitirá trabalhar as características do paralelepípedo, como ângulos formados entre aresta e aresta, entre aresta e plano, entre plano e plano, paralelismo e perpendicularismo, formas das faces e o que mais o professor sentir necessário destacar no momento.

3.1.1.1.5 Grupo de atividades 5 – Fractais com círculo e circunferência. [12]

- Conteúdo curricular abordado;

Círculo e circunferência (raio, diâmetro, comprimento e área)

- Competências e habilidades;

Fazer uso da geometria plana para leitura e representação da realidade;

Identificar circunferência e seus elementos;

Resolver situações-problema que envolva círculo e/ou circunferência.

- Atividades:

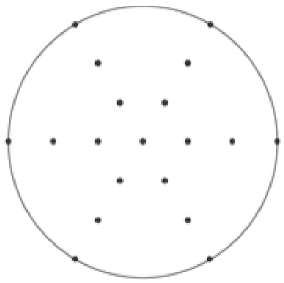
O professor antes das atividades apresentará a construção do fractal circular da maneira que melhor se enquadrar à realidade e necessidades de sua turma.

Construção do fractal circular:

Construir um círculo de raio r e o dividir em seis partes iguais. Dividir cada segmento que une o centro com a circunferência em três partes iguais (Figura 60).

[12] Atividades adaptadas de Pereira (2013, p. 60).

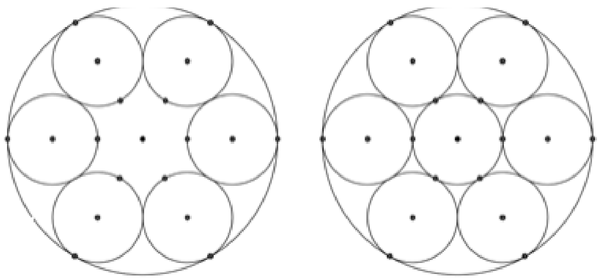
Figura 60 – Construção do fractal circular.



Fonte: do autor.

Construir seis círculos com centro nos pontos que distam 2/3 do centro e outro círculo central. O raio dos sete círculos obtidos é igual a 1/3.r (Figura 61):

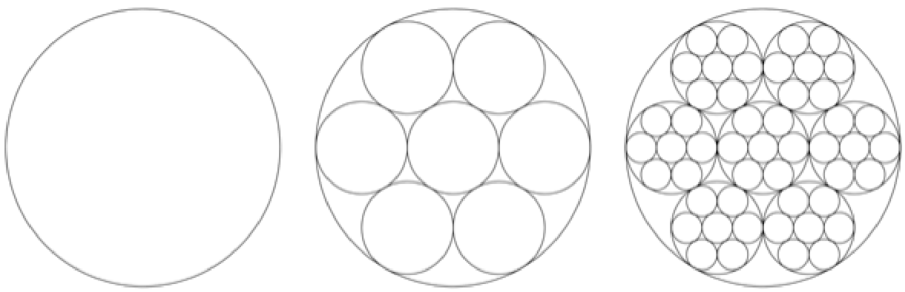
Figura 61 - Primeira iteração do fractal circular.



Fonte: do autor.

Para as demais iterações faz-se o mesmo processo nos círculos obtidos anteriormente. Na figura 62 temos duas iterações:

Figura 62 - Fractal circular após duas iterações.



Fonte: do autor.

1. Analisando o fractal circular e suas iterações, preencha o quadro (Quadro 10:

Observação: para cada linha da tabela (nível) leve em conta apenas os círculos obtidos no mesmo nível, ou seja, apenas os círculos congruentes.

Quadro 10 - Comprimento e área do fractal circular.

Nível do fractal	Nº de círculos	Raio do Círculo	Comprimento do Círculo	Comprimento Total	Área do Círculo	Área Total
0						
1						
2						

Fonte: do autor.

2. Encontre os mesmos dados pedidos na tabela para o nível n.

Observação: Para esta atividade os alunos já deverão dominar os elementos do círculo, área e comprimento, ela servirá como forma de aplicar os conhecimentos já adquiridos. O professor que optar poderá não só apresentar, mas propor a construção dos fractais circulares aos alunos, fazendo uso do desenho geométrico com compasso ou de softwares. Como já dito, a construção pelos próprios alunos propicia uma maior familiaridade com as formas e, facilitando consequentemente o entendimento de qualquer conceito ligado a elas.

Neste trabalho não se prega a inclusão da Geometria Fractal como conteúdo curricular obrigatório de Matemática da educação básica embora o estado do Paraná, como já visto neste texto (p. 81), já o incluiu dada sua importância, mas te - lo como tema capaz de tornar mais atrativo e integrador o conhecimento de diversos conteúdos matemáticos de extrema importância, mas que devido ao seu nível de abstração, podem tornar - se enfadonhos e desinteressantes.

As atividades propostas anteriormente visam estimular e desenvolver competências e habilidades muitas vezes não trabalhadas com as atividades tradicionais. A utilização do tema Fractais pode possibilitar a contextualização, pois o professor ao mediar a relação ensino/aprendizagem, “provocando” o aluno a observar, refletir e constatar sozinho a insuficiência da Geometria Euclidiana, estará levando o aluno a construir seus conhecimentos através de suas próprias deduções é o que chamamos de protagonismo juvenil, também estimulado quando o aluno constrói seus próprios fractais. Desta forma pode ser criado um ambiente de aprendizagem em que o aluno é o centro do processo ensino/aprendizagem, em que todas as atividades são voltadas para o objetivo principal, a construção do conhecimento de forma significativa para o discente, É importante destacar que essas atividades não são e estão longe de ser a solução para os baixos índices da educação brasileira, mas poderão servir de contribuição a professores que tenham interesse em diversificar a sua prática.

3.2 A inserção das tecnologias na educação

Tecnologias não são apenas objetos, equipamentos ou aparelhos, mas são todas as criações provenientes do raciocínio humano, que visam conforto e melhoria da qualidade de vida desta forma, um remédio, um chinelo, uma roupa são exemplos de tecnologias. Uma boa ideia sobre tecnologia pode ser vista em Kenski (2007, p. 24):

> Ao conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de equipamento em um determinado tipo de atividade, chamamos de “tecnologia”. Para construir qualquer equipamento – uma caneta esferográfica ou um computador -, os homens precisam pesquisar, planejar e criar o produto, o serviço, o processo. Ao conjunto de tudo isso, chamamos de tecnologias.

As tecnologias não fazem parte apenas da sociedade contemporânea, desde a origem do homem, as inovações acompanham a humanidade. De acordo com as necessidades o homem pensava, sistematizava e alterava o meio ambiente ou construía objetos que facilitassem sua existência. De cada descoberta e baseando - se nos conhecimentos adquiridos dos antepassados e de suas próprias experiências, o homem extraía novas ideias para construção de outras inovações.

A evolução social do homem está interligada com as tecnologias conhecidas e empregadas em cada época, sendo muitas vezes cada período da história da humanidade reconhecido pelas descobertas tecnológicas do seu tempo. A evolução tecnológica, não se restringe apenas ao uso e manipulação de novos equipamentos, ela transforma o modo de pensar, sentir e agir, não só de um indivíduo, mas de toda a sociedade.

Atualmente, a rapidez da transmissão de informação, a globalização econômica e financeira e o poder que as tecnologias tem de influenciar a sociedade deu base à formação de uma nova classe de excluídos, a classe dos que não tem acesso às inovações tecnológicas. Desta forma, é na educação que os indivíduos buscam adquirir competências e habilidades, que os proporcione uma formação íntegra e que os permitam exercer de forma completa sua cidadania. De acordo com Brito e Purificação (2008, p. 22):

> Na totalidade das formas de existência do ser humano, os grupos sociais criam, de geração em geração, formas de continuidade de transmissão e conhecimento, valores, regras, normas, procedimentos, com o intuito de garantir o convívio entre homens e difundir a cultura de cada sociedade, o que ocorre por meio da educação.

Desta forma, cabe à escola e toda a sociedade refletir sobre as novas demandas sociais, culturais e tecnológicas e adequar o currículo escolar às necessidades de sua clientela e, na sala de aula ao professor fazer uso adequado das tecnologias e selecionar metodologias adequadas para a melhoria do processo ensino/aprendizagem.

Nos diversos norteadores da educação básica tem - se visto o direcionamento do ensino/aprendizagem ao uso das tecnologias. Na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (1996):

> Art. 35º. O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades:
> [...] IV a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo - Matemática (2008, p. 19) se tem:

> As novas tecnologias da informação produziram uma mudança na produção, na organização, no acesso e disseminação do conhecimento. A escola hoje já não é mais a única detentora da informação e do conhecimento, mas cabe a ela preparar seu aluno para viver em uma sociedade em que a informação é disseminada em grande velocidade.

Especificamente sobre o ensino/aprendizagem da Matemática, nas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2006, p. 87) encontramos:

“É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos [...] a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática.”

A mudança do processo ensino/aprendizagem é essencial quando se almeja a melhoria da educação, mas é importante destacar que os recursos tecnológicos não ensinam por si só.

Segundo Moraes citado por Brito e Purificação (2008, p. 24):

> Dependendo do paradigma, tanto a informática como qualquer outro recurso tecnológico aplicado à educação podem ser apenas instrumentos reprodutores dos velhos vícios e erros do sistema, otimizando o péssimo.

Na Proposta Curricular do Estado de São Paulo – Matemática (2008, p.41) quanto à construção de uma nova proposta curricular:

> Uma nova proposta deve estar especialmente atenta a incorporação critica dos inúmeros recursos tecnológicos disponíveis para a representação de dados e o tratamento das informações, na busca da transformação de informação em conhecimento.

O docente tem papel fundamental no processo educacional, é de sua responsabilidade a escolha do material didático, do ambiente, da tecnologia e da metodologia. Faz - se necessário a mudança do professor que transmite o conhecimento, para o professor que é mediador da relação aluno/conhecimento logo, deve ocorrer a preparação dos docentes, tornando-os capazes de reorganizar as ações pedagógicas visando promover aprendizagens significativas, que despertem a curiosidade dos discentes, que leve em consideração os conhecimentos prévios, as necessidades e os interesses dos alunos, formando cidadãos capazes de participar ativamente da vida em sociedade, com habilidades e competências para observar, refletir e intervir nas diversas situações que achar necessário.

Neste cenário tecnológico os softwares educacionais não são apenas facilitadores do processo ensino/aprendizagem, eles são uma das ferramentas que possibilitam a estimulação, dinamização e o desenvolvimento de habilidades e competências para o uso das tecnologias.

Para a Matemática, que é uma ciência repleta de abstrações, as tecnologias são oportunidades de construir ligação entre abstrato e realidade, oportunizando a melhora dos índices de aprendizagem, é o que pode ser constatado no projeto de pesquisa conduzido pela Faculdade de Ciências e Letras da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Araraquara, divulgado na Agência de Notícias da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – Divulgando a cultura científica (2013). Neste estudo, constata-se a importância de inovação das metodologias e variação nas formas de apresentação dos conteúdos para os alunos como forma de melhoria da qualidade do ensino. No período de dois anos professores e bolsistas do Núcleo de Ensino da UNESP aplicaram atividades a alunos utilizando objetos diferenciados. Os alunos tiveram em média um aprendizado 32% superior aos conteúdos trabalhados de forma tradicional segundo o coordenador do projeto, Silvio Henrique Fiscarelli. Além do mais, constatou - se que os alunos com maior dificuldade de aprendizagem foram os que mais evoluíram com as metodologias que fizeram uso das tecnologias.

Tendo em vista a necessidade de remodelagem das metodologias e modernização da educação são propostas no próximo item o passo a passo das construções dos Fractais Curva de Koch, Ilha de Koch, Triângulo de Sierpinski e Fractal Pitagórico, que podem ser executadas em sala de aula servindo de base ao estudo de inúmeros conceitos matemáticos, vinculando várias áreas matemáticas como Geometria e Álgebra, várias disciplinas como Matemática e Arte, possibilitando o uso de tecnologias e promovendo o estreitamento da relação entre escola e realidade devido à forte presença da Geometria Fractal na Natureza.

