UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

HELLEN FERNANDES GONDIM

PROBABILIDADE E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: CONCEITOS E EXEMPLOS APLICÁVEIS NO ENSINO BÁSICO

Campo Grande - MS
Abril de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

HELLEN FERNANDES GONDIM

PROBABILIDADE E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: CONCEITOS E EXEMPLOS APLICÁVEIS NO ENSINO BÁSICO

ORIENTADOR: Prof. Dr. JAIR DA SILVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Campo Grande – MS
Abril de 2013

PROBABILIDADE E PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: CONCEITOS E EXEMPLOS APLICÁVEIS NO ENSINO BÁSICO

HELLEN FERNANDES GONDIM

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jair da Silva - UFMS

Prof.ª Dr.ª Janete de Paula Ferrareze - UFMS

Prof. Dr. Vando Narciso - UEMS

Campo Grande – MS
Abril de 2013

Aos meus pais,
João Hugo e Antonia.
Dedico.

AGRADECIMENTOS

- A Deus, por sua proteção.
- Aos meus pais, João Hugo e Antonia, por todo o amor, incentivo e dedicação dispensados a mim.
- Ao meu irmão, Hugo Cezar, por todos os momentos vividos juntos.
- Ao meu marido, Gabriel, pela paciência, respeito e dedicação em todos os momentos de nossas vidas.
- Ao meu orientador Jair da Silva, pela sabedoria, dedicação e paciência, para que eu pudesse alcançar mais esta etapa em minha vida.
- Aos professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, em especial, Elisabete, Claudemir e Rúbia Mara, pelos ensinamentos transmitidos.
- À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior), pelo apoio financeiro concedido.
- Aos meus colegas do mestrado, em especial, Josiane e Maykon, pela amizade, companheirismo e por todos os dias e noites de estudo em conjunto nesta jornada.
- Aos meus colegas de trabalho, em especial, Rosângela, Kátia, Álex e Ellen, pelo apoio e incentivo durante esta caminhada.
- À minha amiga Marli, pela correção linguística do trabalho e pelos conselhos de sempre.
- À todas as pessoas que de alguma maneira me auxiliaram nesta etapa.

Muito Obrigada.

"Conhecimento não é aquilo que você sabe, mas o que você faz com aquilo que você sabe."

(Aldous Huxley)

RESUMO

A partir de uma abordagem centrada em explorar os aspectos históricos, a base conceitual e atividades aplicáveis no Ensino Básico, este trabalho tem por objetivo introduzir conceitos básicos de Probabilidade e Probabilidade Geométrica, visando principalmente abordar situações tratáveis nos anos finais do Ensino Médio, com ênfase especial na resolução de problemas interessantes e distintos dos trabalhados em sala de aula. A temática foi escolhida uma vez que esse tema, infelizmente, é pouco visto no ensino fundamental e no ensino médio, apesar do estudo da probabilidade ser um tópico de grande importância em inúmeras áreas, como a medicina, as engenharias, administração, entre outros. Os problemas que serão propostos e trabalhados, muito embora sejam problemas clássicos da Probabilidade Geométrica, são, quase sempre, desconhecidos por muitos professores do ensino fundamental e do ensino médio e, ainda, pela maioria absoluta dos alunos que estão neste nível de escolaridade. São atividades cujas soluções teóricas são surpreendentes e para alguns desses também serão obtidas soluções experimentais e soluções com o uso de recursos. Pretendemos assim, trabalhar conceitos de probabilidade e probabilidade geométrica utilizando como recursos: experimentos, jogos e desafios. Dessa forma, temos que o tema proposto contribuirá para o aprimoramento do conhecimento matemático e, ainda, apresentará uma dinâmica metodológica diferenciada para o ensino de Probabilidade, uma vez que esse tópico não é muito explorado no Ensino Básico.

Palavras-chave:
Probabilidade Geométrica, Geometria, Probabilidade, Inequações, Área de figuras planas, Ensino Básico.

ABSTRACT

Starting from an approach focused on exploring the historical aspects, conceptual basis and applicable activities for basic education, this study aims at introducing basic concepts of probability and geometric probability considering specially an approach of treatable situations in the final years of high school, with a specific emphasis on interesting problem resolutions different from the ones used in class. This topic has been chosen once it is given little importance at elementary and high school unfortunately, although the probability study is an important topic for many fields such as medicine, engineering, business administration and others. The problems that will be proposed and worked on are classic problems of geometric probability. However, they are almost unknown by teachers of elementary and high school and also by most students that are in these levels. These activities which present theoretical solutions are surprising and for some of these experimental solutions and solutions using resources will also be carried out. In this case, we intend to work with concepts of probability and geometric probability using resources such as: experiments, games and challenges. Thus, the proposed topic will contribute for the improvement of the mathematics knowledge and it will also present a dynamic methodology for the probability teaching, as this topic it is not very explored in basic education.

Key words:
Probability geometric, geometry, probability, inequations, area of plane figures, basic education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A probabilidade é um tópico de relevante importância na Matemática, abrangendo problemas com o conceito de incerteza e tomada de decisões. A maior forma de utilização desse tema é para modelar experimentos ou eventos cujos resultados são aleatórios. Utiliza-se o conceito de experimento (ou observação ou evento) aleatório para qualquer experimento cujo resultado não é conhecido exatamente. Alguns exemplos de experimento aleatório podem ser: o resultado do próximo jogo de futebol, as faces observadas em dois lançamentos de um dado, as faces observadas no lançamento de uma moeda, o resultado de um sorteio ou mesmo a possibilidade de se ganhar na loteria.

Ao adentrarmos em um ambiente escolar, devemos sempre ter em foco que, de tudo que ensinamos aos nossos alunos, os assuntos que sempre irão despertar maior interesse serão os que envolverem situações do cotidiano. Com o conteúdo de probabilidade não é diferente. Temos como desafio maior, ao abordarmos esse tema, o de integrar os conceitos, as técnicas de resolução, as interpretações das soluções encontradas e as aplicações dando prioridade às situações que façam sentido para o aluno.

Ainda, é nítida a necessidade de uma abordagem diferente desse tema, utilizando não somente aqueles clássicos problemas envolvendo jogos de azar, mas abrangendo também problemas que utilizam a noção de frequência, problemas geométricos e experimentos práticos e de viável aplicação em sala de aula.

A contextualização de uma questão, levando-a ao cotidiano do aluno, se faz necessária uma vez que objetivamos abordar atividades que os façam interagir em grupos e adquirir conhecimento de forma autônoma. Entendemos que o professor deve interagir como mediador nesse processo, mostrando os caminhos, mas deixando o aluno caminhar por eles.

A partir deste pensamento, este trabalho tem como enfoque o de trabalhar os conceitos de probabilidade utilizando problemas práticos e ainda, utilizar nas resoluções desses problemas conceitos variados, como probabilidade clássica, probabilidade condicional e probabilidade geométrica.

No primeiro momento, abordaremos os aspectos históricos, desde o surgimento, o desenvolvimento e a evolução do estudo de probabilidade e probabilidade geométrica. Ainda neste capítulo exploraremos a teoria inerente ao estudo desse tema.

Na sequência, daremos enfoque aos conceitos de probabilidade geométrica, levando em conta, principalmente, que a maioria das atividades a serem desenvolvidas abordará esta parte da probabilidade.

Logo após explanaremos sobre o ensino de probabilidade no ensino básico, baseando nosso estudo nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

O próximo e último passo consistirá na elaboração de sequências didáticas contendo atividades de probabilidade e/ou probabilidade geométrica aplicáveis no Ensino Básico com enfoque no Ensino Médio.

2. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE PROBABILIDADE – ASPECTOS HISTÓRICOS E CONCEITUAÇÃO TEÓRICA

Para iniciarmos o tratamento do tema abordado, iremos descrever, de maneira breve, os aspectos históricos relevantes ao estudo de probabilidade, desde o início e o desenvolvimento da Teoria da Probabilidade, remontando de sua origem, com os jogos de azar, até os problemas atuais, tais como algumas aplicabilidades. Ainda, faremos um pequeno resumo sobre o histórico da probabilidade geométrica.

Na sequência, apresentaremos a conceituação teórica, pertinente no estudo de Probabilidade.

2.1 – PROBABILIDADE - ASPECTOS HISTÓRICOS

2.1.1 - SURGIMENTO DA PROBABILIDADE

O termo **probabilidade** deriva do latim *probare (provar ou testar),* e representa uma parcela da Matemática que tem por objetivo a formulação de modelos teóricos, para o tratamento matemático da ocorrência (ou não ocorrência) de fenômenos aleatórios.

A abordagem da probabilidade como ciência matemática se deu através de um desenvolvimento moderno, ou seja, recente, principalmente se compararmos com a formalização de outros ramos matemáticos, apesar dos jogos de azar serem jogados desde a Antiguidade e, com mais relatos, na Idade Média (BOYER,1996,pág.250) [3]. Estes jogos demonstram que o interesse em quantificar as ideias da probabilidade tem existido por milênios, mas as descrições matemáticas de uso nesses problemas só apareceram muito mais tarde.

O primeiro registro sobre o estudo de probabilidade surgiu com Girolamo Cardano (Itália, 1501 - 1576) que, em 1526 escreveu um trabalho notável sobre probabilidades, o livro *Liber de Ludo Aleae* (Livro dos jogos de azar) no qual resolveu vários problemas de enumeração. A obra de Cardano, porém, só foi publicada em 1663.

De acordo com [3], data de meados do século XVII, por volta do ano 1654, o início do estudo mais sistemático de probabilidade, através da troca de correspondência entre os matemáticos Blaise Pascal (França; 1623 – 1662) e Pierre de Fermat (França; 1601 ou 1607/8 - 1665), no qual tratavam do problema dos pontos, apresentado a Pascal por

Chevalier de Méré (França, 1607 – 1684), que trazia, em seu texto, a seguinte questão: Dois jogadores, aos quais faltam *a* e *b* pontos, respectivamente, decidem interromper o jogo. Como as apostas devem ser divididas?

Tanto Pascal quanto Fermat resolveram o problema dado, e cada um tomou um caminho diferente de resolução, mas produzindo a mesma solução ao final. Esse problema interessou a Christiaan Huygens (Haia, 1629-1695) que iniciou o estudo propriamente dito da Teoria das Probabilidades, dando o primeiro tratamento científico ao assunto, e ainda incentivou Jacques Bernoulli (Basileia, 1654-1705) a estender seu estudo de cálculo infinitesimal, utilizando-o em aplicações ao cálculo das probabilidades.

Em 1713, foi publicado um grande tratado sobre a teoria das probabilidades, chamado *Ars Conjectandi* (Arte da Conjectura), de Jacques Bernoulli (Basileia, 1654-1705), e em 1738, foi publicado *The Doctrine of Chances* (Doutrina da Probabilidade), de Abraham de Moivre (França, 1667- 1754), os quais trataram pioneiramente o assunto como um ramo da matemática.

Ainda, Pierre Simon, conhecido como Marquês de Laplace (França, 1749 - 1827), foi o responsável por uma grande parcela das ideias e resultados sobre probabilidade (EVES,2007,pág.467) [10]. Em 1812 Laplace publicou *Théorie analytique des probabilités* (Teoria analítica das probabilidades) no qual aprimorou o método de estimar a probabilidade utilizando a proporção do número de casos favoráveis, comparado ao número total de casos possíveis, sendo que esse método já havia sido explorado por Laplace em um artigo escrito em 1779. Em 1814, Laplace publica o ensaio *Essai philosophique sur les probabilités* (Ensaio filosófico sobre as probabilidades), no qual projetou um mecanismo matemático utilizando raciocínio indutivo, baseado na teoria da probabilidade. Suas ideias dominaram durante todo o século XIX.

No século XIX, os autores que escreveram sobre a teoria da probabilidade incluíam ainda Sylvestre Lacroix (França, 1765 - 1873), Joseph Littrow (Áustria, 1781 - 1840), Adolphe Quetelet (Bélgica, 1796 - 1874), Richard Dedekind (Alemanha, 1831 – 1916), Hermann Laurent (França, 1841 - 1908), entre outros.

Apesar dos avanços feitos a partir do século XVI, foi somente no século XX que se desenvolveu uma teoria matemática rigorosa, embasada em axiomas, definições e teoremas. Os responsáveis pelo desenvolvimento bem sucedido de uma axiomática completa e consistente do cálculo de probabilidades foram Andrei Nikolaevich

Kolmogorov (Rússia, 1903 – 1987) e Richard Threlkeld Cox (Estados Unidos da América,1898 - 1991).

2.1.2 - HISTÓRICO SOBRE A PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Quanto à probabilidade geométrica, temos que seu início se deu através de Georges-Louis Leclerc, conhecido como Conde de Buffon (França, 1707 – 1788), com o conhecido problema da Agulha de Buffon [20] . Nesse problema o interesse é calcular a probabilidade de uma agulha de comprimento ℓ, lançada num plano marcado por linhas paralelas, tocar numa destas linhas marcadas. Essas linhas estão separadas por uma distância d, com $\ell \leq d$. Mantendo constante os valores de ℓ e lançando a agulha, queremos saber se houve, ou não, o contato entre essa agulha e alguma das linhas.

A fim de calcularmos a probabilidade dessa agulha tocar uma das linhas, devemos seguir os seguintes passos: calculamos as possibilidades da agulha encostar em uma das linhas, ou seja, calculamos as possibilidades favoráveis; em seguida, calculamos as possibilidades totais de a agulha tocar ou não umas das linhas, ou seja, possibilidades totais; finalizamos calculando a probabilidade da agulha tocar uma das linhas, utilizando a definição de probabilidade (divisão dos casos favoráveis pelos casos possíveis).

Um ponto interessante da solução desse problema é que, ao repetirmos o experimento um grande número de vezes, o valor da probabilidade se aproximará do número π [23].

Concluímos que esse ramo da matemática, desenvolvido a partir do século XVI, é de importância inestimável para a sociedade, uma vez que é através de seus cálculos e definições que podemos realizar cálculos de estimativas, tomada de decisões, avaliação de riscos, entre tantas outras aplicabilidades.

2.2 – PROBABILIDADE – CONCEITUAÇÃO TEÓRICA

A teoria da probabilidade é uma área de relevante importância na Matemática, abrangendo situações nas quais não é possível prever resultados e ainda, com o uso dos conceitos probabilísticos, é possível explorar variadas aplicações reais. A forma mais comum de utilização do tema probabilidade é para modelar experimentos ou eventos cujos resultados não conhecemos com precisão.

2.2.1 – PROBABILIDADE

Para o estudo desse tema, necessitaremos de embasamento teórico através das definições na qual a teoria se baseia e em suas propriedades e características. Para isto utilizaremos os textos [1], [2], [12], [13], [14], [16] e [18].

Definição 1: Um experimento que pode fornecer diferentes resultados, se repetido essencialmente sob as mesmas condições, é dito experimento *aleatório*. Em contrapartida, um experimento é dito *determinístico* quando, repetido várias vezes, conduz ao mesmo resultado. Utilizaremos a notação ε para designar um experimento aleatório.

Como exemplo de experimento aleatório podemos pensar na situação do lançamento de um dado, pois neste caso não podemos afirmar qual face estará virada para cima ao cair, uma vez que este experimento pode apresentar seis (6) possibilidades distintas. Da mesma maneira, podemos pensar em jogos com moedas ou mesmo com as dezenas sorteadas em um jogo de loteria.

Definição 2: O conjunto que contém todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado *espaço amostral*. Utilizaremos a notação Ω para representar espaço amostral.

Para representarmos a definição de espaço amostral, vamos considerar o lançamento de uma moeda honesta e observar a face voltada para cima. Temos que, utilizando a notação K para cara e C para coroa, o conjunto dos resultados possíveis (espaço amostral) será:

$$\Omega = \{K, C\}.$$

Definição 3: Um *evento* é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Sempre representaremos um evento por letras maiúsculas.

Para exemplificarmos a definição de evento, vamos resolver a seguinte questão: Em uma urna que contém 10 bolas numeradas, será retirada uma bola ao acaso. Qual a possibilidade de ela ser numerada com um múltiplo de quatro (4)?

Temos que o espaço amostral neste exemplo é dado por todas as bolas numeradas, ou seja, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Já os resultados favoráveis, que denominamos como eventos, são dados pelas bolas numeradas com os números 4 e 8 (múltiplos de 4). Assim, $E = \{4,\ 8\}$.

Pela definição 3, temos que qualquer subconjunto de um espaço amostral é denominado evento. Se este referido subconjunto possuir apenas um elemento, o denominaremos como *evento elementar* (resultado elementar).

