

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

$$\text{Ker}(T) = \{u \in U, T(u) = 0\}.$$

$$A = \begin{bmatrix} m \times n \\ n^2 \\ -n^2 \\ -m \times n \end{bmatrix}$$

Mustapha Rachidi
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Everton Luiz de Oliveira

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{com } i^2 = -1.$$

$$\begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$$

Elementos Básicos de Álgebra Linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\} = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$



**UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MATO GROSSO DO SUL**

Reitora

Camila Celeste Brandão Ferreira Ítavo

Vice-Reitor

Albert Schiaveto de Souza

Obra aprovada pelo

CONSELHO EDITORIAL DA UFMS

Resolução nº 340 -COED/AGECOM/UFMS,
de 27 de fevereiro de 2026.

CONSELHO EDITORIAL

Rose Mara Pinheiro (presidente)

Adriane Angélica Farias Santos Lopes de Queiroz

Alleisa Ferreira Riquelme

Andrés Batista Cheung

Antonio Pancrácio de Souza

Cid Naudi Silva Campos

Elizabete Aparecida Marques

Maria Lígia Rodrigues Macedo

Ronaldo José Moraca

William Teixeira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Diretoria de Bibliotecas – UFMS, Campo Grande, MS, Brasil)

Rachidi, Mustapha.

Elementos básicos de álgebra linear [recurso eletrônico] / Mustapha Rachidi, Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli, Everton Luiz de Oliveira. – Campo Grande, MS : Ed. UFMS, 2026.

299 p. ; il.

Dados de acesso: <https://repositorio.ufms.br>

Bibliografia: p.299

ISBN 978-85-7613-836-5

1. Álgebra linear. 2. Estruturas algébricas ordenadas. 3. Números reais. 4. Números complexos. 5. Matrizes (Matemática). 6. Espaços vetoriais. I. Mongelli, Magda Cristina Junqueira Godinho. II. Oliveira, Everton Luiz. III. Título.

CDD (23) 512.5

Bibliotecária responsável: Tânia Regina de Brito – CRB 1/2.395

Mustapha Rachidi
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Everton Luiz de Oliveira

Elementos Básicos de Álgebra Linear

Campo Grande - MS
2026



© **autores**

Mustapha Rachidi
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Everton Luiz de Oliveira

1ª edição: 2026

Projeto Gráfico

Mustapha Rachidi
Magda Cristina Junqueira Godinho Mongelli
Everton Luiz de Oliveira

Editoração Eletrônica

Secretaria da Editora UFMS

Revisão

A revisão linguística e ortográfica é de responsabilidade dos autores

A grafia desta obra foi atualizada conforme o Acordo Ortográfico da Língua Portuguesa, de 1990, que entrou em vigor no Brasil em 1º de janeiro de 2009.

Direitos exclusivos para esta edição



Secretaria da Editora UFMS - SEDIT/AGECOM/UFMS
Av. Costa e Silva, s/nº - Bairro Universitário
Campo Grande - MS, 79070-900
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Fone: (67) 3345-7205
e-mail: sedit.agecom@ufms.br

Editora associada à



ISBN: 978-85-7613-836-5

Versão digital: fevereiro de 2026

Apoio:



**UNIVERSIDADE FEDERAL
DE MATO GROSSO DO SUL**

Obra contemplada no Edital AGECOM nº 6/2024

Seleção de propostas para apoio a publicação de livros científicos em formato digital pela Editora UFMS - PUBLICA UFMS 2024.



Este livro está sob a licença Creative Commons, que segue o princípio do acesso público à informação. O livro pode ser compartilhado desde que atribuídos os devidos créditos de autoria. Não é permitida nenhuma forma de alteração ou a sua utilização para fins comerciais. br.creativecommons.org

PREFÁCIO

Pressupõe-se que os estudantes dominem conhecimentos e habilidades típicas que serão desenvolvidas em disciplinas de cursos de graduação ao ingressar na universidade. Conhecimentos prévios como: números reais e números complexos, assim como suas estruturas algébricas, serão necessários para o desenvolvimento dos conceitos que serão trabalhados na disciplina de Álgebra Linear. Todavia, nossa experiência em sala de aula tem mostrado que isso não é a realidade de nossos estudantes.

Este livro busca contribuir, nesse sentido, ao abordar tópicos básicos que fazem parte da disciplina de Álgebra Linear, que é oferecida a estudantes de diversos cursos, como: Matemática, Física, Engenharias, entre outros. Esta disciplina tem o objetivo de preparar esses estudantes ingressantes para a disciplina de Álgebra Linear. A constituição desse livro teve origem em notas de aulas produzidas pelo professor M. Rachidi do INMA, que lecionou a disciplina de Álgebra Linear para acadêmicos do Curso de Matemática, Física e Engenharias em 2020-2021, momento em que buscamos escrever os conteúdos que seriam trabalhados na ementa desta disciplina e disponibilizar antecipadamente em um ambiente de aprendizagem para os alunos estudarem ao longo do semestre. Isso permitiu que eles pudessem estudar os conceitos que seriam trabalhados antes da aula e, assim, se concentrarem mais nas explicações do professor durante os encontros em sala de aula ou remotamente (durante a pandemia). Com isso, as questões e dúvidas surgidas durante esses momentos iam complementando os conteúdos do material disponibilizado. Essa abordagem foi bem recebida pelos estudantes e os resultados das avaliações foram muito bons, para a maioria dos alunos, principalmente durante o período da pandemia.

Diante disso, essas notas de aula foram retomadas em um projeto de livro, em que buscamos identificar os conteúdos propostos pela ementa da disciplina de Álgebra Linear, oferecido pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. A partir disso, realizamos um estudo teórico sobre o ensino e aprendizagem desses conceitos, com foco na sua importância no desenvolvimento dos conceitos envolvidos na Álgebra Linear. Bem como, em pesquisas que versam sobre o tema. Durante seu

desenvolvimento, esse material foi utilizado por outros professores em suas disciplinas, culminando, ao final, na produção deste livro e de artigos.

Assim, esse material foi sendo modificado ao longo dessas experiências, em que buscamos fazer uma proposta didática para a disciplina de Álgebra Linear. Nossa intenção foi elaborar um texto que tratasse de números reais e números complexos. Mas que trabalhasse as estruturas algébricas desses dois conjuntos que são importantes para os estudantes ao lidarem, por exemplo, com os conceitos de matrizes e espaços vetoriais, ou seja, já com uma abordagem própria para o ensino universitário. Ao longo destes anos pudemos comprovar a importância desses conceitos para o estudo das disciplinas ligadas a Álgebra Linear. Por este motivo, acreditamos que estes conteúdos precisam ser tratados com a profundidade e o rigor necessários a fim de possibilitar-lhes as melhores escolhas já no início da disciplina, ou seja, ao ingressarem na universidade. Mas também almejamos que pudessem contribuir com estudantes de outros cursos.

O conteúdo da disciplina “Elementos Básicos de Álgebra Linear” centra-se essencialmente no conjunto das matrizes, de Espaço vetorial de dimensão finita, de transformações lineares e de espaços vetoriais com produto interno, assim como de diagonalização. Tal abordagem constitui não apenas uma base fundamental para a compreensão de outros conteúdos relacionados à Álgebra Linear, mas também para a própria matemática e sua presença em outras disciplinas.

Deixamos nossos sinceros agradecimentos aos estudantes dessa disciplina pelos comentários frutíferos, que ajudaram a melhorar o material inicial ao longo desses dois anos. Aos editores, pelo incentivo, inclusive as modificações ora apresentadas, nosso reconhecimento. Gostaríamos de agradecer a professora Katia Guerchi Gonzales, pelas importantes comentários e sugestões, que trouxeram valiosas melhorias a este livro. Um agradecimento especial ao Dr Mohammed Mouniane da Universidade Ibn Tofail (Kénitra, Marrocos), pelo apoio técnico importante e observações incessante. Também os nossos agradecimentos ao Msc. Lucas Zanon, pelos comentários e sugestões em alguns capítulos.

Antecipadamente já agradecemos aos leitores e deixamos um convite para nos enviar observações e sugestões para melhorarmos este livro.

Por fim, esperamos que você estudante da UFMS possa se beneficiar desse material.

Os autores

CONTEÚDO

Introdução	i
Como usar este livro?	iii
1 Estruturas Algébricas dos Conjuntos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$	1
1.1 Por que estamos propondo este Capítulo?	1
1.2 O conjunto dos números inteiros	2
1.3 O conjunto dos números racionais	3
1.3.1 Os números de $\mathbb{Q}$	3
1.3.2 Operações sobre $\mathbb{Q}$	4
1.3.3 Quais são as motivações para a insuficiência de números racionais?	7
1.4 O conjunto dos números reais	8
1.4.1 Definição axiomática dos números reais	8
1.4.2 Estrutura de Corpo de $\mathbb{R}$	10
1.5 O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$	11
1.6 Exercícios Resolvidos	12
2 Matrizes: Definições e Primeiras Propriedades	17
2.1 Exemplo básico	17
2.2 Vários tipos de matrizes especiais	19
2.2.1 Matriz quadrada	19
2.2.2 Matriz coluna	20
2.2.3 Matriz linha	21
2.2.4 Matriz nula	21
2.2.5 Matriz diagonal quadrada	21
2.2.6 Matriz identidade	22
2.2.7 Matriz triangular superior	23
2.2.8 Matriz triangular inferior	23
2.2.9 Matriz simétrica	24

2.3	Operação de adição de matrizes	24
2.3.1	Exemplo prático de adição de matrizes	24
2.3.2	Operação de adição de matrizes	25
2.3.3	Propriedades de adição de matrizes	27
2.4	Operação de multiplicação de uma matriz por um escalar	30
2.4.1	Ilustração da multiplicação de uma matriz por um escalar	30
2.4.2	Multiplicação de uma matriz por um escalar	31
2.4.3	Propriedades de multiplicação de uma matriz por um escalar	32
2.5	Transposição de matriz. Matriz simétrica e matriz antissimétrica	33
2.6	Matrizes elementares	36
2.6.1	Exemplo Básico	36
2.6.2	Matrizes elementares de ordem $m \times n$	37
2.7	Exercícios Resolvidos	38
2.8	Exercícios para praticar	48
3	Multiplicação das Matrizes e suas Propriedades	50
3.1	Exemplo básico	50
3.2	Multiplicação de matrizes	53
3.3	Propriedades da multiplicação de matrizes	56
3.4	Matrizes inversíveis	59
3.4.1	Definição e propriedades das matrizes inversíveis	59
3.4.2	Método para caracterizar e determinar a matriz inversível	63
3.5	Exercícios resolvidos	66
3.6	Exercícios para praticar	78
4	Sistemas de Equações Lineares	80
4.1	Sistemas lineares e operações elementares	80
4.1.1	Equações lineares	80
4.1.2	Sistemas de equações lineares	82
4.1.3	Classificação de um sistema linear quanto à solução	85
4.1.4	Sistemas lineares homogêneos	86
4.2	Exercícios resolvidos	87
4.3	Exercícios para praticar	98
5	Determinantes e Sistemas de Cramer	100
5.1	Determinantes	100
5.2	Determinantes de matrizes de ordem $n \times n$ com $n \geq 3$	106
5.3	Propriedades do determinante e aplicações	109
5.3.1	Propriedades gerais do determinante	109
5.3.2	Exemplos da aplicação	113
5.4	Sistemas de Cramer	116
5.5	Discussão de um sistema linear	120
5.6	Exercícios resolvidos	123
5.6.1	Determinantes de matrizes	123
5.6.2	Determinantes e resolução de sistemas lineares	129

5.7	Exercícios para praticar	132
6	Espaços vetoriais	134
6.1	Exemplos Básicos	134
6.1.1	Estrutura de espaço vetorial do conjunto $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$	134
6.1.2	Estrutura de espaço vetorial do conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$	135
6.1.3	Estrutura de espaço vetorial do conjunto V dos vetores da geometria.	136
6.2	O que observamos?	137
6.3	Espaços Vetoriais	137
6.3.1	Espaços Vetoriais: Definição Geral.	138
6.3.2	Outro exemplo básico: o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$	139
6.3.3	Primeiras Propriedades Elementares	141
6.4	Subespaços Vetoriais	144
6.4.1	Subespaços Vetoriais: definição, caracterização e exemplos . . .	144
6.4.2	Soma de subespaços Vetoriais	148
6.5	Exercícios Resolvidos	151
6.6	Exercícios para praticar	164
7	Espaços vetoriais Finitamente Gerados. Base e dimensão	165
7.1	Espaços vetoriais finitamente gerados	165
7.1.1	Combinações lineares	165
7.1.2	Espaços vetoriais finitamente gerados	169
7.2	Dependência linear e independência linear	170
7.2.1	Dependência linear	170
7.2.2	Algumas propriedades da dependência linear	172
7.3	Base e dimensão	173
7.3.1	Base de um espaço vetorial	173
7.3.2	Dimensão de um espaço vetorial	178
7.4	Exercícios resolvidos	181
7.5	Exercícios para praticar	193
8	Mudança de bases de um espaço vetorial	194
8.1	Exemplos básicos com a reta dos números reais.	194
8.2	Mudança de bases no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$	196
8.2.1	Exemplo numérico	196
8.2.2	Mudança de bases no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$: Caso geral	198
8.3	Generalidade sobre a mudança de bases e suas propriedades	200
8.4	Exercícios Resolvidos	203
9	Transformações Lineares	208
9.1	Transformações Lineares	208
9.2	Núcleo e imagem	212
9.3	Isomorfismo e Automorfismo	217

9.4	Operações com Transformações lineares	219
9.4.1	Os espaços vetoriais $\mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ e $\mathcal{L}(V)$	220
9.4.2	A operação da composição das transformações	221
9.5	Exercícios Resolvidos	222
9.6	Exercícios para Praticar	230
10	Transformações Lineares e Matrizes	233
10.1	Exemplos básicos de matriz de uma transformação linear	233
10.2	Matriz de uma transformação linear	235
10.3	Operações com Transformações Lineares e Matrizes	241
10.4	Exercícios Resolvidos	243
10.5	Exercícios para Praticar	249
11	Espaços vetoriais com Produtos Internos	251
11.1	Produto Interno	251
11.1.1	Preliminares	251
11.1.2	Produto Interno	252
11.2	Norma e distância	254
11.3	Ortogonalidade	259
11.4	Exercícios da Resolvidos	263
11.5	Exercícios para Praticar	272
12	Autovalores, Autovetores e Autoespaços Associados	273
12.1	Autovalores, Autovetores e Autoespaços associados	273
12.1.1	Multiplicidade algébrica e Multiplicidade geométrica	284
12.2	Diagonalização	285
12.3	Considerações finais	289
12.3.1	Generalidades sobre os passos para o obtenção de autoespaços	289
12.3.2	Algumas propriedades gerais	289
12.4	Exercícios Resolvidos	290
12.5	Exercícios para Praticar	298

INTRODUÇÃO

Este livro é destinado aos alunos e tem como objetivo apresentar as propriedades básicas de álgebra linear. Nosso foco, neste trabalho é expor os conceitos básicos sobre álgebra linear, fornecendo assim os instrumentos para outras disciplinas e preparando uma base para novos estudos.

Os objetivos gerais direcionados consistem em fornecer as condições ideais, permitindo a aquisição das capacidades e habilidades, bem como o rigor, necessários na resolução ou análise dos problemas da álgebra linear, e nos diversos campos relacionados a ela. Por outro lado, desenvolve a capacidade de dedução e raciocínio lógico e organizado, para resolver exercícios e problemas de álgebra linear.

Também, entre os objetivos específicos direcionados, podemos citar principalmente:

1. Manipular adequadamente as propriedades de matrizes, tais como as matrizes inversas, e suas aplicações para analisar e resolver sistemas lineares.
2. Dominar o conceito de espaço vetorial e suas propriedades tais como: bases; conjuntos linearmente independente e conjuntos linearmente dependente; espaços vetoriais finitamente gerados; etc.
3. Manipular as transformações lineares em espaços de dimensão finita, e determinar suas respectivas matrizes associadas; identificar núcleos e imagens de transformações lineares.
4. Aplicar autovetores e autovalores na diagonalização de matrizes e operadores; reconhecer operadores diagonalizáveis; estendendo o conceito de ortogonalidade; estudar operadores diagonalizáveis a partir de seus autovalores e respectivos autovetores.
5. Conhecer e aplicar os conceitos de produto interno, norma, distância e projeção ortogonal; generalizar o conceito de produto escalar.

O conteúdo é apresentado de modo a tratar os assuntos considerados em uma ordem didática visando facilitar a exposição do texto. O conteúdo que apresentamos inclui os seguintes tópicos:

1. O conceito fundamental de matrizes e definições relativas, juntamente com os métodos das operações básicas e suas aplicações. Definições dos principais tipos de matrizes. Operações básicas com matrizes: Adição, Multiplicação por um escalar real ou complexo; Multiplicação das matrizes. As propriedades de algumas matrizes especiais; matrizes transposta, inversa e determinação da matriz inversa por vários métodos.
2. Determinantes: definição de determinante de uma matriz e seus elementos, propriedades fundamentais e métodos para cálculo de determinantes. Em seguida, temos: a aplicação para a resolução de sistemas lineares; Sistemas equivalentes; Sistemas escalonados. Por fim, apresentamos uma discussão e resolução de um sistema linear.
3. Espaço Vetorial. Subespaços vetoriais; Dependência e independência linear; Base de um espaço vetorial. Mudança de base. Em seguida: as Transformações lineares; Núcleo e imagem de uma transformação linear e Representação de transformações lineares por matrizes.
4. Espaços com produtos internos: Produtos internos; Norma e Distância; Ortogonalidade. Autovalores e Autovetores; Diagonalização; Polinômio característico; Base de autovetores.

Para cada capítulo daremos exemplos simples para a ilustração das propriedades importantes. No final de cada capítulo, temos uma lista de exercícios resolvidos, com uma solução padrão para cada exercício.

O raciocínio utilizado para os exemplos, poderão servir como base para os estudantes, para resolver os exercícios da lista proposta, com objetivo de comparar com a solução padrão proposta. Também, para cada capítulo tem a proposta de exercícios para praticar.

COMO USAR ESTE LIVRO?

Como este livro destina-se principalmente aos estudantes, consideramos, portanto, que é importante dar-lhes algumas dicas básicas para seu uso. Isso lhes permitirá obter o máximo benefício tanto para validar as provas desta disciplina, como para abordar com mais serenidade outras disciplinas, onde a Álgebra Linear tem um papel importante.

1. Para as aulas: Para cada capítulo é muito importante:

- Conhecer bem a definição de cada conceito.
- Estudar rigorosamente as propriedades do capítulo, e também os diferentes tipos de provas, tendo em conta o raciocínio utilizado para estabelecer cada uma dessas propriedades.
- Entender melhor a ilustração de cada propriedade nos exemplos de aplicação, tendo em conta as diferentes formas de raciocínio utilizadas nos exemplos.

2. Para os exercícios: Para validar cada disciplina matemática, o aluno deve passar por provas escritas. Cada prova envolve exercícios e problemas. A resolução de exercícios e problemas requer atividades sucessivas por parte do aluno, que por vezes se sobrepõem, nomeadamente:

Passo 1: Uma boa leitura do texto do exercício, que permite compreender e interpretar melhor a informação resultante das hipóteses, bem como a(s) pergunta(s) formulada(s). Esta etapa é importante para configurar o método adequado para responder às perguntas.

Etapa 2: O processo de pesquisa e investigação para responder às questões do exercício. Durante este processo, temos que relacionar os conhecimentos adquiridos, as técnicas e as ferramentas adequadas para conseguirmos produzir uma demonstração correta. Para isso, a aquisição das definições e o trabalho sobre as propriedades e os exemplos contribuirão de forma importante para o desenvolvimento de tais provas.

Passo 3: Escreva bem a solução do exercício ou problema, pois a boa redação é uma forma de comunicação que possibilita convencer do seu bom domínio do conteúdo da disciplina.

As etapas anteriores representam uma atividade matemática, que necessariamente levará o aluno à adoção de diferentes formas de raciocínio e demonstrações.

3. Reforçar o trabalho de raciocínio e demonstração: O aluno será confrontado, nesta disciplina matemática, com raciocínio lógico e diferentes tipos de demonstração. No Anexo 1, achamos útil apresentar algumas formas de raciocínio e provas matemáticas encontradas neste livro. Esta iniciativa visa conscientizar os alunos sobre o trabalho matemático exigido na Álgebra Linear.

Em geral, os diferentes tipos de raciocínio e demonstração que podem ser implementados em cada parte do programa e em cada nível são: Raciocínio dedutivo; Raciocínio por disjunção de caso; Raciocínio pelo absurdo; Raciocínio por contra-exemplo; Raciocínio indutivo.

CAPÍTULO 1

ESTRUTURAS ALGÉBRICAS DOS CONJUNTOS $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ E $\mathbb{C}$



Objetivos

Neste capítulo são apresentadas as estruturas algébricas dos conjuntos dos números inteiros $\mathbb{Z}$, dos números racionais $\mathbb{Q}$ e dos números reais $\mathbb{R}$. Em particular, a apresentação do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é feita de maneira axiomática. Os objetivos são revisar os fundamentos das propriedades dos números reais, que serão úteis para os outros capítulos; e introduzir alguns elementos da álgebra linear, subjacentes ao conjunto dos números reais e aos números complexos.

1.1 Por que estamos propondo este Capítulo?

O conteúdo deste capítulo vai proporcionar aos leitores os seguintes pontos:

1. Lembrar as propriedades algébricas dos conjuntos dos números $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$. Essas propriedades são importantes para a álgebra linear.
2. As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, são estendidas para outros conjuntos de maneira natural.
3. Os conjuntos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ possuem uma estrutura algébrica, cujas propriedades são ligadas às operações sobre as matrizes e aos espaços vetoriais.

As considerações anteriores vão permitir descobrir que:

1. A adição e a multiplicação definidas sobre outros conjuntos e suas propriedades, são baseadas sobre a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$.
2. Os alunos já usavam e/ou praticavam algumas propriedades dos espaços vetoriais nos casos particulares de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

1.2 O conjunto dos números inteiros

O primeiro conjunto numérico conhecido pela humanidade é chamado de conjunto dos números naturais ou conjunto dos inteiros positivos, denotado pelo conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Até hoje, o conjunto dos números naturais é apresentado com um aspecto natural baseado no senso comum e uma espécie de conceito intuitivo de recursão, que não é outro senão a propriedade do sucessor, propriedade essa intrínseca dos números naturais. Assim, como cada número natural n tem um sucessor $n + 1 \in \mathbb{N}$, podemos facilmente nos convencer de que $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito.

Dados dois números naturais n e m , sabemos como definir a adição e a multiplicação desses números também usando a propriedade do sucessor. Definimos a adição de m e n como sendo o natural $m + n$, e a multiplicação de m por n como sendo o natural $m \cdot n$. Assim, o conjunto de números naturais é fechado para ambas as operações de adição e multiplicação. Em outras palavras, adição e multiplicação em $\mathbb{N}$ são operações que têm seu resultado em $\mathbb{N}$.