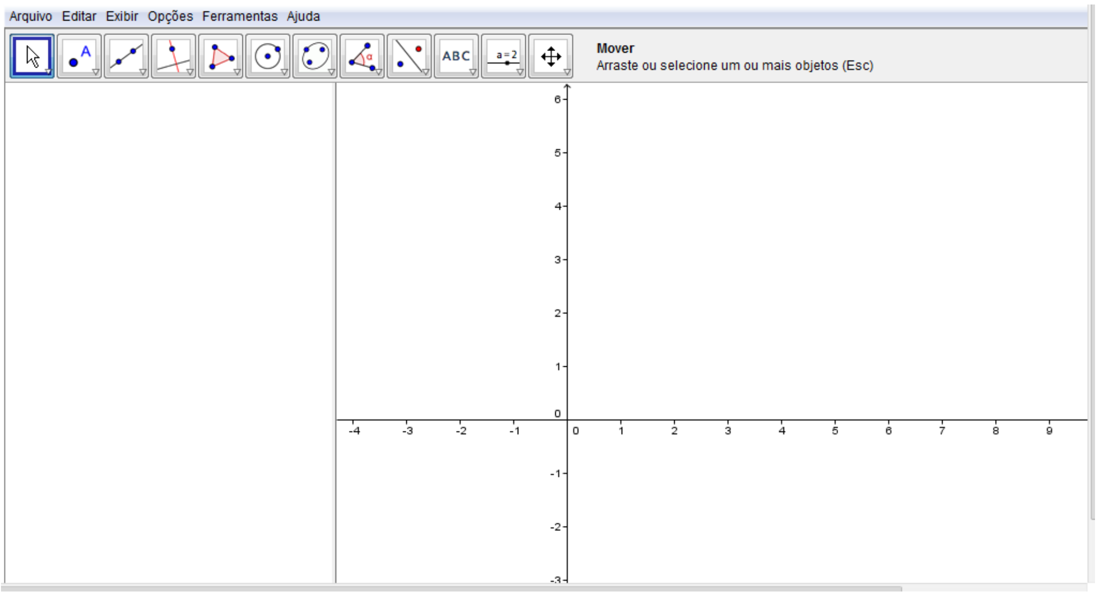
3.2.1 Uma breve apresentação do software Geogebra

O Geogebra por ser um software livre (pode-se utilizar, copiar ou distribuir o aplicativo de modo que não se tenha fins comerciais) pode ser uma ferramenta importante no processo ensino/aprendizagem como recurso metodológico. Permite abordar diversos conteúdos curriculares da educação permitindo a construção, visualização e “manipulação” (através do mouse) de figuras, promovendo um maior entendimento dos conceitos trabalhados.

O programa pode ser obtido em diversos endereços eletrônicos como http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html, por exemplo.

Ao iniciar o programa visualizamos a seguinte janela (Figura 63):

Figura 63 - Tela inicial do software Geogebra.



Fonte: <http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>

A janela inicial está dividida em duas partes, a da esquerda é a algébrica e da direita a geométrica. Para exibir ou ocultar basta ir ao menu exibir, ativar ou desativar, respectivamente.

Temos o menu de edição do arquivo que contém os itens (Figura 64):

Arquivo: Apresenta comandos para abrir, fechar, salvar, compartilhar, exportar ou visualizar impressões.

Editar: apresenta opções para copiar, colar, inserir imagem e ver as propriedades do arquivo.

Exibir: apresenta as opções de janelas que podem ser exibidas na tela, e comandos para atualização do arquivo e do campo de entrada.

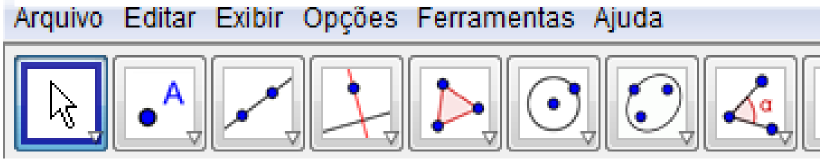
Opções: apresenta várias opções ligadas a descrição, arredondamento, tamanho da fonte, comando de gravação e de restauração do arquivo.

Ferramentas: permite criar novas ferramentas e gerenciar as ferramentas existentes no software.

Janela: permite a abertura de uma nova janela de trabalho.

Ajuda: indica as opções de ajuda do software.

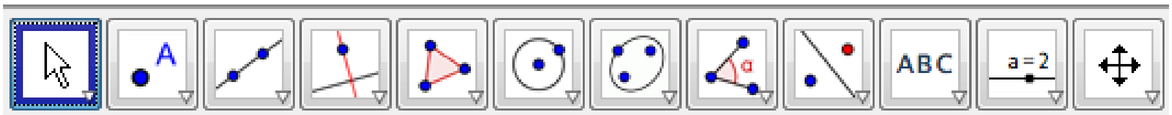
Figura 64 - Menu de edição do software Geogebra.



Fonte: <http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>

Na tela inicial temos a barra de ferramentas de acesso rápido (Figura 65). Cada ícone dessa barra de ferramentas possui diversas funções. Para ativar uma dessas funções, primeiro deve-se clicar no ícone e depois na janela algébrica.

Figura 65 - Ferramentas de acesso rápido.



Fonte: <http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>

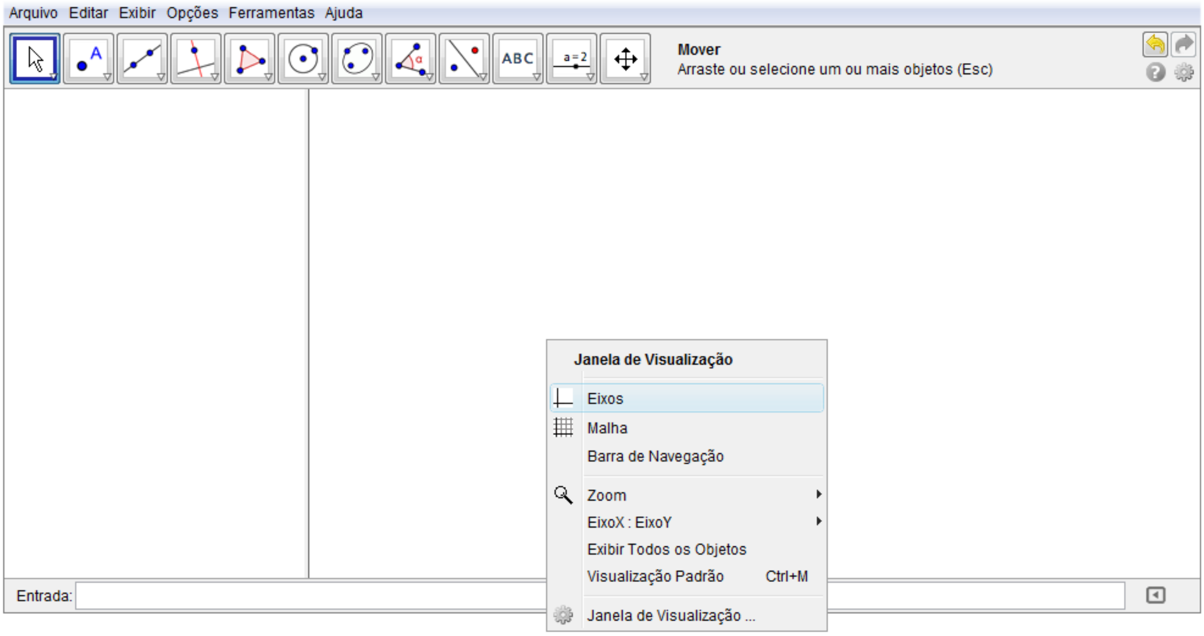
3.2.2 Construções.

3.2.2.1 A curva de Koch. [13]

Utilizar a janela do Geogebra sem os eixos e malha quadriculada (o clique com o botão direito sobre a área a ser trabalhada permite exibir ou ocultar) (Figura 66).

[13] Adaptado de Padilha, et. al., ([data desconhecida], p. 12).

Figura 66 - Ocultação dos eixos coordenados e malha quadriculada.

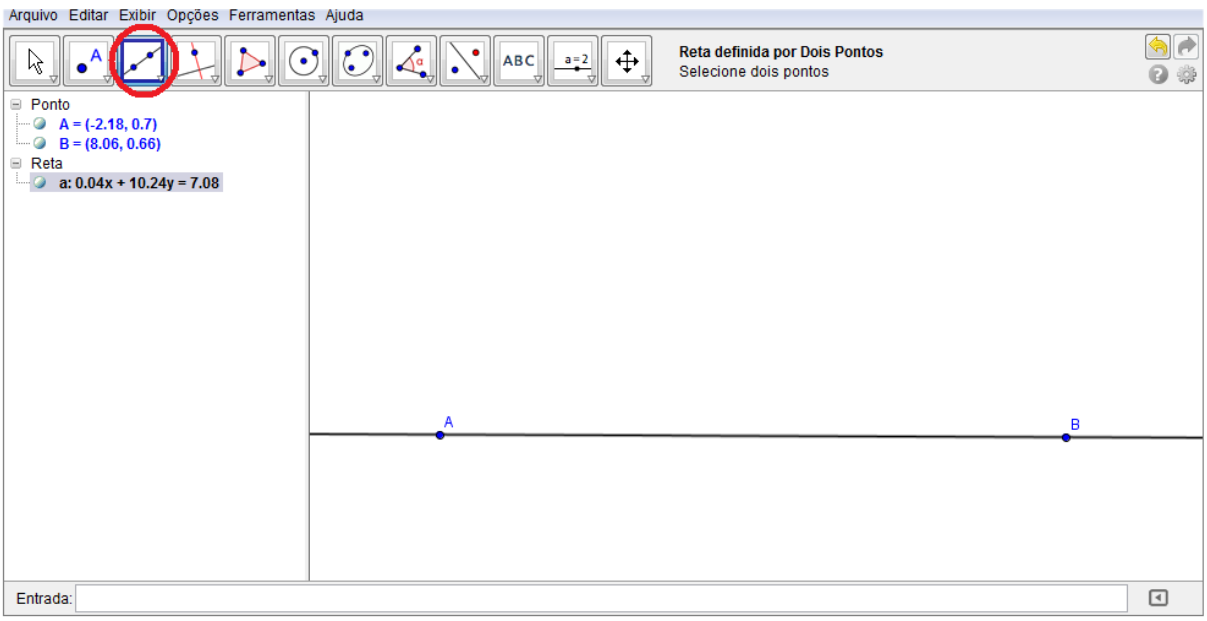


Fonte: <http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html>

Construir uma reta definida por dois pontos utilizando o terceiro ícone (Figura 67).

Dividir o segmento em três partes iguais seguindo os passos a seguir:

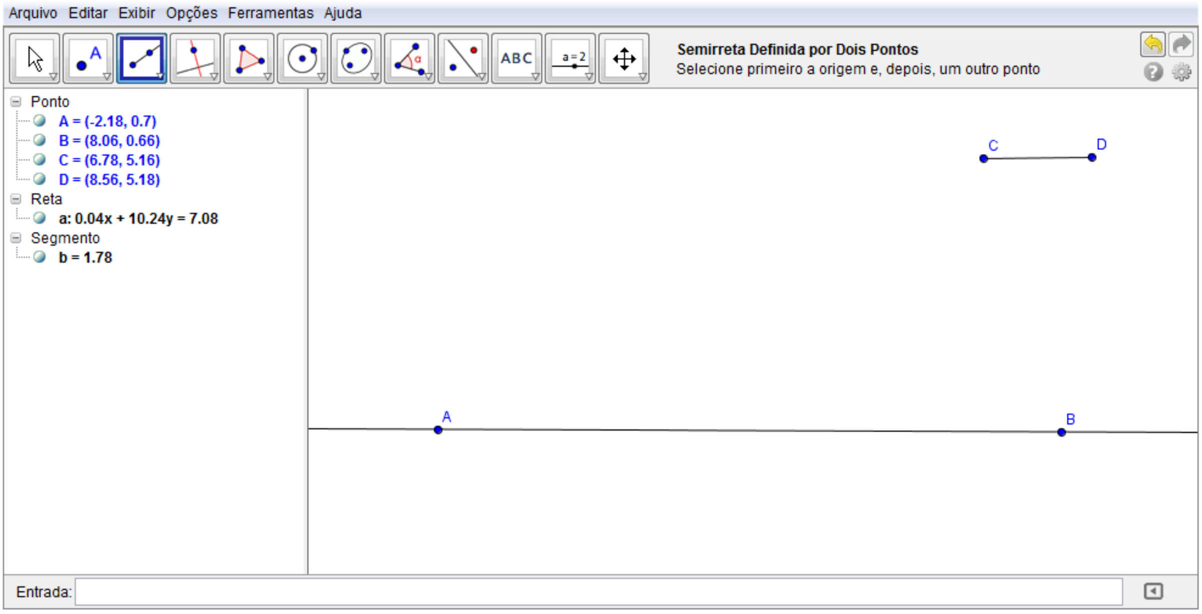
Figura 67 - Construção da curva de Koch (1)



Fonte: do autor.

Construir um segmento CD em um canto da tela que será a unidade de medida (utilizar o terceiro ícone - segmento definido por dois pontos) (Figura 68).