Definição 4.: Dois eventos A e B são *disjuntos* ou *mutuamente exclusivos* ou ainda *mutuamente excludentes* se $A \cap B = \phi$.

Temos que, se A e B são eventos em um mesmo espaço amostral Ω, então:

- $A \subset B$ se $w \in A$ implicar que $w \in B$, ou seja, a ocorrência em A implica a ocorrência em B;
- $A \cup B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A ou ocorre o evento B, ou seja, pelo menos um dos eventos A ou B ocorre;
- $A \cap B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorrem ambos os eventos A e B;
- $A - B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A mas não ocorre o evento B.
- $\overline{A}$, chamado de evento oposto de A, é o evento que ocorre se, e somente se, o evento d não ocorre.

Abordaremos, neste trabalho, duas formas de definirmos probabilidade, as quais são as estudadas no Ensino Básico. São elas: definição pela Lei de Laplace e definição frequencial.

A definição de Probabilidade dada pela Lei de Laplace é aplicável em situações em que os vários resultados elementares possíveis são equiprováveis (todos têm a mesma probabilidade).

Lei de Laplace: A probabilidade de um evento associado a certo experimento aleatório é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis do evento ocorrer e o número de casos possíveis (espaço amostral). Podemos representar isso da seguinte maneira:

Suponhamos que os experimentos aleatórios tenham as seguintes características:

a) Existe um número finito (denominaremos por n) de eventos elementares que totalizam os casos possíveis. A união de todos os eventos elementares é dada pelo espaço amostral Ω.

b) Os eventos elementares são equiprováveis (todos têm a mesma probabilidade de ocorrer).

c) Todo evento A é uma união de m eventos elementares onde $m \leq n$ (casos favoráveis).

Desse modo, podemos definir então:

$$\Pr obabilidade\ de\ A = p(A) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis} = \frac{\#(A)}{\#(\Omega)} = \frac{m}{n}$$

Podemos adotar também o modelo frequencial para chegarmos a definição de probabilidade. Nesse, se repetirmos uma experiência n vezes e um dado evento A, que nos interessa, ocorrer em j vezes nessa experiência, adotaremos para *P(A)* a frequência relativa de ocorrer o evento *A*, isto é, o número de vezes que o evento *A* ocorreu dividido pelo número total de repetições da experiência, ou seja, $P(A) = \frac{j}{n}$.

Assim, para firmarmos a definição, associaremos um número para cada evento, que denominaremos por probabilidade de o evento e que traduzirá a possibilidade de o evento ocorrer no decorrer da experiência.

Voltando ao exemplo no qual tratamos da probabilidade de, entre dez bolas numeradas, tirarmos ao acaso uma bola com número múltiplo de 4, temos que dos dez possíveis resultados, apenas dois deles são favoráveis a resolução do problema. Logo, a probabilidade é de $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 20\%$.

Neste trabalho utilizaremos, para resolver as atividades, a definição dada pela Lei de Laplace.

Definição 5:[13] Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ tal que:

i) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii)Se A e B são eventos *mutuamente excludentes*, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente $(A \cap B = \phi)$, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Teorema 1:[13] Sejam A e B eventos. Então:

i) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ii) $P(\phi) = 0$.

iii) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

v) Se $A \supset B$ então $P(A) \geq P(B)$.

Demonstração:

i) Utilizando a definição 5, temos que $P(\Omega) = 1$. Assim, $1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$. Segue então que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

ii) Temos que $P(\Omega) = P(\Omega \cup \phi) = P(\Omega) + P(\phi)$, pois Ω e ϕ são mutuamente excludentes. Logo $P(\phi) = 0$.

iii) Temos que, como $A - B$ e $A \cap B$ são mutuamente excludentes, $P(A) = P[(A - B) \cup (A \cap B)] = \mathrm{P(A - B)} + P(A \cap B)$. Segue então que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

iv) Podemos afirmar que $P(A \cup B) = P[(A - B) \cup B] = \mathrm{P(A - B)} + P(B)$, uma vez que $A - B$ e B são mutuamente excludentes. Assim, utilizando o fato que $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ (ver item iii), podemos concluir que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

v) Como $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ (ver item iii), se $A \supset B$, temos que $P(A - B) = P(A) - P(B)$. Como $P(A - B) \geq 0$, concluímos que $P(A) \geq P(B)$.

A fim de fixarmos as definições estudadas até o momento, vamos resolver um exemplo clássico de probabilidade.

Exemplo:[18] Dois dados não-tendenciosos são jogados simultaneamente. Qual é a probabilidade de que a soma dos números mostrados nas faces de cima seja 7?

Solução: Iremos representar primeiro o espaço amostral. Nesse caso, ele pode ser descrito através de uma tabela (nem todos os exemplos podem ter seus espaços amostrais descritos tão detalhadamente).

O espaço amostral é formado, nesse exemplo, por todos os pares *(i, j)* nos quais *i* e *j* são inteiros positivos compreendidos no intervalo entre 1 e 6 (faces do dado). Assim, podemos descrever o espaço amostral da seguinte maneira:

<table>
<tr><th colspan="8">Espaço Amostral – Representação</th></tr>
<tr><th colspan="2" rowspan="2"></th><th colspan="6">Número do segundo dado</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr>
<tr><th rowspan="6">Número do primeiro dado</th><th>1</th><td>(1,1)</td><td>(1,2)</td><td>(1,3)</td><td>(1,4)</td><td>(1,5)</td><td>(1,6)</td></tr>
<tr><th>2</th><td>(2,1)</td><td>(2,2)</td><td>(2,3)</td><td>(2,4)</td><td>(2,5)</td><td>(2,6)</td></tr>
<tr><th>3</th><td>(3,1)</td><td>(3,2)</td><td>(3,3)</td><td>(3,4)</td><td>(3,5)</td><td>(3,6)</td></tr>
<tr><th>4</th><td>(4,1)</td><td>(4,2)</td><td>(4,3)</td><td>(4,4)</td><td>(4,5)</td><td>(4,6)</td></tr>
<tr><th>5</th><td>(5,1)</td><td>(5,2)</td><td>(5,3)</td><td>(5,4)</td><td>(4,5)</td><td>(5,6)</td></tr>
<tr><th>6</th><td>(6,1)</td><td>(6,2)</td><td>(6,3)</td><td>(6,4)</td><td>(6,5)</td><td>(6,6)</td></tr>
</table>

Tabela 1 – Representação do espaço amostral

O número de casos possíveis (espaço amostral) é de 36 possibilidades.

Vamos agora analisar os casos favoráveis, ou seja, os pares *(i, j)* tais que o valor da soma $i+j$ seja igual a 7.

Temos então que o total de casos favoráveis dé 6 possibilidades, descritas abaixo:

$$A = \{(6,\ 1),(5,\ 2),(4,\ 3),(3,\ 4),(2,\ 5),(1,\ 6)\}$$

Portanto, a probabilidade pedida é de:

$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

2.2.2 - PROBABILIDADE CONDICIONAL

Determinar a probabilidade condicional trata-se de calcular a probabilidade de um evento *B* ocorrer sabendo que já ocorreu um outro evento *A*.

Representa-se probabilidade condicional por $P(B/A)$ e lemos a notação da seguinte maneira: "probabilidade condicional de B ocorrer na certeza de A", ou ainda, "probabilidade de B dependente da situação A".

Definição 6:[13] Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de *B* dado *A* é o número $P(A \cap B)/P(A)$. Temos então que a probabilidade condicional de *B* na certeza de *A* é o número $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

É válido notarmos que esse número só está definido quando $P(A) > 0$.

Como $P(A) > 0$ temos também $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.

Vamos ainda observar algumas propriedades básicas da noção de probabilidade condicional.

Proposição 1:[18] Seja A um evento tal que $P(A) > 0$. Então:

a)

i) $P(\phi / A) = 0$,

ii) $P(\Omega / A) = 1$

iii) $0 \leq P(B/A) \leq 1$.

b) $P((B \cup C)/A) = P(B/A) + P(C/A)$, Se $B \cap C = \phi$. Ou seja, fixado o evento A, a probabilidade condicional é outra probabilidade sobre o espaço amostral Ω.

Demonstração

a)

i) Temos que $P(\phi / A) = \dfrac{P(\phi \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\phi)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$, logo $P(\phi / A) = 0$.

ii) Temos que $P(\Omega / A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$, logo $P(\Omega / A) = 1$.

iii)Como $0 \leq P(B \cap A) \leq P(A)$ temos $0 \leq \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$,isto é, $0 \leq P(B/A) \leq 1$.

b) Temos, utilizando a definição de probabilidade condicional que $P((B \cup C)/A) = \dfrac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)}$, ou seja, $P((B \cup C)/A) = \dfrac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} =$

$$= \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P(B/A) + P(C/A).$$

Agora vamos explorar um exemplo cuja resolução envolve probabilidade condicional.

Exemplo 2: Uma gaveta contém 4 meias amarelas e 6 meias vermelhas. Retiram-se, sucessivamente e sem reposição, duas meias dessa gaveta. Qual a probabilidade de a primeira meia ser amarela na certeza que a segunda meia é amarela?

Solução: Para iniciarmos a resolução, vamos nomear M_1 o evento "a primeira meia é amarela" e de M_2 o evento "a segunda meia é amarela". Queremos saber $P(M_1 / M_2)$, ou seja, a probabilidade de a primeira meia ser amarela sabendo que a segunda meia é amarela. Vamos utilizar a fórmula da definição de probabilidade condicional.

$$P(M_1 / M_2) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)}$$

Primeiro, vamos calcular $P(M_1 \cap M_2)$. Temos que $P(M_1 \cap M_2) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$, uma vez que na primeira retirada, temos 4 meias amarelas em 10 meias, e na segunda extração, assumindo que já temos uma meia amarela, temos 3 meias amarelas em 9 meias.

Para o cálculo de $P(M_2)$, vamos considerar todas as possibilidades quanto à primeira meia. Para a segunda meia ser amarela, ou a primeira meia foi amarela ou a primeira meia foi vermelha. Podemos expressar essa condição da seguinte maneira:

$P(M_2) = P(M_1 \cap M_2) \cup P(V_1 \cap M_2)$, onde V_1 representa o evento "a primeira meia foi vermelha". Assim, como os eventos são mutuamente excludentes, temos:

$$P(M_2) = P(M_1 \cap M_2) \cup P(V_1 \cap M_2) = P(M_1 \cap M_2) + P(V_1 \cap M_2) = \frac{2}{15} + P(V_1 \cap M_2).$$

Ainda, $P(V_1 \cap M_2) = \frac{6}{10}.\frac{4}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$, pois na primeira retirada temos 6 meias vermelhas em 10 meias, e na segunda extração, temos 4 meias amarelas em 9 meias.

Logo, $P(M_2) = \frac{2}{15} + P(V_1 \cap M_2) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P(M_1 / M_2) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Um outro modo eficiente e mais acessível de resolver questões que possuem várias etapas é a utilização das árvores de possibilidades. Nesses diagramas, colocamos todas as situações possíveis de ocorrer o evento, e com isso as probabilidades condicionais ficam atreladas as extremidades de cada galho na certeza da origem do galho. Assim, para calcular a probabilidade utilizando o diagrama, devemos percorrer os caminhos que mostram a situação cuja probabilidade queremos determinar, multiplicando as probabilidades em cada caminho e somando os produtos ao longo dos vários caminhos.

Neste exemplo, temos a seguinte árvore:

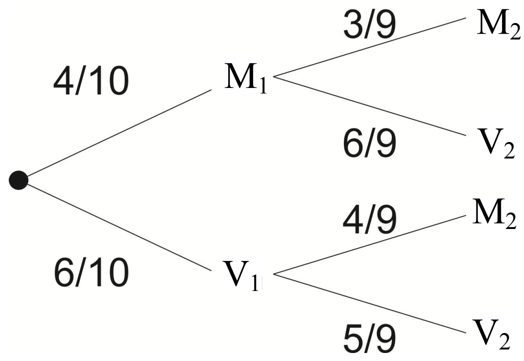


Figura 1 – Diagrama de árvore

Logo, usando a árvore, temos:

$$P(M_1 \cap M_2) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} = \frac{2}{15};$$

$$P(M_2) = \frac{4}{10}.\frac{3}{9} + \frac{6}{10}.\frac{4}{9} = \frac{2}{5} \quad \text{e}$$

$$P(M_1 / M_2) = \frac{P(M_1 \cap M_2)}{P(M_2)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{2}{5}} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

3. PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Vamos descrever neste trabalho, variados problemas que estão centrados nos conceitos da probabilidade geométrica. Antes de abordá-los, iremos definir como é feito o cálculo de probabilidade quando se tratam de problemas geométricos. Para isso, usaremos como base os textos [8], [9], [20], [23], [24] e [27].

A probabilidade geométrica é uma parte do estudo de probabilidade na qual, para resolver problemas probabilísticos, faz-se necessário o uso de geometria. As noções geométricas mais utilizadas na resolução desses problemas são as noções de comprimento, área e volume.

3.1 PROBABILIDADE UTILIZANDO COMPRIMENTO:

Em diversos problemas precisaremos escolher um ponto de uma determinada "linha", ou seja, necessitaremos da noção de segmentos para a resolução.
Sejam X e Y pontos de um segmento (linha) de extremos A e B.

Figura 2 – Cálculo de probabilidade envolvendo comprimento

Adotaremos que a probabilidade de que um ponto da linha AB (segmento AB) pertença à linha XY (contida em AB) é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB. Portanto, selecionado um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será de:

$$P(XY) = \frac{Medida\ \ do\ \ comprimento\ \ de\ \ XY}{Medida\ \ do\ \ comprimento\ \ de\ \ AB}$$

Exemplo 1: Qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento 2 metros, um ponto pertencer exatamente nos 10 centímetros iniciais?
Solução: Primeiro, vamos converter todos os dados a mesma unidade de medida. Assim, em uma corda de 200 centímetros, queremos calcular a probabilidade de um ponto pertencer aos 10 centímetros iniciais.

Observe a figura:

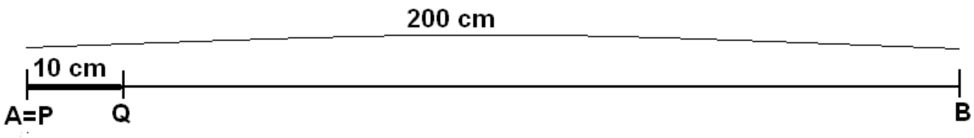


Figura 3 – Representação da situação dada no exemplo 1

Assim, a probabilidade pedida é a de um ponto do segmento AB, de 200 centímetros, pertencer ao segmento PQ, de 10 centímetros. Logo,

$$P(PQ) = \frac{Medida\ \ do\ \ comprimento\ \ de\ \ PQ}{Medida\ \ do\ \ comprimento\ \ de\ \ AB} = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Portanto, a chance de que o ponto pertença aos 10 centímetros iniciais é de 5%.

3.2 PROBABILIDADE UTILIZANDO ÁREA:

A maioria dos problemas de probabilidade geométrica utiliza em sua resolução as noções básicas de área de figuras planas.

Consideremos uma região X do plano, contida em uma região A.

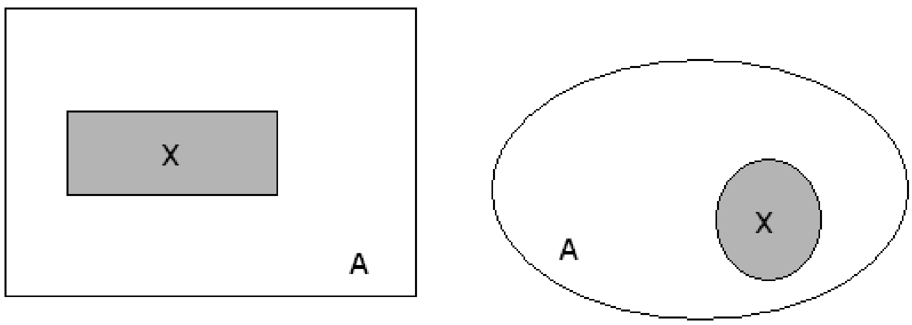


Figura 4 – Cálculo de probabilidade envolvendo áreas genéricas

Adotaremos que a probabilidade de que um ponto da região A (Área A) pertença à região X (área X) é proporcional área de X e não depende da posição que X ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a X será de:

$$P(X) = \frac{Medida\ \ da\ \ área\ \ de\ \ X}{Medida\ \ da\ \ área\ \ de\ \ A}$$

Exemplo 2: Um construtor está vendendo uma casa para um cliente, feita em um terreno de forma retangular, com 24 metros de largura por 40 metros de comprimento. A única exigência imposta pelo comprador é que a casa fique a uma distância de 3 metros de cada muro. Qual a probabilidade de a casa cumprir essa exigência?