Por outro lado, o resultado de uma subtração de dois números naturais nem sempre é um número natural, por exemplo, $7 - 2 = 5 \in \mathbb{N}$ mas $2 - 7 \notin \mathbb{N}$. Daí a necessidade de construir um novo conjunto de números que contenha os elementos de $\mathbb{N}$ e no qual a subtração de dois números naturais seja também um elemento desse novo conjunto, ou seja, a operação de subtração esteja bem definida.

Os números $-1, -2, -3, \dots$ são chamados inteiros negativos. A união do conjunto dos números naturais com o conjunto dos inteiros negativos define o conjunto dos números inteiros, denotado por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, \dots\}.$$

Temos claramente a inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Enunciamos abaixo as propriedades dos números inteiros em relação as operações de adição e de multiplicação.



Proposição 1.2.1

Sejam m, n e k números inteiros, isto é, três elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$. Então são válidas as propriedades a seguir:

1. **Comutatividade da adição:** $m + n = n + m$,
2. **Associatividade da adição:** $m + (n + k) = (m + n) + k$,
3. **Existência de elemento neutro da adição:** $n + 0 = n$,
4. **Existência de oposto:** dado $n \in \mathbb{Z}$ existe $-n$ em $\mathbb{Z}$ satisfazendo a relação

$n + (-n) = 0$, o número $-n$ chama-se o oposto de n ou o simétrico de n .

5. **Comutatividade da multiplicação:** $m.n = n.m$,
6. **Associatividade da multiplicação:** $m.(n.k) = (m.n).k$,
7. **Existência de elemento neutro da multiplicação:** $m.1 = m$,
8. **Distributividade:** $m.(n + k) = m.n + m.k$.

Todas as oito propriedades apresentadas já foram utilizadas quando efetuamos cálculos com números inteiros e são tão naturais que nos passam despercebidas.

1.3 O conjunto dos números racionais

1.3.1 Os números de $\mathbb{Q}$

Agora o resultado de uma divisão de dois números inteiros, denotada por $\div$, nem sempre é um número inteiro, por exemplo, $12 \div 4 = 3$, denotado também por $\frac{12}{4} = 3 \in \mathbb{Z}$, e $-12 \div 4 = -3$ denotado $\frac{-12}{4} = -3 \in \mathbb{Z}$, mas $7 \div 2 = \frac{7}{2} \notin \mathbb{Z}$. Daí a necessidade de construir um novo conjunto de números que contenha $\mathbb{Z}$ e no qual a divisão de dois números inteiros seja um elemento desse novo conjunto.

Notação: em geral o número $p \div q$ é denotado por $\frac{p}{q}$.

Os números da forma $\frac{p}{q}$, onde p, q estão em $\mathbb{Z}$, com $q \neq 0$, são chamados de frações, onde p é o numerador e q o denominador, e formam o conjunto dos números racionais. Este conjunto é denotado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Assim, o conjunto dos números racionais introduz uma simbologia que é a da fração. A apresentação desses elementos usa o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, que por sua vez precisa de uma informação adicional: a equivalência. Duas frações são ditas equivalentes ou iguais de acordo com a igualdade:

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn = qm,$$

e neste caso, dizemos que representam o mesmo número racional. Por exemplo, as quatro frações seguintes representam o mesmo número racional,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15} = \frac{14}{21}.$$

Em geral, adotamos a convenção de que as frações de denominador 1 representam o inteiro que é igual ao numerador dessa fração. Isto é, para $p \in \mathbb{Z}$ temos $p = \frac{p}{1}$. Então, o

conjunto de números racionais $\mathbb{Q}$ contém uma cópia dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Também, temos claro as seguintes inclusões:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Assim, as quatro operações elementares adição, subtração, multiplicação e divisão podem se estender ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, que é fechado para essas operações.

Terminamos com duas observações elementares simples, que são muito importantes para os cálculos com os quocientes.

Observação sobre a inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Essa inclusão mostra que qualquer inteiro é também um número racional. Assim, qualquer inteiro $n \in \mathbb{Z}$ pode ser representado por uma fração da seguinte forma $n = \frac{n}{1}$, especialmente,

$$1 = \frac{1}{1} \text{ e } 0 = \frac{0}{1}.$$

Observação sobre as frações e regras dos sinais. Seja $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, então

$$a = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n} = -\frac{-m}{n} = -\frac{m}{-n}.$$

Assim, qualquer fração admite ser denotada com os sinais negativos. Esta última observação é importante para estudar o relacionamento de ordem e comparação em $\mathbb{Q}$.

1.3.2 Operações sobre $\mathbb{Q}$

As operações com números racionais são as usuais, denominadas de adição e de multiplicação, ficando subentendidas as operações “inversas” definidas a partir destas, que são a subtração e a divisão. Supostamente são conhecidas as operações com números inteiros, por isso apenas apresentamos as definições de adição e multiplicação de frações e enunciamos logo em seguida as propriedades básicas destas operações. As provas dessas propriedades são baseadas nas propriedades dos inteiros e nas seguintes definições de adição e multiplicação de números racionais escritos em forma fracionária.



Definição 1.3.1

Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ dois elementos de $\mathbb{Q}$. Definimos a adição e a multiplicação de $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{q}$ como o seguinte:

$$a + b = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq} \text{ e } a \cdot b = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}.$$

A Definição 1.3.1 mostra que a adição e multiplicação de números racionais é obtida a partir da adição e multiplicação de números inteiros. Assim, as propriedades de adição e multiplicação de inteiros podem ser transferidas para números racionais, ou seja: Associatividade, Comutatividade, Existência do elemento neutro da adição, Existência de oposto para a adição, Comutatividade para a multiplicação, Existência do elemento neutro da multiplicação, Existência de Inverso para multiplicação e Distributividade. De fato, podemos deduzir que a adição e a multiplicação dos números racionais, possuem as seguintes propriedades, que têm por objetivo completar a apresentação do conjunto dos números inteiros e que são úteis no estudo das expressões algébricas.



Proposição 1.3.2

Sejam $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{m}{n}$ e $c = \frac{k}{s}$ três números racionais, isto é, são elementos de $\mathbb{Q}$. Então são válidas as propriedades a seguir:

1. **Comutatividade da adição:** $a + b = b + a$.
2. **Associatividade da adição:** $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. **Existência de elemento neutro da adição:** $a + 0 = a$.
4. **Existência de oposto:** Existe $-a$ em $\mathbb{Q}$ satisfazendo à relação $a + (-a) = 0$, o número $-a$ chama-se o oposto de a ou o simétrico de a .
5. **Comutatividade da multiplicação:** $a.b = b.a$.
6. **Associatividade da multiplicação:** $a.(b.c) = (a.b).c$.
7. **Existência de elemento neutro da multiplicação:** $a.1 = a$.
8. **Existência de inverso:** Se $a \neq 0$, existe um único número d em $\mathbb{Q}$ satisfazendo à relação $a.d = 1$, o número d é o inverso de a e denotado por $d = \frac{1}{a}$ ou $d = a^{-1}$.
9. **Distributividade:** $a.(b + c) = a.b + a.c$

As 9 propriedades anteriores são conhecidas. Agora vamos provar todas essas propriedades.

Demonstração. Sejam $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{m}{n}$ e $c = \frac{k}{s}$ três números racionais.

Comutatividade da adição em $\mathbb{Q}$. Pela Definição 1.3.1 temos que $a + b = \frac{p}{q} + \frac{m}{n} = \frac{pn + mq}{qn}$. Assim, a comutatividade da multiplicação e da adição em $\mathbb{Z}$ nos permitem deduzir que:

$$a + b = \frac{pn + mq}{qn} = \frac{qm + np}{nq} = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = b + a.$$

Associatividade da adição em $\mathbb{Q}$. Pela Definição 1.3.1 temos que $(a + b) + c = (\frac{p}{q} + \frac{m}{n}) + \frac{k}{s} = \frac{pn + mq}{qn} + \frac{k}{s}$. Aplicando novamente a Definição 1.3.1, e as propriedades de associatividade da adição e distributividade em $\mathbb{Z}$, obtemos:

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= \frac{pn + mq}{qn} + \frac{k}{s} = \frac{(pn + mq)s + qnk}{qns} \\ &= \frac{pns + q(ms + nk)}{qns} = \frac{p}{q} + \frac{ms + nk}{ns} \\ &= \frac{p}{q} + (\frac{m}{n} + \frac{k}{s}) = a + (b + c).\end{aligned}$$

Existência de elemento neutro da adição em $\mathbb{Q}$. Como $0 \in \mathbb{Z}$ temos $0 = \frac{0}{1}$. Com as propriedades da multiplicação e da adição em $\mathbb{Z}$, temos:

$$a + 0 = \frac{p}{q} + \frac{0}{1} = \frac{p \times 1 + q \times 0}{q \times 1} = \frac{p}{q} = a + 0 = a.$$

Existência de oposto. Seja $a_1 = \frac{-p}{q}$, pela Definição 1.3.1 temos:

$$a + a_1 = \frac{p}{q} + \frac{-p}{q} = \frac{p - p}{q} = \frac{0}{q} = 0.$$

Assim, $a_1 = \frac{-p}{q}$ é o oposto de $a = \frac{p}{q}$, que é denotado por $a_1 = -a = -\frac{p}{q}$.

Comutatividade da multiplicação. Pela Definição 1.3.1 e de comutatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$, temos:

$$a.b = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} = \frac{pm}{qn} = \frac{mp}{nq} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = b.a.$$

Então, $a.b = b.a$.

Associatividade da multiplicação. Pela Definição 1.3.1 e com a propriedade de associatividade da multiplicação em $\mathbb{Z}$ obtemos:

$$(a.b).c = \left(\frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n}\right) \cdot \frac{k}{s} = \left(\frac{p.m}{q.n}\right) \cdot \frac{k}{s} = \frac{(p.m).k}{(q.n).s} = \frac{p.(m.k)}{n.(q.s)} = a(b.c).$$

Então, $(a.b).c = a.(b.c)$.

Existência de elemento neutro da multiplicação. Como $1 = \frac{1}{1}$, a Definição 1.3.1 implica que:

$$a.1 = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{1} = \frac{p.1}{q.1} = \frac{p}{q} = a,$$

uma vez que 1 é o elemento neutro em $\mathbb{Z}$.

Existência de inverso. Seja $a = \frac{p}{q} \neq 0$ e $d = \frac{q}{p}$. Como $1 = \frac{d}{d}$ para todo $d \neq 0$ em $\mathbb{Z}$, a

Definição 1.3.1 mostra que:

$$a.d = \frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = \frac{p \cdot q}{p \cdot q} = 1.$$

Assim, $d = \frac{q}{p}$ é o único número em $\mathbb{Q}$ satisfazendo à relação $a.d = 1$. Então, o número

d é o inverso de a , que é denotado por $d = \frac{1}{a}$ ou $d = a^{-1}$.

Distributividade. Pela Definição 1.3.1, temos que:

$$a.(b+c) = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{m}{n} + \frac{k}{s} \right) = \frac{p}{q} \cdot \frac{ms+nk}{ns} = \frac{pms+pnk}{qns} = \frac{p}{q} \cdot \frac{m}{n} + \frac{p}{q} \cdot \frac{k}{s} = a.b + a.c.$$

Assim, deduzimos $a.(b+c) = a.b + a.c$.

□

As propriedades da Proposição 1.3.2 conferem ao conjunto de números racionais uma estrutura algébrica interessante, que é conhecida como: **CORPO**. De maneira mais precisa:



Proposição 1.3.3

O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, equipado com as operações da adição e da multiplicação é um **Corpo Comutativo e Unitário**, e escrevemos, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

Observação. Porque $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ é um corpo comutativo e unitário? Essas duas nomenclaturas identificam as seguintes características de $\mathbb{Q}$:

- Comutativo, porque a multiplicação é comutativa, isto é, $a.b = b.a$ para todos a, b em $\mathbb{Q}$;
- Unitário, pois o número 1 é um elemento neutro da multiplicação, isto é, $1.a = a$ para todo a em $\mathbb{Q}$.

1.3.3 Quais são as motivações para a insuficiência de números racionais?

Em outras palavras, quais são as motivações para a construção do conjunto dos números reais $\mathbb{R}$? Os gregos clássicos acreditavam que todas as quantidades eram expressas por números racionais. Eles perceberam que isso nem sempre acontecia. Na verdade, podemos construir números que não são racionais. Isto é, existem números que não são racionais, chamados números irracionais. Números irracionais aparecem naturalmente em figuras geométricas. Por exemplo, a diagonal de um quadrado de lado 1 tem como medida o número irracional $\sqrt{2}$.



Proposição 1.3.4

O número $\sqrt{2}$ não é um número racional, isto é, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demonstração. Suponhamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, isto é, $\sqrt{2}$ pode ser escrito sobre a forma $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros que não tem divisor comum. Podemos supor que p e q são primos entre si, caso contrário podemos tomar a forma de representação mais simplificada da razão. Assim a igualdade $\sqrt{2}^2 = \frac{p^2}{q^2}$ equivale a $2q^2 = p^2$.

A última expressão implica que p^2 é par, então p é par. Se p fosse ímpar, isto é, $p = 2k + 1$, teríamos que $p^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2q^2$, o que é impossível, porque não existe um número inteiro não nulo que é par e ímpar. Como $p = 2s$ temos que $2q^2 = p^2 = (2s)^2 = 4s^2$, ou ainda, $q^2 = 2s^2$.

Com o mesmo raciocínio, também obtemos que q é par, isto é, $q = 2r$. Então, 2 é um divisor comum dos números p e q . Como p e q são primos entre si, temos uma contradição. Em conclusão, o número $\sqrt{2}$ não é um número racional, isto é, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

□

Podemos dizer que encontramos números que não podem ser representados na forma $\frac{p}{q}$, $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{Z}$, tais como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\pi = 3,141592\dots$. Esses números formam o conjunto dos números irracionais, denotado por $\mathbb{I}$. Da união do conjunto dos números **racionais** $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números **irracionais** $\mathbb{I}$, resulta o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como veremos a seguir. Por outro lado, temos a seguinte inclusão:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1.4 O conjunto dos números reais

1.4.1 Definição axiomática dos números reais

Em geral, apresentaremos o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como sendo o conjunto dos números identificados com os pontos da reta numérica. Esta forma se deve ao fato de que os números racionais são identificados de forma simples como pontos da reta numérica, usando os conhecimentos da Geometria Plana. No entanto, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é matematicamente construído a partir dos números naturais $\mathbb{N}$, então o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é construído a partir dos inteiros, por um método matemático algébrico.

A construção do conjunto dos números reais é extremamente técnica e pode ser realizada com uso de vários métodos. Assim, essa construção não pode fugir do escopo de um curso básico de cálculo. A seguir apresenta-se a construção axiomática, assim como as definições e propriedades referentes ao conjunto dos números reais.

No conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ introduzimos duas operações, chamadas adição e multiplicação, que representam uma extensão natural das operações de adição e multiplicação de $\mathbb{Q}$. Essas operações satisfazem os axiomas a seguir.

Definição 1.4.1

(**Definição axiomática dos números reais $\mathbb{R}$**) As operações de adição e multiplicação de $\mathbb{R}$ satisfazem os seguintes axiomas:

AXIOMA 1 (**Fechamento**). Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, existe um, e somente um, número real denotado por $a + b$, chamado de **soma**, e existe um, e somente um, número real denotado por ab (ou $a \times b$, ou $a.b$), chamado de **produto**.

AXIOMA 2 (**Comutatividade**). Se $a, b \in \mathbb{R}$, então $a + b = b + a$ e $a.b = b.a$.

AXIOMA 3 (**Associatividade**). Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a.(b.c) = (a.b).c$

AXIOMA 4 (**Existência de elemento neutro**). Existem 0 e 1 em $\mathbb{R}$ tais que $a + 0 = a$ e $a.1 = a$.

O número 0 é elemento neutro da adição e o número 1 é elemento neutro da multiplicação, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

AXIOMA 5 (**Existência do elemento oposto ou simétrico**). Todo a em $\mathbb{R}$, tem um simétrico, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

AXIOMA 6 (**Existência do elemento inverso**). Todo $a \neq 0$ em $\mathbb{R}$, tem um inverso, denotado por $\frac{1}{a}$ ou a^{-1} , tal que $a.\frac{1}{a} = 1$ (ou $a.a^{-1} = 1$).

AXIOMA 7 (**Distributividade**). Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, então $a.(b + c) = a.b + a.c$.

E quanto às outras duas operações conhecidas em $\mathbb{R}$, ou seja, a subtração e o quociente de dois números reais? De fato, a partir da adição e multiplicação de $\mathbb{R}$, podemos definir as operações de subtração e de divisão em $\mathbb{R}$. A subtração é definida como o seguinte.

Definição 1.4.2

(**Subtração**) A subtração é a operação inversa da adição que consiste em "subtrair" em vez de "adicionar". A subtração é definida usando a adição e o simétrico, da seguinte maneira:

$$a - b = a + (-b), \text{ para todos } a, b \text{ em } \mathbb{R}.$$

E o quociente de dois números reais é definida por:

Definição 1.4.3

(**Quociente**) A divisão é a operação inversa da multiplicação, que consiste em "dividir" ao invés de "multiplicar". A divisão é definida usando a multiplicação e o inverso, da seguinte maneira:

$$\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b} = a.b^{-1}, \text{ para } a, b \neq 0 \text{ em } \mathbb{R}.$$

A definição da soma e do produto dos quocientes dos números racionais também

se estende aos quocientes dos números reais.



Definição 1.4.4

Sejam $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$ dois números de $\mathbb{R}$. Definimos a adição e a multiplicação de $\alpha = \frac{a}{b}$ e $\beta = \frac{c}{d}$ como o seguinte número real:

$$\alpha + \beta = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ e } \alpha \cdot \beta = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

1.4.2 Estrutura de Corpo de $\mathbb{R}$

A definição axiomática é uma maneira usual e mais simples de apresentar as definições e propriedades referentes ao conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Por outro lado, as propriedades das precedentes proposições conferem ao conjunto dos números reais a estrutura algébrica de **Corpo** já discutida no conjunto dos números racionais. De maneira mais precisa, temos a seguinte proposição.



Proposição 1.4.5

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, equipado com a adição e multiplicação é um **Corpo Comutativo e Unitário**, e escrevemos, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Como acontece com o conjunto dos números racionais, as duas nomenclaturas: comutativa e unitária, referem-se às mesmas propriedades da operação de multiplicação de números reais. Mais precisamente, temos $a \cdot b = b \cdot a$ e $1 \cdot a = a$, para todo a, b em $\mathbb{R}$.

Os axiomas da Definição 1.4.1 podem ser apresentados de forma adequada. Assim, para quaisquer a, b, c números reais, temos:

1. **Comutatividade da adição.** $a + b = b + a$.
2. **Associatividade da adição.** $a + (b + c) = (a + b) + c$.
3. **Existência de elemento neutro da adição.** $a + 0 = a$.
4. **Existência de oposto.** Existe $-a$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo à relação $a + (-a) = 0$, o número $-a$ chama-se o oposto de a ou o simétrico de a .
5. **Comutatividade da multiplicação.** $a \cdot b = b \cdot a$.
6. **Associatividade da multiplicação.** $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
7. **Existência de elemento neutro da multiplicação.** $a \cdot 1 = a$.
8. **Existência de Inverso.** Se $a \neq 0$, existe um único número d em $\mathbb{R}$ satisfazendo à relação $a \cdot d = 1$, o número d é o inverso de a e denotado por $d = \frac{1}{a}$ ou $d = a^{-1}$.

9. Distributividade. $a.(b + c) = a.b + a.c$

A terminologia de corpo comutativo e unitário é mais geral. O estudo sobre corpos e outras estruturas algébricas é uma área importante da matemática, que tem várias aplicações teóricas e práticas. Vejamos outro corpo comutativo e unitário importante para a Álgebra Linear.

1.5 O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é composto por números da seguinte forma:

$$z = a + bi \quad \text{onde } a, b \in \mathbb{R}, \text{ e } i^2 = -1.$$

Isto é,

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{com } i^2 = -1.$$

As operações de adição e multiplicação de números reais se estendem a números complexos.

Adição. A adição em $\mathbb{R}$ se estende a $\mathbb{C}$ da seguinte maneira:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

para todo $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ números complexos.

Multiplicação. A multiplicação em $\mathbb{R}$ se estende a $\mathbb{C}$ da seguinte maneira:

$$z_1 \times z_2 = (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i,$$

para todo $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ números complexos.

Seja $z = a + bi$ um número complexo, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Então :

- se $b = 0$ temos $z = a \in \mathbb{R}$, assim $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$,
- e $-z = -a - bi$.

Estrutura algébrica de $\mathbb{C}$. Sejam z_1, z_2 e z_3 três números em $\mathbb{C}$. As operações de adição e multiplicação de $\mathbb{C}$ satisfazem os seguintes propriedades:

1. **Comutatividade.** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.
2. **Associatividade.** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.
3. **Elemento neutro.** Os números 0 e 1 em $\mathbb{C}$ são tais que $z + 0 = z$ e $z \cdot 1 = z$. Assim, o 0 (zero) é elemento neutro da adição e 1 é elemento neutro da multiplicação, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.
4. **Elemento oposto ou simétrico.** Todo z em $\mathbb{C}$, tem um simétrico, denotado por $-z$, tal que $z + (-z) = 0$.

5. **Elemento inverso.** Todo $z \neq 0$ em $\mathbb{C}$, tem um inverso, denotado por $\frac{1}{z}$ ou z^{-1} , tal que $z \cdot \frac{1}{z} = 1$ (ou $z \cdot z^{-1} = 1$).

6. **Distributividade:** $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Como no caso dos números reais, com as precedentes propriedades, o conjunto dos números complexos possui uma estrutura algébrica de corpo.



Proposição 1.5.1

O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, equipado com a adição e multiplicação é um **Corpo Comutativo e Unitário**, e escrevemos, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Observações. Temos as duas observações a seguir, que são úteis para realizar cálculos com números:

1. Seja $z = a + bi$ um número complexo, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Se $z \neq 0$ temos $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$. Isto é, usando a ideia de conjugado e seu uso para divisão temos.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 - b^2 i^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

2. Todo número complexo pode ser escrito usando somente os números 1 e i , isto é,

$$z = a + bi = a \times 1 + b \times i.$$

Assim, podemos gerar qualquer número complexo usando o conjunto $\{1, i\}$ e as operações de adição e de multiplicação.

1.6 Exercícios Resolvidos



Exercício 1.6.1

Números racionais. Efetue os seguintes cálculos:

$$A = \frac{11}{5} - \frac{3}{4}, \quad B = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{6}{7}, \quad C = 5^{-2} \times 125 \times \frac{27}{25} - \frac{55}{25}.$$

Solução. As regras de cálculo das frações e das potências nos permitem ter:

- $A = \frac{11 \times 4}{5 \times 4} - \frac{3 \times 5}{4 \times 5} = \frac{29}{20}.$
- $B = \frac{5}{3} - \frac{24}{21} = \frac{5 \times 7}{3 \times 7} - \frac{24}{21} = \frac{11}{21}.$
- $C = 5^{-2} \times 5^3 \times \frac{27}{5^2} - \frac{5 \times 11}{5^2} = \frac{27}{5} - \frac{11}{5} = \frac{16}{5}.$

Exercício 1.6.2

Números racionais

- 1) Seja o número $r = 7,202\,202\ldots 202\ldots$. Mostrar que o número r é racional.
- 2) Seja o número $r = 2,427\,27\ldots 27\ldots$. Mostrar que o número r é racional.