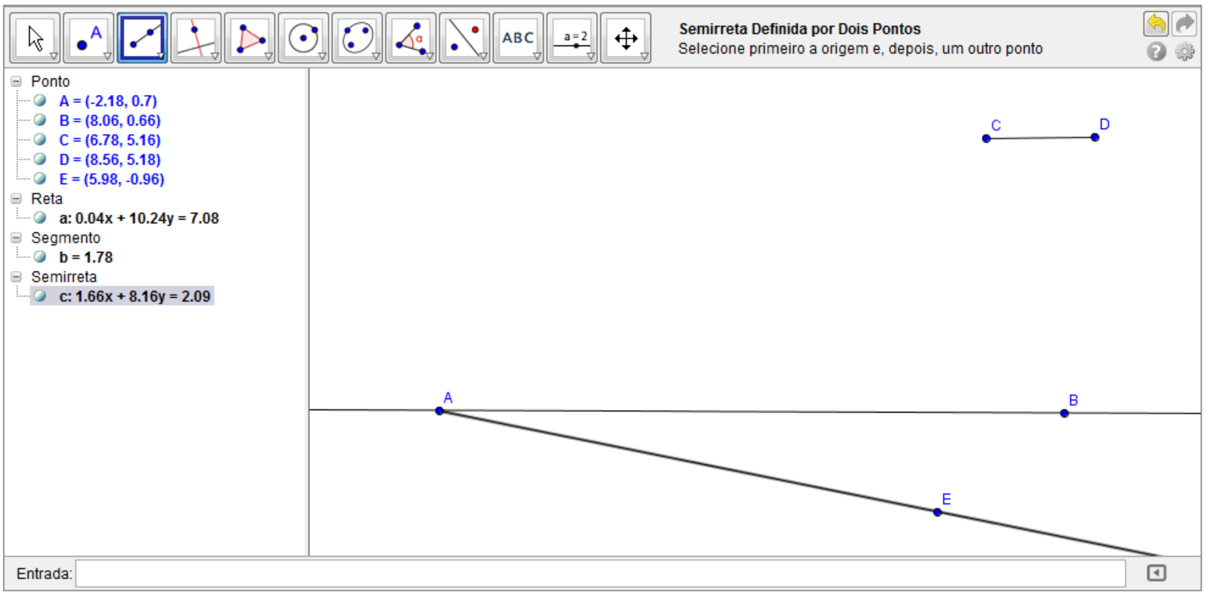
Figura 68 - Construção da curva de Koch (2)



Fonte: do autor.

Traçar uma semirreta qualquer com origem no ponto A (utilizar o terceiro ícone - semirreta definida por dois pontos) (Figura 69).

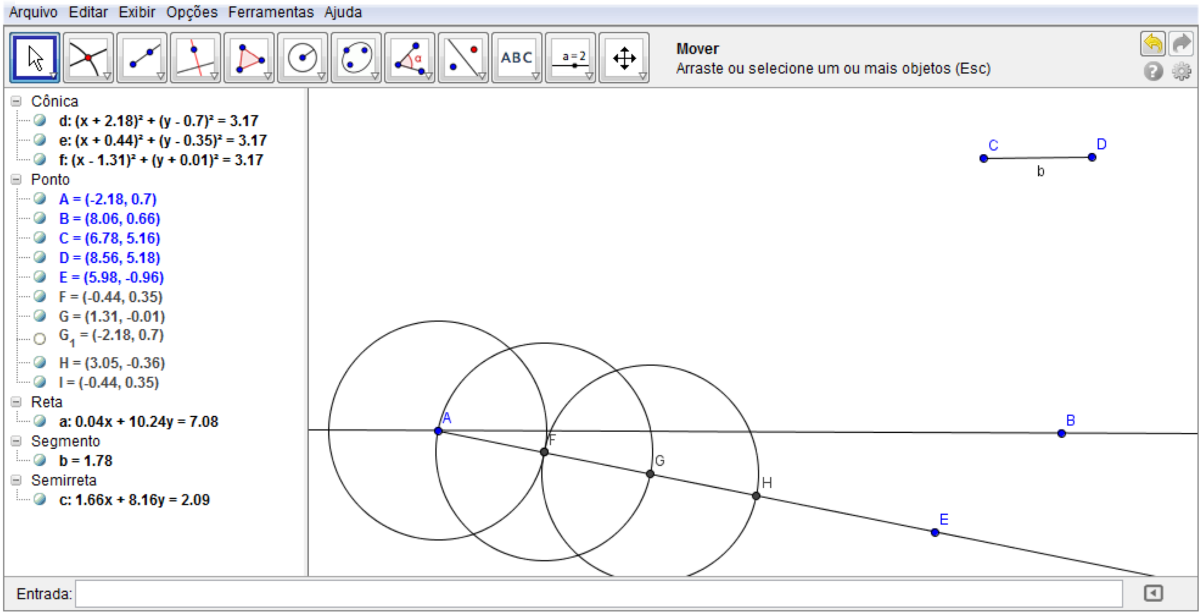
Figura 69 - Construção da curva de Koch (3).



Fonte: do autor.

Marcar na semirreta três segmentos de mesmo tamanho a partir da unidade de medida b fornecida pelo segmento CD. Para isso, traçar uma circunferência de centro A e raio b utilizando o sexto ícone e marcar a intersecção da circunferência traçada e da semirreta AE, encontrando o ponto F. Da mesma forma, construir a circunferência com centro F e raio b e encontrar o ponto G e construir a circunferência com centro em G e raio b e encontrar o ponto H (Figura 70).

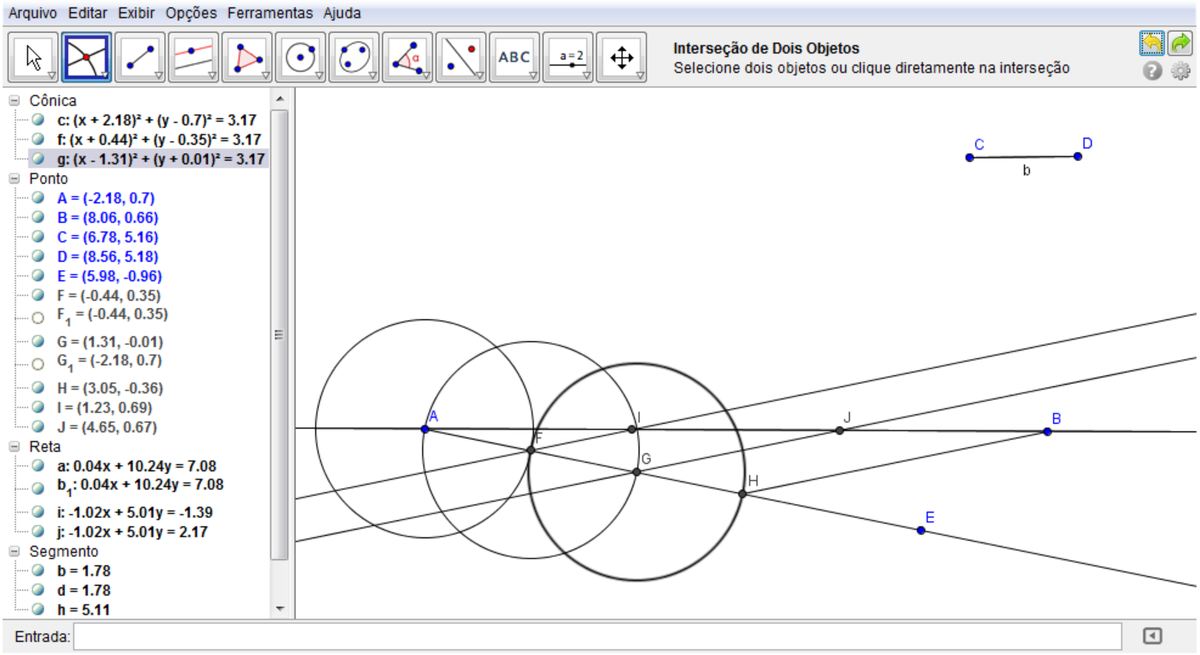
Figura 70 - Construção da curva de Koch (4).



Fonte: do autor.

Construir o segmento de reta BH e traçar as retas paralelas ao segmento BE que passam pelos pontos F e G, marcando os pontos I e J que são os pontos de intersecção das paralelas com a reta AB (utilizar o terceiro ícone, seguido do quarto e, por último o segundo) (Figura 71).

Figura 71 - Construção da curva de Koch (5).



Fonte: do autor.

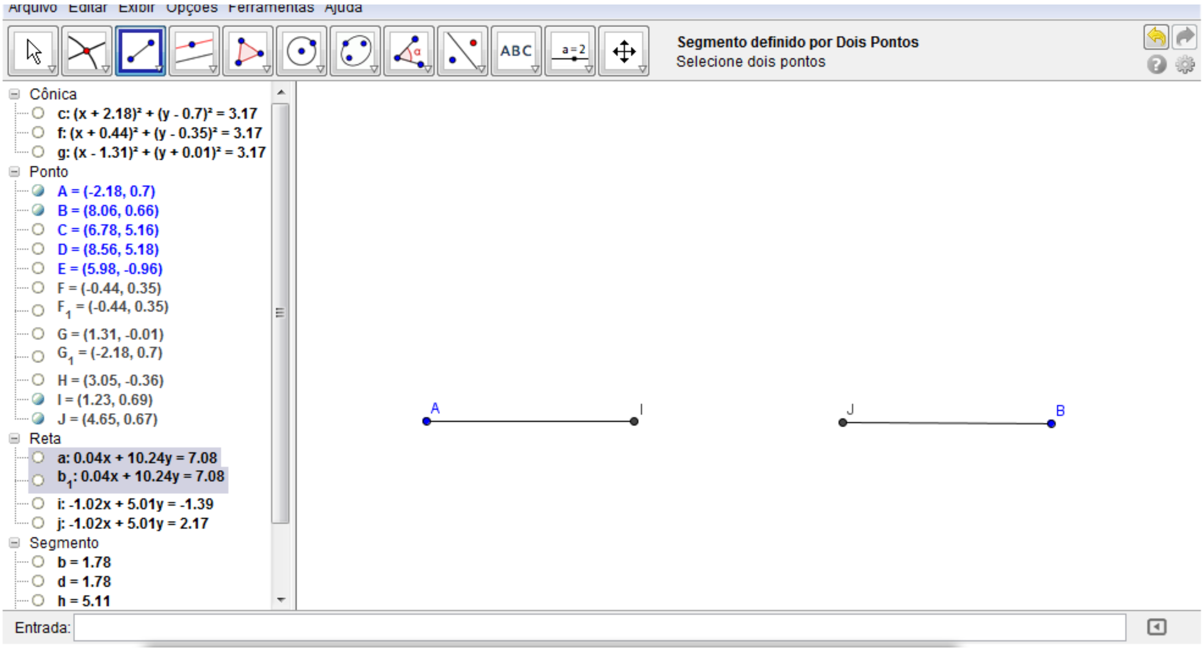
Para ocultarmos as construções feitas para se obter a divisão do segmento em três segmentos menores e congruentes basta clicar no objeto com o botão direito e desativar o botão exibir objeto.

Agora, queremos que fiquem aparentes apenas os segmentos AI e BJ, para isso seguimos os passos:

Construímos os segmentos AI e BJ utilizando o segundo ícone;

Ocultamos a reta AB clicando com o botão direito e em seguida, ocultar objeto (Figura 72).

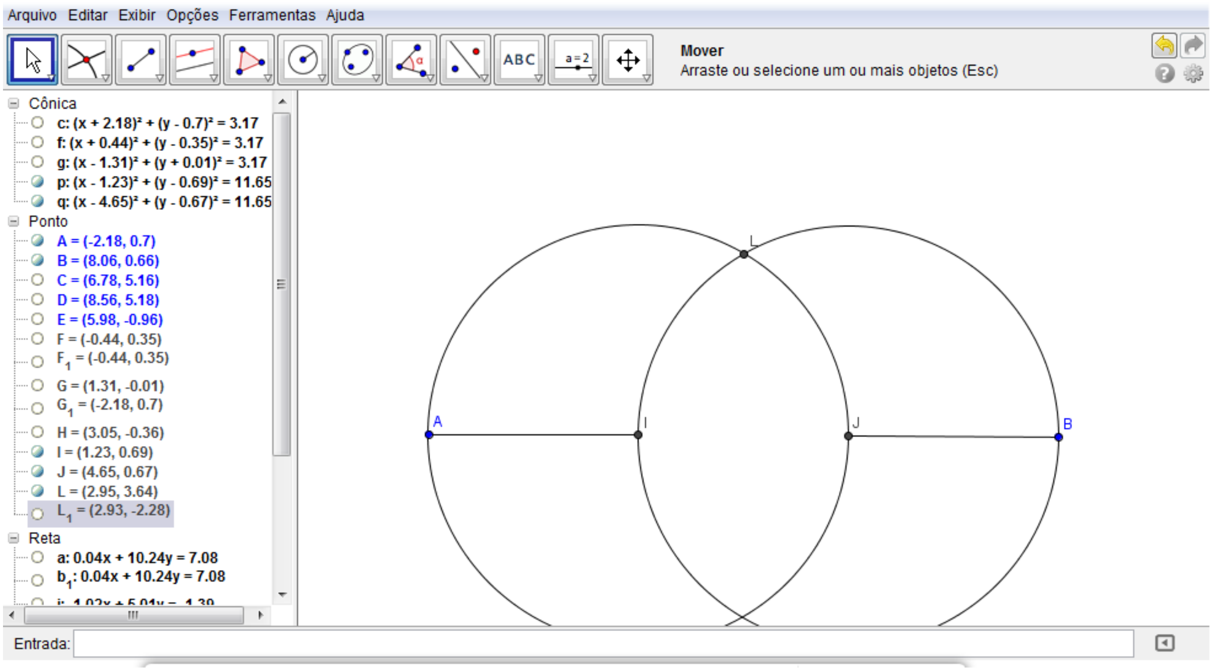
Figura 72 - Construção da curva de Koch (6).