Solução: Temos que a probabilidade de a casa cumprir a exigência feita pelo comprador é dada pelo quociente entre a área de um retângulo de lados 18m por 34m e a área do terreno citado. Temos que a área do retângulo de comprimento de 40 metros e largura de 24 metros é 960 m².

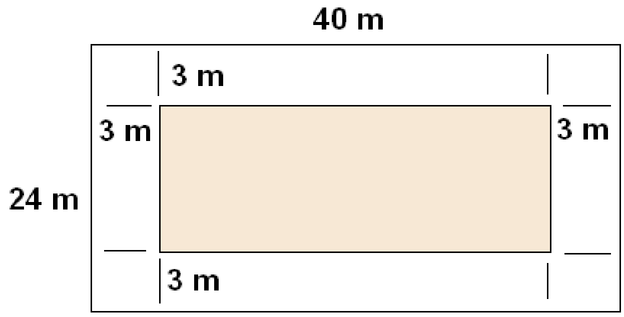


Figura 5 – Representação da situação dada no exemplo 2

Assim, observando a figura e calculando os lados do retângulo interior, temos que este retângulo possui 18 metros de largura por 34 metros de comprimento. Logo, sua área é de 612 m².

Assim, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{\text{Área do retângulo inscrito}}{\text{Área do terreno}} = \frac{612}{960} = 0{,}6375$$

Portanto, a chance de o construtor ter a casa que cumpra as exigências é de 63,75%.

3.3 PROBABILIDADE UTILIZANDO VOLUME:

São poucos os problemas probabilísticos conhecidos que utilizam a noção de volume de um corpo. Mas não são menos importantes.

Suponhamos um corpo V’ no espaço, contido em um corpo V.

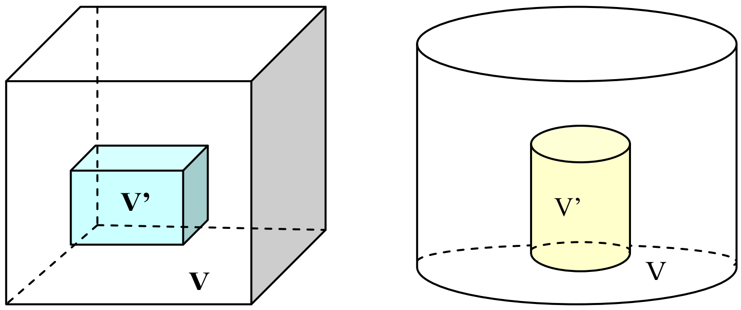


Figura 6 – Cálculo de probabilidade envolvendo volumes genéricos

Admitiremos que a probabilidade de que um ponto do corpo de V (Volume V) pertença ao corpo V’ (Volume V’) é proporcional ao volume de V’ e não depende da posição que V’ ocupa em V. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de V, a probabilidade de que ele pertença a V’ será de:

$$P(V') = \frac{Medida\ \ do\ \ volume\ \ de\ \ V'}{Medida\ \ do\ \ volume\ \ de\ \ V}$$

Exemplo 3: Em um paralelepípedo retangular de 12 centímetros de comprimento por 10 centímetros de largura por 12 centímetros de altura, temos uma pirâmide retangular inscrita, como mostra a figura:

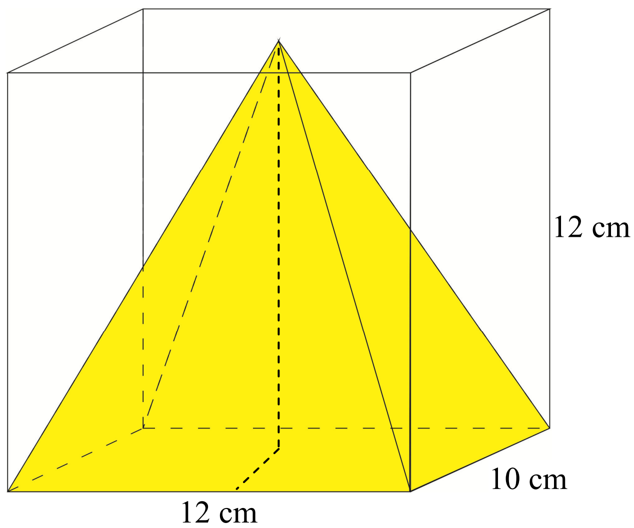


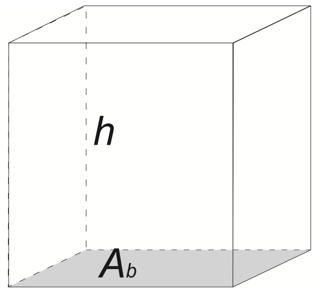
Figura 7 – Representação da situação dada no exemplo 3

Qual a probabilidade de, ao pegarmos um ponto ao acaso no interior do paralelepípedo, esse ponto pertencer a pirâmide?

Solução: Para resolvermos, temos que saber como calculamos o volume do paralelepípedo retangular e da pirâmide.

O volume de um paralelepípedo é dado em função da área de sua base e da altura h, de acordo com a fórmula abaixo:

$$V = A_b.h$$



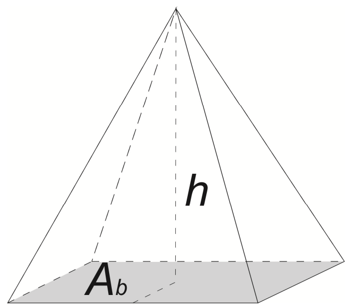
Onde

- V é o volume
- A_b é a área da base do paralelepípedo
- h é a altura do paralelepípedo

Figura 8 - Volume de um paralelepípedo

O volume de uma pirâmide é dado em função da área de sua base e da altura h, de acordo com a fórmula abaixo:

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h$$

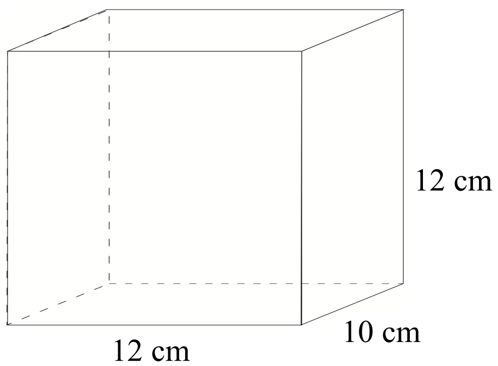


Onde

- V é o volume
- A_b é a área da base da pirâmide
- h é a altura da pirâmide

Figura 9 - Volume de uma pirâmide

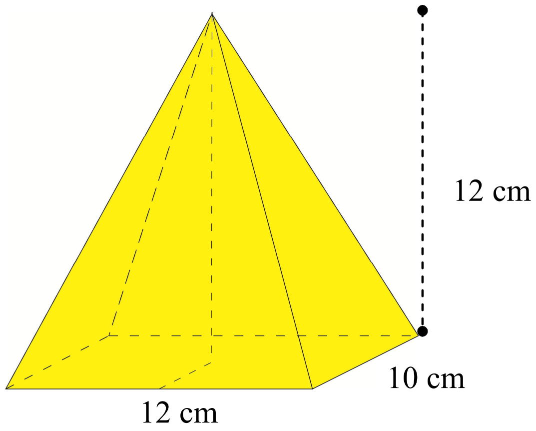
Assim, o volume do paralelepípedo retângulo dado no exemplo é:



$$V = 12.10.12 = 1440 \ cm^3$$

Figura 10 – Cálculo do volume do paralelepípedo – Exemplo 3

Ainda, o volume da pirâmide dada no exemplo é:



$$V = \frac{1}{3}.12.10.12 = 480 \ cm^3$$

Figura 11 – Cálculo do volume da pirâmide – Exemplo 3

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{volume \ \ da \ \ pirâmide}{volume \ \ do \ \ paralelepípedo} = \frac{480}{1440} = \frac{1}{3} = 0{,}3333$$

Portanto, a chance de, escolhido um ponto ao acaso no paralelepípedo retângulo, ele pertencer a pirâmide é de 33,33%.

4. A PROBABILIDADE NO ENSINO BÁSICO

4.1 CONCEPÇÕES SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE

Nossa abordagem neste trabalho visa apresentar ao aluno novas e distintas maneiras de resolução de uma situação, envolvendo experimentos práticos, a noção de frequência (utilizando tabelas) e a utilização da geometria, ampliando assim o tratamento dispensado aos diversos problemas probabilísticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [5] recomendam que se aborde, desde o Ensino Fundamental, noções básicas de Probabilidade e Estatística, a fim de que o aluno desenvolva, desde cedo, o pensamento probabilístico, que envolve desde a coleta de dados e interpretação de uma situação-problema até o entendimento de uma solução encontrada.

Ainda,

> *"Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis)." (PCN, 1998, pág.52)*

Deseja-se que, ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9ª anos), o estudante seja confrontado com situações concretas de análise de dados através de gráficos e/ou tabelas, introduzindo conceitos fundamentais para a compreensão dos fenômenos do dia a dia, fortalecendo assim a ideia da importância da coleta de dados e do raciocínio probabilístico. Além da análise de gráficos e tabelas, prioriza-se também que os alunos adquiram conhecimentos através da realização de experimentos práticos, explorando a noção do acaso e da aleatoriedade, a fim de que se desenvolvam as noções primordiais nas quais a teoria de probabilidade está centrada.

Assim, ao fim do Ensino Fundamental, espera-se que o aluno já tenha certo grau de compreensão relativo ao tema probabilidade e que já tenha desenvolvido meios para resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão [5].

Ao adentrarmos no Ensino Médio, devemos ter como referencial para o início da abordagem os conhecimentos já adquiridos pelos alunos no Ensino Fundamental, uma vez que o conhecimento prévio dos alunos, é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático (PCNEM, 2000, pág.52) [4].

A partir da análise desses conhecimentos prévios, podemos então continuar com o estudo de Probabilidade, aprofundando os conceitos, explorando a teoria e mostrando as aplicações inerentes a esse tema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), o estudo de Probabilidade tem como enfoque principal,

> *"Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades." (PCNEM,2000, pág. 12)*

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM), em seu adendo intitulado "Orientações Educacionais Complementares (PCN+)", traz em seu texto objetivos tidos como primordiais no estudo de Probabilidade. São eles: reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados; quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico e identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades [6].

Portanto, baseado nas diretrizes apontadas pelo PCN, PCNEM e pelo PCN+, iremos abordar, nesse trabalho, atividades que visam atingir os objetivos já relatados, a fim de que, ao final do Ensino Médio, o aluno tenha conhecimento sólido sobre o tema Probabilidade, e tenha conhecido vários exemplos de problemas contextualizados que podem ser resolvidos utilizando essa teoria.

4.2 O JOGO COMO RECURSO EDUCACIONAL

Dentro do universo dos saberes matemáticos, é relevante a necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo (jogos, experimentos, debates, etc.) [4].

Assim, entendemos que há a necessidade da utilização de materiais concretos e de jogos, em todos os níveis de ensino, uma vez que esses estimulam o desenvolvimento dos alunos, pois dinamizam a aula e transmitem o conhecimento de maneira não formal e na qual o aluno atua como personagem central na aquisição do conhecimento [15].

Ainda, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino Médio (PCNEM), temos que:

> *"Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão,(...), dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação,(...), criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes."(PCNEM, 2000, pág.52).*

Nesse contexto, nosso trabalho tem como base, na maioria dos casos, a exploração de atividades que possuem, em seu desenvolvimento, experimentos práticos e jogos, levando o aluno a interagir, explorar situações novas e adquirir conhecimentos de maneiras diversas.

4.3 O USO DE SEQUÊNCIAS DIDÁTICAS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE

O uso de sequência didática está intimamente ligado aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), intitulados nesse como "projetos" e "atividades sequenciadas". Esse termo é utilizado para definir um procedimento desencadeado a partir de etapas interligadas, com objetivo de tornar mais eficiente o processo de aquisição do conhecimento [17].

Utilizar como metodologia a concepção das sequências didáticas, agregada ao enfoque na resolução de problemas, envolvendo o conteúdo de probabilidade, constitui a forma de abordagem que utilizaremos neste trabalho, pois possibilita propor tarefas e atividades que propiciem, os alunos envolvidos, a aquisição dos conhecimentos acerca do tema proposto a partir dos pontos-chaves e, ainda, permite que os envolvidos desenvolvam habilidades inerentes ao tema, como o entendimento da importância de cada etapa da resolução de um problema probabilístico, desde a coleta, o tratamento dos dados, a análise, a interpretação das informações adquiridas através da experimentação ou mesmo da observação de eventos parecidos, a escolha da estratégia de resolução adequada, a interpretação da solução encontrada e a tomada de decisões a partir das soluções.

Além disso, escolhemos trabalhar neste projeto com situações-problema contextualizados, em sua maioria, uma vez que a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino [4].

A partir dessa ideia, é relevante a importância de que o professor que irá abordar esse conteúdo, através dessa metodologia, tenha pleno domínio sobre o conteúdo a ser abordado, tenha conhecimentos sobre a metodologia adotada e ainda, que esteja preparado para induzir, de modo implícito, o aluno a desenvolver o raciocínio probabilístico, muitas vezes de difícil entendimento, e a compreender a linguagem inerente ao tema.

Ressaltamos que, na abordagem dada aos problemas desse trabalho, não teremos a pretensão de cumprir com todas as etapas características dessa metodologia adotada. Vamos optar por trabalhar com as situações didáticas, entendendo-as como uma modalidade de ensino na qual o percurso que nos conduz a definição dos conceitos de probabilidade é desenvolvido utilizando-se de atividades ou situações-problema em torno do objeto do saber e de condições cotidianas e, na grande maioria, com ações experimentais. Dessa maneira, as atividades que aqui serão desenvolvidas caracterizam uma sequência de ensino, em que o professor conduz as etapas em conjunto com os alunos, ora reagindo como observador, ora como mediador e ainda, em alguns momentos, como personagem central, do qual se extrairá o conhecimento necessário.

5. EXEMPLOS APLICÁVEIS NO ENSINO BÁSICO

Abordar temas abrangentes como esportes, carros ou outros ligados ao imaginário dos alunos já tem como garantia a atenção total dos mesmos.

Neste capítulo, iremos abordar variados problemas envolvendo probabilidade, probabilidade condicional e probabilidade geométrica, sempre mantendo o enfoque em atividades que podem ser aplicadas nos anos finais do Ensino Básico. Ao todo, abordaremos quatro problemas de probabilidade simples e condicional, e seis problemas envolvendo probabilidade geométrica.

A intenção desse capítulo é mostrar alguns exemplos aplicáveis, porém é preciso ressaltar que mesmo esses problemas apresentam um grau de dificuldade relevante quando explorados a fundo. Por esse motivo, salientamos a necessidade de os alunos terem conhecimento dos assuntos inerentes a resolução das questões (pré-requisitos).

Cada exemplo será composto de uma descrição sobre como abordar a questão, com os objetivos e os pré-requisitos necessários para a resolução, o ano escolar no qual o problema deve ser abordado, a duração proposta para a realização da atividade e ainda, em alguns casos, a realização de um experimento no qual os alunos podem visualizar o problema de maneira concreta. Na sequência iremos apresentar a resolução matemática da atividade proposta, com comentários sobre como finalizar essas atividades.

Iremos trabalhar, neste momento, com atividades que apresentam experimentos, atividades sem experimento, porém contextualizadas, e ainda duas questões de cunho mais abstrato, as quais sugerimos que sejam tratadas na forma de atividades desafios.

As questões que iremos explorar, na ordem, são:

Atividades com experimento:

- *O problema do paraquedista*
- *O problema das portas*
- *O problema do macarrão*
- *Sentando em roda*
- *O juiz trapalhão*
- *O jogo de dardos*
- *O problema dos aniversários*

Atividade sem experimento:

- *O problema do encontro*

Atividades desafios:

- *O problema da corda*
- *O problema da corda perpendicular.*

5.1 O PROBLEMA DO PARAQUEDISTA

Introdução: Neste exemplo, vamos abordar um problema simples, tanto no entendimento quanto na resolução, porém muito interessante, que discorre sobre uma modalidade de esporte radical: o paraquedismo, e uma categoria em particular, a de precisão. Além disso, esta atividade pode ser utilizada para introduzir o conteúdo de probabilidade geométrica, por ser simples e acessível. Em sua resolução, podemos utilizar o Geoplano ou, em situações mais modestas, a malha quadriculada.