Solução. Como os números deste exercício têm uma escrita decimal periódica, usaremos o seguinte método.

1) Para o número $r = 7,202\,202\ldots 202\ldots$, temos:

$$1000 \times r - r = 7202,202\ldots 202\ldots - 7,202\,202\ldots 202\ldots$$

Logo, obtemos $1000r - r = 7195$, e assim deduzimos que $r = \frac{7195}{999}$.

2) Para o número $r = 2,427\,27\ldots 27\ldots$, temos:

$$1000 \times r - 10r = 2427,27\ldots 27\ldots - 24,27\,27\ldots 27\ldots$$

Logo, obtemos $1000r - 10r = 2403$ deduzimos que $r = \frac{2403}{990}$.

Exercício 1.6.3

Determine a fração geratriz de cada dízima periódica.

- (1) $0,777\ldots$, (2) $-1,222\ldots$, (3) $3,25555\ldots$,
- (4) $-16,2323\ldots$, (5) $4,18282\ldots$, (6) $-2,516516\ldots$

Solução. Ao aplicar o método do exercício anterior, obtemos os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} (1) 0,777\ldots &= \frac{7}{9}, & (2) -1,222\ldots &= -\frac{11}{9}, & (3) 3,25555\ldots &= \frac{293}{90}, \\ (4) -16,2323\ldots &= -\frac{1607}{99}, & (5) 4,18282\ldots &= \frac{4141}{990}, & (6) -2,516516\ldots &= -\frac{2514}{999}. \end{aligned}$$

Exercício 1.6.4

Classifique cada um dos números a seguir em racional ou irracional.

- (1) $\frac{16}{5}$, (2) $-\frac{15}{11}$, (3) $\sqrt{3}$, (4) $-3\frac{5}{9}$, (5) $\frac{9}{4}$.
- (6) $-\frac{3}{8}$, (7) $\sqrt{6}$, (8) $\sqrt{7}$, (9) $\frac{52}{9}$, (10) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução. Os seguintes números reais são número racionais:

$$\frac{16}{5}, \quad -\frac{15}{11}, \quad -3\frac{5}{9}, \quad \frac{9}{4}, \quad -\frac{3}{8}, \quad \frac{52}{9}.$$

Os seguintes números reais são número irracionais:

$$\sqrt{3}, \quad \sqrt{6}, \quad \sqrt{7}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Exercício 1.6.5

Números naturais, inteiros, racionais e irracionais. Observe o conjunto A e responda:

$$A = \left\{ -\frac{14}{2}, \frac{21}{7}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt{16}, \frac{24}{12} \right\}$$

- 1) Quais elementos são números naturais?
- 2) Quais elementos são números inteiros?
- 3) Quais elementos são números racionais?
- 4) Quais elementos são números irracionais?

Solução.

- 1) Os seguintes números são números naturais: $\frac{21}{7}, \sqrt{16}, \frac{24}{12}$.
- 2) Os seguintes números são números inteiros: $-\frac{14}{2}, \frac{21}{7}, \sqrt{16}, \frac{24}{12}$.
- 3) Os seguintes números são números racionais: $-\frac{14}{2}, \frac{21}{7}, \sqrt{16}, \frac{24}{12}$.
- 4) Os seguintes números são números irracionais: $\pi, \sqrt{2}$.

Exercício 1.6.6

Números irracionais.

Sabemos que $\sqrt{3}$ é irracional.

- 1) Mostrar que os números $2 + \sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ são irracionais.
- 2) Seja r um número racional. Mostre que $r + \sqrt{3}$ é irracional.

Solução. Aqui aplicamos um raciocínio pelo absurdo.

1) Suponha que $2 + \sqrt{3}$ é um número racional, então temos $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2 = \frac{p-2q}{q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{3}$ é um número racional. O que é uma contradição. Assim, $2 + \sqrt{3}$ é o número real irracional.

De maneira semelhante, suponha que $2\sqrt{3}$ é um número racional, então temos $2\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\sqrt{3} = \frac{p}{2q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{3}$ é um número racional. O que é uma contradição. Assim, $2\sqrt{3}$ é o número real irracional.

2) Suponha que $r + \sqrt{3}$ é um número racional, então temos $r + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\sqrt{3} = \frac{p}{q} - r = \frac{p-rq}{q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{3}$ é um número racional. O que é

uma contradição. Assim, $r + \sqrt{3}$ é o número real irracional.

De maneira semelhante, podemos provar que $r\sqrt{3}$ é um número real irracional.

Assim, a partir do número irracional $\sqrt{3}$, podemos construir um número infinito de números irracionais.

Exercício 1.6.7

Sabemos que π é um número irracional. Mostre que os números $3 + \pi$ e 3π são irracionais.

Solução. Aqui também aplicamos um raciocínio pelo absurdo.

Suponha que $3 + \pi$ é um número racional, então temos $3 + \pi = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.

Logo, temos $\pi = \frac{p}{q} - 3 = \frac{p-3q}{q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, π é um número racional. O que é uma contradição. Assim, $3 + \pi$ é um número real irracional.

De maneira semelhante, suponha que 3π é um número racional, então temos $3\pi = \frac{p}{q}$, onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Logo, temos $\pi = \frac{p}{3q} \in \mathbb{Q}$, ou seja, π é um número racional. O que é uma contradição. Assim, 3π é um número real irracional.

Com os exercícios 1.6.6 e 1.6.7, podemos concluir que de maneira geral, a partir de um número irracional qualquer, podemos construir um número infinito de números irracionais.

Exercício 1.6.8

Seja x e y dois números racionais distintos, tais como $\sqrt{x}$ e $\sqrt{y}$ são irracionais.

1) Consideramos os dois números reais $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ e $\sqrt{x} - \sqrt{y}$. Mostre que o produto deles é racional e a sua soma é irracional.

2) Mostre com exemplos, que $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ pode ser um número racional ou um número irracional.

Solução.

1) Temos

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2 = x - y \in \mathbb{Q} \text{ e } (\sqrt{x} + \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y}) = 2\sqrt{x} \notin \mathbb{Q}.$$

Logo, o produto de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ e $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ é racional e a soma de $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ e $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ é irracional.

2) Se $x = 4$ e $y = 9$ temos $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 2 \times 3 = 6 \in \mathbb{Q}$, assim o produto $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ é racional.

Se $x = 4$ e $y = 3$ temos $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$, assim o produto $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ é irracional.

Exercício 1.6.9

Números racionais e irracionais. Quaisquer que sejam o racional x e o irracional y . Para cada uma das afirmações abaixo assinale com V, quando Verdadeira e com F quando for Falsa. Tente encontrar justificativa para cada uma dessas afirmações:

1) $x + 2y$ é um número racional.

- 2) $x - y + \sqrt{2}$ é um número irracional.
- 3) $y \cdot y$ é um número irracional.
- 4) $x + y$ é um número irracional.
- 5) $x + y$ é um número racional.

Solução.

1) $x + 2y$ é racional. **Falsa.** De fato, se $x + 2y = \frac{p}{q}$ é um número racional, temos $y = \frac{p}{2q} - \frac{x}{2} \in \mathbb{Q}$, o que é impossível

2) $x - y + \sqrt{2}$ é um número irracional. **Falsa**, se $y = \sqrt{2}$, temos $x - y + \sqrt{2} = x \in \mathbb{Q}$.

3) $y \cdot y$ é um número irracional. **Falsa**, se $y = \sqrt{2}$, temos $y \cdot y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}$.

4) $x + y$ é um número irracional. **Verdadeira**, de fato, se $x + y = \frac{p}{q}$ é um número racional, temos $y = \frac{p}{q} - x \in \mathbb{Q}$, o que é impossível.

5) $x + y$ é um número racional. **Falsa**, por que seguinte 4), $x + y$ é um número irracional.

 Exercício 1.6.10

Sejam a e b dois números irracionais. Prove que, se $a + b$ é um número racional, então $a - b$ é um número irracional.

Solução.

Suponhamos que $a - b$ fosse racional, ou seja $x = a - b \in \mathbb{Q}$. Como por hipótese $a + b$ é racional, temos que $(a + b) + (a - b) = 2a \in \mathbb{Q}$, o que é uma contradição, já que $2 \in \mathbb{Q}$ e $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, então temos $2a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Logo, o número real $a - b$ é irracional.

CAPÍTULO 2

MATRIZES: DEFINIÇÕES E PRIMEIRAS PROPRIEDADES



Objetivos

Este capítulo é dedicado à introdução das primeiras definições relacionadas ao conceito de matriz e ao estudo das propriedades de adição e multiplicação de uma matriz por um escalar real.

2.1 Exemplo básico

Considere a seguinte tabela, onde apresentamos as notas de 3 provas de um grupo de 4 alunos:

	Nota 1	Nota 2	Nota 3
Aluno 1	7	8	9
Aluno 2	8	6	5
Aluno 3	9	5	8
Aluno 4	7	7.5	8

Tabela 1: Notas dos alunos

A tabela anterior consiste em linhas e colunas, podemos representá-la da seguinte forma:

$$T = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 5 \\ 9 & 5 & 8 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{bmatrix} \text{ ou } T = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 5 \\ 9 & 5 & 8 \\ 7 & 7.5 & 8 \end{pmatrix}$$

Essa forma abstrata da tabela anterior é chamada de **Matriz de ordem** 4×3 , pois na notação da tabela anterior, ela possui 4 linhas e 3 colunas.

Os números que formam a matriz anterior são chamados de **elementos da matriz** T ou **entradas da matriz** T .

De maneira geral, segue a definição de uma matriz.



Definição 2.1.1

Matriz de m linhas e n colunas. Sejam $m \geq 1$ e $n \geq 1$ dois números naturais. Uma **matriz A** de m linhas e n colunas, com elementos reais ou complexos, é representada da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Outra notação: Uma notação simples e compacta da matriz A é a seguinte:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n}.$$

Posteriormente, vamos usar colchetes para a notação de uma matriz.

Para especificar que a ordem da matriz A , isto é, o número das linhas e colunas, escrevemos $A_{m \times n}$. Por exemplo, uma matriz de ordem 2×3 , é dada por:

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

Para localizar um elemento de uma matriz dizemos: **a linha e a coluna**. Por exemplo, na seguinte matriz:

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & -7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix},$$

temos:

- 1) o elemento que está na primeira linha e segunda coluna é: $a_{12} = 2$.
- 2) o elemento que está na segunda linha e primeira coluna é: $a_{21} = \pi$.

Generalizando, para uma matriz de qualquer ordem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

o elemento a_{ij} está localizado **na linha i e na coluna j** .



Definição 2.1.2

Sejam $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ duas matrizes com elementos reais ou complexos. As matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{r \times s}$ são iguais, e escrevemos $\mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{B}_{r \times s}$, se:

1. Elas têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas, isto é, $m = r$ e $n = s$,
2. Os seus elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, j .

Por exemplo, as duas matrizes:

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{4} \\ \sqrt{9} & -\frac{15}{3} \\ 1 & \sqrt{16} \end{bmatrix},$$

são iguais, porque $b_{11} = a_{11} = 1$, $b_{12} = \sqrt{4} = 2 = a_{12}$, $b_{21} = \sqrt{9} = 3 = a_{21}$, $b_{22} = \frac{-15}{3} = -5 = a_{22}$, $b_{31} = a_{31} = 1$ e $b_{32} = \sqrt{16} = 4 = a_{32}$.

As duas matrizes:

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & -7 & 11 \end{bmatrix},$$

não são iguais, por que os números de linhas das matrizes $\mathbf{A}_{3 \times 2}$ e $\mathbf{B}_{2 \times 3}$ não são iguais.

2.2 Vários tipos de matrizes especiais

Neste capítulo, como nos próximos, vamos manipular vários tipos de matrizes. Assim, nesta seção vamos apresentar alguns tipos de matrizes que serão utilizadas nos próximos capítulos.

2.2.1 Matriz quadrada

Quando $m = n$ a matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ é chamada **Matriz Quadrada** de ordem $n \times n$, isto é, o número das linhas é igual ao número das colunas:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Em uma matriz quadrada, definimos a **diagonal principal** e a **diagonal secundária**, da seguinte maneira:

1. A diagonal principal é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$.

2. A diagonal secundária, é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$.

Por exemplo, as matrizes a seguir:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 2 & -7 \end{bmatrix},$$

são matrizes quadradas, e temos:

1. A diagonal principal da matriz $\mathbf{A}_{3 \times 3}$ é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$: $a_{11} = -5$, $a_{22} = -7$ e $a_{33} = 11$.
2. A diagonal secundária da matriz $\mathbf{A}_{3 \times 3}$ é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$: $a_{13} = 1$, $a_{22} = -7$ e $a_{31} = 1$.
3. A diagonal principal da matriz $\mathbf{B}_{2 \times 2}$ é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i = j$: $a_{11} = -5$ e $a_{22} = -7$.
4. A diagonal secundária da matriz $\mathbf{B}_{2 \times 2}$ é formada pelos elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$: $b_{12} = 0$ e $b_{21} = 2$.

O conjunto das matrizes quadradas possui uma estrutura algébrica muito rica, em relação ao conjunto das matrizes não quadradas, isto é, matrizes de ordem $n \times m$, com $n \neq m$.

2.2.2 Matriz coluna

Quando $n = 1$ a matriz $\mathbf{A}_{m \times 1}$ é chamada **Matriz coluna** de ordem $m \times 1$, isto é, uma matriz coluna é denotada simplesmente como:

$$\mathbf{A}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

Por exemplo, as matrizes a seguir:

$$\mathbf{A}_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \\ 7.5 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -5 \\ \pi \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C}_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} -5 \\ \pi \end{bmatrix},$$

são matrizes colunas, com 4 linhas, 3 linhas e 2 linhas, respetivamente.

2.2.3 Matriz linha

Quando $m = 1$ a matriz $\mathbf{A}_{1 \times n}$ é chamada **Matriz linha** de ordem $1 \times n$, isto é, uma matriz coluna é denotada simplesmente como:

$$\mathbf{A}_{1 \times n} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Por exemplo, as matrizes a seguir:

$$\mathbf{A}_{1 \times 4} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} -5 & \pi & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{C}_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & \pi \end{bmatrix},$$

são matrizes linhas, com 4 colunas, 3 colunas e 2 colunas, respetivamente.

2.2.4 Matriz nula

Quando todos os elementos da matriz $\mathbf{A}_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$, para todo i, j , dizemos que $\mathbf{A}_{m \times n}$ é a **Matriz nula** de ordem $m \times n$. A matriz nula é denotada por $\mathbf{0}_{m \times n}$, isto é,

$$\mathbf{0}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, as matrizes a seguir:

$$\mathbf{0}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{0}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

são matrizes nulas.

As matrizes nulas vão ter ocupar um papel importante na estrutura algébricas dos conjuntos das matrizes de mesma ordem.

2.2.5 Matriz diagonal quadrada

Seja a matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$ definida por:

$$a_{ij} = 0, \text{ para } i \neq j,$$

isto é, $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$, neste caso dizemos que $\mathbf{A}_{n \times n}$ é a **Matriz diagonal** de ordem $n \times n$, isto é,

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, as duas seguintes matrizes:

$$\mathbf{0}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{0}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

são matrizes diagonais de ordem 3×3 e 2×2 , respectivamente.

As matrizes diagonais são importantes para a noção de diagonalização de matrizes. Elas são ligadas aos autovalores e autovetores de uma matriz e de uma transformação linear.

Observação. Não podemos falar de matriz diagonal se a matriz considerada não é quadrada.

2.2.6 Matriz identidade

Seja a matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$ definida por:

$$\begin{cases} a_{ij} = 0, & \text{para } i \neq j \\ a_{ij} = 1, & \text{para } i = j, \end{cases}$$

isto é, $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$ e $a_{ii} = 1$, dizemos que $\mathbf{A}_{n \times n}$ é a **Matriz Identidade** de ordem $n \times n$. A matriz identidade é denotada por $\mathbf{I}_{n \times n}$, isto é,

$$\mathbf{I}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Algumas vezes a matriz identidade é denotada por:

$$\mathbf{I}_{n \times n} = [\delta_{ij}]_{n \times n}$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{para } i \neq j \\ 1, & \text{para } i = j. \end{cases}$$

Por exemplo, as seguintes matrizes:

$$\mathbf{I}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

são matrizes identidades (quadradas) de ordem 3×3 e 2×2 , respectivamente.

As matrizes identidades são importantes para as propriedades da multiplicação de matrizes, da inversibilidade de uma matriz e suas várias aplicações.

Observação. Não podemos falar de matriz identidade se a matriz considerada não é quadrada, isto é, uma matriz identidade é sempre quadrada.

2.2.7 Matriz triangular superior

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que:

$$a_{ij} = 0, \text{ para todo } i > j,$$

é chamada de **Matriz Triangular Superior** de ordem $n \times n$. Isto é, as matrizes triangular superior, são matrizes quadradas cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos igual a zero. Temos:

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, as matrizes a seguir:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & -23 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{A}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 0 & \pi \end{bmatrix},$$

são matrizes triangular superior de ordem 3×3 e 2×2 , respetivamente.

Como o conjunto das matrizes quadradas, o conjunto das matrizes triangulares superior possui uma estrutura algébrica muito rica, além disso, as matrizes triangulares superiores possuem várias aplicações importantes.

2.2.8 Matriz triangular inferior

Uma matriz quadrada $\mathbf{A}_{n \times n} = [a_{ij}]_{n \times n}$ tal que:

$$a_{ij} = 0, \text{ para } i < j,$$

é chamada de **Matriz Triangular Inferior** de ordem $n \times n$. Isto é, as matrizes triangular inferior, são matrizes quadradas cujos elementos acima da diagonal principal são todos igual a zero. Temos:

$$\mathbf{A}_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, as matrizes a seguir:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 11 & -23 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{I}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 8 & \pi \end{bmatrix},$$

são matrizes triangulares inferior de ordem 3×3 e 2×2 , respectivamente.

Como o conjunto das matrizes triangulares superior, as matrizes triangulares inferior possuem propriedades algébricas muito ricas, assim como possuem várias aplicações importantes.

2.2.9 Matriz simétrica

Quando $m = n$, a matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ é chamada **Matriz Simétrica** de ordem $n \times n$, se temos:

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } i, j,$$

isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Por exemplo, as duas seguintes matrizes:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -7 \end{bmatrix},$$

são matrizes simétricas.

Observe que somente matrizes quadradas podem ser simétricas.

2.3 Operação de adição de matrizes

Neste parágrafo, apresentaremos as operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um número real ou complexo.

2.3.1 Exemplo prático de adição de matrizes

Considere as duas tabelas a seguir, que descrevem a produção de três regiões agrícolas, em milhares de toneladas de três produtos: trigo, soja e milho, por dois anos consecutivos. A tabela de produção do primeiro ano é:

	Trigo	Soja	Milho
Região 1	500	3500	900
Região 2	700	800	600
Região 3	900	1200	750

Tabela 2: Produção das 3 regiões no primeiro ano

E a tabela de produção do segundo ano é:

	Trigo	Soja	Milho
Região 1	800	2500	850
Região 2	750	900	350
Região 3	1200	1000	550

Tabela 3: Produção das 3 regiões no segundo ano

Sejam P_1 e P_2 as matrizes associados a cada tabela, isto é,

$$P_1 = \begin{bmatrix} 500 & 3500 & 900 \\ 700 & 800 & 600 \\ 900 & 1200 & 750 \end{bmatrix} \text{ and } P_2 = \begin{bmatrix} 800 & 2500 & 850 \\ 750 & 900 & 350 \\ 1200 & 1000 & 550 \end{bmatrix}.$$

Para obter a produção total dos dois anos consecutivos, por produto e por região, a soma dos elementos correspondentes das duas tabelas anteriores. Assim, com as matrizes associados as Tabelas 1 e 2, temos:

$$P_1 + P_2 = \begin{bmatrix} 500 & 3500 & 900 \\ 700 & 800 & 600 \\ 900 & 1200 & 750 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 800 & 2500 & 850 \\ 750 & 900 & 350 \\ 1200 & 1000 & 550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1300 & 6000 & 1750 \\ 1450 & 1700 & 950 \\ 2100 & 2200 & 1300 \end{bmatrix},$$

Logo, para os dois anos a tabela de produção por produto e por região, é dada por:

	Trigo	Soja	Milho
Região 1	1300	6000	1750
Região 2	1450	1700	950
Região 3	2100	2200	1300

Tabela 4: Produção das 3 regiões nos dois anos.

Podemos observar que o símbolo "+" entre as duas matrizes P_1 e P_2 é definido pela adição em $\mathbb{R}$, entre os elementos correspondentes das matrizes P_1 e P_2 . A notação $P_1 + P_2$ é uma simbologia para representar a soma das duas matrizes.

2.3.2 Operação de adição de matrizes

Agora podemos estender a operação da adição $P_1 + P_2$ acima, entre P_1 e P_2 , para definir a operação de adição das matrizes da mesma ordem $m \times n$.

Definição 2.3.1

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ duas matrizes da mesma ordem $m \times n$. A adição das matrizes A e B , denotada por $A + B$, é definida por:

$$A + B = [c_{ij}]_{m \times n} \text{ onde } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ para todo } i, j.$$

ou

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Isto é, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

onde:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \text{ para todo } i, j,$$

ou equivalentemente,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

A adição $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [c_{ij}]_{m \times n}$ é definida a partir da adição em $\mathbb{R}$, entre elementos correspondentes das matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, isto é,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para todo i ($1 \leq i \leq m$) e todo j ($1 \leq j \leq n$).



Exemplo 2.3.2

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 0 & -5 & 0 \\ d & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

Então, temos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ d & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & a \\ 0 & b-5 & 0 \\ c+d & 0 & -3 \end{bmatrix}$$



Exemplo 2.3.3

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz $\mathbf{A}$ é de ordem 3×3 e a matriz $\mathbf{B}$ é de ordem 2×3 . Logo, não podemos calcular a soma das duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, dados anteriormente.

2.3.3 Propriedades de adição de matrizes

Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$ três matrizes, da mesma ordem $m \times n$. A operação de adição de matrizes verifica as seguintes propriedades.



Propriedade 2.3.4

Comutatividade:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

Prova. De fato, pela definição de adição de matrizes, temos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \text{ e } \mathbf{B} + \mathbf{A} = [b_{ij} + a_{ij}]_{m \times n}.$$

Usando a comutatividade de adição dos números reais ou complexos, temos que $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, para todo i, j . Assim, deduzimos que:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Conclusão: A adição das matrizes da mesma ordem é comutativa.

□



Exemplo 2.3.5

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Então, como $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes de mesma ordem 3×2 , temos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -14 \\ -1 & 16 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -14 \\ -1 & 16 \end{bmatrix},$$

Assim, deduzimos que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$



Exemplo 2.3.6

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & -7 \\ -2z & 11 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3x & 2y - 4 \\ \pi & -7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Então, como $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são matrizes de mesma ordem 3×2 , temos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -5 + 3x & -2 + 2y \\ 2\pi & -14 \\ -2z + 1 & 22 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} + \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3x - 5 & 2y - 2 \\ 2\pi & -14 \\ 1 - 2z & 22 \end{bmatrix}$$

e com a propriedade de comutatividade dos números reais, deduzimos que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$



Propriedade 2.3.7

Associatividade:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

Prova. De fato, pela definição de adição de matrizes, temos:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})]_{m \times n} \text{ e } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{m \times n}.$$

Usando a associatividade de adição dos números reais ou complexos, temos que $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$, para todo i, j . Assim, deduzimos que:

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}.$$

Conclusão: A adição das matrizes da mesma ordem é associativa.