Fonte: do autor.

Vamos substituir a parte central por um triângulo equilátero para isso, devemos construir duas circunferências centradas em I e J com raio igual à medida do segmento AI e marcando o ponto de intersecção L (os objetos que não influenciam a construção podem ser ocultados) (Figura 73).

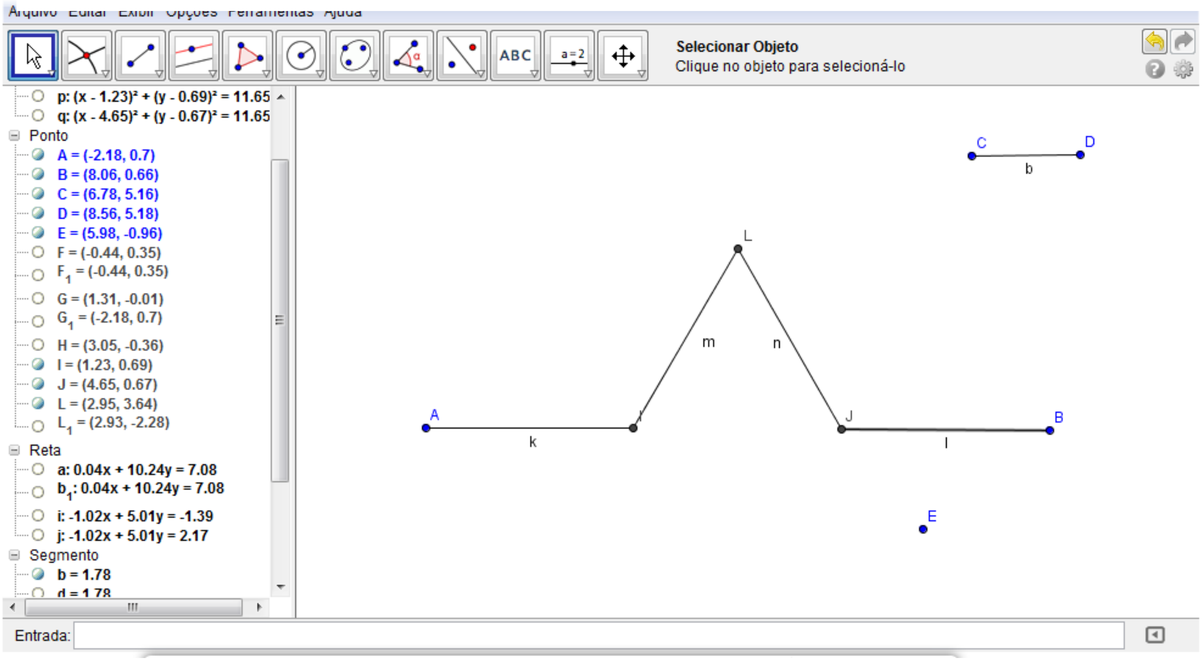
Figura 73 - Construção da curva de Koch (7).



Fonte: do autor.

Desenhar os segmentos IL e JL, ocultar as circunferências e exibir rótulo dos segmentos e retornar o segmento CD e o ponto E (os dois últimos facilitarão o próximo passo) (Figura 74).

Figura 74 - Construção da curva de Koch (8).



Fonte: do autor.

Para obter a curva de Koch deve - se repetir todos esses passos nos segmentos IL e LJ. Esse processo é chamado de iteração. Não é simples, porém o software Geogebra permite criar uma ferramenta que reproduza a construção. Para tanto, deve-se ativar a opção ferramentas - criar nova ferramenta. Abrirá uma janela com as abas objetos finais, objetos iniciais e nome e ícone.

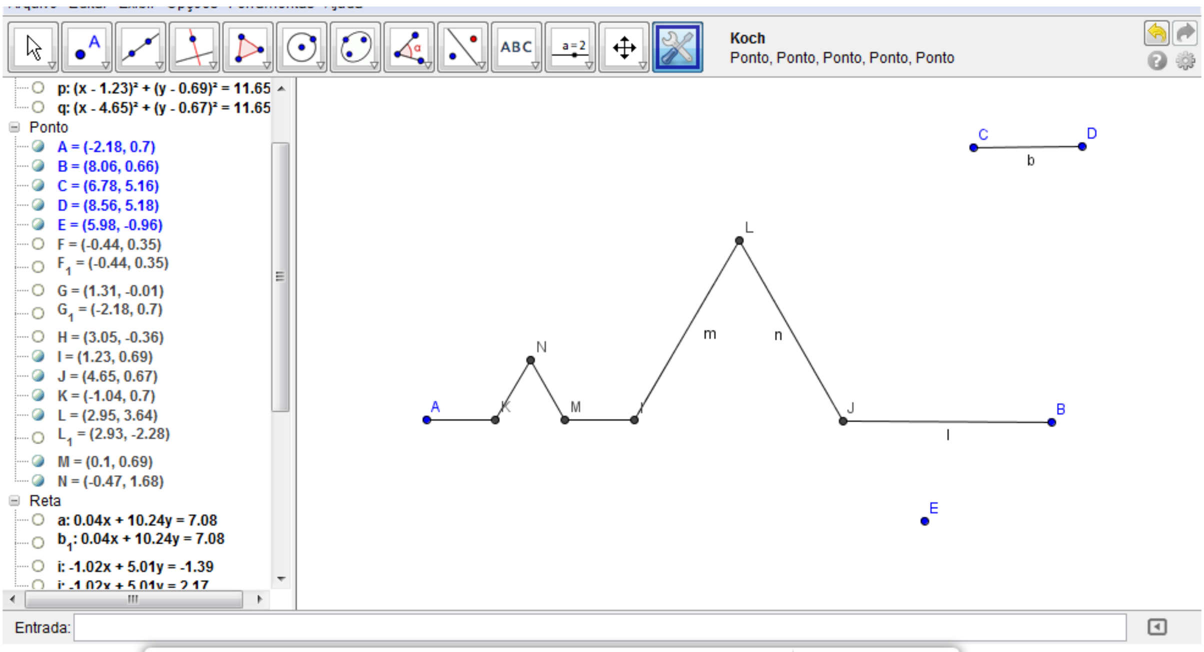
Objetos finais são os objetos que deseja - se reproduzir e que dependem de outros no caso, são os pontos I, J e L, segmento k, segmento m, segmento n e segmento l.

Objetos iniciais são os objetos que dão base à construção. São os pontos A, B, C, D e E que aparecem selecionados automaticamente.

Nome e ícone é onde se nomeia o novo ícone criado para selecionar a nova ferramenta construída.

Para seguir a construção da curva de Koch deve-se clicar na nova ferramenta e nos pontos A, I, C, D e E e ocultar o segmento KM (queremos fazer a iteração no segmento AL) (Figura 75).

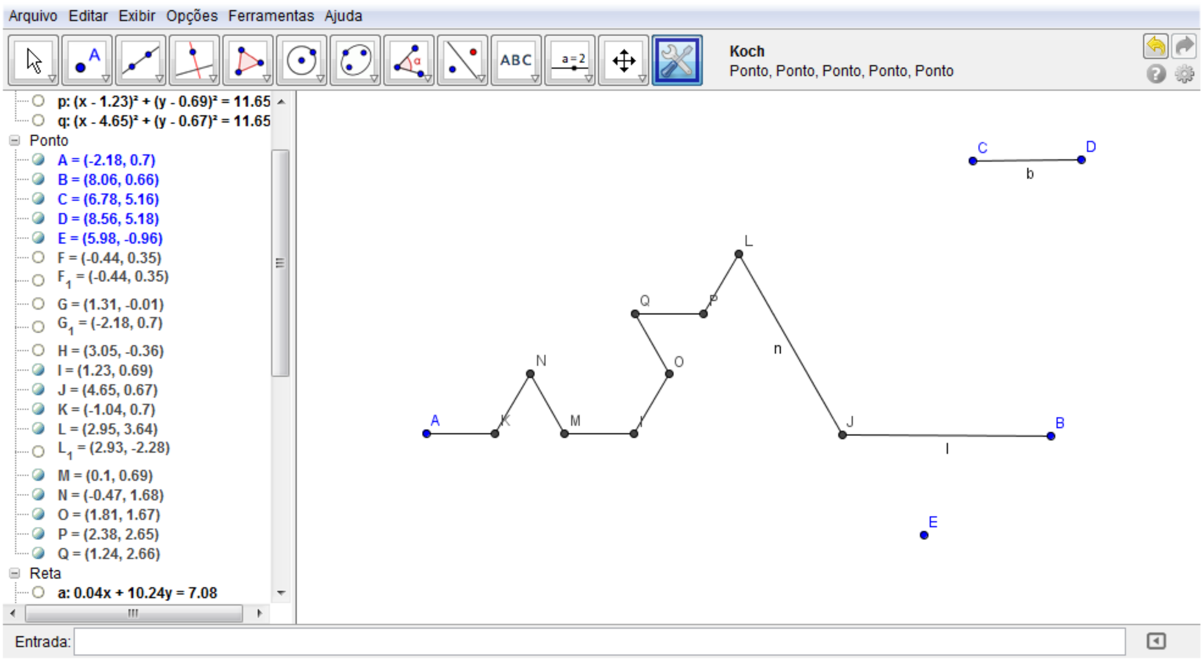
Figura 75 - Construção da curva de Koch (9).



Fonte: do autor.

Agora, na nova ferramenta e nos pontos I, L, C, D e E e ocultar o segmento (queremos fazer a iteração no segmento IL) (Figura 76).

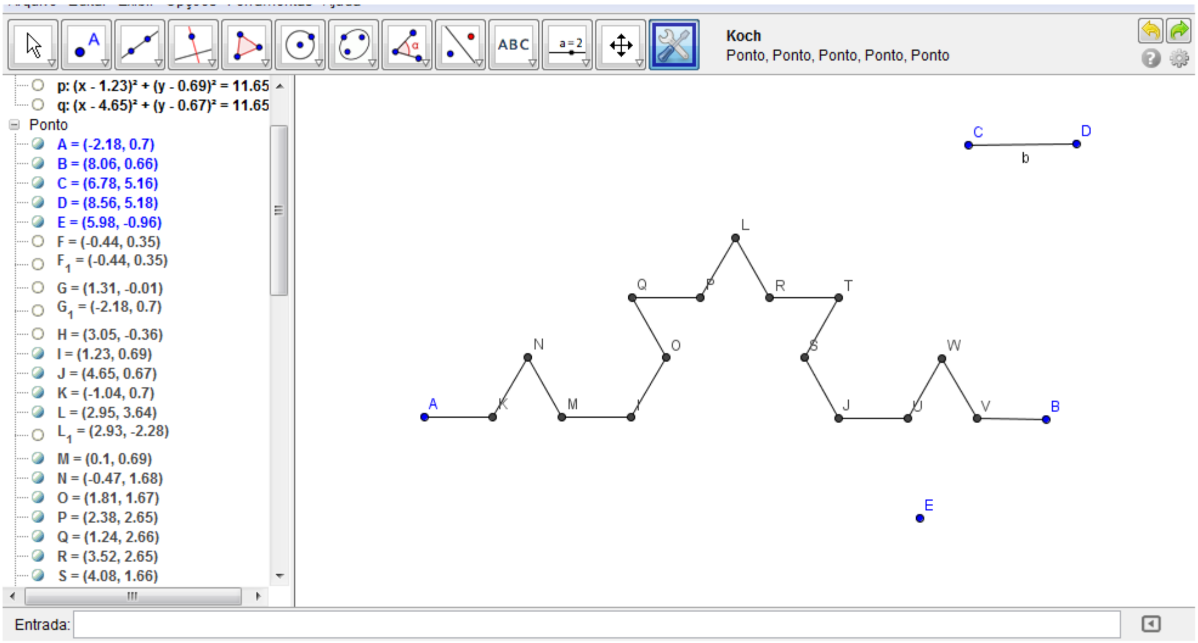
Figura 76 - Construção da curva de Koch (10).