Conteúdo: Probabilidade Geométrica.

Objetivos: O objetivo dessa atividade é levar o aluno a compreensão do cálculo da probabilidade de um evento através de uma abordagem geométrica utilizando a noção básica de probabilidade e ainda, geometria plana, com os conceitos de área de figuras planas. Um outro objetivo será realizar uma revisão sucinta sobre área de figuras planas utilizando a malha quadriculada.

Duração: Uma aula simples.

Público-Alvo: 9º ano do Ensino Fundamental e todos os anos do Ensino Médio

Pré-requisitos: Esse problema apresenta uma resolução acessível e relativamente fácil, e necessita somente dos seguintes pré-requisitos para a resolução: operações básicas, noções de área de figuras planas e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Nas competições de paraquedismo, a modalidade mais antiga é a de precisão. Ela consiste em pular com o velame (nome da lona do paraquedas) aberto, objetivando atingir um alvo no chão. Considere que um paraquedista está realizando o pouso num campo representado pela malha quadriculada a seguir.

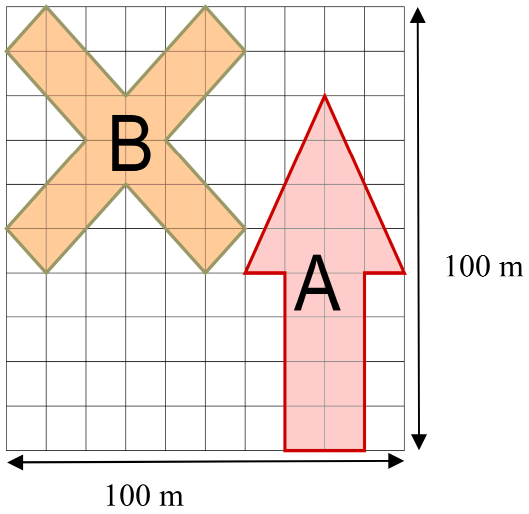


Figura 12 – Área de pouso

Qual a probabilidade de o paraquedista aterrisar na região A? E na região B?

Material necessário

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Papel sulfite ou caderno;
- Geoplano ou malha quadriculada.

Atividade na prática

O experimento: Nesse problema em especial, o experimento consistirá em realizarmos uma revisão sobre o conteúdo de área de figuras planas utilizando a malha quadriculada.

A atividade, desenvolvida individualmente, começará abordando figuras simples, tais como os exemplos abaixo.

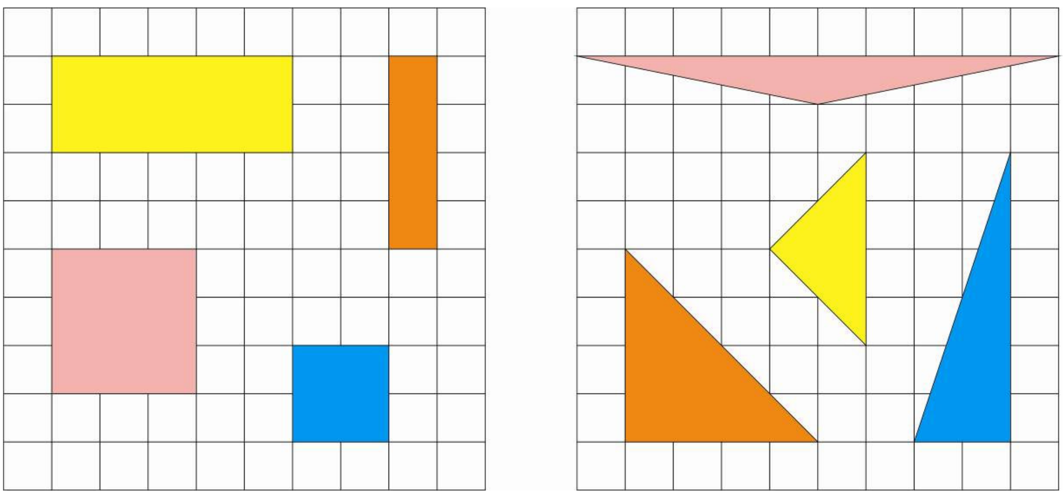


Figura 13 – Representações de figuras no geoplano 1

Na sequência, podem-se trabalhar figuras mais elaboradas, nas quais os alunos necessitaram criar estratégias para calcular a área.

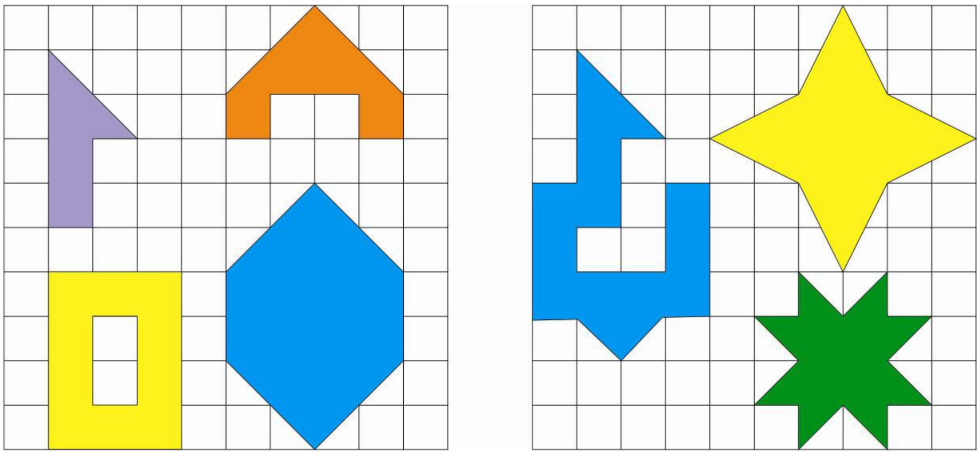


Figura 14 – Representações de figuras no geoplano 2

Ao final da atividade, espera-se que os alunos já tenham relembrado o conteúdo de área, e então resolveremos, passo a passo, o problema proposto.

Solução

Considerações iniciais: A resolução dessa atividade é simples e direta, e de fácil compreensão para os alunos. A fim de garantirmos a resolução fiel da questão, iremos considerar que o paraquedista salta aleatoriamente e que o único fator influente em sua descida e pouso é o vento. Dessa forma, a solução é validada.

Resolução Matemática: Para resolvermos essa questão, devemos calcular a área total do campo utilizado para a aterrissagem, a área da região A e a área da região B.

Temos:

<u>Área total:</u>

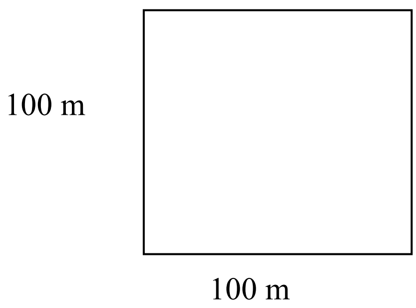
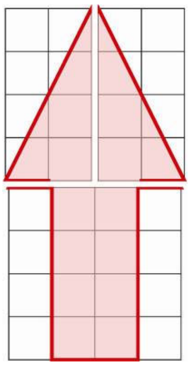


Figura 15– Quadrado de lado 100m

A área do campo é formada por um quadrado de lado 100 metros. Logo, a área é:

$A = l^2 = 100^2 = 10000 \ m^2$

Área da região A:

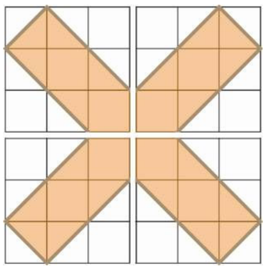


A área da região A é dada pela composição das áreas de dois triângulos e um retângulo. Logo, a área é:

$$A = 20.40 + 2.\frac{20.40}{2} = 1600 + 1600 = 3200m^2$$

Figura 16 – Área de pouso – Região A

Área da região B:



A área da região B é dada pela composição das áreas de quatro pentágonos não regulares congruentes. Logo, a área é:

$$A = 4x450 = 1800 \ \ m^2$$

Figura 17 – Área de pouso – Região B

Assim, as probabilidades pedidas são:

$$P(região \ \ A) = \frac{Casos \ \ favoráveis}{Casos \ \ possíveis} = \frac{área \ da \ região \ \ A}{área \ do \ campo} = \frac{3200}{10000} = \frac{32}{100} = 32\% \text{ e}$$

$$P(região \ \ B) = \frac{Casos \ \ favoráveis}{Casos \ \ possíveis} = \frac{área \ da \ região \ \ B}{área \ do \ campo} = \frac{1800}{10000} = \frac{18}{100} = 18\%$$

Comentários finais: Ao término dessa atividade, o professor pode passar como lição para casa o mesmo problema, com algumas modificações, como a área de pouso ou mesmo duas áreas que se intersectam em alguma região.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [19], [21], [25] e [26].

5.2 O PROBLEMA DAS PORTAS

Introdução: Esse problema, também conhecido como *problema de Monty Hall,* é um problema matemático que surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos, e que foi copiado por inúmeros programas ao longo dos tempos. Além disso, a maioria dos alunos já terá visto algum programa televisivo com esse jogo, o que os deixará interessados em resolver o problema.

Para introduzir o problema, iremos começar a aula com um jogo simulando a condição dada pela atividade.

Conteúdo: Probabilidade Condicional.

Objetivos: O objetivo principal dessa atividade será o de fixar conceitos e discutir sobre a tomada de decisões utilizando noções de probabilidade. Para isso, será realizado um experimento com material concreto, para debater entre os alunos os temas abordados e será efetuada a resolução matemática, a fim de concretizar as deduções levantadas no decorrer do experimento.

Duração: Uma aula simples.

Público-Alvo: 2º ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: Para a resolução e o entendimento da solução, é necessário que o aluno já tenha estudado os seguintes conteúdos: operações básicas, e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Em um programa de televisão, os candidatos devem escolher uma entre três portas. Atrás de uma dessas portas há um prêmio e atrás de cada uma das outras duas portas há um bode. Escolhida uma porta pelo candidato, o apresentador, que sabe onde estão os bodes, abre uma das portas, atrás da qual se encontra um bode, e pergunta ao candidato se ele quer ficar com a porta que escolheu ou se prefere trocá-la pela outra porta que ainda está fechada. Admitindo-se que, quando o candidato escolhe a porta em que está o prêmio, o apresentador escolha ao acaso uma porta para abrir, você acha que o candidato deve trocar, não deve trocar ou tanto faz?

Material necessário:

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Caderno/ folhas para escrita;
- Copos descartáveis (não pode ser transparente);
- Balas ou objetos pequenos.

Atividade na Prática

O experimento: Para iniciar nosso experimento, que faremos utilizando copos e balas em vez de portas e bodes, vamos propor aos alunos um jogo bem simples, no qual eles terão que adivinhar, nos mesmos moldes do problema, em qual copo estará a bala (ou objeto escolhido). Para isso, eles deverão sentar em duplas, com um aluno fazendo o papel de apresentador e do outro, o jogador.

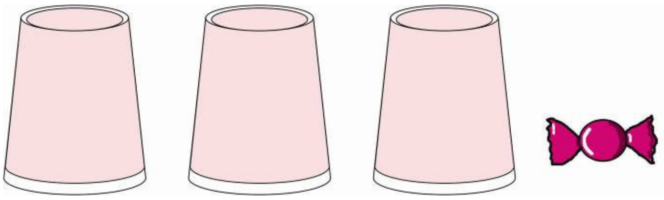


Figura 18 – Material necessário para o experimento utilizando copos

Para iniciar o experimento, o aluno apresentador irá colocar, embaixo de um copo, a bala, e deixará os outros copos vazios. Isso deverá ser feito sem o aluno jogador ver.

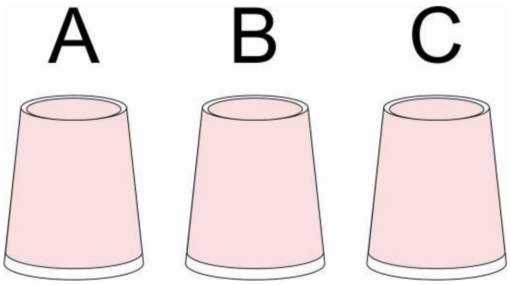


Figura 19 – Etapa 1 – Experimento com copos

Os passos do jogo seguirão os moldes proposto pelo problema. Vejamo-lo o passo a passo:

Na 1ª etapa o aluno jogador escolherá um copo, dentre os três copos que estarão disponíveis.

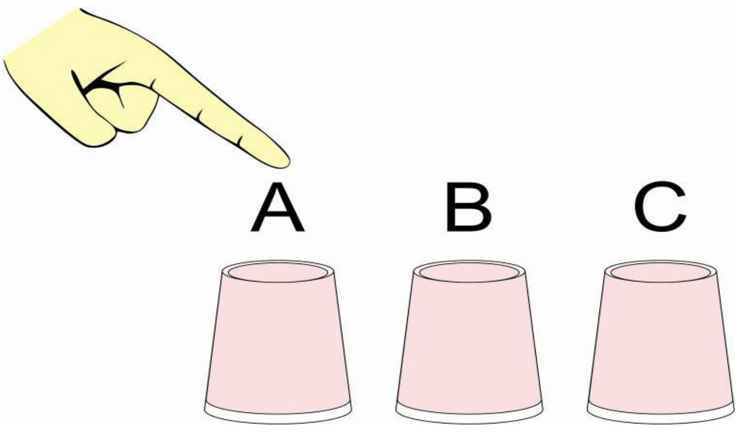


Figura 20 – Etapa 2 – Experimento com copos

Em seguida, o aluno apresentador irá abrir um dos outros dois copos que o concorrente não escolheu, o qual estará vazio.

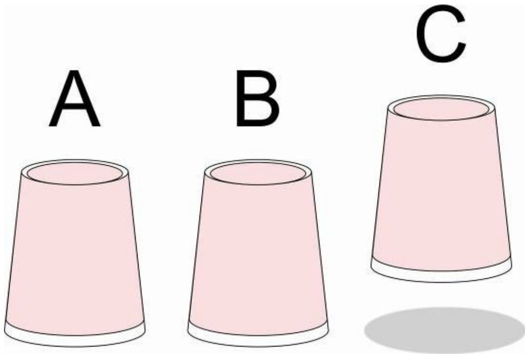


Figura 21 – Etapa 3 – Experimento com copos

Agora com dois copos apenas para escolher, e sabendo que a bala está embaixo de um deles, o jogador terá que decidir se permanece com o copo que escolheu no início do jogo e abre-o ou se muda para o outro copo que ainda está fechado para então abrir.
Os alunos jogarão livremente, por cerca de 10 a 15 minutos, anotando em uma tabela, como a descrita abaixo, se trocou ou não de copo e se ganhou ou perdeu.

Partida nº	Trocou de copo (Sim ou não)?	Ganhou ou Perdeu?
1		
2		
3		
4		
5		
...		

Tabela 2 – Resultados obtidos - Experimento com copos

Ao final do tempo, eles irão, juntamente com o professor, observar qual escolha foi a mais vantajosa, e calcular a probabilidade com os dados fornecidos pelo jogo.

É interessante deixa-los a vontade para que eles conjecturem sobre qual será a melhor estratégia e tentem explicar o porquê da escolha da estratégia. Na sequência, deve-se optar pela explanação, por parte do professor, assim como a resolução matemática, fornecendo assim certeza aos alunos qual estratégia é mais benéfica a fim de se ganhar o jogo.

Solução

Considerações Iniciais: Essa questão é um problema lógico nada óbvio, e o particular dela é que sua resolução é acessível e atraente a todos os níveis de ensino, podendo ser aplicada desde o Ensino Médio até em cursos de Aperfeiçoamento, entre outros.

Resolução Matemática: Para resolvermos esse problema, vamos nomear as três portas, respectivamente, de A, B e C. Temos que, quando o concorrente escolheu uma delas, digamos a porta A, a chance de que ela seja a premiada é de $\frac{1}{3}$, uma vez que ele escolheu 1 porta entre 3 possibilidades. Como consequência, temos que a probabilidade de que ele tenha errado, ou seja, de que o prêmio esteja nas outras duas portas, B ou C, é de $\frac{2}{3}$.

Sabendo isso, basta observar que o apresentador abrirá, sem erro, uma dessas outras duas portas, que contém o bode.

Digamos que seja a porta B (analogamente, poderíamos ter escolhido a porta C). Ao fazer isso, ele está lhe dando uma informação valiosa: se o prêmio estava nas outras portas que não escolheu (B ou C), então agora ele só pode estar na porta que você não escolheu e não foi aberta, ou seja, a porta C.