□



Propriedade 2.3.8

Elemento neutro: Seja a matriz nula $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m \times n}$ de ordem $m \times n$. Para toda matriz $\mathbf{A}$ de ordem $m \times n$, temos $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$, isto é, $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m \times n}$ é o elemento neutro da adição das matrizes de ordem $m \times n$.

Prova. De fato, pela definição de adição de matrizes, temos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{O} = [a_{ij} + 0] = [a_{ij}]_{m \times n} = \mathbf{A}.$$

Conclusão: A matriz $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{m \times n}$ é o elemento neutro da adição das matrizes de ordem $m \times n$.

□

Por exemplo, seja a matriz:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} x & 17 & a \\ 15 & y & \pi \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} + \mathbf{0}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} x & 17 & a \\ 15 & y & \pi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 17 & a \\ 15 & y & \pi \end{bmatrix}.$$



Propriedade 2.3.9

Elemento $-\mathbf{A}$: Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$. Seja a matriz $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$, tal que:

$$b_{ij} = -a_{ij}, \text{ para todo } i, j,$$

ou seja, $\mathbf{B} = [-a_{ij}]_{m \times n}$. Então, pela regra de adição de matrizes temos:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

A matriz $\mathbf{B}$, denotada por $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$, é chamada de matriz oposta (ou simétrica) da matriz $\mathbf{A}$, em relação a adição de matrizes da mesma ordem.



Exemplo 2.3.10

Seja a matriz:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 17 & -3 \\ -15 & 7 & -11 \end{bmatrix}$$

Então, para a matriz $\mathbf{A}_{2 \times 3}$ temos :

$$-\mathbf{A}_{2 \times 3} = - \begin{bmatrix} 5 & 17 & -3 \\ -15 & 7 & -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -17 & 3 \\ 15 & -7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.3.11

Seja a matriz:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} x & 17 & a \\ 15 & y & \pi \end{bmatrix}$$

Então, para a matriz $\mathbf{A}_{2 \times 3}$ temos:

$$-\mathbf{A}_{2 \times 3} = -\begin{bmatrix} x & 17 & a \\ 15 & y & \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & -17 & -a \\ -15 & -y & -\pi \end{bmatrix}.$$

2.4 Operação de multiplicação de uma matriz por um escalar

Neste parágrafo, apresentaremos a operação de multiplicação de uma matriz por um número real.

2.4.1 Ilustração da multiplicação de uma matriz por um escalar

Considere a tabela que descreve a produção de três regiões agrícolas, no primeiro ano, em milhares de toneladas de três produtos: trigo, soja e milho:

	Trigo	Soja	Milho
Região 1	800	2500	850
Região 2	750	900	350
Região 3	1200	1000	550

Tabela 5: Produção de três regiões no primeiro ano

Seja

$$T = \begin{bmatrix} 800 & 2500 & 850 \\ 750 & 900 & 350 \\ 1200 & 1000 & 550 \end{bmatrix}$$

a matriz associada a essa tabela. Agora, suponha que a produção de cada produto agrícola nas três regiões aumente em 20% em comparação com o primeiro ano. Qual será a produção por produto e por região?

Como cada produção aumentará 20%, para obter os elementos da nova tabela de produção, você deverá multiplicar cada elemento da tabela por 1,2. Assim, a nova tabela é dada por:

	Trigo	Soja	Milho
Região 1	$1,2 \times 800$	$1,2 \times 2500$	$1,2 \times 850$
Região 2	$1,2 \times 750$	$1,2 \times 900$	$1,2 \times 350$
Região 3	$1,2 \times 1200$	$1,2 \times 1000$	$1,2 \times 550$

Tabela 6: Produção de três regiões no segundo ano

Com a formulação matricial da tabela de produção, o resultado é dado pela matriz:

$$\begin{bmatrix} 1,2 \times 800 & 1,2 \times 2500 & 1,2 \times 850 \\ 1,2 \times 750 & 1,2 \times 900 & 1,2 \times 350 \\ 1,2 \times 1200 & 1,2 \times 1000 & 1,2 \times 550 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 960 & 3000 & 1020 \\ 900 & 1080 & 420 \\ 1440 & 1200 & 660 \end{bmatrix}$$

Esta operação define uma forma de multiplicação de matrizes por um número real ou complexo, que é chamada de **multiplicação por escalar** ou **multiplicação externa**, escrevemos:

$$\begin{aligned} 1,2. \begin{bmatrix} 800 & 2500 & 850 \\ 750 & 900 & 350 \\ 1200 & 1000 & 550 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1,2 \times 800 & 1,2 \times 2500 & 1,2 \times 850 \\ 1,2 \times 750 & 1,2 \times 900 & 1,2 \times 350 \\ 1,2 \times 1200 & 1,2 \times 1000 & 1,2 \times 550 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 960 & 3000 & 1020 \\ 900 & 1080 & 420 \\ 1440 & 1200 & 660 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observamos que o resultado da multiplicação da matriz T pelo escalar real $1,2$, isto é, $1,2 \times T$, é a matriz obtida multiplicando cada elemento (ou entrada) da matriz T por $1,2$. Logo, a multiplicação da matriz T por $1,2$ é obtida a partir da multiplicação em $\mathbb{R}$.

2.4.2 Multiplicação de uma matriz por um escalar

O processo anterior pode ser generalizado para as matrizes de ordem $m \times n$. Em geral, definimos a multiplicação de uma matriz por um escalar real da seguinte maneira.

Definição 2.4.1

Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$ e λ um escalar em $\mathbb{R}$. A multiplicação da matriz A por λ , denotada por $\lambda.A$, é definida por:

$$\lambda.A = [c_{ij}]_{m \times n} \text{ onde } c_{ij} = \lambda \times a_{ij}, \text{ para todo } i, j.$$

ou

$$\lambda.A = [\lambda \times a_{ij}]_{m \times n}.$$

Isto é, a matriz $\lambda.A$ é definida por

$$\lambda. \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \times a_{11} & \lambda \times a_{12} & \cdots & \lambda \times a_{1n} \\ \lambda \times a_{21} & \lambda \times a_{22} & \cdots & \lambda \times a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \times a_{m1} & \lambda \times a_{m2} & \cdots & \lambda \times a_{mn} \end{bmatrix}$$

Observamos que os elementos da matriz $\lambda \times T$, são obtidos multiplicando cada elemento (ou entrada) da matriz A por λ . Logo, a multiplicação da matriz A por λ é obtida a partir da multiplicação em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.4.2

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -7 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Então, as matrizes $2.\mathbf{A}_{3 \times 2}$ e $5.\mathbf{B}_{1 \times 3}$ são dadas por:

$$2. \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & -7 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -14 \\ -4 & 22 \end{bmatrix} \text{ e } 5. \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -20 & 35 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.4.3

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & -7 \\ -2z-7 & 11 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{B}_{1 \times 3} = \begin{bmatrix} 3x+10 & 2y-4 & 37 \end{bmatrix}.$$

Então, as matrizes $\pi.\mathbf{A}_{3 \times 2}$ e $\pi.\mathbf{B}_{1 \times 3}$ são dadas por:

$$\pi. \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & -7 \\ -2z-7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\pi & 2\pi \\ \pi^2 & -7\pi \\ -(2z+7)\pi & 11\pi \end{bmatrix}$$

e

$$\pi. \begin{bmatrix} 3x+10 & 2y-4 & 37 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3x+10)\pi & (2y-4)\pi & 37\pi \end{bmatrix}$$

2.4.3 Propriedades de multiplicação de uma matriz por um escalar

A operação de multiplicação de uma matriz por um escalar verifica as seguintes propriedades.

Proposição 2.4.4

Sejam λ , λ_1 e λ_2 escalares reais ou complexos. Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ duas matrizes de mesmo ordem $m \times n$. Então, temos:

1. $\lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda.\mathbf{A} + \lambda.\mathbf{B}$.
2. $(\lambda_1 + \lambda_2).\mathbf{A} = \lambda_1.\mathbf{A} + \lambda_2.\mathbf{A}$.

3. $0 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{O}$. Isto é, se multiplicamos uma matriz de ordem $m \times n$ por zero, teremos a matriz nula de ordem $m \times n$.
4. $(\lambda_1 \times \lambda_2) \cdot \mathbf{A} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \mathbf{A})$.

A prova das afirmações dessas proposições são obtidas a partir da definição de adição e da multiplicação de uma matriz por um escalar, e das propriedades dos números reais.

2.5 Transposição de matriz. Matriz simétrica e matriz antissimétrica



Definição 2.5.1

Matriz Transporta. Seja $\mathbf{A}_{m \times n}$ uma matriz de ordem $m \times n$, com elementos reais ou complexos. Denomina-se **Matriz Transposta** de $\mathbf{A}_{m \times n}$, e indica-se por $\mathbf{A}_{m \times n}^t$ ou $\mathbf{A}_{m \times n}'$, a matriz $\mathbf{A}_{n \times m}^t = [b_{ij}]_{n \times m}$ de ordem $n \times m$, definida por:

$$b_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } i, j,$$

Isto é,

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$



Exemplo 2.5.2

Sejam as duas matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 5 & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & 37 \end{bmatrix}_{1 \times 3}.$$

Então, as matrizes transpostas são dadas

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} -5 & 5 & -7 \\ 2 & -7 & 11 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 37 \end{bmatrix}_{3 \times 1}.$$



Exemplo 2.5.3

Sejam as duas matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & -7 \\ -2z & 11 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3x+10 & 2y-4 & 37 \end{bmatrix}_{1 \times 3}.$$

Então, as matrizes transpostas são dadas

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} -5 & \pi & -2z \\ 2 & -7 & 11 \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad \mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} 3x+10 \\ 2y-4 \\ 37 \end{bmatrix}_{3 \times 1}.$$



Propriedade 2.5.4

Sejam $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{m \times n}$ duas matrizes de ordem $m \times n$, com elementos reais ou complexos, e λ um escalar real. Então, vale as seguintes propriedades:

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$.
2. $(\lambda \cdot \mathbf{A})^t = \lambda \cdot \mathbf{A}^t$.
3. $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$.

Prova. 1. Sejam $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ e $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ duas matrizes de ordem $m \times n$. Temos, obtemos $\mathbf{A}^t = [a_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ e $\mathbf{B}^t = [b_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Como $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, deduzimos:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = [a_{ji} + b_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = [a_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} + [b_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$$

Assim, obtemos $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t$

2. Sejam λ um escalar real e $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Como $\lambda \mathbf{A} = [\lambda a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ temos:

$$(\lambda \mathbf{A})^t = [\lambda a_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \lambda [a_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \lambda \mathbf{A}^t.$$

Assim, obtemos $(\lambda \mathbf{A})^t = \lambda \mathbf{A}^t$.

3. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, então temos $\mathbf{A}^t = [a_{ji}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Logo, obtemos:

$$(\mathbf{A}^t)^t = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

$$(\mathbf{A}^t)^t = [a_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \mathbf{A}.$$

Assim, obtemos $(\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}$.

□

**Proposição 2.5.5**

Seja uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem $n \times n$, com elementos reais. As duas seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$.
2. A matriz $\mathbf{A}$ é simétrica.

Isto é, uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua transposta.

**Exemplo 2.5.6**

Seja a matriz quadrada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -11 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{A}$ é simétrica porque $a_{12} = a_{21} = -11$.

**Exemplo 2.5.7**

Seja a matriz quadrada

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 5x - 10 \\ 8x + 2 & -7 \end{bmatrix}$$

Encontrar o valor (ou os valores) de x para que a matriz $\mathbf{A}$ seja simétrica.

Solução. A matriz $\mathbf{A}$ é simétrica se $a_{12} = a_{21}$, ou seja, $a_{12} = 5x - 10$ e $a_{21} = 8x + 2$ são iguais. Assim, temos a resolver a equação: $5x - 10 = 8x + 2$. Logo, deduzimos que $x = -4$. Então, a matriz $\mathbf{A}$ é simétrica para $x = -4$.

**Definição 2.5.8**

Dizemos que uma matriz quadrada $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ é uma **Matriz Antissimétrica**, se temos:

$$\mathbf{A}^t = [-a_{ij}]_{n \times n},$$

e escrevemos $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$.

Por exemplo, as matrizes a seguir:

$$\mathbf{A}_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & \pi \\ 2 & 0 & -\sqrt{5} \\ -\pi & \sqrt{5} & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{5} & 0 \end{bmatrix},$$

são matrizes antissimétricas.



Proposição 2.5.9

Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes quadradas da mesma ordem $n \times n$, com elementos reais. Logo, temos as seguintes propriedades:

1. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são simétricas, então a matriz soma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é simétrica.
2. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são antissimétricas, então a matriz soma $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é antissimétrica..

Prova. 1. Sejam $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes quadradas da mesma ordem $n \times n$. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são simétricas, então temos $\mathbf{A}^t = \mathbf{A}$ e $\mathbf{B}^t = \mathbf{B}$. Usando a Proposição 2.5.4, deduzimos:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Assim, a matriz $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é simétrica.

2. De maneira semelhante, se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são antissimétricas, então temos $\mathbf{A}^t = -\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}^t = -\mathbf{B}$. Usando a Proposição 2.5.4, deduzimos:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t = -\mathbf{A} - \mathbf{B} = -(\mathbf{A} + \mathbf{B}).$$

Assim, a matriz $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ é antissimétrica.

□

2.6 Matrizes elementares

Qualquer conjunto de matrizes de ordem $m \times n$ possui um subconjunto de matrizes especiais que podem ser usadas na construção de outras matrizes, considerando as operações de adição e de multiplicação por um escalar. Em outras palavras, cada matriz de ordem $m \times n$, poder ser reescrita em termos das matrizes desse conjunto.

2.6.1 Exemplo Básico

Sejam as matrizes

$$\mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consideremos a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Como podemos reescrever a matriz $\mathbf{A}$ em termos das matrizes $\mathbf{E}_{11}$, $\mathbf{E}_{12}$, $\mathbf{E}_{21}$ e $\mathbf{E}_{22}$?

Com a operação de multiplicação das matrizes por um escalar temos:

$$-5 \cdot \mathbf{E}_{11} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 7 \cdot \mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, 3 \cdot \mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } 9 \cdot \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Com a operação de adição das matrizes temos:

$$-5.E_{11} + 7.E_{12} + 3.E_{21} + 9.E_{22} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Assim, deduzimos que a matriz **A** pode ser escrita em termos das matrizes E_{11} , E_{12} , E_{21} e E_{22} , como o seguinte:

$$\mathbf{A} = -5.E_{11} + 7.E_{12} + 3.E_{21} + 9.E_{22} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$



Definição 2.6.1

As matrizes de ordem 2×2 : E_{11} , E_{12} , E_{21} , E_{22} são chamadas **matrizes elementares**.

Como o mesmo raciocínio, temos a seguinte propriedade:



Proposição 2.6.2

Seja a matriz de ordem 2×2 :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ onde } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Então, a matriz **A** pode ser escrita em termos das matrizes E_{11} , E_{12} , E_{21} e E_{22} de seguinte forma:

$$\mathbf{A} = a.E_{11} + b.E_{12} + c.E_{21} + d.E_{22}.$$

Assim, graças à adição de matrizes e de multiplicação de matrizes por um escalar, podemos escrever uma matriz de ordem 2×2 , usando matrizes elementares de mesma ordem.

2.6.2 Matrizes elementares de ordem $m \times n$

Podemos generalizar a Proposição 2.6.2, para as matrizes de ordem qualquer $m \times n$. Seja a matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ de ordem $m \times n$, isto é,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Para dois índices k ($1 \leq k \leq m$) e l ($1 \leq l \leq n$), a **matriz elementar** $E_{kl} = [e_{ij}]_{m \times n}$, é definida por:

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \text{ e } j = l \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Em outras palavras, todos os coeficientes da matriz E_{kl} são zero, exceto o que está na interseção da linha k e da coluna l , que vale 1. Então, temos:

$$E_{kl} = [\delta_{ki}\delta_{jl}]_{m \times n},$$

onde δ_{rs} é o símbolo do Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

A matriz E_{kl} pode ser escrita da seguinte forma:

$$E_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$



Propriedade 2.6.3

Seja a matriz de ordem $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Então, temos:

$$\mathbf{A} = a_{11} \cdot \mathbf{E}_{11} + a_{12} \cdot \mathbf{E}_{12} + \dots + a_{ij} \cdot \mathbf{E}_{ij} + \dots + a_{mn} \cdot \mathbf{E}_{mn}.$$

Assim, graças à adição de matrizes e à multiplicação de matrizes por um escalar, podemos escrever uma matriz de ordem $m \times n$, usando matrizes elementares de mesma ordem.

2.7 Exercícios Resolvidos



Exercício 2.7.1

Descreva os elementos da matriz:

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & -7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Solução. Os elementos da matriz A são dados por:

Primeira linha: $a_{11} = -5, a_{12} = 2,$

Segunda linha: $a_{21} = \pi, a_{22} = -7,$

Terceira linha: $a_{31} = 1, a_{32} = 11$

Exercício 2.7.2

Quando as duas matrizes a seguir serão iguais? Isto é, para que valores de $x, y,$ e z as duas matrizes serão iguais?

$$\mathbf{A}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ \pi & -7 \\ -2z-7 & 11 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 3x+10 & 2y-4 \\ \pi & -7 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}.$$

Solução. Para que as duas matrizes A e B sejam iguais, temos que verificar as duas condições da definição de igualdade de duas matrizes.

Primiera condição: As duas matrizes possuem mesmo número de linhas e mesmo número de colunas.

Segunda condição: Temos que verificar se $a_{ij} = b_{ij}$, para $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 2$. Assim, para que as duas matrizes sejam iguais temos as equações:

$$3x + 10 = -5, 2y - 4 = 2, -2z - 7 = 1,$$

Conclusão: As duas matrizes A e B são iguais se $x = -5, y = 3$ e $z = -4$.

Exercício 2.7.3

Determine os valores de x, y, z e w tais que:

$$\begin{bmatrix} x & 3 \\ -1 & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & w-2z \\ w+2z & -2 \end{bmatrix}$$

Solução. Para que as duas matrizes A e B sejam iguais, temos que verificar as duas condições da definição de igualdade de duas matrizes.

Primiera condição: As duas matrizes possuindo mesmo número de linhas e mesmo número de colunas.

Segunda condição: Temos que verificar se $a_{ij} = b_{ij}$, para $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 2$, isto é, os elementos correspondentes são iguais. Assim, para que as duas matrizes sejam iguais temos as equações:

$$x = 4, w - 2z = 3, x + y = -2, w + 2z = -1.$$

Logo, temos $x = 4, y = -6, w = 1$ e $z = -1$.

Conclusão: As duas matrizes A e B são iguais se $x = 4, y = -6, w = 1$ e $z = -1$.

Exercício 2.7.4

Quais são as matrizes colunas que constituem a tabela:

	Nota 1	Nota 2	Nota 3
Aluno 1	7	8	9
Aluno 2	8	6	5
Aluno 3	9	5	8
Aluno 4	7	7.5	8

Solução. As matrizes colunas da tabela são dadas por:

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \\ 7.5 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Exercício 2.7.5

Quais são as matrizes linhas que constituem a tabela:

	Nota 1	Nota 2	Nota 3
Aluno 1	7	8	9
Aluno 2	8	6	5
Aluno 3	9	5	8
Aluno 4	7	7.5	8

Solução. As matrizes colunas da tabela são dadas por:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 5 & 8 \end{bmatrix}, \text{ e } \begin{bmatrix} 7 & 7.5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.7.6

Durante um exame, observamos as notas de três disciplinas: Disciplina 1, Disciplina 2 e Disciplina 3, para vários alunos. Estas notas foram colocadas na matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 & 8 & 9 & 8,5 \\ 5 & 6,5 & 7 & 7 & 7,5 & 7,5 \\ 9 & 9,5 & 6,5 & 6 & 6,5 & 8 \end{bmatrix}.$$

1. Dê a ordem da matriz A.
2. Quantos alunos fizeram o exame?

- | |
|--|
| <p>3. Qual é a nota obtida na Disciplina 3 pelo aluno 2?</p> <p>4. Dê o valor dos elementos a_{11}, a_{23}, a_{33} e a_{36}.</p> |
|--|

Solução.

- 1) A ordem da matriz A é 3×6 , isto é, a matriz A tem 3 linhas e 6 colunas.
- 2) Como as linhas são relacionadas as 3 disciplinas, então as colunas são relacionadas aos alunos. Assim, temos 6 alunos que fizeram o exame.
- 3) A nota do aluno 2 na disciplina 3 é localizada na terceira linha e na segunda coluna. Logo, essa nota é 9,5.
- 4) Temos:

$$a_{11} = 6, a_{23} = 7, a_{33} = 6,5 \text{ e } a_{36} = 8.$$



Exercício 2.7.7

Escreva as matrizes:

1. $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i + j$.
2. $B = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i - j$.
3. $C = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = 2i - j$.

Solução.

- 1) Como $a_{ij} = i + j$, onde $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq 3$, os elementos da matriz A são dados por:

$$a_{11} = 1 + 1 = 2, a_{12} = 1 + 2 = 3 \text{ e } a_{13} = 1 + 3 = 4, \\ a_{21} = 2 + 1 = 3, a_{22} = 2 + 2 = 4 \text{ e } a_{23} = 2 + 3 = 5.$$

Logo, a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

- 2) Os elementos da matriz B são dados pela fórmula $a_{ij} = i - j$, onde $1 \leq i \leq 3$ e $1 \leq j \leq 2$, assim temos::

$$a_{11} = 1 - 1 = 0 \text{ e } a_{12} = 1 - 2 = -1, \\ a_{21} = 2 - 1 = 1 \text{ e } a_{22} = 2 - 2 = 0, \\ a_{31} = 3 - 1 = 2 \text{ e } a_{32} = 3 - 2 = 1,$$

Logo, a matriz B é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 3) Os elementos da matriz C são dados pela fórmula $a_{ij} = 2i - j$, onde $1 \leq i \leq 2$ e $1 \leq j \leq 2$,

assim temos::

$$a_{11} = 2 - 1 = 1 \text{ e } a_{12} = 2 - 2 = 0,$$

$$a_{21} = 4 - 1 = 3 \text{ e } a_{22} = 4 - 2 = 2,$$

Logo, a matriz C é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.7.8

Dê o tipo das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & \pi & 17 \\ \pi & -7 & \sqrt{5} & 8 \\ 1 & 11 & 21 & -3 \\ 1 & -4 & 12 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & \pi \\ 2 & -7 & \sqrt{5} \\ \pi & \sqrt{5} & 21 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -7 \\ -7 & 23 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 \\ 0 & -5 & 0 \\ a & 0 & -4 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & -5 & c \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix},$$

Solução. Os diferentes tipos de matrizes A, B, C, D, E, F são descritos a seguir:

1. A matriz A é uma matriz quadrada
2. A matriz B é quadrada e simétrica
3. A matriz C é uma matriz de ordem 3×2
4. Para a matriz D temos:
 - (a) Se $a = b = 0$ a matriz D é a matriz identidade quadrada 3×3
 - (b) Se $a = b$ com a ou b diferente de 0, então a matriz D é uma matriz simétrica 3×3 .
 - (c) Se a e b são diferentes, então a matriz D é uma matriz quadrada 3×3 .
5. Para a matriz E temos:
 - (a) Se $a = 0$ a matriz quadrada E é triangular superior
 - (b) Se a é diferente de 0 a matriz E é uma matriz quadrada
6. Para a matriz F temos:
 - (a) Se $a = b = c = 0$ a matriz F é uma matriz diagonal

(b) Se a ou b ou c é diferente de 0 a matriz F é uma matriz triangular superior.