Fonte: do autor.

Da mesma forma fazemos para o segmento LJ e BJ (Figura 77).

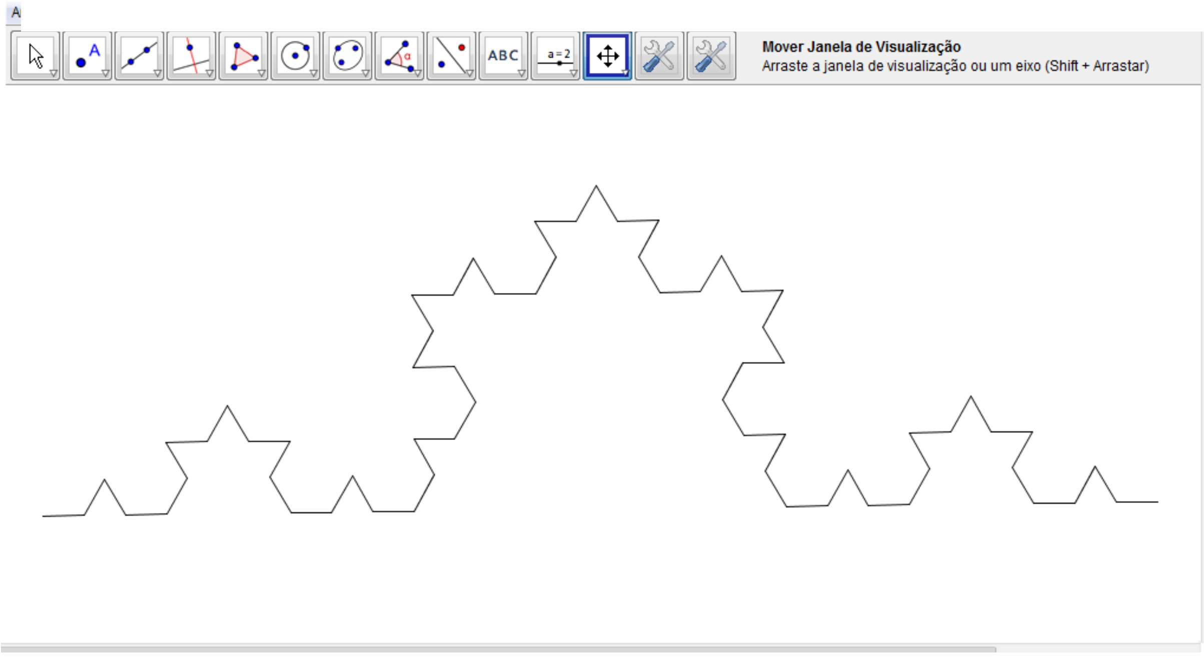
Figura 77 - Construção da curva de Koch (11)



Fonte: do autor.

A figura 78 apresenta a curva de Koch após três iterações.

Figura 78 - Curva de Koch após três iterações.



Fonte: do autor.

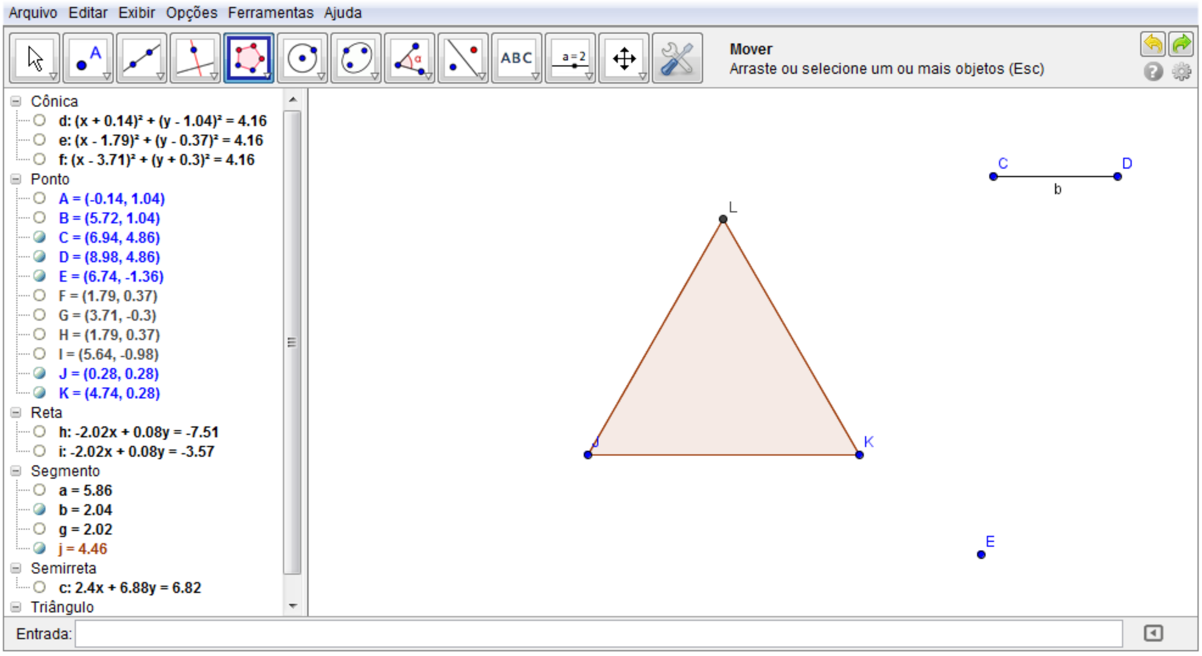
3.2.2.2 Ilha de Koch (floco de neve). [14]

Inicialmente, em uma nova janela do software Geogebra deve-se criar uma nova ferramenta como a criada para a construção da curva de Koch.

Apaga-se todos os objetos exceto os pontos A, B, C, D e E e o segmento CD.

Através do quinto ícone (polígono regular) constrói-se um triângulo JKL (Figura 79).

Figura 79 - Construção da ilha de Koch (1).

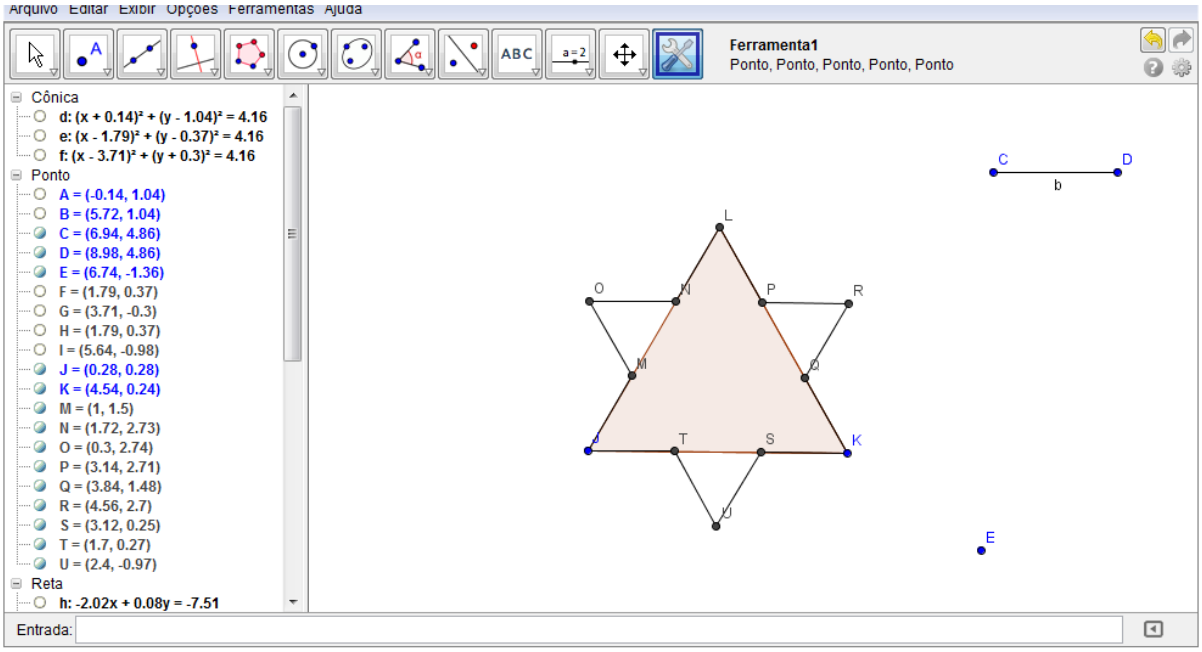


Fonte: do autor.

Clicar na nova ferramenta e em seguida nos pontos J, L, C, D e E, nos pontos L, K, C, D e E e nos pontos K, J, C, D e E (Figura 80).

[14] Adaptado de Padilha et. al., ([data desconhecida], p. 6).

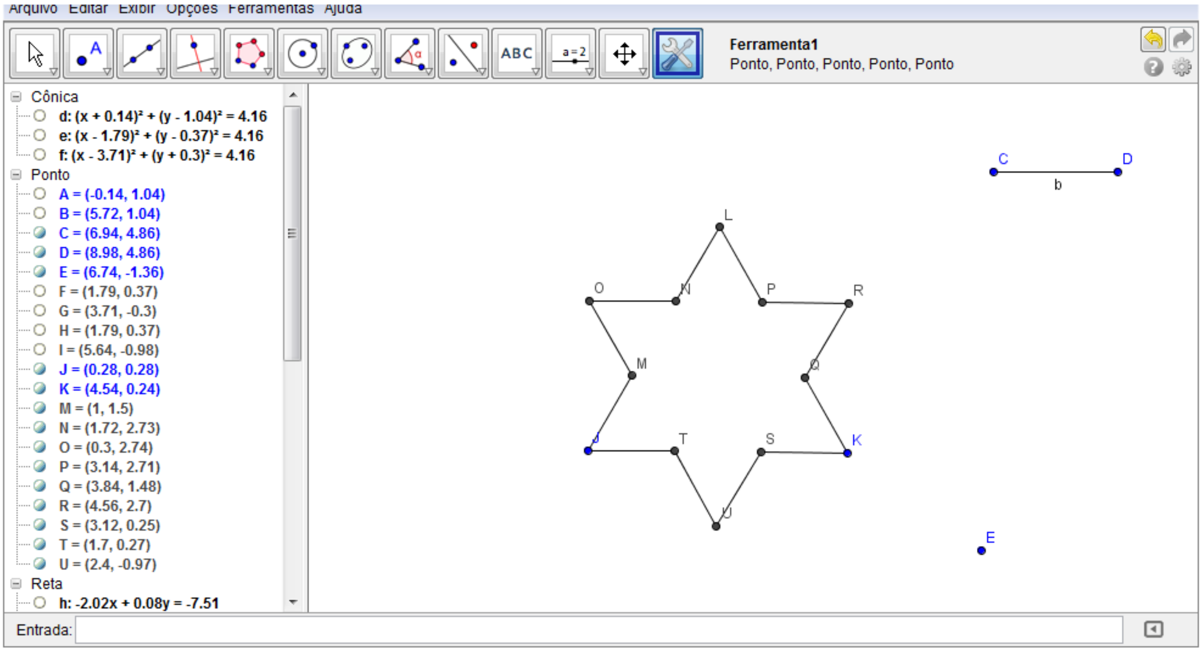
Figura 80 - Construção da ilha de Koch (2).



Fonte: do autor.

Ocultar o triângulo JKL (Figura 81).