Assim, toda vez que o concorrente tiver escolhido inicialmente uma porta errada, ao trocar de porta irá com certeza ganhar. Como as chances de que tenha errado em sua escolha inicial são de $\frac{2}{3}$, se trocar suas chances de ganhar serão de $\frac{2}{3}$ e, por conseguinte, a chance de que ganhe se não trocar de porta é de apenas $\frac{1}{3}$. É assim mais vantajoso trocar de porta.

Veja abaixo um resumo da situação:

São possíveis três escolhas de portas. Na primeira opção, o jogador escolhe a porta certa ($\frac{1}{3}$ de chance). Nesse caso, se ele trocar de porta, ele perde o prêmio.

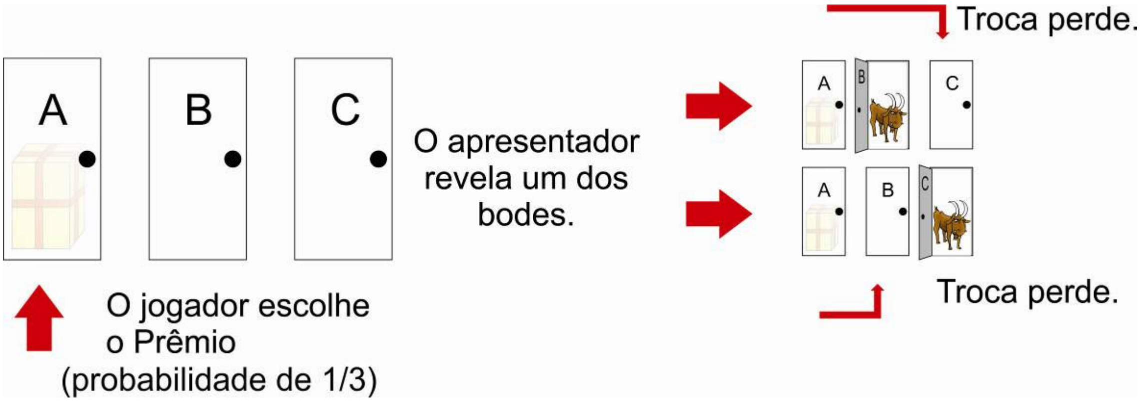


Figura 22 – Problema das portas – Simulação de escolha 1

Tanto na segunda como na terceira opção, o jogador escolhe a porta errada ($\frac{2}{3}$ de chance). Nesse caso, se ele trocar de porta, ele ganha o prêmio. Vejamos:

O jogador pode escolher a porta B:

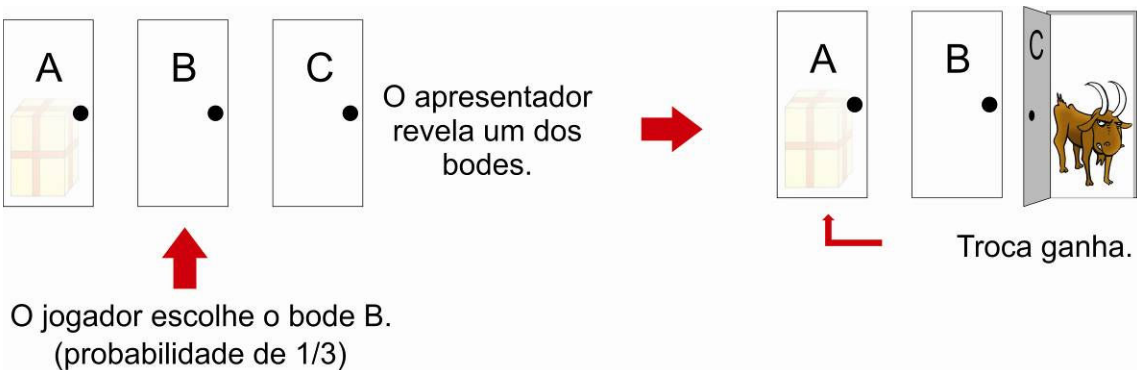


Figura 23 – Problema das portas – Simulação de escolha 2

Ou escolher a porta C:

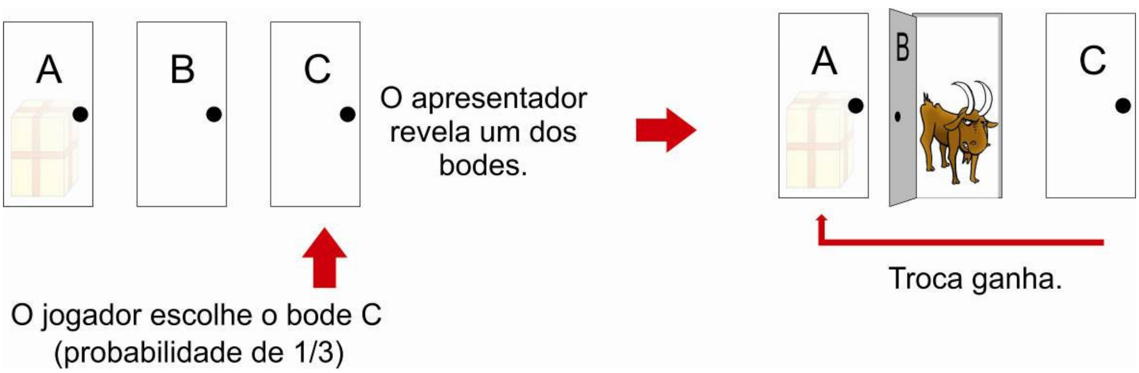


Figura 24 – Problema das portas – Simulação de escolha 3

Nesses dois últimos casos é vantajoso trocar de porta. Logo, trocar é mais vantajoso que permanecer com a mesma porta.

Comentários finais: O problema das portas é exposto em muitos programas televisivos até hoje, e é um exercício matemático brilhante e de fácil resolução, apesar da intuição falhar. Ele demonstra muito bem como nosso cérebro não foi feito para, de modo intuitivo, tomar decisões sobre tais tipos específicos de problemas. Felizmente pode-se resolver este problema de forma simples e sem erro usando probabilidade condicional.

Ao final da atividade, pode-se ainda debater com os alunos sobre a importância de utilizar o raciocínio lógico-matemático em situações cotidianas e em jogos, uma vez que a matemática auxilia em todos os processos lógicos.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [1], [11], [13], [14], [25] e [26].

5.3 – O PROBLEMA DO MACARRÃO

Introdução: Nesse problema, cada aluno terá, inicialmente, que realizar um experimento com um macarrão tipo espaguete, quebrando-o em três partes e tentando obter um triângulo com estas partes. No próximo momento, será realizada a resolução matemática, acompanhada da explicação, por parte do professor, desta questão.

Conteúdo: Probabilidade Geométrica.

Objetivos: O objetivo principal dessa atividade será o de fixar conceitos sobre resolução de problemas probabilísticos, utilizando, em sua resolução, a noção básica de probabilidade e ainda, geometria plana, com os conceitos de área de figuras planas. Já um outro objetivo será o de realizar um experimento para debater entre os alunos os temas abordados e a diferença entre a resolução em um espaço amostral pequeno e sua generalização.

Duração: Duas aulas simples geminadas.

Público-Alvo: 2º ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: Essa questão apresenta uma resolução surpreendente em relação à experiência prática e deverá ser aplicada com os seguintes pré-requisitos para a resolução: operações básicas, estudo de inequações, plano cartesiano, conjunto solução de inequações, desigualdade triangular, noções de área de triângulos e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Dividindo-se um macarrão, do tipo espaguete, aleatoriamente em três partes, qual é a probabilidade de que essas partes formem um triângulo?

Material necessário:

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Papel sulfite ou caderno;
- Macarrão do tipo espaguete.

Atividade na Prática

O experimento: Para iniciarmos o experimento, será necessário que cada aluno, individualmente, receba um macarrão do tipo espaguete.

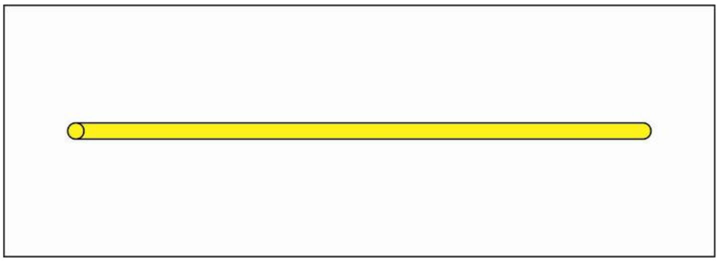


Figura 25 – Macarrão tipo espaguete

Será então solicitado a cada aluno que quebre, de maneira aleatória, o seu macarrão em três partes.

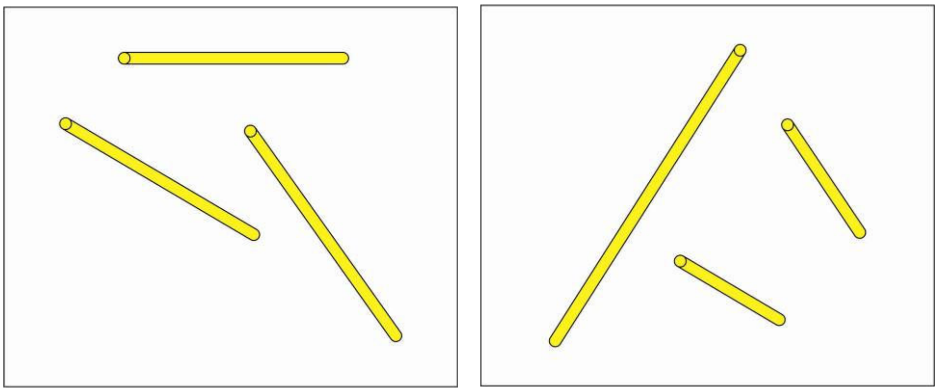


Figura 26 – Exemplos de quebra do macarrão

Na sequência, deve-se pedir para que eles tentem montar triângulos, se possível for, com as três partes resultantes.

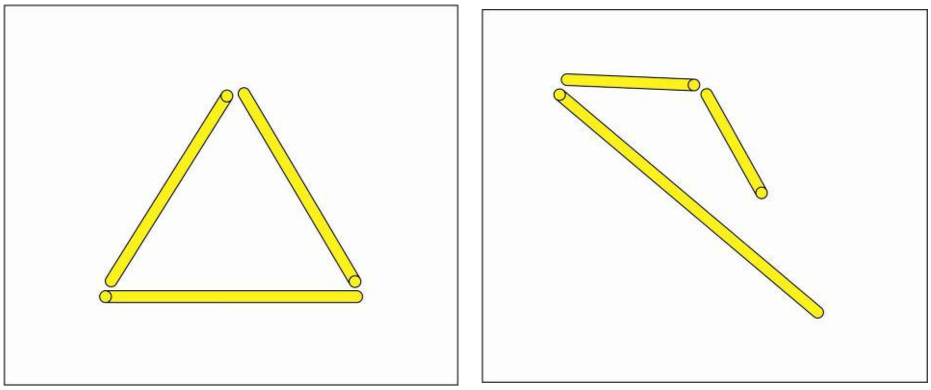


Figura 27 – Exemplos de montagem de triângulos (situação possível e impossível)

Com todos os triângulos formados (ou não), calcular a probabilidade, utilizando o espaço amostral formado pelos alunos e os casos nos quais foram formados triângulos.

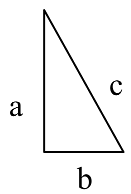
$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{Alunos\ que\ \ formaram\ triângulos}{Total\ \ de\ \ alunos}$$

É interessante observar que o resultado do experimento prático irá se aproximar de 100%. Neste momento é viável que se faça uma discussão sobre qual valor os alunos pensam que será a probabilidade, quando calculada de maneira generalizada. Já com o experimento prático realizado, o próximo passo consiste em realizar a resolução matemática.

Solução

Considerações iniciais: Para podermos realizar a resolução deste problema corretamente, os alunos necessitarão saber a definição de desigualdade triangular.

Definição de desigualdade triangular: *Em um triângulo, o comprimento de um lado é menor ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja, dado um triângulo de lados **a**, **b** e **c**, temos:*



$$\Rightarrow \begin{cases} a \le b + c \\ b \le a + c \\ c \le a + b \end{cases}$$

Figura 28 – Triângulo

Resolução Matemática: Dado o macarrão do experimento, vamos considerá-lo como uma unidade, ou seja, o comprimento do macarrão será igual a 1.

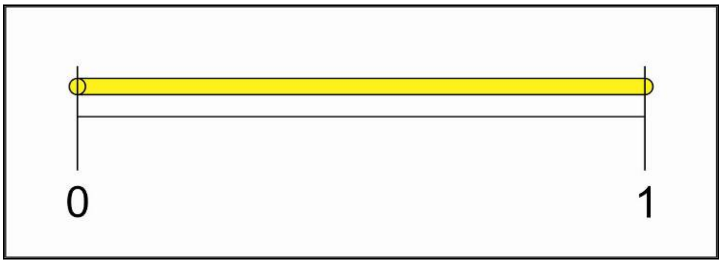


Figura 29 – Macarrão visto como unidade de medida

Dividiremos então o segmento em três partes, com dois cortes, sendo eles: $x \in (0,1)$, $y \in (0,1)$ e ainda , suporemos $x \leq y$.

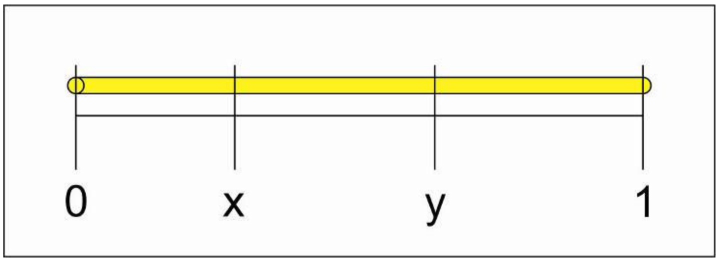


Figura 30 – Divisão do macarrão em três partes

Temos então que escolher x e y neste intervalo e com a restrição $x \leq y$ é o mesmo que escolher um ponto (x, y) no triângulo abaixo, o qual chamaremos de triângulo A.

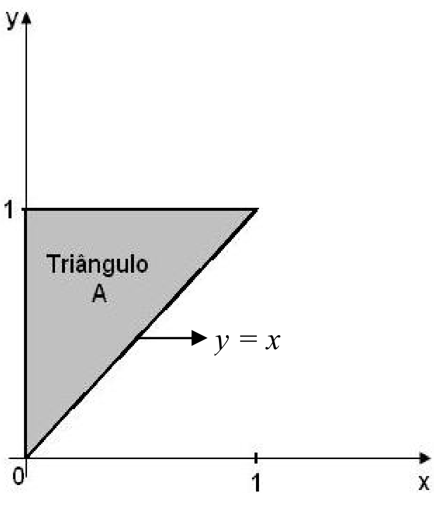


Figura 31 – Representação gráfica dos casos possíveis – Problema do macarrão

Temos que, nos casos onde exista o triângulo, os lados do mesmo serão x, $y - x$ e $1 - y$.

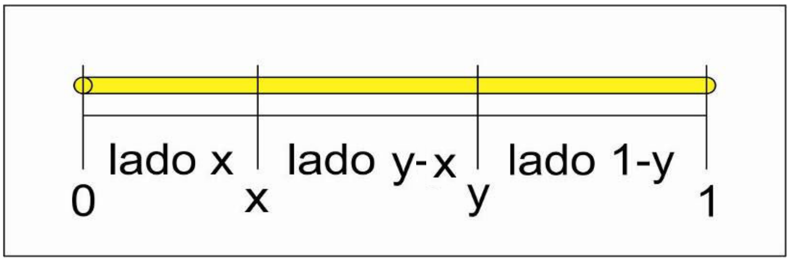
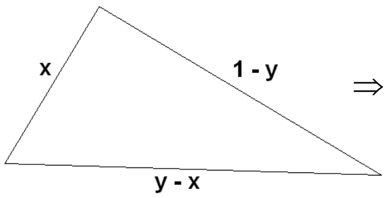


Figura 32 – Lados do triângulo

Ainda, esses lados têm que cumprir as condições da desigualdade triangular, cuja definição é que em um triângulo, o comprimento de um lado é menor ou igual à soma dos comprimentos dos outros dois lados. Assim, teremos três condições para satisfazer:



$$\Rightarrow \begin{cases} x \le y - x + 1 - y \\ y - x \le x + 1 - y \\ 1 - y \le x + y - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2} \\ y \le x + \dfrac{1}{2} \\ y \ge \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Figura 33 – Triângulo formado com os dados do problema

Interpretando geometricamente as condições encontradas, temos que o triângulo existe se, e somente se, o ponto (x, y) for selecionado na área sombreada do triângulo A.