Exercício 2.7.9

Para as seguintes afirmações, responda com **Verdadeiro** ou **Falso**, justificando a resposta:

1. A matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

é uma matriz diagonal.

2. A matriz

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & -3 & 11 & \pi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

é uma matriz triangular superior.

Solução. As duas respostas são falsas, por que as duas matrizes não são quadradas. Isto é, temos que:

1. A matriz A é de ordem 2×3 ,

2. A matriz B é de ordem 3×4 .

Exercício 2.7.10

Consideramos as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & a & b \\ 5 & 1 & \pi \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & 2a & -b \\ 3 & 2 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix}$$

Determine as seguintes matrizes:

$$4.\mathbf{A} - 3.\mathbf{B} \quad \text{e} \quad -2.\mathbf{A} + 3.\mathbf{B}.$$

Solução.

1) Para a matriz $4.\mathbf{A} - 3.\mathbf{B}$ temos:

$$4.\mathbf{A} - 3.\mathbf{B} = 4 \begin{bmatrix} -7 & a & b \\ 5 & 1 & \pi \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 4 & 2a & -b \\ 3 & 2 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28 - 12 & 4a - 6a & 4b + 3b \\ 20 - 9 & 4 - 6 & 4\pi - 3\sqrt{\pi} \end{bmatrix},$$

logo, temos,

$$4.\mathbf{A} - 3.\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -40 & -2a & 7b \\ 11 & -2 & 4\pi - 3\sqrt{\pi} \end{bmatrix}.$$

2) Para a matriz $-2.A + 3.B$ temos:

$$-2.A + 3.B = -2. \begin{bmatrix} -7 & a & b \\ 5 & 1 & \pi \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 4 & 2a & -b \\ 3 & 2 & \sqrt{\pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 4a & -5b \\ -1 & 4 & -2\pi + 3\sqrt{\pi} \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.7.11

1) São dadas as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, quadradas de ordem 2, com $a_{ij} = 3i + 4j$ e $b_{ij} = -4i - 3j$. Considerando $C = A + B$, determine a matriz C .

2) Os elementos de uma matriz M quadrada de ordem 3×3 são dados por a_{ij} , onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{para } i \neq j \\ 0, & \text{para } i = j. \end{cases}$$

a) Escrever a matriz M ,

b) Determine $M + M$.

Solução.

1) Para a matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem 2, temos:

$$a_{11} = 3 \times 1 + 4 = 7; a_{12} = 3 + 4 = 11;$$

$$a_{21} = 3 + 4 = 10; a_{22} = 3 + 4 = 14.$$

Logo, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 10 & 14 \end{bmatrix}$$

Para a matriz quadrada $B = [b_{ij}]$ de ordem 2, temos:

$$b_{11} = -4 \times 1 - 3 \times 1 = -7; b_{12} = -4 \times 1 - 3 \times 2 = -10;$$

$$b_{21} = -4 \times 2 - 3 \times 1 = -11; b_{22} = -4 \times 2 - 3 \times 2 = -14$$

Logo, a matriz B é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ -11 & -14 \end{bmatrix}$$

Podemos deduzir que:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) De maneira semelhante, a matriz M é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que:

$$M + M = 2.M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 6 & 0 & 10 \\ 8 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podemos observar que as duas matrizes M e $2M$ são simétricas.

Exercício 2.7.12

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & a & b \\ 5 & 1 & \pi \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & 7 & 23 \\ y & -5 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{7} \\ -15 \\ x \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ \pi \\ z \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 & a & b \\ 5 & 1 & \pi \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} x & 7 & 23 \\ y & -5 & \sqrt{3} \\ a & 0 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sqrt{11} \\ -8 \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 3 & \pi & -19 \end{bmatrix},$$

Encontre, quando for possível, a soma de duas quaisquer matrizes. Justifique sua resposta adequadamente.

Solução.

- 1) A matriz A é de ordem 2×3 , aplicando a regra de adição das matrizes, então a única matriz que pode ser adicionada à matriz A é a matriz B , porque essa matriz tem a mesma ordem 2×3 , que a matriz A . Pela mesma razão a matriz B só pode ser adicionada com a matriz A .
- 2) As matrizes C , D e G são de mesma ordem 3×1 , portanto, aplicando a regra de adição de matrizes, é possível somá-las, isto é, $C + D$, $C + G$ e $D + G$ são possíveis. Isto é, a matriz C é de ordem 3×1 , de acordo com a regra de adição das matrizes as únicas matrizes que podem ser adicionadas a matriz C são: D e G . Em outras palavras a matriz C só pode com a matriz D e G , porque são matrizes coluna.
- 3) A matriz E pode ser somada somente com a matriz F , uma vez que elas têm ordem 3×3 , e reciprocamente.
- 4) Não tem nenhuma soma possível para a matriz H , pois não tem nenhuma matriz de mesma ordem.

Exercício 2.7.13

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & a & b \\ 5 & 1 & \pi \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x & 7 & 23 \\ y & -5 & \sqrt{3} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{7} \\ -15 \\ x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 \\ \pi \\ z \end{bmatrix}, \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -7 & a & b \\ 5 & 1 & \pi \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} x & 7 & 23 \\ y & -5 & \sqrt{3} \\ a & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Encontre as matrizes a seguir:

$$-\mathbf{A}, \quad -\mathbf{B}, \quad -\mathbf{C}, \quad -\mathbf{D}, -\mathbf{E}, \quad -\mathbf{F}.$$

Deduzir as matrizes a seguir:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} - \mathbf{A}, \quad \mathbf{C} - \mathbf{D}, \quad \mathbf{D} - \mathbf{C}, \quad \mathbf{F} - \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} - \mathbf{F},$$

Solução.

1) Para as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{F}$, temos

$$-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & -a & -b \\ -5 & -1 & -\pi \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -x & -7 & -23 \\ -y & 5 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\sqrt{7} \\ 15 \\ -x \end{bmatrix},$$

$$-\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 \\ -\pi \\ -z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 7 & -a & -b \\ -5 & -1 & -\pi \\ -a & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad -\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -x & -7 & -23 \\ -y & 5 & -\sqrt{3} \\ -a & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

2) Para as matrizes $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, $\mathbf{C} - \mathbf{D}$, $\mathbf{D} - \mathbf{C}$, $\mathbf{F} - \mathbf{E}$ e $\mathbf{E} - \mathbf{F}$, temos:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7-x & a-7 & b-23 \\ 5-y & 6 & \pi-\sqrt{3} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7+x & 7-a & 23-b \\ y-5 & -6 & -\pi+\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{C} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sqrt{7}-3 \\ -15-\pi \\ x-z \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3-\sqrt{7} \\ \pi-15 \\ z-x \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{F} - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} x+7 & 7-a & 23-b \\ y-5 & -6 & \sqrt{3}-\pi \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{E} - \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 7-x & a-7 & b-23 \\ 5-y & -6 & \pi-\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$



Exercício 2.7.14

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$. Complete as respostas para as seguintes afirmações, justificando sua resposta:

1. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica, então $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t = \dots$ e $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t = \dots$.
2. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz antissimétrica, então $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t = \dots$ e $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t = \dots$.
3. Se $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, então a matriz $\mathbf{A}^t$ é uma matriz

-
4. Se A é uma matriz triangular inferior, então a matriz A^t é uma matriz
-
5. Se A é uma matriz diagonal, então $A^t = \dots$

Solução.

- 1) Se A é uma matriz simétrica, então $A - A^t = \Theta_{n \times n}$ (a matriz nula), pois uma matriz simétrica é igual à sua transposta, o que resulta em uma matriz nula e $A + A^t = 2A$ (ou $2A^t$), já que a soma de matrizes com termos iguais retornará uma matriz com o dobro de cada termo.
- 2) Se A é uma matriz antissimétrica, então $A - A^t = 2A$, já que, nesse caso, $A^t = -A$, o que retorna uma matriz com o dobro de cada termo e $A + A^t = \Theta_{n \times n}$, pois cada termo a_{ij} da transposta será oposto a todo termo a_{ij} da matriz antissimétrica, o que resulta em uma matriz nula.
- 3) Se A é uma matriz triangular superior, então a matriz A^t é uma matriz triangular inferior, pois com a transposição todos os elementos nulos se deslocam acima da diagonal principal.
- 4) Se A é uma matriz triangular inferior, então a matriz A^t é uma matriz triangular superior, pois com a transposição todos os elementos nulos se deslocam abaixo da diagonal principal.
5. A é uma matriz diagonal, então $A^t = A$, sendo que a matriz diagonal é simétrica.



Exercício 2.7.15

Seja a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} -5 & x+3 \\ 2x^2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Encontrar o valor (ou os valores) de x para que a matriz A seja simétrica.

Solução. Para que a matriz A seja simétrica, ela deve ser igual a sua matriz transposta, ou seja, $A = A^t$. Aplicando isso, vemos que $a_{21} = 2x^2$ deve ser igual a $a_{12} = x + 3$, assim:

$$2x^2 = x + 3 \text{ equivale a } 2x^2 - x - 3 = 0.$$

Como $\Delta = b^2 - 4ac = 25$, a equação de segundo grau $2x^2 - x - 3 = 0$ possui duas raízes:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1.$$

Resolvendo a equação de segundo grau $2x^2 - x - 3 = 0$, deduzimos que a matriz A será simétrica se, e somente se, x for igual a $3/2$ ou -1 .

Exercício 2.7.16

Seja a matriz quadrada A :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 6x - 3 \\ 2y + 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

Sobre qual condição em x e y a matriz A é simétrica?

Solução. Para que a matriz A seja simétrica, ela deve ser igual a sua matriz transposta, ou seja, $A = A^t$. Aplicando isso, vemos que $a_{12} = 6x - 3$ deve ser igual a $a_{21} = 2y + 5$, assim temos:

$$2y + 5 = 6x - 3 \text{ equivale a } y = 3x - 4.$$

Logo, a matriz A será simétrica se, e somente se, $y = 3x - 4$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exercício 2.7.17

Seja a matriz quadrada

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3x - 9 \\ 2y + 12 & -7 \end{bmatrix}$$

Sobre qual condição em x e y a matriz A é diagonal?

Solução. A matriz A é de ordem 2×2 , então ela é uma matriz diagonal se a condição $a_{12} = 0$ e $a_{21} = 0$, isto é :

$$a_{12} = 3x - 9 = 0 \text{ e } a_{21} = 2y + 12 = 0.$$

Como $3x - 9 = 0$ implica que $x = 3$ e $2y + 12 = 0$ implica que $y = -6$, então a matriz A é diagonal se a condição de $x = 3$ e $y = -6$.

2.8 Exercícios para praticar

Exercício 2.8.1

Na confecção de três modelos de camisas (A, B e C) são usados botões grandes (G) e pequenos (P). O número de botões por modelos é dado pela tabela:

	Camisa A	Camisa B	Camisa C
Botões P	3	1	4
Botões G	6	5	5

O número de camisas fabricadas, de cada modelo, nos meses de maio e junho, é

dado pela tabela:

	Maio	Junho
Camisa A	100	50
Camisa B	50	100
Camisa C	50	50

Nestas condições, obter a tabela que dá o total de botões usados em maio e junho.

Exercício 2.8.2

Sendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

Determine as matrizes:

- 1) $5 \cdot \mathbf{A}$,
- 2) $-2 \cdot \mathbf{A}$,
- 3) $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}$,
- 4) $2 \cdot \mathbf{A} + \mathbf{B}$,
- 1) $5 \cdot \mathbf{A} - \mathbf{0}_{2 \times 3}$,

Exercício 2.8.3

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem 2×2 e $\mathbf{A}^t$ sua transposta. Determine $\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{A} = 2 \cdot \mathbf{A}^t$.

Exercício 2.8.4

Para cada uma das afirmações, diga se é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

1. Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada, então $(-\mathbf{A})^t = -\mathbf{A}^t$.
2. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são duas matrizes da mesma ordem, então $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{B}^t + \mathbf{A}^t$.

Exercício 2.8.5

Sendo $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada, classifique em verdadeira ou falsa as duas afirmações:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ é uma matriz simétrica.
2. $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t$ é uma matriz antissimétrica.

CAPÍTULO 3

MULTIPLICAÇÃO DAS MATRIZES E SUAS PROPRIEDADES



Objetivos

Este capítulo é dedicado à introdução da multiplicação de matrizes. O conceito de multiplicação de matrizes é introduzido através de uma situação prática. Depois, daremos as propriedades da multiplicação de matrizes. As transformações elementares são introduzidas e usadas para a inversão de matrizes.

3.1 Exemplo básico

A Tabela 1 abaixo mostra os preços unitários em reais, de três shampoos com ou sem desconto de fidelidade:

	Nutrio	Maestro	Cabelorão
Preço unitário	17	18	21
Preço unitário com redução	15	15	17

Tabela 1: Preços Unitários

A Tabela 2 abaixo mostra as quantidades compradas por dois clientes M e N.

	Cliente M	Cliente N
Nutrio	2	3
Maestro	1	2
Cabelorão	3	1

Tabela 2: Quantidades Compradas

As matrizes correspondentes às tabelas 1 e 2 são chamadas **A** e **B**, respectivamente.

1. Dê as expressões das duas matrizes **A** e **B**, e as ordens de cada uma.
2. Calcule o preço total pago por cada cliente sem o desconto.
3. Calcule o preço total pago por cada cliente com o desconto.
4. Como a matriz **G** correspondente a esses preços pode ser obtida de acordo com as matrizes **A** e **B**?
5. Como é obtida a ordem da matriz **G** à partir das ordens das duas matrizes **A** e **B**?

A resposta a estas questões práticas nos permitirá introduzir o conceito de multiplicação de matrizes.

1- As matrizes associadas às duas tabelas são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & 18 & 21 \\ 15 & 15 & 17 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

A ordem de **A** é 2×3 e a ordem de **B** é 3×2 .

2- O preço total sem desconto para o cliente M é dado por $17 \times 2 + 18 \times 1 + 21 \times 3 = 115$. Observamos que este número (o preço) é obtido à partir dos elementos das duas matrizes:

$$P_1 = [17 \ 18 \ 21]_{1 \times 3} \text{ e } Q_M = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

Isto é, a matriz linha dos preços sem descontos P_1 e a matriz coluna Q_M das quantidades comparadas pelos cliente M. Assim, podemos escrever:

$$p_{11} = 17 \times 2 + 18 \times 1 + 21 \times 3 = P_1 \cdot Q_M = [17 \ 18 \ 21]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 115.$$

A notação $P_1 \cdot Q_M$ denota um "tipo de produto" entre a matriz linha P_1 e uma matriz coluna Q_M .

De maneira semelhante, o preço total sem o desconto para o cliente N é dado por:

$$p_{12} = 17 \times 3 + 18 \times 2 + 21 \times 1 = [17 \ 18 \ 21]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 108.$$

3- O preço total com desconto pago pelo cliente M é dado por:

$$p_{21} = 15 \times 2 + 15 \times 1 + 17 \times 3 = [15 \ 15 \ 17]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 96$$

O preço total com desconto pago pelo cliente N é dado por:

$$p_{22} = 15 \times 3 + 15 \times 2 + 17 \times 1 = [15 \ 15 \ 17]_{1 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 92$$

4- A matriz **G** correspondente a esses preços pode ser obtida de acordo com a seguinte tabela de gastos dada por:

	Cliente M	Cliente N
Preço sem desconto	115	108
Preço com desconto	96	92

Tabela 3: Preços com desconto ou sem desconto

A matriz **G** correspondente a esses preços pode ser obtida de acordo com as ordens das matrizes **A** e **B**, a qual é dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 115 & 108 \\ 96 & 92 \end{bmatrix}_{2 \times 2}.$$

A matriz **G** é chamada **produto da matriz A pela matriz B** (nessa ordem), e escrevemos:

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} \cdot \mathbf{B}_{3 \times 2} = \mathbf{G}_{2 \times 2} \text{ ou } \mathbf{G}_{2 \times 2} = \mathbf{A}_{2 \times 3} \cdot \mathbf{B}_{3 \times 2}.$$

5- A ordem de **A** é 2×3 e a ordem de **B** é 3×2 , no entanto a ordem de **G** é 2×2 , isto é,

$$\mathbf{A}_{2 \times 3} \cdot \mathbf{B}_{3 \times 2} \rightarrow \mathbf{G}_{2 \times 2}.$$

Nas questões 2 e 3, observamos que:

$$[\text{matriz} - \text{linha}]_{1 \times 3} \cdot [\text{matriz} - \text{coluna}]_{3 \times 1} \rightarrow [\text{matriz}]_{1 \times 1}$$

A situação acima é generalizada da seguinte maneira. Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

A matriz produto de **A** e **B**, denotada por **AB**, é dada por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Isto é,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Observamos que cada elemento da matriz produto

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2},$$

é obtido a partir de uma linha da matriz $\mathbf{A}$ e uma coluna da matriz $\mathbf{B}$. Isto é,

1. O elemento c_{11} da matriz $\mathbf{C}$ é obtido a partir da primeira linha de $\mathbf{A}$ e da primeira coluna de $\mathbf{B}$,
2. O elemento c_{12} da matriz $\mathbf{C}$ é obtido a partir da primeira linha de $\mathbf{A}$ e da segunda coluna de $\mathbf{B}$,
3. O elemento c_{21} da matriz $\mathbf{C}$ é obtido a partir da segunda linha de $\mathbf{A}$ e da primeira coluna de $\mathbf{B}$,
4. O elemento c_{22} da matriz $\mathbf{C}$ é obtido a partir da segunda linha de $\mathbf{A}$ e da segunda coluna de $\mathbf{B}$.

3.2 Multiplicação de matrizes

O processo da multiplicação das matrizes do Exemplo básico pode ser estendido para definir a multiplicação de uma matriz de ordem $m \times n$ com uma matriz de ordem $n \times p$. Sejam as duas matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \text{e} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}_{n \times p}.$$

O produto das duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, denotado por $\mathbf{A.B}$, é definida por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{ij} & \cdots & b_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix},$$

onde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

De maneira geral: O que fazer para conseguir a multiplicação de Matrizes?
Consideramos duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, cujos elementos são a_{ij} e b_{kl} , tais que:

1. O número de colunas da primeira matriz coincide com o número de linhas da segunda matriz.

2. Com essa forma, ao considerarmos a i -ésima linha (da 1ª. matriz) e a j -ésima coluna (da 2ª.), geramos o elemento c_{ij} na posição i, j da matriz produto.
3. Princípio de computação de c_{ij} :
 - (a) Primeiro, cada elemento a_{ik} da i -ésima linha da 1ª matriz é multiplicado com o elemento b_{kj} correspondentes da j -ésima coluna da 2ª matriz, assim temos: $a_{ik}b_{kj}$.
 - (b) Em seguida, os produtos obtidos $a_{ik}b_{kj}$ são adicionados para obter o elemento c_{ij} da matriz produto, isto é,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Essas etapas serão ilustradas no seguinte exemplo numérico.



Exemplo 3.2.1

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz $\mathbf{A}$ é de ordem 3×2 e a matriz $\mathbf{B}$ é de ordem 2×2 , assim podemos calcular a matriz produto $\mathbf{A.B}$. Temos:

$$\mathbf{A.B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Observe que, neste caso, não é possível efetuar $\mathbf{B.A}$, por que o número das colunas de $\mathbf{B}$ é igual a 2 e o número de linhas de $\mathbf{A}$ é igual a 3.

Observação 1: Regra da existência do produto de matriz. O produto de duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{u \times v}$, pode se realizar somente se $n = u$, isto é, o número de colunas da matriz $\mathbf{A}_{m \times n}$ deve ser igual o número de linhas da matriz $\mathbf{B}_{u \times v}$.

Observação 2: Regra útil. O elemento c_{ij} da matriz produto $\mathbf{A.B}$ é obtido, multiplicando os elementos da i -ésima linha da primeira matriz $\mathbf{A}$ pelos elementos da

j -ésima coluna da segunda matriz $\mathbf{B}$, isto é,

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}.$$

Observação 3: Em geral $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Sejam $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{n \times k}$ duas matrizes. Então, o produto $\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times k}$ existe. E o produto de matrizes $\mathbf{B}_{n \times k} \cdot \mathbf{A}_{m \times n}$ não existe se $k \neq m$. Suponhamos que $k = m$. Assim, temos que:

1. A matriz $\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times k}$ é de ordem $m \times k$.
2. Se $k = m$ a matriz $\mathbf{B}_{n \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n}$ é de ordem $n \times n$.

Então, se $k \neq n$ temos que as duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times k}$ e $\mathbf{B}_{n \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n}$ não têm mesma ordem. Assim, temos

$$\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times k} \neq \mathbf{B}_{n \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n}.$$

Mesmo que $k = m = n$ temos em geral:

$$\mathbf{A}_{n \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times n} \neq \mathbf{B}_{n \times n} \cdot \mathbf{A}_{n \times n}.$$



Exemplo 3.2.2

Sejam as duas matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Então, temos que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -15 \\ 4 & -24 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 48 & -20 \end{bmatrix}$$

Assim, deduzimos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Observação 4: Sejam duas matrizes $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n \times k}$. A relação $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{O}_{m \times k}$ (a matriz nula) não implica que $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{O}$. De fato, considere as duas matrizes a seguir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

Essas duas matrizes não são zero e ainda temos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, diferentemente do que ocorre com a multiplicação dos números reais ou complexos, quando multiplicamos duas matrizes, a matriz produto pode ser a matriz nula, sem que qualquer das duas matrizes seja a matriz nula.

3.3 Propriedades da multiplicação de matrizes



Propriedade 3.3.1

Propriedade de distributividade da multiplicação a esquerda de matrizes.

Sejam as três matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times k}$ e $\mathbf{C}_{n \times k}$. Então, temos que:

$$\mathbf{A}_{m \times n} \cdot (\mathbf{B}_{n \times k} + \mathbf{C}_{n \times k}) = \mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times k} + \mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{C}_{n \times k}$$

Como a multiplicação de matrizes não é comutativa, temos também que considerar a distributividade à direita.



Propriedade 3.3.2

Propriedade de distributividade da multiplicação a direita de matrizes. Sejam as três matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{B}_{k \times m}$ e $\mathbf{C}_{k \times m}$. Então, temos que:

$$(\mathbf{B}_{k \times m} + \mathbf{C}_{k \times m}) \cdot \mathbf{A}_{m \times n} = \mathbf{B}_{k \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n} + \mathbf{C}_{k \times m} \cdot \mathbf{A}_{m \times n}$$

As distributividades à direita e à esquerda das matrizes, em relação a adição e multiplicação das matrizes, representam uma generalização da distributividade dos números reais, em relação a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$.