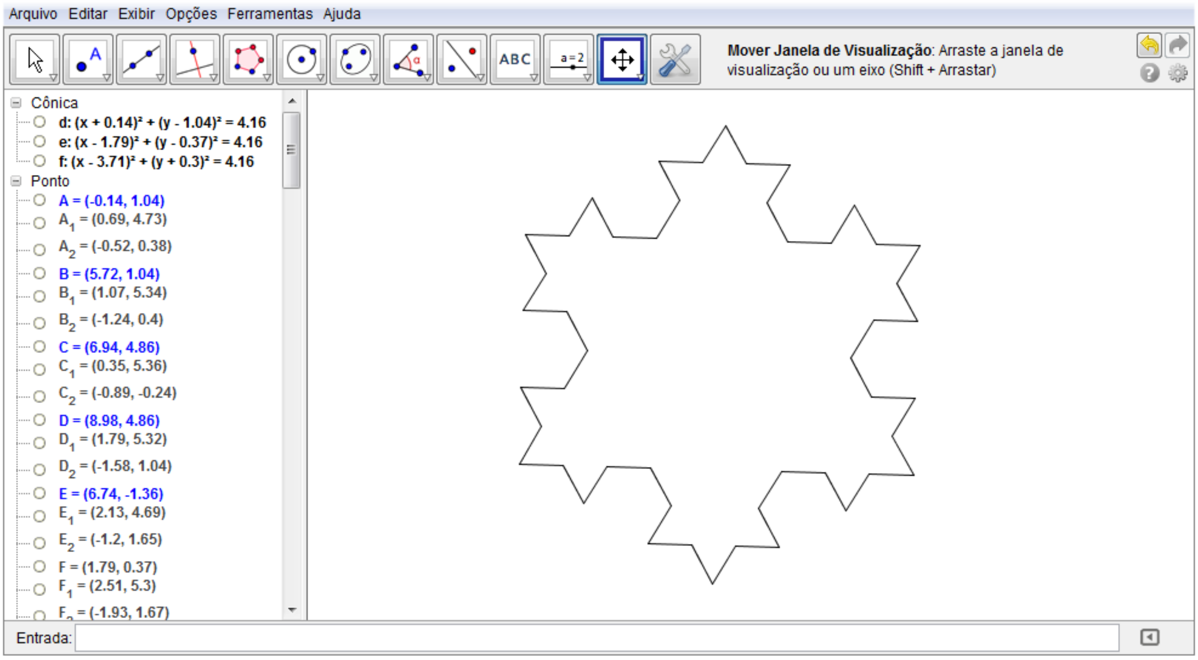
Figura 81 - Construção da ilha de Koch (3).



Fonte: do autor.

Para a segunda iteração, clica-se na nova ferramenta e em cada ponto do segmento seguido pelos pontos C, D e E, por exemplo, se deseja fazer a construção sobre o segmento ON, clica-se na nova ferramenta, no ponto O, no ponto N, seguido dos pontos C, D e E. Para eliminar o segmento central basta ocultar o segmento que deu base à iteração, no exemplo, o segmento ON (Figura 82).

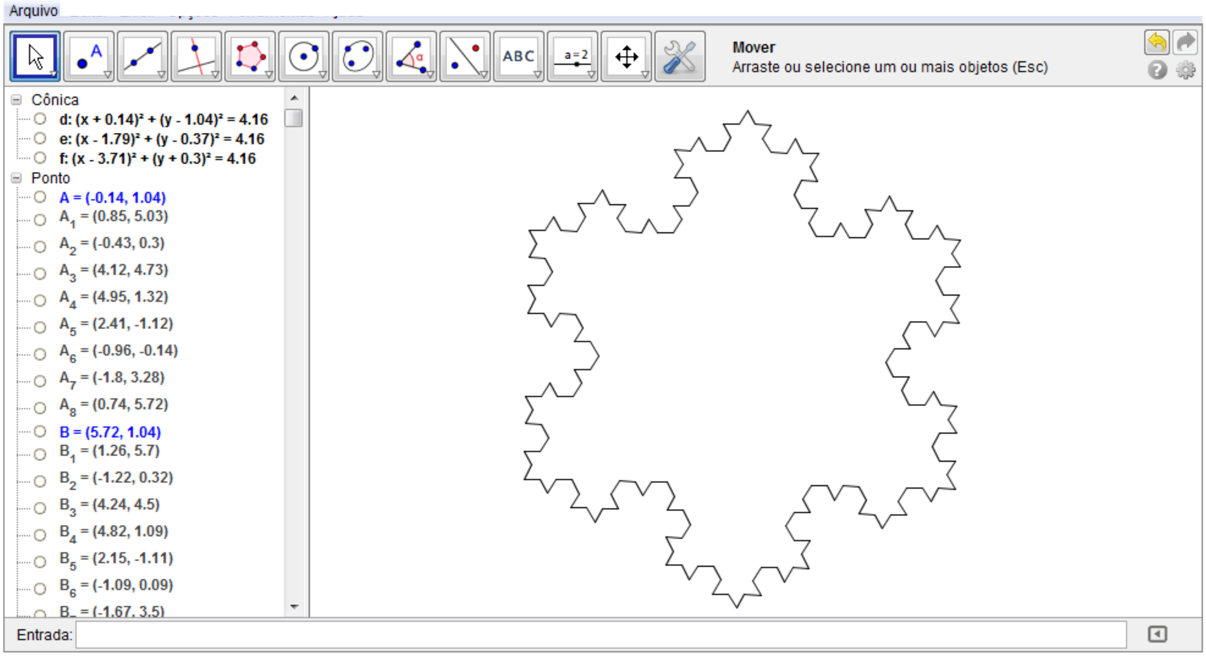
Figura 82 - Construção da ilha de Koch (4).



Fonte: do autor.

A figura 83 corresponde à Ilha de Koch após três iterações.

Figura 83 – Ilha de Koch após três iterações.

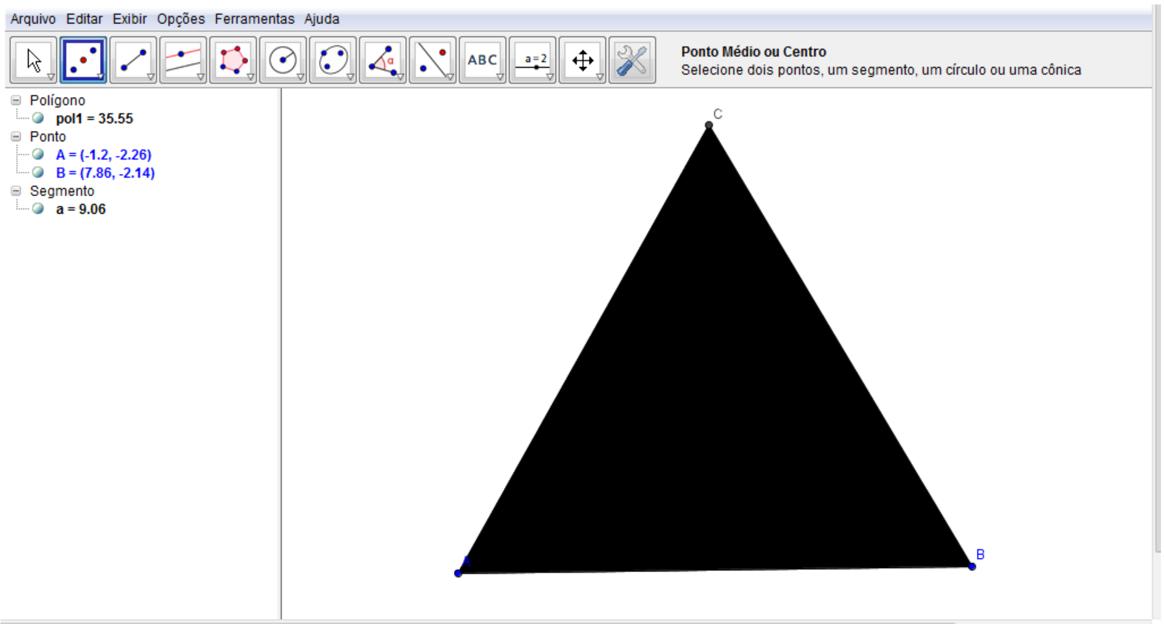


Fonte: do autor.

3.2.2.3 Triângulo de Sierpinski. [15]

Traçar um triângulo equilátero ABC utilizando o quinto ícone (polígonos regulares) e editar a cor e transparência com um clique com o botão direito, propriedades, cor (Figura 84).

Figura 84 - Construção do triângulo de Sierpinski (1).

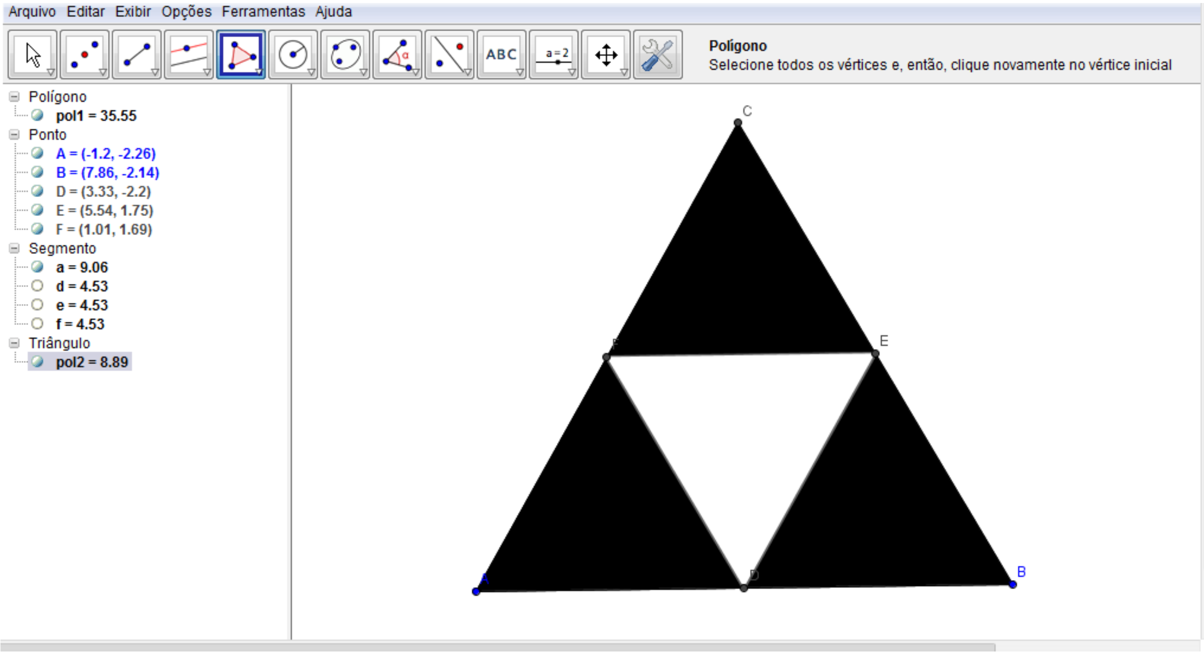


Fonte: do autor.

[15] Adaptado de Padilha et. al., ([data desconhecida], p. 17).

Utilizando o segundo ícone (ponto médio ou centro) encontrar o ponto médio de cada lado do triângulo e utilizar a ferramenta polígono (quinto ícone) para construir o triângulo DEF. Altere a cor e transparência deste triângulo (de preferência branco para simbolizar a retirada do triângulo) (Figura 85).

Figura 85 - Construção do triângulo de Sierpinski (2).

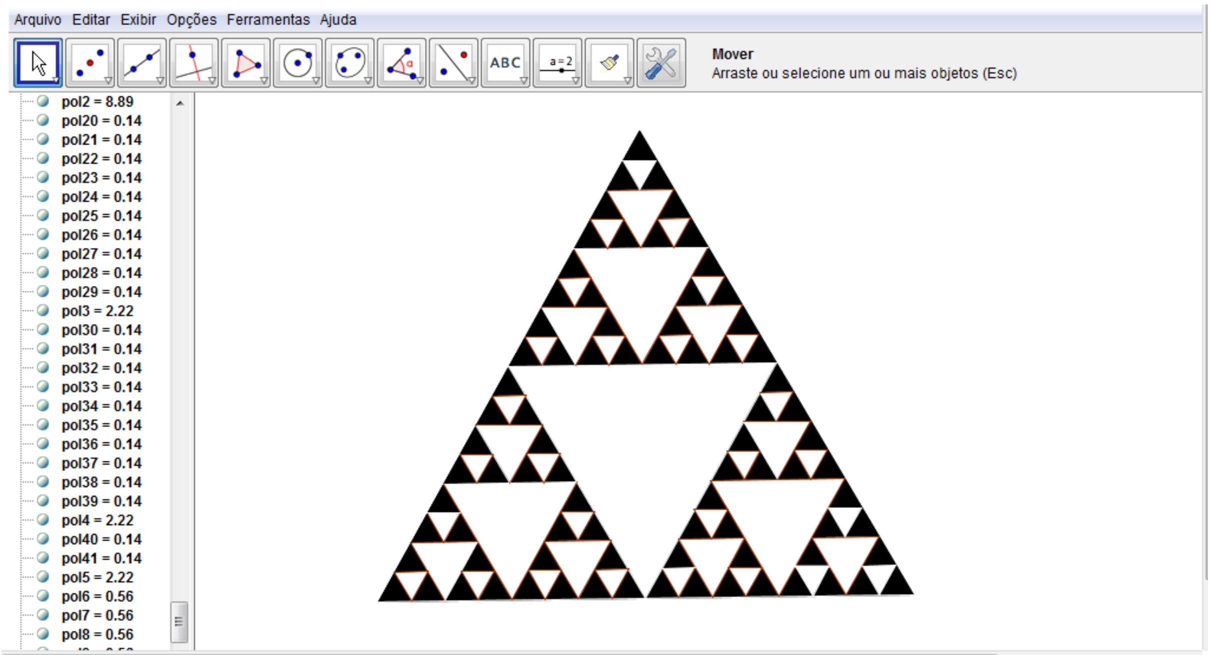


Fonte: do autor.