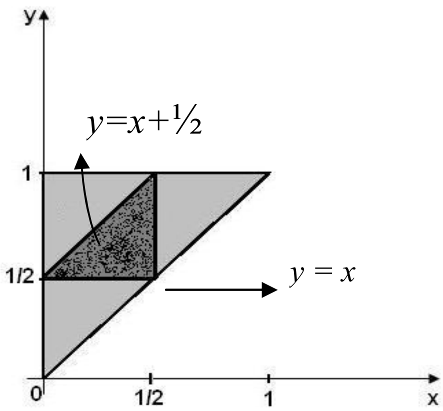


Figura 34 – Representação gráfica dos casos favoráveis - Problema do macarrão

Assim, como queremos calcular a probabilidade do evento “as três partes formem um triângulo”, e sendo o triângulo A a representação de todos os casos possíveis, temos que os casos favoráveis são descritos pela área sombreada do triângulo A. Logo:

$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{Área\ \ da\ \ região\ \ sombreada}{Área\ \ do\ \ triângulo\ \ A} = \frac{\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}}{2}}{\frac{1.1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\% .$$

Comentários finais: Para o fechamento dessa atividade, propomos uma discussão com os alunos sobre algumas questões:

Porque o experimento fornece um resultado tão distante da resolução matemática?

Quais foram as maiores dificuldades na resolução?

Em que aspectos a geometria foi importante na resolução?

Existe outra forma de resolvermos esse problema?

Dado algum tempo aos alunos para que eles pensem e interajam sobre as questões levantadas, é interessante ouvi-los, apontando e esclarecendo algumas das questões. A primeira questão levantada diz respeito ao pequeno espaço amostral em uma sala de aula e, ainda, na própria realização do experimento, pois temos a tendência a quebras objetos simetricamente, e não pedaços bem pequenos ou bem grandes. Assim, o experimento não é realizado de forma aleatória e, portanto, o resultado fica distante do esperado.

Sugerimos ainda que os alunos explanem sobre os conhecimentos adquiridos na aula, e sobre a relevância do estudo de probabilidade através de situações reais.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [1], [11], [13], [25], [26] e [28].

5.4 SENTANDO EM RODA

Introdução: Essa atividade ressalta uma situação corriqueira na vida de todos, relatando uma situação na qual queremos calcular a probabilidade de duas pessoas sentarem lado a lado em uma roda. Iremos realizar uma observação prática, utilizando exemplos com poucas pessoas e, na sequência, iremos resolver o caso geral, calculando a probabilidade em uma situação com *n* pessoas.

Conteúdo: Probabilidade.

Objetivos: O objetivo principal dessa atividade será o de solidificar conceitos sobre resolução de problemas utilizando probabilidade, usando, neste exemplo, um exemplo prático e uma generalização.

Duração: Duas aulas simples geminadas.

Público-Alvo: 2º ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: Para a resolução e o entendimento pleno da solução, é necessário que o aluno já tenha estudado os seguintes temas: operações básicas, e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Em uma roda são colocadas n pessoas. Qual a probabilidade de duas dessas pessoas ficarem sentadas juntas, lado a lado?

Material necessário:

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Papel sulfite ou caderno;
- Cadeiras

Atividade na prática

O experimento: O intuito da atividade que iremos trabalhar é, a partir de exemplos práticos, chegarmos a solução geral do problema dado.

Para iniciarmos, vamos começar com a pergunta: *Em uma roda são colocadas três pessoas. Qual a probabilidade de duas dessas pessoas ficarem sentadas juntas, lado a lado?*

Nesta primeira etapa, o professor escolhe três alunos e coloca-os na situação descrita. Assim, o primeiro aluno senta-se e um outro escolhido deve se sentar ao seu lado.

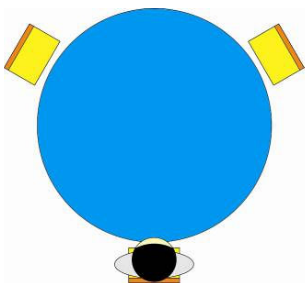


Figura 35 – Primeira etapa – Experimento sentando em roda

O ideal é que os alunos, ao sentarem, concluam que duas pessoas sempre estarão sentadas lado a lado. Logo, a probabilidade é 100%.

Na sequência, aumentamos o número de pessoas para quatro, e deixamos os alunos tentarem e assim concluírem que a chance é de 66,6%, pois colocada uma pessoa na roda, dos três lugares restantes, há duas possibilidades da outra pessoa sentar ao lado da primeira pessoa, ou seja, $\frac{2}{3}$ das possibilidades.

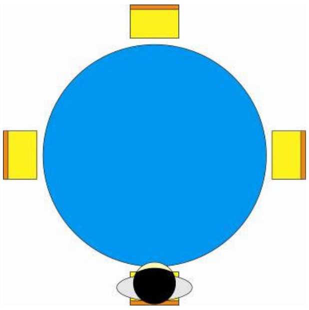


Figura 36 – Segunda etapa – Experimento sentando em roda

Ainda, se aumentarmos para cinco pessoas, teremos que a chance é de 50%, um vez que, utilizando o mesmo princípio do anterior, colocada uma pessoa na roda, dos quatro lugares restantes, há duas possibilidades de outra pessoa sentar ao lado da primeira pessoa, ou seja, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ das pessoas.

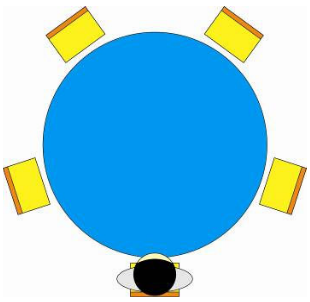


Figura 37 – Terceira etapa – Experimento sentando em roda

E assim por diante, até o momento em que os alunos começarem a conjecturar sobre uma generalização para o problema.

Solução

Considerações iniciais: A resolução desse problema é bem simples e intuitiva. Espera-se que os alunos já tenham tido um base do resultado com a experiência feita, de modo que a explicação seja entendida e a solução, compreendida por todos.

Resolução Matemática: Para iniciarmos a resolução, vamos considerar que já haja uma pessoa sentada na roda. Assim , há n-1 posições possíveis para a segunda pessoa se sentar, das quais duas são favoráveis para que ela fique sentada ao lado da primeira pessoa.

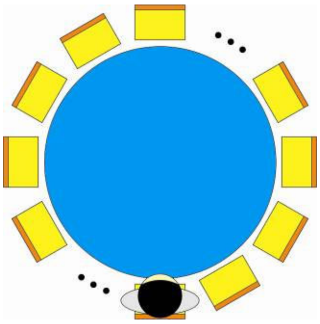


Figura 38 – Generalização – Experimento sentando em roda

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{2}{n-1}$$

Comentários finais: Para o fechamento dessa atividade, sugerimos ao professor que induza os alunos a pensarem em outras situações, as quais os resultados podem ser generalizados.

Pode-se também argumentar com os alunos sobre a questão resolvida, solicitando aos mesmos que expressem suas opiniões sobre os resultados e sobre a generalização. É valido ressaltar que para 2 pessoas a probabilidade também é de 100%, uma vez que elas sempre sentarão lado a lado.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [13], [14], [15], [25] e [26].

5.5 O JUIZ TRAPALHÃO

Introdução: Questões que envolvem jogos e situações cotidianas sempre chamam a atenção dos alunos. Neste exemplo, em específico, vamos abordar uma situação sobre um juiz trapalhão e seus cartões (amarelo, vermelho e amarelo/vermelho).

Por ser um problema simples, porém intrigante, faremos primeiramente um jogo com os alunos, para então dar seguimento com a resolução matemática e a interpretação da solução encontrada.

Essa atividade é um bom exemplo para se realizar um aprofundamento no conteúdo de probabilidade condicional.

Conteúdo: Probabilidade Condicional.

Objetivos: O objetivo principal dessa atividade será o de fixar conceitos sobre resolução de problemas utilizando probabilidade condicional. Ainda, um outro objetivo será o de realizar um jogo entre os alunos para dinamizar e efetivar a compreensão do tema abordado.

Duração: Uma aula simples.

Público-Alvo: 2º ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: A fim de termos a resolução matemática, com o entendimento da solução, é necessário que o aluno já tenha uma base sólida nos seguintes temas: operações básicas, e noções básicas de probabilidade e de probabilidade condicional.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Um juiz de futebol meio trapalhão tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada violenta, o juiz mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um atleta. Se a face que o jogador vê é amarela, qual a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?

Material necessário:

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Caderno/ folhas para escrita;
- Papel colorido (vermelho e amarelo)
- Cola
- Tesoura.

Atividade na Prática

O experimento: Antes de iniciar a atividade em sala, o professor necessita preparar o material concreto a ser utilizado. É necessário que faça recortes nos papéis coloridos (sugerimos papel colorset) em forma de cartões retangulares, de forma que resultem cartões vermelhos e amarelos. Ainda, devem-se colar alguns cartões, para obtermos alguns cartões com uma face amarela e outra vermelha. É preciso que os três tipos de cartões fiquem aproximadamente com a mesma espessura e que não seja reparável qual cartão foi colado (sugerimos que seja colado com cola bastão).

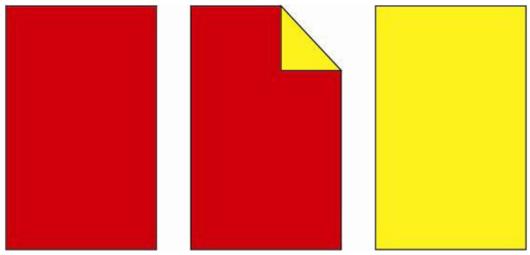


Figura 39 – Material necessário para o experimento com cartões

Já em sala de aula, pode-se dividir os alunos em duplas para que eles façam, na prática, o que retrata o enunciado do problema

Na primeira etapa um aluno (Aluno A) coloca no bolso (pode ser usada uma caixa, ou mesmo uma sacola, desde que não seja transparente) um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha.

Sem olhar, ele deve retirar um cartão mostrar ao colega (chamaremos de aluno B). Esse então irá anotar se a parte visível foi a vermelha ou amarela. No caso de o cartão mostrado estiver com a parte vermelha visível, o aluno não perguntará mais.

Quando a parte a mostra para o Aluno B for amarela, ele perguntará ao Aluno A se a face dele é amarela ou vermelha, e anotará em uma tabela, como a abaixo, as respostas obtidas.

nº	Mostrou face vermelha ou amarela?	Caso tenha mostrado amarela, viu vermelha ou amarela?
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
...		

Tabela 3 – Resultados obtidos - Experimento dos cartões

Após o experimento ser repetido várias vezes (sugerimos um mínimo de 30 vezes), os alunos, juntamente com o professor, poderão argumentar sobre as chances de sair o cartão com as faces distintas ou de sair o cartão com as faces iguais.

Solução

Considerações Iniciais: Esse problema, apesar de parecer confuso e de difícil resolução, pode ser visto como uma oportunidade desafiadora de se entender, em um grau elevado, o tema de probabilidade condicional. Ainda, esse é um clássico exemplo de problemas do cotidiano que podem ser resolvidos matematicamente através do estudo de eventos probabilísticos.

Resolução Matemática: Começaremos a resolução analisando a questão dos cartões que o juiz tem no bolso e as cores dos mesmos. Assim, temos que:

- A probabilidade de o juiz mostrar a face amarela é de $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, pois das 6 faces dos cartões, 3 são amarelas.
- A probabilidade de o juiz mostrar a face vermelha também é de $\frac{1}{2}$.

Agora, vamos calcular a probabilidade de o juiz ter pegado o cartão dupla-face, mostrado a face amarela e ter visto a face vermelha.

Temos que, como o juiz tem três cartões no bolso, a probabilidades dele pegar o de dupla face é de $\frac{1}{3}$, uma vez que há um cartão com faces distintas entre os três cartões.

Entretanto a probabilidade desse cartão estar com a face vermelha voltada para o juiz e a amarela para o jogador é de $\frac{1}{3} x \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, uma vez que, ao pegar o cartão dupla-face, ele tem duas situações: mostra a face amarela e vê a vermelha ou mostra a face vermelha e vê a amarela.

Logo, utilizando probabilidade condicional e os valores encontrados, temos que:

$$P = P(vê\ vermelha \mid mostra\ amarela) = \frac{P(vê\ vermelha\ e\ mostra\ amarela)}{P(mostra\ amarela)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Comentários finais: Após a realização da abordagem prática e da resolução do problema, podemos abrir uma discussão entre os alunos, na qual podemos explorar alguns tópicos, tais como a importância que se deve dar as condições de cada etapa da situação analisada, pois na probabilidade condicional cada informação pode influenciar nas probabilidades de ocorrências de etapas sucessivas.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [13], [14], [16], [25] e [26].

5.6 O JOGO DE DARDOS

Introdução: Essa atividade oferece aos alunos uma experiência prática desafiadora, uma vez que o jogo de dardos é muito conhecido, mas não é muito jogado no ambiente escolar. A resolução da questão proposta está intimamente ligada as ideias de área de círculos e regiões circulares, e possui ênfase em probabilidade geométrica.

Conteúdo: Probabilidade Geométrica

Objetivos: O principal objetivo será o de trabalhar os conceitos de probabilidade geométrica, utilizando neste problema, a área de figuras planas (círculo). Já um outro objetivo será o de realizar um jogo, simulando as condições dadas pela questão proposta, a fim de propiciar um ambiente de debate e interação entre os alunos.

Duração: Duas aulas simples geminadas.

Público-Alvo: 3º ano do Ensino Médio

Pré-requisitos: Esse problema apresenta uma resolução elaborada e de certa forma, desafiadora para a maioria dos alunos, e necessita dos seguintes pré-requisitos para a resolução: operações básicas, cálculo de área de círculos e de setores circulares, e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Considere um experimento no qual um atirador acerta um alvo com um dardo de forma totalmente aleatória. Observe o alvo:

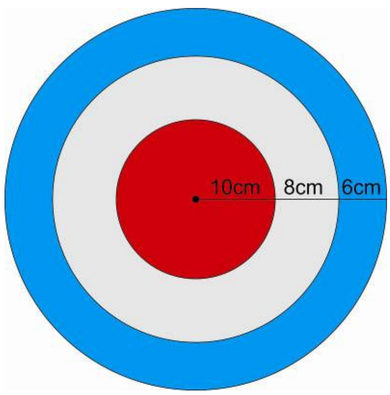


Figura 40 – Alvo

Calcule a probabilidade de o dardo atingir cada região do alvo.

Material necessário:

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Papel sulfite ou caderno;
- Isopor em formato redondo
- Tintas variadas (pelo menos 3 cores)
- Dardos
- Régua
- Compasso ou objetos circulares
- Calculadora

Atividade na prática

O experimento: Antes de dar início a atividade em sala, o professor precisará preparar o material concreto a ser utilizado. É necessário que se façam vários alvos iguais, em isopor, com as medidas corretas. Para isso, o professor deve medir e recortar os isopores e deixa-los marcados para a pintura. Neste momento, o professor pode optar por pintar ou deixar os alunos pintarem o alvo. Essa decisão dependerá principalmente do tempo disponível para a atividade e da disponibilidade dos alunos a uma atividade artística. Pode-se também pedir auxílio ao professor da disciplina de Artes para esta montagem do jogo.

É preciso que os jogos sejam formados por um alvo e 2 (dois) dardos, sendo que esses dardos podem ser comprados ou confeccionados com palitos de bambu e cartolina.

Já em sala de aula, pode-se dividir os alunos em duplas de modo que cada dupla jogue entre eles, marcando os resultados obtidos.

Sugere-se que os alunos fiquem a uma distância de 3 a 5 metros do alvo e que os alvos estejam posicionados de maneira que nenhum jogador se machuque.

Para o registro do jogo, pode-se utilizar uma tabela na qual constará a quantidade de jogadas e as cores atingidas.

Vermelha	Cinza	Azul

Tabela 4 – Resultados obtidos – Experimento com dardos

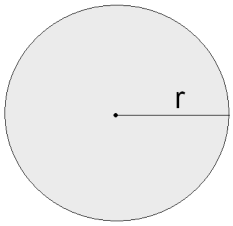
Após o experimento ser repetido várias vezes, os alunos, juntamente com o professor, poderão argumentar sobre as chances de atingir cada parte do alvo e, ainda, calcular a probabilidade mediante os dados obtidos pelos jogos.

Após os cálculos feitos, os alunos podem comparar, entre eles, os resultados obtidos por cada dupla, e observar se as probabilidades calculadas ficaram com valores aproximados.