As provas das Proposições 3.3.1 e 3.3.2 podem ser realizadas, usando as operações de adição e da multiplicação das matrizes. Como essas provas são longas, vamos ilustrar as etapas da demonstração dessas duas proposições no exemplo abaixo.



Exemplo 3.3.3

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. Calcular os seguintes produtos $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ e $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$. Encontre a soma $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$.
2. Calcular a soma $\mathbf{B} + \mathbf{C}$. Encontre o produto $(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A}$.

3. O que podemos concluir?

Solução. 1) A matriz **A** é de ordem 3×1 e a matriz **B** de ordem 2×3 e a matriz **C** é de ordem 2×3 . Então, os produtos **B.A** e **C.A** são bem definidos e são de ordem 2×1 . E temos:

$$\mathbf{B.A} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 + 8 + 1 \\ -18 - 3 + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -14 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{C.A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 3 + 2 \\ -6 - 2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

As matrizes **B.A** e **C.A** são de mesma ordem 2×1 , assim a soma **B.A + C.A** é dada por:

$$\mathbf{B.A} + \mathbf{C.A} = \begin{bmatrix} -5 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -25 \end{bmatrix}.$$

2) As matrizes **B** e **C** são de mesma ordem 2×3 , assim a soma dessas matrizes é dada por:

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-2 & 8+3 & 1+2 \\ 9+3 & -3-2 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 3 \\ 12 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz **A** é de ordem 3×1 e a matriz **B + C** de ordem 2×3 . Então, os produtos **(B + C).A** é bem definido e é de ordem 2×1 . E temos:

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}).\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 3 \\ 12 & -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 + 11 + 3 \\ -24 - 5 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -25 \end{bmatrix}.$$

3) Em conclusão, temos:

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}).\mathbf{A} = \mathbf{B.A} + \mathbf{C.A}.$$



Propriedade 3.3.4

Propriedades de associatividade da multiplicação de matrizes. Sejam as três matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times k}$ e $\mathbf{C}_{k \times s}$. Então, temos que:

$$\mathbf{A}_{m \times n} \cdot (\mathbf{B}_{n \times k} \cdot \mathbf{C}_{k \times s}) = (\mathbf{A}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times k}) \cdot \mathbf{C}_{k \times s},$$

A associatividade da multiplicação das matrizes representa uma generalização da multiplicação dos números reais.

A prova da Proposição 3.3.4 pode ser realizada, usando a multiplicação das matrizes. Como essa prova é longa vamos ilustrar as etapas da demonstração dessa

duas proposição no exemplo abaixo.



Exemplo 3.3.5

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

1. Calcular os seguintes produtos $\mathbf{A.B}$ e $\mathbf{B.C}$.
2. Encontre as matrizes $(\mathbf{A.B}).\mathbf{C}$ e $\mathbf{A.}(\mathbf{B.C})$.
3. O que podemos concluir?

Solução. As matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são de mesma ordem 2×2 , assim os produtos $\mathbf{A.B}$, $\mathbf{B.C}$, $(\mathbf{A.B}).\mathbf{C}$ e $\mathbf{A.}(\mathbf{B.C})$ são bem definidos.

1) Para os produtos $\mathbf{A.B}$ e $\mathbf{B.C}$, temos:

$$\mathbf{A.B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

e

$$\mathbf{B.C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}.$$

2) Para os produtos $(\mathbf{A.B}).\mathbf{C}$ e $\mathbf{A.}(\mathbf{B.C})$ temos:

$$(\mathbf{A.B}).\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}.$$

e

$$\mathbf{A.}(\mathbf{B.C}) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -8 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -10 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}.$$

3) Em conclusão, temos que:

$$\mathbf{A.}(\mathbf{B.C}) = (\mathbf{A.B}).\mathbf{C}.$$

A multiplicação de matrizes quadradas possui muitas propriedades importantes, como podemos observar na seguinte proposição.



Proposição 3.3.6

Sejam duas matrizes $\mathbf{A}_{n \times n}$ e $\mathbf{B}_{n \times n}$ quadradas e de mesma ordem $n \times n$. Sejam $\mathbf{O}_{n \times n}$ a matriz nula, de ordem $n \times n$, e $\mathbf{I}_{n \times n}$ a matriz identidade de ordem $n \times n$. Então, temos

1. $\mathbf{A}_{n \times n} \cdot \mathbf{I}_{n \times n} = \mathbf{I}_{n \times n} \cdot \mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{A}_{n \times n}$.

$$2. \mathbf{A}_{n \times n} \cdot \mathbf{O}_{n \times n} = \mathbf{O}_{n \times n} \cdot \mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{O}_{n \times n}.$$

$$3. (\mathbf{A}_{n \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times n})^t = \mathbf{B}_{n \times n}^t \cdot \mathbf{A}_{n \times n}^t.$$

Com a propriedade $\mathbf{A}_{n \times n} \cdot \mathbf{I}_{n \times n} = \mathbf{I}_{n \times n} \cdot \mathbf{A}_{n \times n} = \mathbf{A}_{n \times n}$, dizemos que a matriz identidade $\mathbf{I}_{n \times n}$ é o **Elemento Neutro da Multiplicação** das matrizes quadradas.

Segue um corolário importante que será usado na solução de sistemas lineares, usando matrizes.



Corolário 3.3.7

Associatividade da multiplicação de matrizes: caso útil. Sejam as três matrizes $\mathbf{A}_{n \times n}$, $\mathbf{B}_{n \times n}$ e $\mathbf{C}_{n \times s}$. Então, temos que:

$$\mathbf{A}_{n \times n} \cdot (\mathbf{B}_{n \times n} \cdot \mathbf{C}_{n \times s}) = (\mathbf{A}_{n \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times n}) \cdot \mathbf{C}_{n \times s}$$

Na prática, para resolver sistemas lineares, usando matrizes, usaremos $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{n \times 1}$.

3.4 Matrizes inversíveis

3.4.1 Definição e propriedades das matrizes inversíveis

Neste parágrafo, consideramos apenas as matrizes quadradas. Assim, o produto de duas matrizes da ordem $n \times n$ sempre será uma matriz da ordem $n \times n$. Denotamos por $\mathbf{I}_n$ a matriz identidade (quadrada) $\mathbf{I}_{n \times n}$.



Definição 3.4.1

Seja a matriz quadrada $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n \times n}$. Dizemos que $\mathbf{A}$ é inversível, se e somente se, existe uma matriz $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n \times n}$, de modo que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n}.$$

Esta matriz $\mathbf{B}$, caso exista, é chamada-se **Matriz Inversa** de $\mathbf{A}$, e indica-se por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Isto é, quando ocorre que o produto de duas matrizes $\mathbf{A}_{n \times n}$ e $\mathbf{B}_{n \times n}$ quadradas é a identidade $\mathbf{I}_{n \times n}$, dizemos que a matriz $\mathbf{A}$ é inversível e que $\mathbf{B}$ é a sua inversa.

Uma matriz inversível sempre comuta com sua inversa, isto é, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n}$.

Note que o produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem n existe e é também uma matriz quadrada de ordem n . Assim, a multiplicação pode ser efetuada nos dois casos, isto é, nas duas ordens possíveis, mas as matrizes $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ são diferentes em geral.

**Exemplo 3.4.2**

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verificar a relação:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Propriedade 3.4.3**

Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada. Se existe a matriz inversa $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, então ela é única.

Prova. Seja $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ a matriz inversa da matriz $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n \times n}$, então a matriz $\mathbf{B}$ satisfaz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n}$. Se $\mathbf{C}$ for uma matriz que também satisfaz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n}$, então

$$\mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{I}_{n \times n} = \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_{n \times n} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}.$$

Assim, temos a unicidade da matriz inversa.

□

**Propriedade 3.4.4**

Sejam duas matrizes quadradas $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n \times n}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n \times n}$, ambas inversíveis. Então, temos:

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.
2. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$.

Prova. 1. Pela definição, se $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz inversa de $\mathbf{A}$, temos a relação:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n},$$

que é equivalente a

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_{n \times n}.$$

Assim, a matriz inversa da matriz $\mathbf{A}^{-1}$ é a matriz $\mathbf{A}$. Logo, temos:

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}.$$

2. Como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n} \text{ e } \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_{n \times n},$$

então, usando a associatividade da multiplicação e que $\mathbf{I}_{n \times n}$ é o elemento neutro da multiplicação das matrizes, temos:

$$(\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}^{-1} \cdot (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{I}_{n \times n} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_{n \times n}.$$

Por outro lado, também temos:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^{-1}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{n \times n} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}_{n \times n}.$$

Assim, temos:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = (\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}) \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{I}_{n \times n}.$$

Em conclusão, deduzimos que a matriz $\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ é a matriz inversa da matriz $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, isto é,

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}.$$

□



Exemplo 3.4.5

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primeiro, temos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Podemos verificar que

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, usando o cálculo de produtos de matrizes, deduzimos que:

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Com o cálculo de produtos de matrizes, temos:

$$(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})(\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{I}_{2 \times 2}.$$

Em conclusão, temos que:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Em geral, se A é uma matriz inversível de ordem $n \times n$, não é fácil a determinação de sua matriz inversa A^{-1} , mas no caso de uma matriz 2×2 , temos o seguinte resultado prático.



Proposição 3.4.6

Seja a matriz quadradas $A = A_{2 \times 2}$ dada por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

As duas afirmações a seguir são equivalentes:

1. A é inversível.
2. $ad - bc \neq 0$.

E neste caso, temos:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Isto é, suponha que tenhamos $ad - bc \neq 0$, e seja B a matriz definida por:

$$B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Então, temos:

$$A \cdot B = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -bc + ad \end{bmatrix}$$

Assim, deduzimos:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}.$$

De maneira semelhante, temos:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{-bc+ad}{ad-bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_{2 \times 2}.$$

Em conclusão, a matriz inversa da matriz A , é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

□

Vamos ilustrar as etapas da Proposição 3.4.6 sobre o seguinte exemplo.



Exemplo 3.4.7

Seja a matriz quadrada $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{2 \times 2}$ dada por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que a matriz $\mathbf{A}$ é invertível, e determine sua matriz inversa.

Solução.

Etapa 1. Temos que:

$$ad - bc = 9 \times 3 - 8 \times 3 = 27 - 24 = 3 \neq 0.$$

Assim, a matriz $\mathbf{A}$ é inversível.

Etapa 2. Vamos trocar os dois valores da diagonal principal da matriz $\mathbf{A}$, assim temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Etapa 3. Depois, troque o sinal dos dois elementos que não pertencem à diagonal principal da matriz $\mathbf{A}$, assim temos a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Etapa 4. Multiplicar esta última matriz obtida por $\frac{1}{ad - bc} = \frac{1}{3}$, para obter a matriz inversa, que é dada por:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{8}{3} \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Etapa 5. Verificação:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{8}{3} \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-8 & 8-8 \\ -9+9 & -8+9 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2 \times 2}.$$

3.4.2 Método para caracterizar e determinar a matriz inversível

Existem diferentes critérios matemáticos, para caracterizar se uma matriz é inversível ou não.

**Propriedade 3.4.8**

Seja **A** uma matriz quadrada. Se todos os elementos de uma linha da matriz **A** são nulos, então a matriz **A** não é inversível.

Prova. Suponha que todos os elementos da linha i da matriz **A** sejam nulos, isto é,

$$a_{i1} = a_{i2} = \dots = a_{in} = 0.$$

Para toda matriz **B**, temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

onde podemos observar que:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{in}b_{nj} = 0.b_{1j} + \dots + 0.b_{kj} + \dots + 0.b_{nj} = 0.$$

Isto é, temos:

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{kj} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = 0.$$

Logo, para toda matriz quadrada **B** temos:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, não existe uma matriz **B** tal que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}_{n \times n}$. Assim, deduzimos que a matriz **A** não é inversível.

□



Exemplo 3.4.9

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Temos, o produto $\mathbf{AB}$ dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} + b_{31} & b_{12} + b_{32} & b_{13} + b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{11} + b_{21} & b_{12} + b_{22} & b_{13} + b_{23} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

isto é, temos que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [c_{ij}]_{3 \times 3} \neq \mathbf{I}_{3 \times 3}$, porque a matriz $\mathbf{AB}$ não inclui o elemento 1 na segunda linha e a segunda coluna. Em outras palavras, o elemento c_{22} é a igual 0, isto é, $c_{22} = 0$.

A precedente propriedade é válida também, se todos os elementos de uma coluna da matriz $\mathbf{A}$ são nulos.

Vários métodos práticos podem ser usados para calcular a matriz inversa de uma matriz quadrada $\mathbf{A}$ de ordem $n \times n$. O método mais utilizado é o chamado método de Pivô de Gauss. Este método consiste em resolver a equação matricial:

$$\mathbf{A}_{n \times n} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

onde $x_1, x_2, \dots, x_n$ são variáveis desconhecidas e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna

arbitrária. Depois de expressar os elementos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em função dos elementos $b_1, b_2, \dots, b_n$ da matriz coluna $\mathbf{B}$, podemos deduzir se a matriz $\mathbf{A}$ tem um inverso ou não, caso o inverso da matriz exista podemos dar sua expressão. Veremos depois a ligação entre as matrizes inversas e os sistemas de equações lineares.

Além disso, existem também os seguintes critérios práticos, que têm um vínculo com o método de Gauss, a saber que uma matriz quadrada de $\mathbf{A}$ é invertível, se $\mathbf{A}$ satisfaz um dos seguintes critérios:

1. Se $\mathbf{A}_{n \times n}$ é triangular (apenas 0 acima ou abaixo da diagonal) com coeficientes diagonais diferentes de zero.

2. A matriz da coluna nula $\mathbf{O}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ é a única matriz que verifica a identidade

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ ou seja, não existe uma matriz coluna } \mathbf{X}_{n \times 1} \text{ diferente da coluna}$$

$$\text{nula } \mathbf{O}_{n \times 1} \text{ que verifica a equação matricial } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}_{n \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

No próximo capítulo, vamos esclarecer o lado prático desses critérios, em relação ao método de Gauss.

3.5 Exercícios resolvidos



Exercício 3.5.1

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre as matrizes:

- a) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ b) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ c) $\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$
c) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A}$ d) $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}$ e) $6\mathbf{C} \cdot \mathbf{D}$

Solução. Usando as propriedades da multiplicação de matrizes, temos :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} -2 \\ -7 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} 15 \\ -20 \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$\mathbf{D.A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -5 & -19 & 5 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

$$\mathbf{D.B} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \end{bmatrix}_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -7 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

$$-2\mathbf{C.D} = -2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 2} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

ou seja,

$$-2\mathbf{C.D} = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \\ 16 & -8 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

Exercício 3.5.2

1. Calcule o produto $\mathbf{A.B}$ das seguintes matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar o produto $\mathbf{B.A}$? (Justifique claramente).

2. Calcule o produto $\mathbf{C.D}$ das seguintes matrizes:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Podemos encontrar o produto $\mathbf{D.C}$? (Justifique claramente).

Solução. 1. Como $\mathbf{A}$ é de ordem 3×3 e $\mathbf{B}$ de ordem 3×2 , o produto $\mathbf{A.B}$ é de ordem 3×2 , é dado por:

$$\mathbf{A.B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 11 & 6 \\ -6 & 40 \\ 22 & -3 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

A matriz $\mathbf{A}$ é de ordem 3×3 e a matriz $\mathbf{B}$ é de ordem 3×2 . Portanto, não é possível efetuar o produto $\mathbf{B.A}$, porque o número de colunas em $\mathbf{B}$ é igual a 2 e o número de linhas de $\mathbf{A}$ é igual a 3.

2. Como $\mathbf{C}$ é de ordem 3×2 e $\mathbf{D}$ de ordem 2×2 , o produto $\mathbf{C.D}$ é de ordem 3×2 , é dado

por:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14+24 & 521-16 \\ -18-9 & 27+6 \\ 4+15 & -6-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -27 & 33 \\ 19 & -16 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\mathbf{C}$ é de ordem 3×2 e a matriz $\mathbf{D}$ é de ordem 2×2 . Portanto, não é possível efetuar o produto $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C}$, porque o número de colunas em $\mathbf{D}$ é igual a 2 e o número de linhas de $\mathbf{C}$ é igual a 3.

Lembre-se: O produto de duas matrizes é definido quando o número de termos em cada linha da primeira matriz é igual ao número de termos de cada coluna da segunda matriz. Ou seja, o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda matriz.

Exercício 3.5.3

Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre as matrizes $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ e $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$.

Solução. Como as duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são quadradas de ordem 2×2 , as matrizes $\mathbf{A}^2$ e $\mathbf{B}^2$ são bem definidas, e temos:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+6 & -6-6 \\ -6-6 & 9+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -12 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}.$$

De maneira semelhante, temos:

$$\mathbf{B}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & -1+1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lembre-se de que, para os números reais, se a, b são números reais tais que $a \cdot b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. Com as matrizes, essa propriedade não é verificada. Observe que a matriz $\mathbf{B}$ é diferente da matriz nula e, no entanto, o produto $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}$ é a matriz nula.

Exercício 3.5.4

Seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ache x, y, z e w tais que:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

• O que podemos concluir?

Solução. Como as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, são quadradas de mesma ordem 2×2 , temos:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y & 3x+4y \\ 2z+3w & 3z+4w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lembre-se que duas matrizes da mesma ordem $[a_{ij}]_{m \times n}$ e $[b_{ij}]_{m \times n}$ são iguais se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, j . Assim, para achar os reais x, y, z e w temos que resolver os dois sistemas de equações lineares:

$$\text{Sistem 1} \begin{cases} 2x+3y = 1 \text{ Equ. (1)} \\ 3x+4y = 0 \text{ Equ. (2)} \end{cases} \text{ e Sistem 2} \begin{cases} 2z+3w = 0 \text{ Equ. (1)} \\ 3z+4w = 1 \text{ Equ. (2)} \end{cases}$$

Resolução do Sistema 1: Com a Equação (2) temos que:

$$3x = -4y \text{ o que implica que } x = -\frac{4}{3}y.$$

Substituindo esta expressão de $x = -\frac{4}{3}y$ na Equação (1), obtemos:

$$2x+3y = 2(-\frac{4}{3}y) + 3y = -\frac{8}{3}y + 3y = \frac{y}{3} = 1, \text{ logo } y = 3.$$

Assim, deduzimos que $x = -\frac{4}{3}y = -\frac{4}{3} \times 3 = -4$. Logo, temos $x = -4$ e $y = 1$.

Para o Sistema (2), com o mesmo raciocínio, a Equação (1) implica que $z = -\frac{3}{2}w$. Usando a Equação (2), temos:

$$3z+4w = 3(-\frac{3}{2}w) + 4w = -\frac{9}{2}w + 4w = -\frac{1}{2}w = 1 \text{ logo } w = -2.$$

Assim, temos que $z = -\frac{3}{2}w = 3$ e $w = -2$.

Em conclusão, temos $x = -4, y = 1, z = 3$ e $w = -2$, isto é,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Em conclusão, de acordo com a definição da inversa de uma matriz quadrada, a matriz $\mathbf{X}$ não é outra senão a matriz inversa da matriz $\mathbf{A}$.

Exercício 3.5.5

Sejam as matrizes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 9 & -3 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

1. Calcular os seguintes produtos de matrizes $\mathbf{A.B}$ e $\mathbf{A.C}$. Encontre a soma $\mathbf{A.B} + \mathbf{A.C}$.
2. Calcular a soma $\mathbf{B} + \mathbf{C}$. Encontre o produto $\mathbf{A.(B + C)}$.
3. O que podemos concluir?

Solução.

1) Temos

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -5 & -19 & 5 \\ 7 & 8 & 1 \\ 19 & 35 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 7 & -8 & -7 \\ -2 & 3 & 2 \\ -11 & 14 & 11 \end{bmatrix}$$

Assim, deduzimos

$$\mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} 2 & -27 & -2 \\ 5 & 11 & 3 \\ 8 & 49 & 8 \end{bmatrix}$$

2. Temos:

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 3 \\ 12 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos:

$$\mathbf{A.(B + C)} = \begin{bmatrix} 2 & -27 & -2 \\ 5 & 11 & 3 \\ 8 & 49 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Assim, observamos que a seguinte propriedade de distributividade é verificada:

$$\mathbf{A.(B + C)} = \mathbf{A.B} + \mathbf{A.C},$$



Exercício 3.5.6

Sejam as matrizes quadradas $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{n \times n}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{n \times n}$.

1. Explique por que em geral temos $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 \neq \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A.B} + \mathbf{B}^2$.
2. Explique por que em geral temos $(\mathbf{A} + \mathbf{B}).(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

Solução. Usando a definição $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A.A}$ e a propriedade de distribuição da multiplicação,

temos:

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B).(A + B) \\ &= A.(A + B) + B.(A + B) \\ &= A^2 + A.B + B.A + B^2.\end{aligned}$$

Sabemos que a multiplicação não é comutativa em geral, isto é, $A.B \neq B.A$, então em geral temos:

$$(A + B)^2 = A^2 + A.B + B.A + B^2 \neq A^2 + 2A.B + B^2.$$

2) De maneira semelhante, com o mesmo raciocínio temos:

$$\begin{aligned}(A + B).(A - B) &= A.(A - B) + B.(A - B) \\ &= A^2 - A.B + B.A - B^2.\end{aligned}$$

Também, sabemos que a multiplicação não é comutativa em geral, isto é, $A.B \neq B.A$, então em geral temos:

$$(A + B).(A - B) = A^2 - A.B + B.A - B^2 \neq A^2 - B^2.$$

Exercício 3.5.7

A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada, usadas num restaurante é:

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix}$$

A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada usados na composição dos pratos tipo P1, P2, P3 desse restaurante:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{Produto P1} \\ \text{Produto P2} \\ \text{Produto P3} \end{matrix}$$

Arroz Carne Salada

Determinar a matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P1, P2, P3.

Solução. A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P1, P2, P3

é dada pelo produto das duas matrizes **P** e **C**, isto é,

$$\mathbf{P.C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ \text{Arroz} & \text{Carne} & \text{Salada} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{matrix}$$

Assim, a matriz de custos dos pratos P1, P2, P3 é dada por:

$$\begin{array}{l} \text{Preço do Produto P1;} \\ \text{Preço do Produto P2;} \\ \text{Preço do Produto P3;} \end{array} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Exercício 3.5.8

Seja a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinar todas as matrizes quadradas $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ que comutam com a matriz **A**, isto é, $\mathbf{A.X} = \mathbf{X.A}$.

Solução. As duas matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ são quadradas de ordem 2×2 , assim a multiplicação dessas matrizes é bem definida, e temos:

$$\mathbf{A.X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ b & a \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{X.A} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz **X** comuta com a matriz **A**, isto é, em geral temos $\mathbf{A.X} = \mathbf{X.A}$, e usando a regra de igualdade de duas matrizes, temos:

$$\begin{aligned} a+b &= a, \\ a-b &= a-b, \\ b &= b, \\ a+b &= a. \end{aligned}$$

Deduzimos dessas equações que $b = 0$. Em conclusão, as matrizes **X** que comutam com a matriz **A** são dados por:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a\mathbf{I}_{2 \times 2},$$

onde $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2×2 .