Fazer o mesmo processo para os triângulos em preto. Para tornar mais fácil a mudança da cor preta para branca, basta utilizar o décimo segundo ícone (copiar estilo visual), clicar sobre o triângulo em branco e após nos triângulos que se queira colorir de branco.

Na figura 86 podemos visualizar o triângulo de Sierpinski após quatro iterações.

Figura 86 - Triângulo de Sierpinski após quatro iterações.



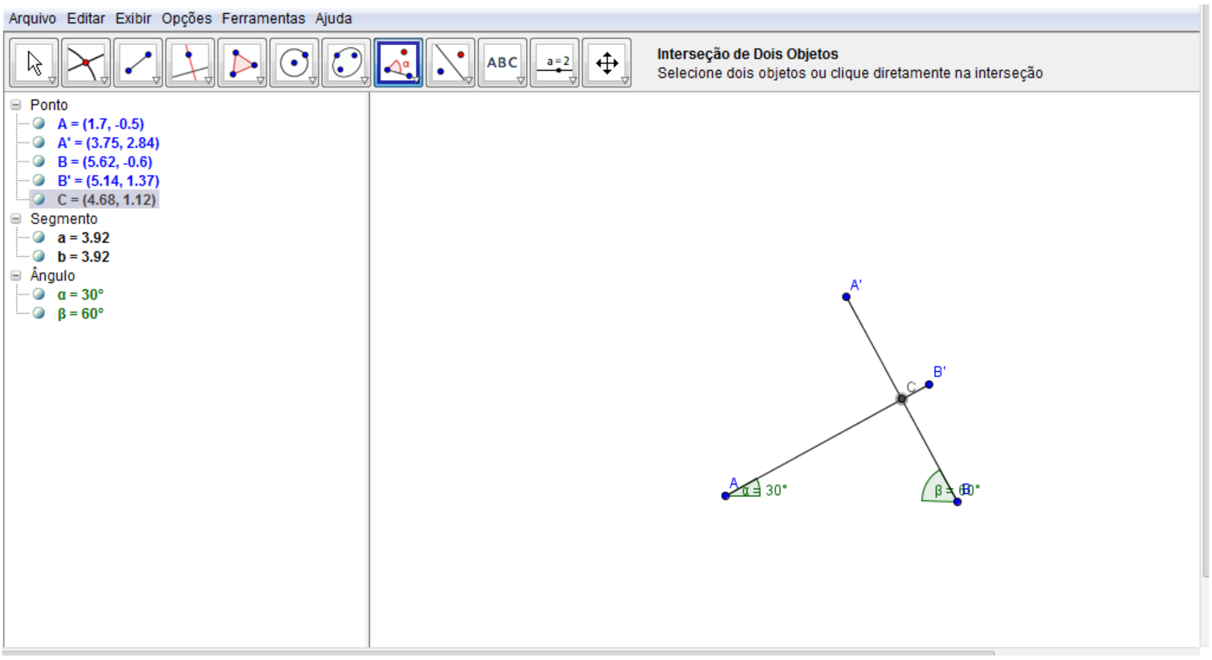
Fonte: do autor.

3.2.2.4 Fractal pitagórico (árvore pitagórica). [16]

Deve-se partir de um triângulo retângulo, para construí-lo deve-se marcar dois pontos (A e B), através do oitavo ícone (ângulo com amplitude fixa) encontrar os pontos A’ e B’ tal que medida do ângulo $B\widehat{A}B'$ seja 30º e a medida do ângulo $A\widehat{B}A'$ seja 60°. Marcar o ponto C, intersecção dos segmentos AB’ E BA’ (Figura 87).

[16] Adaptado de <http://www.youtube.com/watch?v=zO_oQKlax9E> Acesso em 13 de julho de 2014.

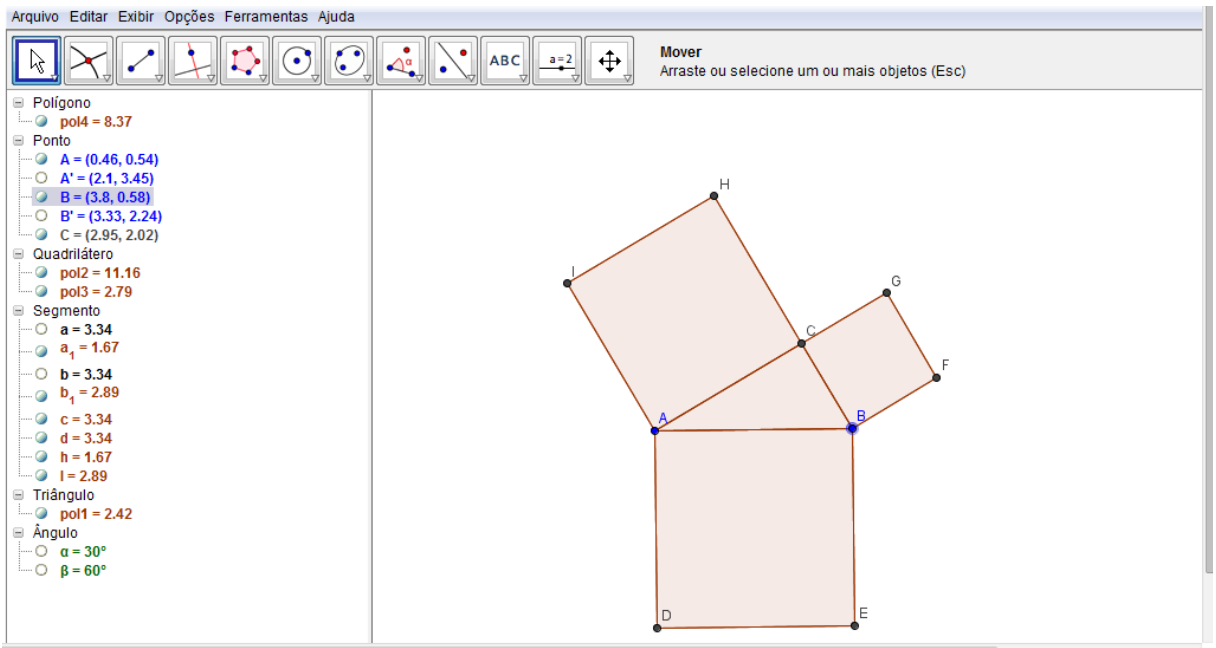
Figura 87 - Construção da árvore pitagórica (1).



Fonte: do autor.

Ocultar todos os objetos exceto os pontos A, B e C e através do quinto ícone (polígono) construir o triângulo retângulo ABC. Construir com o mesmo ícone os quadrados adjacentes aos lados do triângulo com medidas iguais as medidas da hipotenusa e dos catetos (Figura 88).

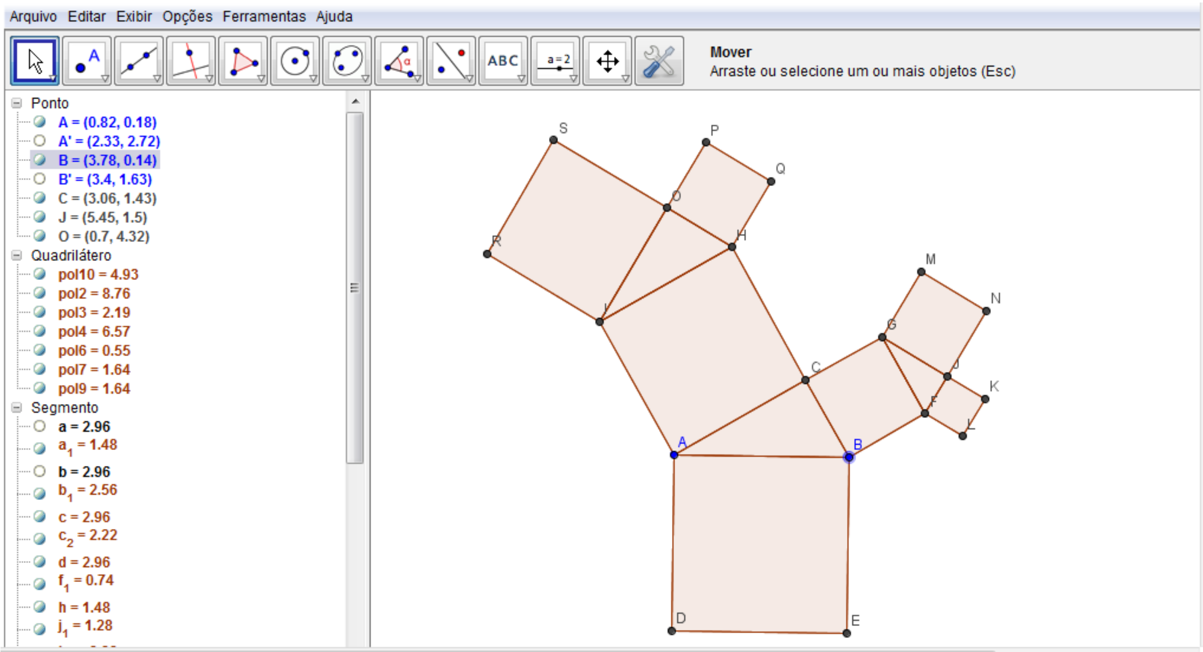
Figura 88 - Construção da árvore pitagórica (2).



Fonte: do autor.

Selecionar o triângulo e os dois quadrados menores e utilizando o menu ferramentas e, em seguida criar uma nova ferramenta selecionar como objetos finais os três objetos citados, como objetos iniciais os pontos A e B e nomear a ferramenta. Clicar no ícone criado e nos pontos G e F, novamente clicar nos pontos I e H (sentido horário) (Figura 89).

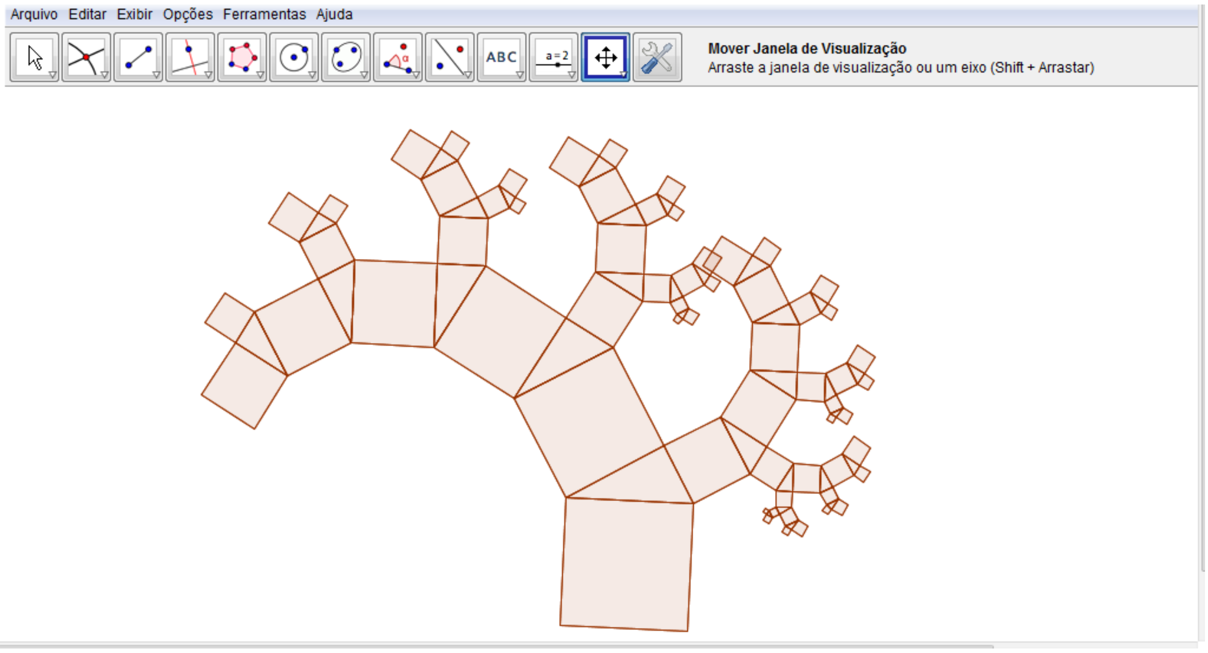
Figura 89 - Construção da árvore pitagórica (3).