Solução

Considerações iniciais: Para a resolução dessa atividade, os alunos necessitarão dos seguintes conhecimentos:

Área do círculo: A área de um círculo é expressa matematicamente pela seguinte expressão:

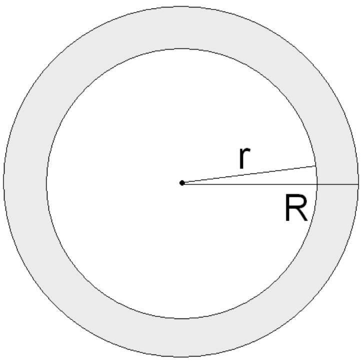


$$A = \pi . r^2$$

Figura 41 – Círculo

onde r é o raio da circunferência e π é uma constante (a saber, π é um número irracional que tem como valor aproximado 3,14).

Área de uma coroa circular: A área da coroa circular será igual à diferença da área dos dois círculos que formam a coroa.



$$\text{Área coroa} = \text{área círculo maior} - \text{área círculo menor}$$
$$\text{Área coroa} = \pi R^2 - \pi r^2$$
$$\text{Área coroa} = \pi (R^2 - r^2)$$

Figura 42 – Coroa Circular

onde r é o raio da circunferência menor, R é o raio da circunferência maior e π é uma constante.

Resolução Matemática: Para começarmos a resolver esse problema, vamos calcular a área de todas as regiões envolvidas.

Denominaremos de área T a área total do alvo, área A a área da parte vermelha, área B a área da parte cinza e de área C a área da parte azul.

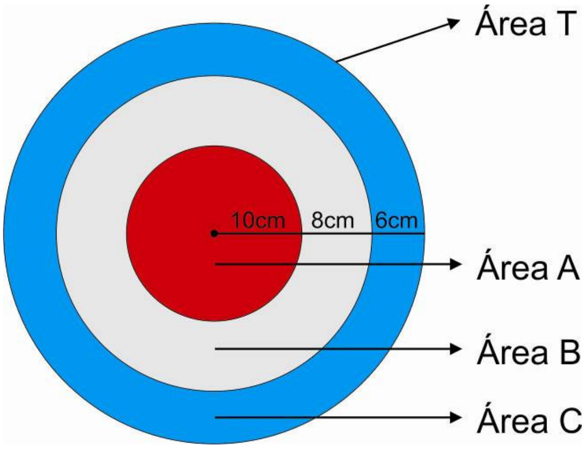


Figura 43 – Representação das áreas

Vamos aos cálculos:

<u>Área T</u>

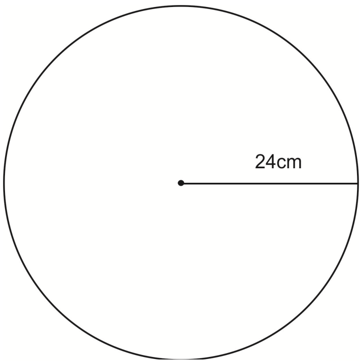


Figura 44 – Área T

Temos que a área total é a área de um círculo de raio *r = 24*

Assim,

$$\acute{a}rea\ \ T = \pi.r^2 = \pi.24^2 = \pi.576 \cong 3{,}14.576 \cong 1809{,}5\ \ cm^2$$

<u>Área A</u>

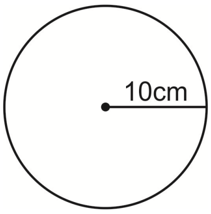


Figura 45 – Área A

Temos que a área total é a área de um círculo de raio *r = 10 cm.*

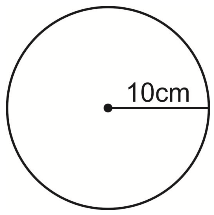
Assim,

$$\acute{a}rea\ \ T = \pi.r^2 = \pi.10^2 = \pi.100 \cong 3{,}14.100 \cong 314\ \ cm^2$$

Área B

A área da região B é dada pela diferença entre as áreas dos círculos de raio *r = 10 cm* e *r' = 18 cm.*

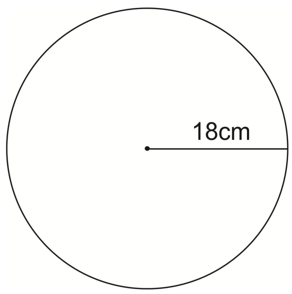
Assim:



Área do círculo de raio *r = 10 cm* :

$$A = \pi . r^2 = \pi . 10^2 = \pi . 100 \cong 3{,}14 . 100 \cong 314 \ cm^2$$

Figura 46 – Círculo de raio 10 cm

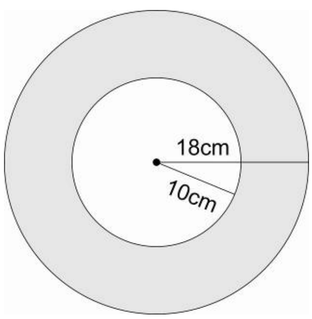


Área do círculo de raio *r' = 18 cm* :

$$A' = \pi . r'^2 = \pi . 18^2 = \pi . 324 \cong 3{,}14 . 324 \cong 1017{,}8 \ cm^2$$

Figura 47 – Círculo de raio 18 cm

Logo, a área da região B é dada por:

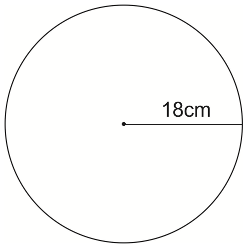


$$área \ \ B = A' - A = 1017{,}8 \ \ cm^2 - 314 \ \ cm^2 = 703{,}8 \ \ cm^2$$

Figura 48 – Área B

Área C

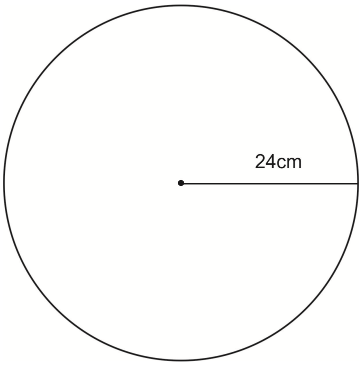
A área da região C é dada pela diferença entre as áreas dos círculos de raio *r = 18 cm* e *r' = 24 cm.*



Área do círculo de raio *r = 18 cm* :

$$A = \pi . r^2 = \pi . 18^2 = \pi . 324 \cong 3{,}14.324 \cong 1017{,}8 \ \ cm^2$$

Figura 49 – Círculo de raio 18 cm

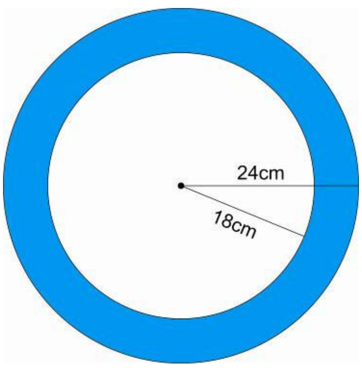


Área do círculo de raio *r' = 24 cm* :

$$A' = \pi . r'^2 = \pi . 24^2 = \pi . 576 \cong 3{,}14.576 \cong 1809{,}5 \ \ cm^2$$

Figura 50 – Círculo de raio 24 cm

Logo a área da região C é dada por:

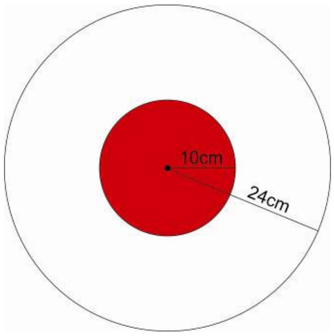


$$\text{área} \ \ C = A' - A = 1809{,}5 \ \ cm^2 - 1017{,}8 \ \ cm^2 = 791{,}7 \ \ cm^2$$

Figura 51 – Área C

Agora, vamos ao procedimento de calcular as probabilidades de o dardo acertar cada região do alvo. Para isso, utilizaremos as áreas obtidas. Vejamos:

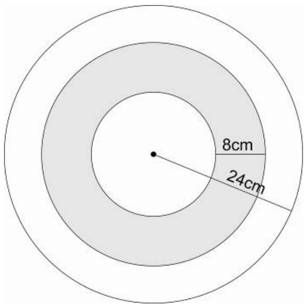
Probabilidade de o dardo acertar a parte vermelha:



$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{área\ \ A}{área\ \ T} == \frac{314}{1809{,}5} \cong 17{,}35\%$$

Figura 52 – Probabilidade do dardo acertar a área vermelha

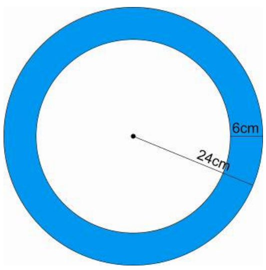
Probabilidade de o dardo acertar a parte cinza:



$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{área\ \ B}{área\ \ T} == \frac{703{,}8}{1809{,}5} \cong 38{,}9\%$$

Figura 53 – Probabilidade do dardo acertar a área cinza

Probabilidade de o dardo acertar a parte azul:



$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{área\ \ B}{área\ \ T} == \frac{791{,}7}{1809{,}5} \cong 43{,}75\%$$

Figura 54 – Probabilidade do dardo acertar a área azul

Comentários finais: Uma vez feita a atividade em sua completude, sugerimos para seu fechamento, abrir um debate com os alunos explorando algumas questões:

O que ocorre se aumentarmos o número de regiões? E se diminuirmos?

Quais foram as maiores dificuldades na resolução?

Em que aspectos a geometria foi importante na resolução?

Espera-se que os alunos concluam que quanto mais subdividirmos o alvo, menor será a probabilidade de acertar uma área específica.

Sugerimos ainda explorar com os alunos a importância dos jogos de estratégia para melhorarmos nosso raciocínio lógico.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [20], [25] e [26].

5.7 – O PROBLEMA DOS ANIVERSÁRIOS

Introdução: Esse problema conduz-nos, ao mesmo tempo, a uma incoerência de nossa intuição e a um resultado surpreendente. Ao pensarmos, intuitivamente, na probabilidade de haver alunos que façam aniversário na mesma data em uma sala com mais de 30 alunos, essa parecerá, aos nossos olhos, inferior a 50%. No entanto a intuição nem sempre é boa conselheira, pois a casos há em que a intuição revela-se desastrosa.

Assim, nos atentando a resolução matemática desse problema, iremos chegar a uma solução que contradiz nossa intuição. E é por esse motivo que apresentamos esse problema nesse trabalho.

Conteúdo: Probabilidade.

Objetivos: O objetivo principal dessa atividade será o de fixar conceitos sobre resolução de problemas envolvendo probabilidade, utilizando, em sua resolução, a noção básica de probabilidade e ainda um recurso computacional para realizar os cálculos. Temos por objetivo também realizar um experimento, com os alunos, para validar nossa resolução.

Duração: Uma aula simples

Público-Alvo: A partir do 2º ano do Ensino Médio

Pré-requisitos: Para a resolução e o entendimento pleno da solução, é necessário que o aluno já tenha estudado os seguintes temas: operações básicas, e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Em um grupo de 30 pessoas, qual é a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia?

Material necessário

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Caderno/ folhas para escrita;
- Recurso computacional (programa que realize cálculos);
- Sala de tecnologias.

Atividade na Prática

O experimento: Para realizarmos esta "brincadeira" com os alunos, na qual se irá "descobrir" duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia, precisaremos que tenham pelo menos 30 alunos em sala, pois assim a chance de acerto é elevada (veremos a porcentagem da chance na resolução).

Deve-se começar dizendo aos discentes que podemos descobrir na sala de aula duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia.

Iremos, neste momento da aula, propor aos alunos que escrevam seus nomes e suas datas de aniversário (dia e mês) em uma folha, dobrem de modo a ninguém ver e, na sequência, recolheremos estes dados para conferirmos com eles.

Ao abrir as datas, montaremos, juntamente com eles, uma tabela na qual constarão os nomes e as datas de aniversário. Como a probabilidade de termos duas pessoas nesta situação é elevada, é quase certo que iremos encontrar datas iguais.

Solução

Considerações Iniciais: Para resolvermos esse problema, iremos tomar um caminho alternativo, que consiste em determinarmos primeiro a probabilidade de que todos façam aniversário em dias distintos. Desta maneira, a resolução fica evidentemente mais simples e didática, ou seja, de melhor compreensão para os alunos.

Apesar de ser necessário a utilização de um programa computacional de cálculos, tal como o Excel®[1] , essa atividade utiliza uma resolução acessível, como veremos na sequência.

---

[1] O Excel é um software que permite criar tabelas, calcular e analisar dados. Este tipo de software é chamado de software de planilha eletrônica. Disponível em <http://office.microsoft.com/pt-br/novice/o-que-e-o-excel-HA010265948.aspx>. Acesso em 05 de fev. de 2013.

Resolução Matemática: Vamos determinar a probabilidade de não ocorrer de duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia.

O número de casos possíveis para que 30 pessoas façam aniversário é 365^{30}, uma vez que o ano tem 365 dias (não iremos considerar o caso do ano bissexto). Já o número de casos favoráveis para que todas as 30 pessoas aniversariem em dias diferentes é dada pela multiplicação 365x364x363x362x...x337x336, que possui 30 termos, os quais representam 30 dias distintos.

Assim, temos:

$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{365x364x363x...x336}{365^{30}} \cong 0{,}29$$

Logo, a probabilidade de haver pelo menos duas pessoas que aniversariem no mesmo dia é de, aproximadamente, 1 – 0,29 = 0,71.

Portanto, a resposta é 71% de chance de, em um grupo de 30 pessoas, pelo menos duas façam aniversário no mesmo dia.

Comentários finais: Após a realização do experimento e a resolução do problema, podemos abrir uma discussão entre os alunos, na qual podemos abordar algumas questões:

Qual a razão do resultado ser tão surpreendente?

E com 50 pessoas, qual seria a probabilidade?

A partir de quantas pessoas seria garantido acharmos duas pessoas que façam aniversário no mesmo dia?

O motivo de o resultado ser tão surpreendente é porque nós estamos habituados a comparar as datas de nossos aniversários com outros. Assim, a probabilidade de dois indivíduos quaisquer fazerem aniversário no mesmo dia é extremamente baixa. Mesmo que você pergunte a 30 pessoas, a probabilidade ainda será baixa - menos do que 5%. Por isso, é como se fosse raro encontrar alguém que faça aniversário no mesmo dia que nós. Mas é ai que entra o x da questão. Quando você coloca muitas pessoas em uma sala, o que muda é o fato que cada uma dessas pessoas fará a pergunta para todas as outras. Cada pessoa tem uma pequena probabilidade de sucesso (menos de 5%), mas cada uma está tentando várias vezes, aumentando significadamente ainda essa probabilidade.

Ainda, em um grupo de 50 pessoas a probabilidade será de 97% e, num grupo de 60 pessoas, já podemos garantir que a probabilidade ultrapassa os 99%. Para o fechamento da atividade, o professor pode generalizar a solução do problema, porém a generalização pode apresentar um grau de dificuldade acima do trabalhado neste nível escolar.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [7], [13], [22], [25] e [26].

5.8 – O PROBLEMA DO ENCONTRO

Introdução: De todos os problemas que abordamos em sala de aula, os que mais despertam o interesse dos alunos são os que possuem ligação direta com situações do cotidiano. Essa atividade, em particular, retrata um acontecimento comum entre amigos, no qual deve chegar a um encontro em um tempo determinado, porém apresenta uma condição peculiar e desafiadora sobre o período de espera de quem chegar primeiro.

Ainda, a resolução desta questão é um pouco mais abstrata e não possuirá experimentação prática.

Conteúdo: Probabilidade Geométrica

Objetivos: O objetivo principal dessa atividade será o de utilizar geometria plana, com os conceitos de área de figuras planas, e também aplicar o conceito de interpretação geométrica, com o uso do plano cartesiano e a visão geométrica de soluções de inequações, para resolver um evento probabilístico dado a partir de uma situação comum.

Duração: Uma aula simples.

Público-Alvo: 2º ano do Ensino Médio

Pré-requisitos: Essa questão apresenta uma resolução bem interessante e elaborada e deverá ser aplicada com os seguintes pré-requisitos para a resolução: operações básicas, estudo de inequações, plano cartesiano, conjunto solução de inequações, noções de área de figuras planas e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Cristina e Maria, que não são pessoas muito pontuais, marcaram um encontro às 16 horas. Se cada uma delas chegará ao encontro em um instante entre 16 e 17 horas e se dispõe a esperar no máximo 10 minutos pela outra, qual é a probabilidade delas se encontrarem?