Exercício 3.5.9

Sejam $\mathbf{A}$ uma matriz 3×4 e $\mathbf{B}$ uma matriz $m \times n$. Sobre essas matrizes é correto afirmar que:

1. Existe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$;
2. Existe $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$;
3. Existem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$;
4. Existem, iguais, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} + \mathbf{A}$ se, e somente se, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$;
5. Existem, iguais, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ se, e somente se, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Solução.

1- A soma de duas matrizes existe se, e somente se, as duas matrizes são da mesma ordem. Se $n = 4$ e $m = 3$ as duas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são da mesma ordem. Logo, podemos afirmar que a asserção "Existe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$ " é verdadeira.

2- O produto $M \cdot N$ de duas matrizes M e N existe se, e somente se, o numero de colunas da matriz M é igual au numero de linhas da matriz N .

Aqui o número de colunas da matriz $\mathbf{A}$ é 4 e o números de linhas de $\mathbf{B}$ é $m = 3$. Logo, a afirmação "Existe $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$ " é falsa.

3- Novamente, o produto $M \cdot N$ de duas matrizes M e N existe se, e somente se, o numero de colunas da matriz M é igual au numero de linhas da matriz N .

Aqui os produtos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ existe se, e somente se, temos $m = 4$. E o produto $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ existe se, e somente se, temos $n = 3$. Assim, a afirmação "Existe $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$ " é falsa.

4- A soma de duas matrizes existe se, e somente se, as duas matrizes são da mesma ordem. E a adição das matrizes é comutativa. Logo, se $\mathbf{B}$ é uma matrize de ordem 3×4 temos $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$. Assim, a afirmação é falsa, porque essa igualdade está verificada mesmo para $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

5- Seja $\mathbf{A}$ uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ e $\mathbf{I}_{n \times n}$ a matriz identidade. Então, temos $\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}_{n \times n} = \mathbf{I}_{n \times n} \cdot \mathbf{A}$, no entanto, a matriz $\mathbf{A}$ é diferente de $\mathbf{I}_{n \times n}$. Assim, a afirmação: "Existem, iguais, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ e $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ se, e somente se, $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ " é falsa.

Exercício 3.5.10

Sejam a e b dois números reais, e a matriz:

$$\mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

1. Mostrar que:

$$\mathbf{A}_{a,b} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, escrevemos:

$$\mathbf{A}_{a,b} = a\mathbf{I} + b\mathbf{J},$$

onde

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Calcular o produto:

$$\mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O que podemos concluir?

3. Sejam as matrizes $\mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $\mathbf{A}_{c,d} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$. Calcular o produto $\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d}$ de duas maneiras. O que podemos deduzir sobre o produto destas duas matrizes?

Solução. Sejam a e b dois números reais, e a matriz:

$$\mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Usando as propriedades de adição das matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar, temos:

$$\mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos :

$$\mathbf{A}_{a,b} = a\mathbf{I} + b\mathbf{J}.$$

2) Temos:

$$\mathbf{J}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Com a operação de multiplicação por um número real, deduzimos que:

$$\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}.$$

3) Sejam a , b , c e d números reais. A primeira maneira de calcular o produto $\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d}$ é aplicar a definição de produto de duas matrizes, assim temos:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & ad + bc \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}.$$

Podemos deduzir que:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d} = (ac - bd)\mathbf{I} + (ad + bc)\mathbf{J}.$$

A segunda maneira de calcular o produto $\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d}$ é usar as precedentes questões 1) e 2), e as propriedades da multiplicação de matrizes (associatividade e distributividade). Assim :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d} &= (a\mathbf{I} + b\mathbf{J})(c\mathbf{I} + d\mathbf{J}) \\ &= a\mathbf{I}(c\mathbf{I} + d\mathbf{J}) + b\mathbf{J}(c\mathbf{I} + d\mathbf{J}) \\ &= ac\mathbf{I}^2 + ad\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + bc\mathbf{J} \cdot \mathbf{I} + bd\mathbf{J}^2, \end{aligned}$$

Com $\mathbf{I}^2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{I} \cdot \mathbf{J} = \mathbf{J}$ e $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$ (ver Questão 2) deduzimos:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d} = (ac - bd)\mathbf{I} + (ad + bc)\mathbf{J}.$$

Podemos observar que:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d} = (ac - bd)\mathbf{I} + (ad + bc)\mathbf{J} = (ca - db)\mathbf{I} + (da + cb)\mathbf{J} = \mathbf{A}_{c,d} \cdot \mathbf{A}_{a,b}.$$

Assim, temos $\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d} = \mathbf{A}_{c,d} \cdot \mathbf{A}_{a,b}$, isto é, a matriz $\mathbf{A}_{a,b}$ comuta com a matriz $\mathbf{A}_{c,d}$.

Observação: Comparação com a multiplicação dos números complexos. Podemos observar que essa multiplicação das matrizes $\mathbf{A}_{a,b}$ e $\mathbf{A}_{c,d}$ é "semelhante" à multiplicação dos números complexos. Lembre-se que para dois números complexos temos:

$$(a + bi)(cd + di) = (ac - bd) \cdot 1 + (ad + bc)i = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Exercício 3.5.11

(Continuação do Exercício 3.5.10) Seja a matriz:

$$\mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

1. Calcular o produto:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{a,-b}$$

2. Se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, determinar a matriz inversa da matriz $\mathbf{A}_{a,b}$.

Solução. 1) Sejam $\mathbf{A}_{a,b}$ e $\mathbf{A}_{c,d}$ duas matrizes. Seguindo o Exercício 10, temos:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{c,d} = (ac - bd)\mathbf{I} + (ad + bc)\mathbf{J}.$$

Então, deduzimos que:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{a,-b} = (a^2 + b^2)\mathbf{I} + (ab - ba)\mathbf{J} = (a^2 + b^2)\mathbf{I}.$$

2) A partir da expressão precedente, se $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, deduzimos que:

$$\mathbf{A}_{a,b} \cdot \mathbf{A}_{a,-b} = (a^2 + b^2)\mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{A}_{a,b} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2} \mathbf{A}_{a,-b} = \mathbf{I}_{2 \times 2},$$

onde $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2×2 . Então a matriz

$$\mathbf{B} = \frac{1}{a^2 + b^2} \mathbf{A}_{a,-b},$$

é a matriz inversa da matriz $\mathbf{A}_{a,-b}$.

Exercício. Encontrar este resultado aplicando a fórmula na Proposição 4.6.

Exercício 3.5.12

Sejam α um número real, e a matriz:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Sejam α e β dois números reais.

1. Provar que $\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_{\alpha+\beta}$.
2. Encontrar $\mathbf{T}_{-\alpha}$.
3. Comparar $\mathbf{T}_\alpha$ e a matriz transposta $\mathbf{T}_\alpha^t$.

Ajuda: Para a pergunta 1., usar as fórmulas trigonométricas usuais de $\cos(a+b)$ e $\text{sen}(a+b)$.

Solução. Sejam α e β dois números reais. Lembre-se das seguintes fórmulas trigonométricas:

1. $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$.
2. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.
3. $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$.
4. $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\text{sen}(\beta)$.
5. $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$.
6. $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta)$.

Como as matrizes $\mathbf{T}_\alpha$ e $\mathbf{T}_\beta$ são da mesma ordem 2×2 , então o produto $\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta$ é bem

definido, e temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\operatorname{sen}(\beta) \\ \operatorname{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) & -\cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) & \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Usando as relações precedentes trigonométricas 3.-4. e 5.-6., deduzimos que:

$$\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_{\alpha+\beta}.$$

Podemos observar que :

$$\mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{T}_\alpha = \mathbf{T}_{\beta+\alpha} = \mathbf{T}_{\alpha+\beta} = \mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta,$$

Assim, temos $\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_\beta \cdot \mathbf{T}_\alpha$, isto é, a matriz $\mathbf{T}_\alpha$ comuta com a matriz $\mathbf{T}_\beta$.

2) Sejam α um número real, usando as precedentes relações trigonométricas 1. e 2., isto é, $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$ e $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, temos:

$$\mathbf{T}_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -(-\operatorname{sen}(\alpha)) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

3) Seja α um número real. A transposta $\mathbf{T}_\alpha^t$ é dada por:

$$\mathbf{T}_\alpha^t = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \operatorname{sen}(\alpha) \\ -\operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Assim, comparando com $\mathbf{T}_{-\alpha}$, podemos deduzir que: $\mathbf{T}_\alpha^t = \mathbf{T}_{-\alpha}$.

Exercício 3.5.13

(Continuação do Exercício 3.5.12) Sejam α um número real, e a matriz:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

1. Calcular o produto:

$$\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{-\alpha}.$$

2. Deduzir a matriz inversa da matriz $\mathbf{T}_\alpha$.

Solução. Seja α um número real e a matriz:

$$\mathbf{T}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

A partir da Questão 1) do Exercício 12 sabemos que $\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_\beta = \mathbf{T}_{\alpha+\beta}$, assim para $\beta = -\alpha$, temos:

$$\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{-\alpha} = \mathbf{T}_{\alpha-\alpha} = \mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \cos(0) & \sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\sin(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$, deduzimos que:

$$\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{-\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2 \times 2},$$

onde $\mathbf{I}_{2 \times 2}$ é a matriz identidade de ordem 2×2 .

2) Como

$$\mathbf{T}_\alpha \cdot \mathbf{T}_{-\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{2 \times 2},$$

deduzimos que a matriz inversa de $\mathbf{T}_\alpha$ é dada por:

$$\mathbf{T}_\alpha^{-1} = \mathbf{T}_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Observamos que :

$$\mathbf{T}_\alpha^{-1} = \mathbf{T}_\alpha^t = \mathbf{T}_{-\alpha}.$$

3.6 Exercícios para praticar



Exercício 3.6.1

Sejam os números m e n e a matriz $A = \begin{bmatrix} m \times n & -n^2 \\ n^2 & -m \times n \end{bmatrix}$. Prove que $A^2 = \mathbf{O}_{2 \times 2}$, onde $\mathbf{O}_{2 \times 2}$ é a matriz nula.



Exercício 3.6.2

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} x & y \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine os números reais x e y tais que $AB = BA$.



Exercício 3.6.3

Sejam t um número real não nulo e as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Prove que:

$$A^2 - 6A + 5I_{2 \times 2} = O_{2 \times 2},$$

onde $O_{2 \times 2}$ é a matriz nula e $I_{2 \times 2}$ é a matriz identidade.

2. Mostrar que:

$$B^2 - 2B = O_{2 \times 2}.$$

Exercício 3.6.4

Sejam a , b e c três números reais e a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que a matriz inversa A^{-1} da matriz A é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ ac - b & -c & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3.6.5

Sejam A e B duas matrizes reais de ordem 2 e $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Se $AC = CA$ e $BC = CB$, isto é, A e B comutam com a matriz C , mostre que $AB = BA$.

Exercício 3.6.6

Sejam A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem n , que são tais que:

$$AB = O_{n \times n},$$

onde $O_{n \times n}$ é a matriz nula. Pode-se concluir que BA também é a matriz nula? Prove ou contra exemplifique.

Exercício 3.6.7

Sejam A , B e C três matrizes inversíveis de mesma ordem. Determine a matriz X de maneira que:

$$A(B^{-1}X) = C^{-1}A.$$

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES



Objetivos

Neste capítulo, nosso objetivo é resolver e classificar sistemas de equações lineares, usando o método do escalonamento. Também Discutimos a resolução de um sistema linear usando as matrizes inversas.

4.1 Sistemas lineares e operações elementares

A resolução de sistemas lineares pode ser estudada com diferentes métodos, como o método da substituição, da adição, da comparação, entre outros. Neste capítulo, apresentamos métodos que permitem um tratamento eficiente de sistemas lineares. Esses métodos de resolução de sistemas lineares vão permitir obter o conjunto das soluções, seja para classificá-lo ou mesmo para impor condições quanto à existência ou não da quantidade de soluções.

4.1.1 Equações lineares

Uma equação linear é uma equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b.$$

Isto é, trata-se de uma equação na qual cada termo tem grau, no máximo, igual a 1. Os elementos que compõem uma equação linear são descritos a seguir:

1. As variáveis (ou incógnitas): $x_1, \dots, x_n$;
2. Os coeficientes: $a_1, \dots, a_n$ são números reais dados;
3. O termo independente: b é um número real dado.

Exemplo 4.1.1

As seguintes equações são equações lineares:

1. $2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 11$.
2. $7x - 8y + 3z = -7$.
3. $3a - 7b + 4c - d = 9$.
4. $x = 3$.

Exemplo 4.1.2

As seguintes equações não são equações lineares:

1. $2x^2 - 5y + 5z = 1$.
2. $7xy - 8x + 3z = 7$.
3. $3\sqrt{a} - b = 9$.
4. $\frac{1}{x} + 9 = 0$.

Solução de uma equação linear. Uma solução de uma equação com n variáveis é uma n -upla (ou enupla) ordenada de números reais os quais, quando substituídos no lugar das variáveis respectivas na equação, fornecem uma sentença matemática verdadeira ou a equação é verificada. Isto é, a solução de uma equação linear de n incógnitas é a sequência de números reais ou enupla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, que, colocados respectivamente no lugar de $x_1, x_2, \dots, x_n$, tornam verdadeira a igualdade dada pela equação.

Resolver uma equação linear. Resolver uma equação é encontrar o conjunto de todas as suas soluções, chamado conjunto solução da equação.

Exemplo 4.1.3

Temos os seguintes exemplos:

1. O conjunto solução da equação linear $3x - 1 = 5$ é $\{2\}$.
2. A equação linear $x + y = 10$ possui um número infinito de soluções. Os pares ordenados $(5, 5)$, $(-5, 15)$, $(0, 10)$, $(\frac{1}{6}, \frac{29}{6})$ são apenas algumas delas.

Vamos estudar soluções de algumas equações lineares.

Exemplo 4.1.4

Dada a equação linear $4x - y + z = 2$, encontrar uma de suas soluções.

Solução. Vamos atribuir valores arbitrários para x e y e obter o valor de z . Por exemplo,

- Se $x = 2$ e $y = 0$ temos $2 \times 4 - 0 + z = 2$, então $z = -6$.

Logo, uma das soluções da equação é a tripla ordenada $(2, 0, -6)$.

- Se $x = 3$ e $y = 1$ temos $3 \times 4 - 1 + z = 2$, então $z = -9$.

Logo, uma das soluções da equação dada é a tripla ordenada $(3, 1, -9)$.

Exemplo 4.1.5

Dada a equação linear $3x - 2y = 5$, determinar α para que a dupla $(-1, \alpha)$ seja solução da equação.

Solução. Se $(-1, \alpha)$ é uma solução da equação temos: $x = -1$ e $y = \alpha$. Assim, deduzimos:

$$3x - 2y = 3 \times (-1) - 2\alpha = 5 \Rightarrow -3 - 2\alpha = 5 \Rightarrow -2\alpha = 8.$$

Logo, se $\alpha = -4$ a dupla $(-1, \alpha)$ é uma solução da equação dada.

4.1.2 Sistemas de equações lineares



Definição 4.1.6

O que é um sistema linear? Um sistema de equações lineares (ou, simplesmente, um sistema linear) é um conjunto de equações lineares que devem ser resolvidas simultaneamente.

Formulação matemática de um sistema linear. Um sistema linear, com m equações e n incógnitas, tem a seguinte forma:

$$(S) \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right. .$$

Temos que (S) é um sistema de m equações em n incógnitas.



Exemplo 4.1.7

Já vimos os seguintes sistemas lineares (ver a listas dos Exercícios da Parte II de Matrizes):

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}, \begin{cases} 2z + 3w = 0 \\ 3z + 4w = 1 \end{cases}.$$

Os dois sistemas são sistemas lineares de duas equações com duas variáveis.



Exemplo 4.1.8

Sejam os seguintes sistemas:

$$(S_1) \begin{cases} 7x - 6y + z = 12 \\ 5x + 3y - 2z = 11 \\ x - y - 5z = -4 \\ 3x - y = 10 \end{cases}, (S_2) \begin{cases} 3a - 2b + c = 1 \\ 5a + 3b = 11 \\ 2a - 5c = -4 \end{cases},$$

$$(S_3) \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}, (S_4) \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}.$$

Para o sistema (S_1) temos um sistema linear de 4 equações com 3 variáveis.

Para o sistema (S_2) temos um sistema linear de 3 equações com 3 variáveis.

Para o sistema (S_3) temos um sistema linear de 3 equações com 3 variáveis.

Para o sistema (S_4) temos um sistema linear de 2 equações com 3 variáveis.



Definição 4.1.9

Solução de um sistema linear. Uma solução de um sistema linear é solução de cada equação linear que o compõe. Isto é, os valores das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, que transformam cada equação linear em uma identidade, isto é, que satisfazem cada equação, constituem sua solução.

Os valores das variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$, quando satisfazem cada equação, constituem uma ênupla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, que representa uma solução do sistema linear (S) .



Definição 4.1.10

Resolução de um sistema linear. Resolver um sistema de m equações lineares com n incógnitas é determinar o conjunto formado por todas as suas soluções,

, chamado conjunto solução do sistema.

Exemplo 4.1.11

Seja o sistema:

$$(S): \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 5 \\ -x + y + z = -2 \end{cases}.$$

1) Verifique se $(2, -1, 1)$ é solução de (S) .

2) Verifique que $(0, 0, 0)$ não é solução de (S) .

Solução. 1. Temos a verificar as 3 equações do sistema:

$$(S): \begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \times 2 + 3 \times (-1) - 1 = 4 - 4 = 0 \\ x - 2y + z = 2 - 2 \times (-1) + 1 = 5 \\ -x + y + z = -2 + (-1) + 1 = -2. \end{cases}$$

Assim, a tripla $(2, -1, 1)$ é solução de (S) ;

2. Com a segunda equação temos:

$$x - 2y + z = 0 - 0 + 0 = 0 \neq 5.$$

Logo, a segunda equação não é verificada. Assim, temos que a tripla $(0, 0, 0)$ não é solução de (S) .

Definição 4.1.12

Sistemas lineares equivalentes. Se dois sistemas lineares (S_1) e (S_2) , admitem a mesma solução, eles são ditos sistemas equivalentes.

Veja o exemplo:

Exemplo 4.1.13

Sejam os dois sistemas:

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2) \begin{cases} 3x + \frac{y}{2} = 2 \\ \frac{-x+y}{3} = -1 \end{cases}.$$

Podemos verificar que a dupla $(1, -2)$ é uma solução dos dois sistemas (S_1) e (S_2) .

Como os sistemas admitem a mesma solução $(1, -2)$, (S_1) e (S_2) são equivalentes.

4.1.3 Classificação de um sistema linear quanto à solução

Um sistema linear pode ter ou não solução. Se tem solução, pode ter uma única solução ou mais de uma solução. Podemos, então classificar um sistema linear, quanto à existência e quantidade de soluções, em três tipos:

1. Compatível (dizemos também possível) e determinado: quando possui uma única solução.
2. Compatível e indeterminado: quando possui mais de uma solução.
3. Incompatível (dizemos também impossível): quando não possui solução.

Em outras palavras, para um sistema de equações lineares podemos considerar a seguinte pergunta: **Qual é o valor de cada incógnita x_i ?** A resposta depende de cada equação que compõe o sistema, que fornece uma parte da resposta a respeito dos valores dessas incógnitas. Assim, podemos dizer:

1. Se tivermos valores coerentes das incógnitas e em quantidade suficiente, encontraremos uma solução, que é única.
2. Se tivermos valores das incógnitas que forem coerentes entre si, mas em quantidade infinita, poderemos caracterizar o conjunto de soluções, com infinitas soluções.
3. Se tivermos valores coerentes das incógnitas que não forem coerentes entre si, isto é, se esses valores forem incompatíveis, então o sistema não possui nenhuma solução.

Exemplo 4.1.14

Sem aplicar as regras de resolução, podemos verificar que:

1) O sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases},$$

possui uma única solução, que é $x = 2$ e $y = 1$, isto é, o par $(2, 1)$.

2) O sistema:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases},$$

possui mais de uma solução, assim os pares: $(2, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$ são algumas delas.

3) O sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases},$$

não possui nenhuma solução, porque a soma $x + 2y$ tem dois valores 3 e 6, o que é impossível, pois sabemos que a soma de dois números reais é única.

4.1.4 Sistemas lineares homogêneos



Definição 4.1.15

Dizemos que um sistema linear é homogêneo quando os termos independentes de todas as equações que o compõem são iguais a zero, isto é, $b_j = 0$, para todo j ($1 \leq j \leq m$).

Um sistema linear homogêneo, com m equações e n incógnitas, tem a seguinte forma:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} .$$



Exemplo 4.1.16

São sistemas lineares homogêneos:

$$(S_1) \begin{cases} 7x - 6y + z = 0 \\ 5x + 3y - 2z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} , \quad (S_2) \begin{cases} 3a - 2b + c = 0 \\ 5a + 3b = 0 \\ 2a - 5c = 0 \end{cases} ,$$

$$(S_3) \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} , \quad (S_4) \begin{cases} 7x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} .$$

O sistema (S_1) é um sistema homogêneo de 4 equações com 3 variáveis.

O sistema (S_2) é um sistema homogêneo de 3 equações com 3 variáveis.

O sistema (S_3) é um sistema homogêneo de 3 equações com 3 variáveis.

O sistema (S_4) é um sistema homogêneo de 2 equações com 3 variáveis.

Observe que um sistema linear homogêneo com n incógnitas sempre admite a solução:

$$(0, 0, 0, \dots, 0),$$

chamada solução trivial. Logo, um sistema linear homogêneo é sempre compatível:

1. Quando é determinado, possui somente a solução trivial.
2. Quando é indeterminado, possui outras soluções, além da trivial, chamadas: soluções não-triviais.



Exemplo 4.1.17

Seja o sistema linear homogêneo:

$$(S) \begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ x + y = 0 & (2) \end{cases}.$$

O sistema (S) é determinado, de fato, a equação (1) implica que $y = x$, e com o uso da equação (2) deduzimos que $2x = 0$. Assim, temos $x = y = 0$.

Como o sistema (S) possui somente a solução trivial (0,0), ele é determinado.



Exemplo 4.1.18

Seja o sistema linear homogêneo:

$$(S) \begin{cases} x - y + z = 0 & (1) \\ y - 2z = 0 & (2) \end{cases}.$$

O sistema (S) é indeterminado, de fato, a equação (2) implica que $y = 2z$, então:

- Para $z = 1$ temos que $y = 2$, e com a equação (1) deduzimos que $x = -1$. Assim, $(-1, 2, 1)$ é solução do sistema (S),
- Para $z = 2$ temos que $y = 4$, e com a equação (1) deduzimos que $x = 2$. Assim, $(2, 4, 2)$ é solução do sistema (S).

Como o sistema (S) possui outras soluções, além da trivial (0,0,0), que são soluções não-triviais, o sistema (S) é indeterminado.

4.2 Exercícios resolvidos



Exercício 4.2.1

Determine m para que $(-1, 1, -2)$ seja solução da equação $mx + y - 2z = 6$.

Solução. Se $(-1, 1, -2)$ é uma solução da equação $mx + y - 2z = 6$ temos $m(-1) + 1 - 2(-2) = -m + 1 + 4 = 6$. Assim, temos : $-m = 6 - 5$ ou seja $m = -1$.

Exercício 4.2.2

- 1-Dada a equação $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -1$, ache α para que a dupla $(\alpha, \alpha + 1)$ torne a equação verdadeira.
- 2-Dada a equação $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$, ache α para que a dupla $(\alpha, \alpha + 1)$ torne a equação verdadeira.