Fonte: do autor.

Fazer a quantidade de iterações que desejar. Na figura 90 foram cinco iterações.

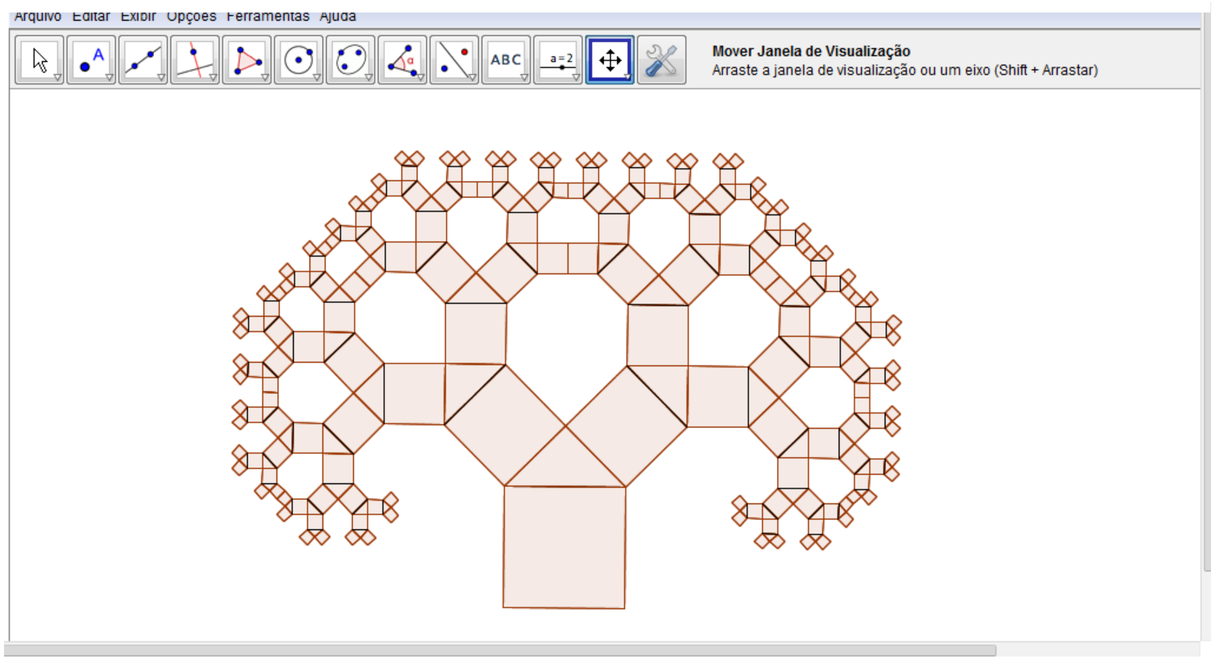
Figura 90 - Árvore Pitagórica após cinco iterações.



Fonte: do autor.

Para o caso em que o triângulo inicial é isósceles obtemos o seguinte fractal após sete iterações (Figura 91):

Figura 91 - Árvore Pitagórica partindo de um triângulo isósceles após sete iterações.



Fonte: do autor.

A falta de habilidades em lidar com as tecnologias tem se mostrado um fator de exclusão que atravessa as barreiras digitais e atinge o social e cultural. A escola está inserida neste mundo movido por tecnologias e por ser o local da disseminação de conhecimentos tem o papel de adequar - se a essa realidade e suprir as necessidades dos alunos, seja oportunizando o contato com as inovações e os preparando para o uso dessas novas ferramentas, seja incluindo as inovações nas metodologias didáticas visando tornar o processo ensino/aprendizagem mais interessante e significativo. As construções apresentadas neste item tem esse propósito, ao mesmo tempo em que propõe a familiarização com o computador e o software Geogebra, também é possível trabalhar diversos conceitos matemáticos de forma contextualizada ao tema fractais.

4 CONCLUSÃO

Este trabalho pretende ter apresentado com êxito a Geometria Fractal, expondo - a através de conceitos e definições simplificadas, entendível a um aluno do ensino médio, porém completa, satisfazendo, por exemplo, as necessidades de um aluno da área computacional que tenha curiosidade e pretenda aplicar esta geometria em seus estudos (modelagem computacional para objetos classificados como fractais poderia ser uma possibilidade).

No texto foi feita uma breve abordagem histórica da geometria, passando pela forte importância de Euclides na organização dos conceitos geométricos através de sua obra Elementos, do início da busca por novas geometrias que explicassem situações ainda não explicadas pela geometria euclidiana, até então chegar à Geometria Fractal, tornando - se a base para o restante do trabalho, que passa a fazer uma análise da real situação da aprendizagem da matemática na educação básica para então apresentar três ferramentas tomadas atualmente como essenciais para a construção de novas metodologias pelos norteadores da educação brasileira: a contextualização, o protagonismo juvenil e a inserção das tecnologias que foram trabalhadas na forma de atividades utilizando diversos materiais e métodos.

É importante destacar que o trabalho não foi idealizado com o intuito de defender a inclusão da Geometria Fractal como conteúdo do currículo de Matemática seja do ensino fundamental ou médio, já que estes se encontram saturados de itens a serem trabalhados durante o ano letivo. A riqueza desta geometria em desenvolver diversos sentidos, habilidades e a possibilidade de se trabalhar com diversos conteúdos matemáticos e de outras disciplinas evidenciam um tema a ser inserido nas escolas por meio de projetos interdisciplinares.

Desta forma, para um trabalho futuro, pretende - se fazer a elaboração de um projeto interdisciplinar conjunto aos professores das demais áreas utilizando como tema central a Geometria Fractal.

Que aos professores comprometidos com o seu papel de mediador do processo ensino/aprendizagem, este trabalho sirva de apoio e contribua de forma enriquecedora às aulas de matemática, fornecendo atividades que poderão ser utilizadas na íntegra ou adaptadas à cada realidade, tornando as aulas mais atrativas e promovendo situações de aprendizagens significativas, que os levem a perceber a Matemática em suas vidas e então possibilitar no dia - a - dia da sala de aula melhorias no ensino da Matemática na educação básica brasileira.

REFERÊNCIAS

ALVES, Célia Maria Filipe Santos Jordão. Fractais**: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino não Universitário**. Dissertação de Mestrado em Matemática para o Ensino. 323 f. Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007.

Arquitetura e Geometria Fractal: Fusão de conceitos para volumetria diferenciada. Disponível em: <C:\Users\Simone\Desktop\monografia\citacoes\aplicacoes\aplicacoes_ArquiteturaeGeometriaFractalArquitetônico.htm> Acesso em 09 de março de 2014.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 1995.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora Ltda, 2005.

BONSAI, Aido. **Arquivo de tudo sobre fractais**. Disponível em: <http://aidobonsai.com/tag/tudo-sobre-fractais/> Acesso em 04 de março de 2014.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. LDB – **Lei n º 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as Diretrizes de Bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL. Ministério de Educação e do Desporto**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Fundamental, 1997.

BRAZ, Fernanda Martins. **História da Geometria Hiperbólica.** 34 f. Dissertação de Especialização em Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

BRITO, Glaucia da Silva; PURIFICAÇÃO, Ivonélia. **Educação e novas tecnologias: um re-pensar**. 2. ed. Curitiba: Ibpex, 2008.

CARNEIRO, Elma. **Fractais.** Disponível em <http://www.caliandradocerrado.com.br/2008/09/blog-post_6814.html> Acesso em 23 de abril de 2014.

CARVALHO, Hamilton Cunha de. **Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática**. 101 f. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática. Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

CARVALHO, Maria Cecília Costa e Silva et al. **Fractais: uma breve introdução**. [local desconhecido][data desconhecida].

CRESCENTI, Eliane Portalone. **Os professores de matemática e a geometria: opiniões sobre a área e seu ensino**. 242 f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2006.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**. Tradução de Higyno H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

FERNANDES, Jaqueline Aparecida. Fractais**: uma nova visão da matemática. Dissertação de Graduação em Matemática**. UNILAVRAS, Lavras, 2007.

FERNANDES, Susana da Silva. **A contextualização no ensino de matemática: um estudo com alunos e professores do ensino fundamental da rede particular de ensino do distrito federal.** [local desconhecido] [data desconhecida]. Disponível em < http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22006/SusanadaSilvaFernandes.pdf> Acesso em 01 de Mario de 2014.

Fractais. Disponível em <http://nartural.ua.pt/fractais/IFS.aspx> Acesso em 28 de abril de 2014.

Fractais e a geometria da natureza: Aplicações dos fractais. Disponível em < http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico9.php> Acesso em 07 de março de 2014.

Fractais na Natureza, vídeo. Disponível em <http://www.youtube.com/watch?v=DwsoxSN-8Xg> Acesso em 23 de abril de 2014.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática.** 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

Hunting the Hidden dimension. Fractais: uma jornada pela dimensão oculta, vídeo. Nova Series Graphics. [local desconhecido][data desconhecida].

JANOS, Michel. **Geometria Fractal***.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda., 2008.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e Tecnologias**: O novo ritmo da informação. 2. ed. Campinas: Papirus, 2007.

Lorenzato, Sérgio. **Por que não ensinar Geometria?** A Educação Matemática em Revista, SBEM, ano 3, p. 3 – 13, jan/jun. 1995.

______. **Para Aprender Matemática.** 2. ed. Campinas: Autores Associados, 2008.

MANDELBROT, Bernoit B.; HUDSON, Richar L. **The (mis)behavior of markets: a fractal view of risk, ruin, and reward.** New York: Basic Books, 2004. Resenha de: KIMURA, Herbert. O mercado financeiro sob a óptica dos fractais. Disponível em:

<file:///C:/Users/Simone/z_arquivos_computador/Documents/Downloads/Aranha_Zambaldi_2005_Estatistica-multivariada_10965.pdf> Acesso em 07 de março de 2014.

MARTINS, Ana Maria Sala Minucci; LIBRANTZ, André Felipe Henrique. **A geometria fractal e suas aplicações em arquitetura e urbanismo**. São Paulo: Revista Exacta, v. 4, n. especial, p. 91-93, 25 de novembro de 2006.

MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Estado de Educação. **Referencial Curricula**r. Campo Grande, 2012.

NASCIMENTO, Eimard Gomes Antunes do. **Avaliação do uso do software geogebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola.** Disponível em < http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/67.pdf> Acesso em 02 de fevereiro de 2014.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e aplicações**. Dissertação de mestrado em ensino da Matemática. Faculdades de Ciência do Porto, Porto, 2006.

PADILHA, Teresinha Aparecida Faccio. et. al. **Construção de Fractais com uso do software Geogebra.** [local desconhecido] [data desconhecida].

PARANÁ, Secretaria de Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Paraná, 2008.

PEREIRA, Alceu Sergio. **Fractais Circulares: Algumas considerações e atividades.** Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

Pesquisa enfoca o uso de novas tecnologias no ensino. Agência de Notícias da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – Divulgando a cultura científica. Disponível em <http://agencia.fapesp.br/16789> Acesso em 01 de abril de 2014.

PRATES, Marco. **Brasil é 38º – de 44 países – em teste de raciocínio do Pisa.** Disponível em < http://exame.abril.com.br/brasil/noticias/brasil-fica-em-38o-de-44o-paises-em-teste-de-raciocinio> Acesso em 01 de Mario de 2014.

______, **Educação brasileira fica entre 35 piores em ranking global**. Disponível em <http://exame.abril.com.br/brasil/noticias/educacao-brasileira-fica-entre-35-piores-em-ranking-global> Acesso em 01 de maio de 2014.

RIBEIRO, Alana Renata. et al. **Geogebra: Aplicações ao ensino da matemática**. Curitiba, 2009.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **Fractais e Caos: A Matemática de Hoje**. São Paulo: Prandiano, 1990.

SALLUM, Élvia Mureb. **Fractais no Ensino Médio.** Revista do Professor de Matemática v. 57, 2005. Disponível em <http://www.rpm.org.br/conheca/fractais.pdf> Acesso em 12 de fevereiro de 2014.

SÃO PAULO. Secretaria de Educação. **Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática**. São Paulo, 2008.
SOUZA, Raimundo Medeiros. et al. **A geometria fractal como instrumento motivador no processo de ensino e aprendizagem de matemática**. Revista Anais Programa Ciência na Escola, v. 1, 2012. Disponível em <http://pce.inpa.gov.br/index.php/RCE/article/viewFile/115/36> Acesso em 09 de fevereiro de 2014.

STEWART, Ian. **Será que Deus joga dados? A nova matemática do caos**. Traduzido por Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica Ildeu de Castro Moreira, Alexandre Tort. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2011.

ANEXO 1