Material necessário:

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Caderno/ folhas para escrita;

Solução

Considerações Iniciais: Ao estudarmos probabilidade, suas aplicações e métodos de resolução, os exemplos mais comuns são os experimentos com resultados simples e, geralmente, intuitivos. Contudo, nessa atividade, apresentamos a resolução de um problema que, apesar de tratar de uma situação comum, necessita de cálculos e vários fatores para o entendimento pleno.

Resolução Matemática: Para iniciarmos a resolução desse problema, vamos utilizar a contagem do tempo em minutos, a partir das 16 horas, com uma hora de duração (60 minutos), e vamos designar por x e y os instantes de chegada de Cristina e Maria, respectivamente.

A região possível para a existência de solução para o problema é dada pelo conjunto $\beta = \{(x, y) : 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60\}$, sendo que este conjunto representa, no plano cartesiano, um quadrado de lado 60. Esse conjunto designa que tanto Cristina e Maria chegarão em instantes dentro do período de 60 minutos.

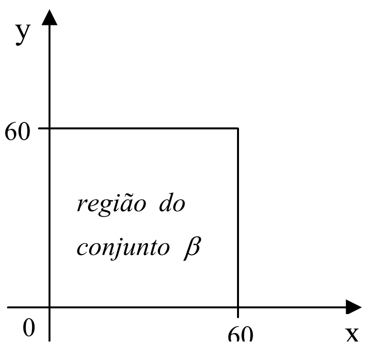


Figura 55 – Representação gráfica dos casos possíveis – Problema do encontro

Para começarmos a encontrar a região favorável, devemos ter em mente a condição dada pelo problema, de que nenhuma das duas amigas esperará mais de 10 minutos. Assim, a diferença entre os horários de chegada deverão ser menores ou iguais a 10 minutos, ou seja, $x - y \le 10$ e $y - x \le 10$.

Assim, a região favorável é dada por $\alpha = \{(x, y) : 0 \le x \le 60,\ 0 \le y \le 60,\ |x - y| \le 10\}$.

A desigualdade $|x - y| \le 10$ é a condição dada pelo problema, uma vez que quem chegar primeiro (Cristina ou Maria), esperará pela outra por 10 minutos.

Temos que a desigualdade $|x - y| \le 10$ é equivalente a $x - 10 \le y \le x + 10$, o que mostra que a região favorável é uma faixa em torno da diagonal do quadrado.

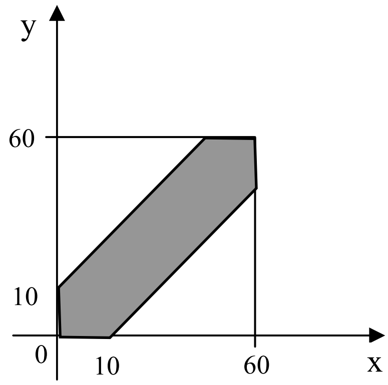


Figura 56 – Representação gráfica dos casos favoráveis – Problema do encontro

Assim, para calcularmos a probabilidade do evento ocorrer, precisamos calcular as áreas da região possível e da região favorável.

Temos:

$$\text{área de } \beta = \text{área do quadrado de lado } 60 = 60^2 = 3600$$

$\text{área de } \alpha = \text{área do quadrado de lado } 60 - 2.(\text{área do triângulo de base } 50 \text{ e altura } 50) =$

$60^2 - 2.\dfrac{50.50}{2} = 3600 - 2500 = 1100$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{\text{área de } \alpha}{\text{área de } \beta} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36} \cong 30{,}05\%$$

Comentários finais: Sugerimos que se faça uma discussão acerca da conclusão de seus alunos em relação ao resultado encontrado, questionando sobre quais eram as percepções deles antes da resolução e após a visualização do resultado. Ressaltamos ainda que a realização de todos os passos da resolução em conjunto com os alunos é muito importante para o entendimento do problema e da solução do mesmo.

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [13], [14], [25] e [26].

5.9 – O PROBLEMA DA CORDA

Introdução: Esse problema é mais abstrato e nos traz um grau maior de dificuldade perante os outros exemplos abordados, tanto na interpretação quanto na resolução do mesmo. Por este motivo, sugerimos que se trabalhe esta questão como forma de aprofundamento do conteúdo, ou mesmo como desafio passado aos alunos.

Conteúdo: Probabilidade Geométrica

Objetivos: O objetivo principal dessa atividade será o de aprofundar conceitos sobre resolução de problemas probabilísticos, utilizando, em sua resolução, geometria plana, com os conceitos de circunferência, elementos de uma circunferência, classificação de triângulos e ângulos.

Duração: Uma aula simples

Público-Alvo: 3º ano do Ensino Médio

Pré-requisitos: Essa questão apresenta uma resolução elaborada e relevantemente abstrata, e deverá ser aplicada somente após os alunos terem conhecimento dos seguintes pré-requisitos: operações básicas, conceitos de circunferência, elementos de uma circunferência, classificação de triângulos, ângulos e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Selecionam-se ao acaso dois pontos em uma circunferência. Qual a probabilidade da corda determinada por esses pontos ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

Material necessário

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Papel sulfite ou caderno;
- Régua;
- Compasso.

Solução

Resolução Matemática: Temos que, dados dois pontos A e B em um círculo, esses irão determinar uma corda maior que o lado de um triângulo equilátero inscrito se, e somente se, o menor arco AB é maior do que 120º. Assim, temos que uma vez escolhido o ponto A, o ponto B não deverá pertencer ao arco de 240º com ponto médio em A.

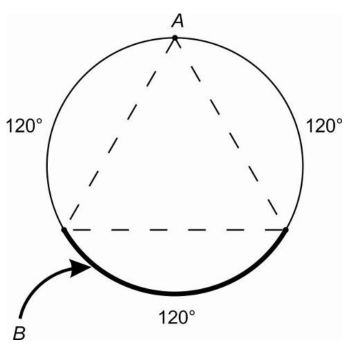


Figura 57– Representação da solução do problema da corda

Como B é escolhido ao acaso, admitiremos que a probabilidade de que ele esteja em um arco seja proporcional ao comprimento do arco. Assim, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{comprimento\ do\ arco}{comprimento\ do\ círculo} = \frac{120}{360} = \frac{1}{3} \cong 33{,}33\%$$

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [13] e [14].

5.10 – O PROBLEMA DA CORDA PERPENDICULAR

Introdução: O problema em questão nesse momento exige, por parte do aluno, um grau elevado de abstração e também, conhecimentos sólidos sobre probabilidade, probabilidade geometria e elementos de circunferência. Sugerimos utilizá-lo como atividade de aprofundamento no conteúdo em pauta, e que, de preferência, seja visto e estudado com cuidado pelo professor, antes de sua aplicação.

Conteúdo: Probabilidade Geométrica.

Objetivos: O objetivo na resolução desse problema será o de aprofundar conceitos sobre resolução de problemas probabilísticos, utilizando, geometria plana, com os conceitos de circunferência, elementos de uma circunferência, classificação de triângulos e ângulos.

Duração: Uma aula simples.

Público-Alvo: 3º ano do Ensino Médio.

Pré-requisitos: Essa questão apresenta uma resolução simples, porém relativamente abstrata, e deverá ser aplicada após os alunos terem conhecimento dos seguintes pré-requisitos: operações básicas, conceitos de circunferência, elementos de uma circunferência, classificação de triângulos, ângulos (perpendicularidade) e noções básicas de probabilidade.

Problema: O enunciado da questão a qual iremos abordar é:

Seleciona-se ao acaso um ponto X em um diâmetro AB de uma circunferência. Qual a probabilidade da corda que contém X e é perpendicular a AB ter comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito na circunferência?

Material necessário

- Lápis, caneta, borracha e/ou outros itens para escrita;
- Papel sulfite ou caderno;

- Régua;
- Compasso.

Solução

Resolução Matemática: Temos que uma corda perpendicular ao diâmetro AB terá comprimento maior do que o lado do triângulo equilátero inscrito se, e somente se, esta corda cortar AB entre os pontos M e N, sendo M e N pontos médios de OA e OB, respectivamente, onde O é o centro do círculo.

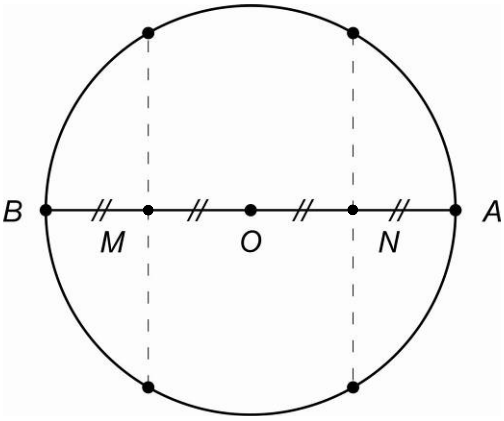


Figura 58– Representação da solução do problema da corda perpendicular

Logo a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{Casos\ \ favoráveis}{Casos\ \ possíveis} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2} \cong 50\%$$

Observação: Para elaboração dessa atividade utilizamos as referências [13] e [14].

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo ao desenvolvermos este trabalho sobre os conteúdos de probabilidade e probabilidade geométrica foi o de inserir atividades diferenciadas das trabalhadas em sala de aula, abrindo um leque maior de possibilidades de situações, uma vez que é preciso explorar com mais afinco essa área, pois a mesma é rica em aplicações. Com essa meta, apresentamos aqui variadas situações, as quais acreditamos que possam colaborar com um aprendizado mais significativo.

Para alcançarmos o objetivo proposto, a priori, realizamos uma abordagem pelos aspectos históricos do tema probabilidade, com um breve resumo sobre os acontecimentos chave que desencadearam o desenvolvimento desta área. Abordamos ainda o primeiro relato que é conhecido sobre um problema probabilístico envolvendo conceitos geométricos. A saber, o método das Agulhas de Buffon.

Tendo em vista que, ao tratarmos de um assunto, necessitamos de conhecimentos sólidos acerca dele, na sequência de nosso trabalho apresentamos os conceitos teóricos inerentes ao estudo de Probabilidade, expondo de forma sucinta as definições, propriedades e teoremas, seguidos de exemplos de aplicações dos mesmos.

Posteriormente, adentramos no conteúdo de Probabilidade Geométrica, explanando sobre as definições e aplicabilidades, trazendo exemplos de problemas que utilizam noções geométricas em suas resoluções. Abordamos esse tema em separado do conteúdo de Probabilidade, pois entendemos que, nesse estudo, necessitamos dar maior enfoque nessa área, uma vez que esse tema quase nunca é tratado pelos livros didáticos do Ensino Médio.

Finalizamos nosso estudo apresentando planos de aula contendo atividades de Probabilidade e Probabilidade Geométrica aplicáveis no Ensino Básico, visando principalmente situações de aplicação no Ensino Médio. Por entendermos a efetiva necessidade de trabalharmos atividades que integrem os alunos e que sejam contextualizadas, nossas atividades, em sua maioria, contém experimentos práticos para serem desenvolvidos em sala de aula, além das resoluções matemáticas.

Concluímos, ao fim desse texto, que se faz necessário a diversificação de abordagens acerca de um determinado tema, com a utilização de diversificadas atividades que auxiliem de forma significativa o processo de aprendizagem. Ainda, entendemos que o estudo das Probabilidades é um vasto campo de exploração e aplicabilidades, e por ser de tal magnitude, deve ser estudado com dedicação e afinco.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AGOSTINO, Raul F. W. *Intuição e Probabilidade*. **Revista do Professor de Matemática.** São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 27. 1 Quadrimestre de 1995.

[2] ALVES, Mariane Branco. **Cálculo das Probabilidades II.** Rio de Janeiro: UERJ 2006. Disponível em < http://www.mmwd.com/prob2/apostila_prob2.pdf>. Acesso em: 7 jan. 2013.

[3] BOYER, Carl B. **História da matemática**. 2º ed. São Paulo, Edgard Blucher: 2003.

[4] BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio:* **Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/SEF, 2000.

[5] _______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais terceiros e quartos ciclos do ensino fundamental:* **Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

[6] _________. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. *PCN+ Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:* **Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** Brasília: MEC/SEF, 2000.

[7] COMO Tudo Funciona: **O que é o paradoxo do aniversário?** Disponível em
< http://pessoas.hsw.uol.com.br/questao261.htm>. Acesso em: 11 jan. 2013.

[8] COUTINHO, Cleide de Queiroz e Silva. *Probabilidade geométrica: um contexto para a modernização e a simulação de situações aleatórias com Cabri*. **EMP – Educação Matemática Pesquisa ISSN 1983-3156.** São Paulo: PUC-SP, v. 7. p. 185-199. 2005. Disponível em <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4700/3268>. Acesso em: 7 jan. 2013.

[9] DRUCK, Suely (Org). Coleção Explorando o Ensino: **Contagem, Probabilidade e Estatística.** Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, Cap. 3. Vol. 3. 2004. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_3_4e5.pdf>. Acesso em: 4 jan. 2013.

[10] EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** 4. ed. Campinas: Unicamp, 2007.

[11] FASSARELLA, Lúcio. *A reposta é plausível? Comentários baseados em um cálculo de probabilidades.* **Revista do Professor de Matemática.** São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 62. 3º quadrimestre de 2009.

[12] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Matemática – Volume Único.** São Paulo: Saraiva. 2002.

[13] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Coleção do Professor de Matemática. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 2 v.

[14] _____, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**, Coleção do Professor de Matemática. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010, 4 v.

[15] LOPES, José Marcos. *Conceito básico de probabilidade com resolução de problemas.* **Revista do Professor de Matemática.** São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 59. 2006.

[16] ______, José Marcos. *Probabilidade condicional por meio de resolução de problemas*. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 62. 2007.

[17] LOPES, José Marcos; TEODORO, João Vitos; REZENDE, Josiane de Carvalho. *Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio*. **Zetetiké.** Campinas: FE/Unicamp, v.19, n. 36, p. 75-93, jul/dez 2011. Disponível em<http://www.fae.unicamp .br/zetetike/include/getdoc.php?id=1652&article=723&mode=pdf>. Acesso em: 15 jan. 2013.

[18] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade com as soluções dos exercícios**, Coleção do Professor de Matemática. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[19] NEVES, Eder Pereira; CONTINI, Florindo Neto; MENDONÇA, Washington de. **Uma Sequência de Ensino de Probabilidade Geométrica com o uso do Geoplano.** Recife: XIII CIAEM – IACME, 2011. Disponível em < http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/ index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1372/1067>. Acesso em: 7 jan. 2013.

[20] PORTAL da Probabilidade Geométrica: **História, Definição, Jogos e Questões.** Disponível em < http://www.cin.ufpe.br/~reaf/TG/paginaPrincipal.swf> Acesso em: 10 jan. 2013.

[21] PORTAL do Professor: **Esportes Radicais, Probabilidades e Geometria: Um diálogo possível.** Disponível em < http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula. html?aula=28685> Acesso em: 24 jan. 2013.

[22] PROBLEMAS Teoremas: **Exercício de Probabilidade sobre aniversários de n pessoas.** Disponível em <http://problemasteoremas.wordpress.com/2009/07/15/probabilida de-dos-aniversarios-de-n-pessoas-calharem-no-mesmo-dia/>. Acesso em: 11 jan. 2013.

[23] REVISTA Eletrônica de Jornalismo Científico: **Probabilidade geométrica: história, paradoxos e rigor.** Disponível em < http://www.comciencia.br/comciencia/ ?section=8& edicao=83&id=1023> Acesso em: 29 jan. 2013.

[24] SILVA, Valdir Alves; DE CAMPOS, Tathiana Alves; ITACARAMBI, Ruth Ribas. **Probabilidade e Geometria: Uma Investigação com Alunos Universitários**. Campinas: SHIAM/UNICAMP, 2008. Disponível em <http://redeabe.org.br>. Acesso em: 7 jan. 2013.

[25] TORREZAN, Cristiano. Guia do Professor – Cortar Cubos – **Apresentar a Relação de Euler aos alunos.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas. [20--?]. Disponível em < http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1369>. Acesso em: 5 jan. 2013.

[26] TORREZAN, Cristiano. Roteiro do experimento – Cortar Cubos – **Apresentar a Relação de Euler aos alunos.** Campinas: Universidade Estadual de Campinas. [20--?]. Disponível em < http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1369>. Acesso em: 5 jan. 2013.

[27] TUNALA, Nelson. *Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos*. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 20. 1 Quadrimestre de 1992.

[28] WAGNER, Eduardo. *O problema do macarrão e um paradoxo famoso*. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 34. 2 Quadrimestre de 1997.