Solução. 1. Suponha que a dupla $(\alpha, \alpha + 1)$ torne a equação $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = -1$ verdadeira. Assim, $x = \alpha$ e $y = \alpha + 1$ são tais que $\frac{\alpha}{2} + \left[\frac{\alpha+1}{2}\right] = -1$, isto é, $\frac{\alpha + \alpha + 1}{2} = -1$ ou seja $2 \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} = -1$. Logo, temos $\alpha + \frac{1}{2} = -1$, ou seja, $2 \cdot \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} = -1$. Logo, temos $\alpha = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$.
Logo, a dupla $(\alpha, \alpha + 1)$ será solução do sistema se, e somente se, $\alpha = -\frac{3}{2}$.

2. Seja α um número real tal que a dupla $(\alpha, \alpha + 1)$ seja uma solução da equação : $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$. Então, temos:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha+1}{3} = \frac{3\alpha + 2(\alpha+1)}{6} = -1.$$

Assim, deduzimos :

$$3\alpha + 2(\alpha + 1) = -6 \text{ ou seja } 5\alpha + 2 = -6 \text{ ito é, } 5\alpha = -8.$$

Logo, a dupla $(\alpha, \alpha + 1)$ é solução da equação $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -1$ se, e somente se, $\alpha = -\frac{8}{5}$.

Exercício 4.2.3

Seja o sistema:

$$(S) \begin{cases} 3x + y = k^2 - 9 \\ x - 2y = k + 3 \end{cases}.$$

Calcule k para que o sistema (S) seja homogêneo.

Solução. Para que o sistema será homogêneo, os termos independentes $k + 3$ e $k^2 - 9$ devem ser iguais a zero. Nesse caso, usar a segunda equação é mais fácil. Assim, $x - 2y = k + 3 = 0$ implica que $k = -3$. Para $k = -3$ temos também $k^2 - 9 = (-3)^2 - 9 = 0$. Portanto, o sistema (S) é homogêneo se, e somente se, $k = -3$.

Exercício 4.2.4

Sejam os dois sistemas lineares:

$$(S_1): \begin{cases} x - y = 3 \\ x - 2y = 2k \end{cases} \text{ e } (S_2): \begin{cases} nx - y = 3 \\ x + my = 2 \end{cases}.$$

- 1) Determine o valor de k para que $(4, 1)$ seja uma solução de (S_1) .

2) Calcular m e n de modo que sejam equivalentes os sistemas (S_1) e (S_2) .
Resposta: $m=-2$ e $n=1$.

Solução. 1) A dupla $(4,1)$ é uma solução da primeira equação do sistema (S_1) . Como a dupla $(4,1)$ é também uma solução da segunda equação do sistema (S_1) , temos: $4 - 2 \times 1 = 2k$. Logo, temos $2 = 2k$, isto é, $k = 1$. Portanto, a dupla $(4,1)$ é uma solução do sistema (S_1) se, e somente se, $k = 1$.

2) Se os sistemas (S_1) e (S_2) são equivalentes, então a dupla $(4,1)$ é também uma solução da do sistema (S_2) . Assim, substituindo (x,y) por $(4,1)$ nas duas equações do sistema (S_2) , temos:

$$\begin{cases} nx - y = 3 \\ x + my = 2 \end{cases} \text{ equivale } \begin{cases} 4n - 1 = 3 \\ 4 + m = 2 \end{cases}.$$

Então, obtemos: $n = 1$ e $m = -2$. Portanto, os sistemas (S_1) e (S_2) são equivalentes se e somente, se $n = 1$ e $m = -2$.

Exercício 4.2.5

1. Seja o sistema linear homogêneo:

$$(S) \begin{cases} x - y + z + t = 0 & (1) \\ y - 2z - t = 0 & (2) \\ z - t = 0 & (3) \end{cases}.$$

Verifique se o sistema (S) é determinado ou indeterminado.

2. Seja o sistema linear homogêneo:

$$(S) \begin{cases} x - y = 0 & (1) \\ x - my = 0 & (2) \end{cases}.$$

Para qual valor de m o sistema é determinado ou indeterminado?

Solução. 1. Com a Equação (3): $z - t = 0$ temos $t = z$. Usando a Equação (2) temos $y - 2z - t = y - 2z - z = 0$, logo $y = 3z$. Agora, a Equação (1) implica $x - y + z + t = x - 3z + z + z = 0$, então $x = z$. Assim, o sistema depende da variável livre $z = k$, tendo solução indeterminada, isto é, para $z = k$ um número real qualquer, temos:

$$y = 3k, x = k \text{ e } t = k.$$

Logo, para qualquer valor de k a 4-upla $(k, 3k, k, k)$ é uma solução do sistema (S) . Portanto, o sistema (S) é possível e indeterminado. E o conjunto-solução de (S) é dado por $S = \{(k, 3k, k, k); \text{ onde } k \text{ é um número real}\}$

2. A Equação (1) implica que $y = x$. Assim, usando a Equação (2) obtemos :

$$x - my = x - mx = (1 - m)x = 0 \text{ o que implica } 1 - m = 0 \text{ ou } x = 0 \text{ ou seja } m = 1 \text{ ou } x = 0.$$

Logo, temos :

- Se $m = 1$ então o sistema (S) é indeterminado, porque para $y = x$ e $m = 1$ a Equação (2) é verificada para todo número real x .
- Se $m \neq 1$, a Equação (2) implica que $x = 0$. Assim, temos : $x = y = 0$. Então, o sistema (S) é determinado.

Conclusão. O sistema (S) é indeterminado para $m = 1$ e determinado para $m \neq 1$.



Exercício 4.2.6

Classifique e resolva os sistemas lineares escalonados:

$$(S_1) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ 2y - z = 1 \\ 2z = -6 \end{cases},$$

$$(S_2) \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ y - z = -6 \end{cases},$$

$$(S_3) \begin{cases} a + 2b - c + d = 2 \\ c - d = 0 \end{cases}.$$

Solução.

1) **Resolução do sistema (S_1) .** Com a terceira equação, temos:

$$z = -\frac{6}{2} = -3.$$

Usando a segunda equação, com $z = -3$, temos:

$$2y - (-3) = 1 \text{ logo } 2y = -2.$$

Assim, obtemos $y = -1$. E com a primeira equação, com $y = -1$ e $z = -3$, temos:

$$2x - (-1) + 3(-3) = 0, \text{ logo } 2x = 8.$$

Assim, temos $x = \frac{8}{2} = 4$.

Conclusão: O sistema (S_1) é possível e determinado e sua solução é dada por $(4, -1, -3)$.

2) **Resolução do sistema (S_2) .** O sistema possui duas equações e três incógnitas. Aqui, como x e y estão no início das duas equações, podemos escolher z como a variável livre.

Seja $z = k$, assim com a segunda equação temos $y - k = 0$, logo $y = k$.

Substituindo $y = k$ e $z = k$ na primeira equação, obtemos:

$$3x - 2k + k = 2, \text{ logo } 3x - k = 2, \text{ isto é, } 3x = 2 + k,$$

Então, temos $x = \frac{k+2}{3}$.

Conclusão: o sistema (S_2) é possível e indeterminado, com solução geral $(\frac{k+2}{3}, k, k)$, isto é, o conjunto solução é dado por:

$$S_2 = \{(\frac{k+2}{3}, k, k); \text{ onde } k \text{ é um número real}\}.$$

3) **Resolução do sistema (S_3).** O sistema possui 2 equações e 4 incógnitas. Aqui a e c estão no início das duas equações, as variáveis livres são b e d .

Seja $b = k$ e $d = p$, assim a segunda equação implica que $c - d = c - p = 0$ ou seja, $c = p$. E usando a primeira equação temos : $a + 2k - p + p = 2$. Assim, temos, $a = -2k + 2$.

Conclusão: O sistema (S_3) é possível e indeterminado, cuja solução geral é dada por: $(-2k + 2, k, p, p)$, onde k e p são números reais, isto é, o conjunto solução é dado por: $S_2 = \{(-2k + 2, k, p, p); \text{ onde } k, p \text{ são número reais}\}.$



Exercício 4.2.7

Escalone, classifique e resolva os sistemas lineares abaixo:

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 3x - 3y + z = 8 \\ 2y + z = 0 \end{cases},$$

$$(S_2) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + 2z = 5 \end{cases},$$

$$(S_3) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}.$$

Solução.

1) **Resolução do sistema (S_1).** Multiplicando a primeira equação por -3 , a segunda por 2 e somando as duas expressões, temos:

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ 2(3x - 3y + z) - 3(2x + 3y + z) = 2 \times 8 - 3 \times 1 \\ 2y + z = 0. = \end{cases}$$

Logo, temos:

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -15y - z = 13 \\ 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Multiplicando a segunda equação por 2 , a terceira por 15 e somando as duas

expressões, temos:

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ -15y - z = 13 \\ 15z = 26 \end{cases}$$

O sistema (S_1) é escalonado. Da terceira equação temos $z = 2$. A segunda equação implica $y = -1$, e com a primeira equação obtemos $x = 1$.

Conclusão: O sistema (S_1) é possível e determinado e sua solução é dada por $(1, -1, 2)$, isto é, o conjunto solução é dado por: $S_1 = \{(1, -1, 2)\}$.

2) **Resolução do sistema (S_2) .** Multiplicando a primeira equação por -2 e somando com a segunda, temos:

$$(S_2) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y + 4z = 1 \end{cases}$$

O sistema (S_2) é escalonado. Assim, vamos tomar z como a variável livre. Logo, para $z = k$ a segunda equação implica $y = -4k + 1$, e com a primeira equação obtemos $x - 4k + 1 - k = 2$. Assim, temos $x = 5k + 1$.

Conclusão: O sistema (S_2) é possível e indeterminado, com solução geral: $(5k + 1, -4k + 1, k)$, onde k é um número real, isto é, o conjunto solução é dado por: $S_2 = \{(5k + 1, -4k + 1, k); \text{onde } k \text{ é um número real}\}$.

3) **Resolução do Sistema (S_3) .** Multiplicando a primeira equação por -2 e somando com a segunda, temos:

$$(S_3) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = -6 \end{cases}$$

O sistema (S_3) é escalonado. Assim, vamos tomar z como a variável livre. Logo, para $z = k$ a segunda equação implica $y = k - 6$, e com a primeira equação obtemos $x + k - 6 + k = 3$. Assim, temos $x = 9 - 2k$.

Conclusão: O sistema (S_3) é possível e indeterminado, com solução geral: $(9 - 2k, k - 6, k)$, onde k é um número real, isto é, o conjunto solução é dado por: $S_3 = \{(9 - 2k, k - 6, k); \text{onde } k \text{ é um número real}\}$.

Exercício 4.2.8

Expresse matricialmente os sistemas:

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 2a + b + c = -1 \\ a + c = 0 \\ -3a + 5b - c = 2 \end{cases}$$

Solução. A forma matricial do sistema (S_1) é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

A forma matricial do sistema (S_2) é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 4.2.9

1) A expressão matricial de um sistema (S_1) é:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Determine as equações do sistema (S_1).

2) A expressão matricial de um sistema (S_2) é:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & -1 \\ 9 & -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Determine as equações do sistema (S_2).

3) A expressão matricial de um sistema (S_3) é:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & -1 & 1 \\ 9 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Determine as equações do sistema (S_3).

Solução.

1) Usando o produto de matrizes, as equações lineares do sistema (S_1), relacionando a essa equação matricial são:

$$\begin{cases} 7x + 8y = -4 \\ 9x - 3y = 7 \end{cases}.$$

2) Usando o produto de matrizes, as equações lineares do sistema (S_2), relacionando a

essa equação matricial são:

$$\begin{cases} 7x + 8y - z = -4 \\ 9x - 3y + 2z = 7 \end{cases}.$$

3) Usando o produto de matrizes, as equações lineares do sistema (S_3) , relacionado a essa equação matricial são:

$$\begin{cases} 7x + 8y - z - t = -4 \\ 9x - 3y + 2z - t = 7 \\ -2x + 5y + 5z + t = -3 \\ z + 2y + z + t = 5 \end{cases}.$$

Exercício 4.2.10

Expresse matricialmente e resolva os sistemas lineares:

$$(S_1) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 3y = 8 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} 2a + b = -1 \\ -3a + 2b = 2 \end{cases},$$

$$(S_3) \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2 \\ -2x_1 + 5x_2 = -1 \end{cases}, \quad (S_4) \begin{cases} x - 5y = 2 \\ -4x + 2y = -5 \end{cases}.$$

Sugestão: Para os precedentes sistemas podemos usar a Proposição 4.6 da Parte II do Capítulo 1, para inverter as matrizes de ordem 2×2 .

Solução. Lembre-se de que uma matriz de ordem 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é inversível se, e somente se, $ad - bc \neq 0$, e neste caso temos $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

1) A forma matricial do sistema (S_1) é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ verifica a condição $ad - bc = 2 \times (-3) - 3 \times 3 = -15 \neq 0$, logo a matriz A é inversível e temos $A^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Logo, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{bmatrix} -27 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a única solução do sistema (S_1) é dada por $\{(\frac{9}{5}, -\frac{13}{15})\}$.

2) A forma matricial do sistema (S_2) é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como $2 \times 2 - (-3) \times 1 = 7 \neq 0$, então a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ é inversível, com $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Logo, temos:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a única solução do sistema (S_2) é dada por $\{(-\frac{4}{7}, -\frac{1}{7})\}$.

O método usado para os sistemas (S_1) e (S_2) é aplicável literalmente para os outros dois sistemas (S_3) e (S_4).

Exercício 4.2.11

Seja o sistema linear :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}.$$

1) Verifique que a expressão matricial do sistema (S) é dada por:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2) Seja a matriz:

$$\mathbf{C} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Verifique que $\mathbf{C}$ é matriz inversa da matriz $\mathbf{A}$.

3) Deduzir o conjunto solução do sistema (S).

Resposta: $S = \{(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})\}$.

4) Resolver o sistema linear:

$$(S') \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

Resposta: $S = \{(-\frac{9}{2}, -1, -\frac{3}{2})\}$.

Solução. 1) Usando o produto de matrizes temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 2y + z \\ y + 2z \\ x + y + z \end{bmatrix}.$$

Como a definição do sistema (S), temos $\begin{bmatrix} x + 2y + z \\ y + 2z \\ x + y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, logo, a expressão matricial do sistema (S) é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ isto é, } \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2) Com o produto de matrizes temos:

$$\mathbf{AC} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz C é a matriz inversa da matriz A.

3) A partir da pergunta 1) a forma matricial do sistema (S) é dada por $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, assim usando a pergunta 2) deduzimos que:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \text{ equivale } \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{CB},$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o conjunto solução do sistema (S') é $S = \{(-\frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2})\}$.

4) A formulação matricial do sistema (S') é dada por:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{D}, \text{ onde } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz A é inversível e sua inversa é a matriz C temos:

$$X = A^{-1}D = CD, \text{ isto é, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, com a multiplicação de matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ -1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o conjunto solução do sistema (S') é $S' = \{(-\frac{9}{2}, -1, -\frac{3}{2})\}$.

Exercício 4.2.12

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1) Seja a matriz:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

Verifique que C é matriz inversa da matriz A .

2) Resolver o sistema linear:

$$(S) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}.$$

Resposta: $S = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8})\}$.

Solução.

1) Usando a multiplicação de matrizes, temos:

$$CA = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz C é a matriz inversa da matriz A .

2) A formulação matricial do sistema (S) é dada por:

$$AX = D, \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 61 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz A é inversível e sua inversa é a matriz C temos:

$$X = A^{-1}D = CD, \text{ isto é, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = C = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, com a multiplicação das matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}.$$

Portanto, o conjunto solução do sistema (S) é $S = \{(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8})\}$.

4.3 Exercícios para praticar



Exercício 4.3.1

Resolver os seguintes sistemas lineares:

$$(S_1): \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases}, (S_2): \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}.$$



Exercício 4.3.2

Determine os números reais a e b para que o sistema:

$$(S): \begin{cases} x + y = b \\ 6x + ay = 12 \end{cases}$$

seja possível e indeterminado.



Exercício 4.3.3

Sejam a um número real e o sistema:

$$(S): \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ ax - 6y = 0 \end{cases}.$$

1. Suponha que $a \neq -9$. Escrever o sistema (S) sobre a forma matricial, isto é,

$$A \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

a. Determine a matriz inversa da matriz A .

b. Deduzir as soluções do sistema (S), usando a matriz inversa.

2. Se $a = -9$ o que podemos dizer sobre a natureza do sistema (S)?

3. O que podemos concluir sobre o sistema (S), ou seja, o sistema (S) é possível, é determinado ou é indeterminado ?

Exercício 4.3.4

Sejam a um número real e o sistema linear homogêneo:

$$(S): \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y - az = 0 \end{cases}.$$

1. Escalone o sistema (S).

2. O sistema linear (S) é indeterminado para:

(i) Todo número real a ;

(ii) Nenhum número real a ;

(iii) $a = 1$;

(iv) $a = -1$.

3. No caso em que o sistema (S) é indeterminado, dê o seu conjunto solução.

4. Para quais valores do número real a o sistema (S) é determinado.

Exercício 4.3.5

Dado o sistema linear:

$$(S): \begin{cases} x + 2y + 2z + t = m \\ 2x + y - z + t = n \end{cases}.$$

1. Determine os números reais m e n de tal modo que $(1, 1, 2, 2)$ seja uma solução deste sistema.

2. Para os valores de m e n encontrados em 1), determine o conjunto solução do sistema (S).

CAPÍTULO 5

DETERMINANTES E SISTEMAS DE CRAMER



Objetivos

O determinante é um número que está associado com uma matriz quadrada. Neste capítulo, o determinante é principalmente utilizado para caracterizar as matrizes invertíveis e para a resolução dos sistemas de Cramer. No entanto, o determinante tem outras interpretações e aplicações.

5.1 Determinantes

Vejamos inicialmente o caso 2×2 , isto é, consideramos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível se, e somente se, o valor numérico $ad - bc$ é diferente de 0, isto é,

$$ad - bc \neq 0.$$

Esta é a definição de **determinante** para uma matriz A de ordem 2×2 :

$$\det A = ad - bc.$$

Outras notações bastante utilizadas de determinante são

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Cuidado para não confundir as notações. A notação $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ representa uma matriz,

enquanto que a notação $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ representa um número, o determinante de A . Assim, a discussão acima implica na seguinte propriedade :

Propriedade 5.1.1

A matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível, se, e somente se,,

$$\det A = ad - bc \neq 0.$$

Exemplo 5.1.2

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois $\det A = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 = -7 \neq 0$. Em particular, podemos utilizar o Teorema da Matriz Invertível (Proposição 3.4.6 do Capítulo 3) para concluir que a transformação linear associada é invertível (injetiva e sobrejetiva), as colunas são linearmente independentes, espaço nulo tem dimensão zero e o oposto é 2, etc.

Por outro lado, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ não é invertível, já que $\det A = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 2 = 0$.

Exemplo 5.1.3

Calcular o determinante das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução. Usando a definição de determinante, temos:

$$\det(A) = 12 - 4 = 8 \text{ e } \det(B) = 4 - 4 = 0.$$

Caso 3×3 . Vamos considerar agora uma matriz de ordem 3×3 . Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Definimos o **determinante** de uma matriz A de ordem 3×3 , usando a regra de Sarus, por:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Existe uma forma de memorização deste determinante que usualmente é ensinado no

ensino médio. No entanto, vamos utilizar um outro método que poderá ser aplicado para matrizes de qualquer ordem.

Observamos que a expressão acima está cheia de simetrias, por exemplo, cada um dos elementos da matriz A aparece exatamente duas vezes. Além disso, aparece uma vez com sinal positivo e outra com sinal negativo. Podemos escrever:

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} + a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}). \\ &= a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Esta última fórmula (que é apenas uma outra forma de escrever a nossa definição de determinante de uma matriz de ordem 3×3), apesar de aparentemente complicada, nos permite entender como que os coeficientes de uma matriz aparecem na definição de $\det A$. Vamos escrever novamente:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Podemos pensar como segue:

- Nós vamos percorrer a primeira linha da esquerda para a direita, alternando o sinal e multiplicando por determinantes menores.
- O primeiro elemento é o elemento da primeira linha a_{11} . *Não alteramos* o sinal e multiplicamos por um **determinante menor**, obtido ao desconsiderar a primeira linha e a primeira coluna (ou, em outras palavras, a linha e a coluna do elemento a_{11}):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & a_{22} & a_{23} \\ \square & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow A_{11} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Denotamos por A_{11} a matriz obtida ao remover a linha e a coluna no elemento a_{11} .

- Em seguida, vamos para o segundo elemento da primeira linha, que é a_{12} . *Alteramos* o sinal e multiplicamos pelo determinante menor da matriz A_{12} , obtida de A ao eliminar a linha e a coluna de a_{12} :

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ a_{21} & \square & a_{23} \\ a_{31} & \square & a_{33} \end{bmatrix} \rightsquigarrow A_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

- Finalmente consideramos a_{31} . *Não alteramos* o sinal e multiplicamos pelo determinante menor da matriz A_{13} , obtida de A ao eliminar a linha e a coluna

de a_{13} :

$$\begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ a_{21} & a_{22} & \square \\ a_{31} & a_{32} & \square \end{bmatrix} \rightarrow A_{13} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

- Podemos então escrever

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}. \quad (5.1)$$

Exemplo 5.1.4

Calcular o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

A notação de “barrinhas” para o determinante é particularmente adequada para escrever o determinante como aparece na fórmula (5.1), pois assim podemos ir mentalmente desconsiderando (ou tapando com um lápis) as linhas e colunas que não devemos escrever (identifique que tudo o que fizemos foi escrever a fórmula (5.1)):

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Agora, já sabemos como calcular determinantes de matrizes 2×2 , que é o que nos resta fazer:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} &= 2(2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) - 4(1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1)) + 3(1 \cdot 2 - 0 \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Exemplo 5.1.5

Calcular o determinante de

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ = 2 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -3.$$

Analise com atenção como os sinais alternam, independentemente dos sinais dos coeficientes da matriz.

Exercício da Aplicação: Calcular o determinante das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como já mencionamos, na fórmula para o determinante de uma matriz A , cada um dos elementos de A aparece exatamente duas vezes. Isto significa que poderíamos ter rearranjado os termos da matriz não a partir da primeira linha, mas a partir de *qualquer linha ou qualquer coluna*. Mas devemos ter cuidado para que os sinais sejam levados em consideração de forma coerente.

Dada uma matriz quadrada A de ordem 3×3 , obtemos uma **matriz menor** A_{ij} ao remover a linha i e coluna j . Agora é possível entender a notação escolhida no início deste capítulo, na fórmula (5.1). Definimos o **cofator** (i, j) de A por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}. \quad (5.3)$$

Este sinal ± 1 na definição do cofator é o que faz com que o sinal seja levado em consideração corretamente.



Proposição 5.1.6

Podemos calcular o determinante da matriz $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 3}$, de ordem 3, a partir de qualquer linha ou de qualquer coluna, utilizando o cofator. Mais precisamente:

- Se consideramos a linha i , então

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3}.$$

- Se consideramos a coluna j , então

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j}.$$

É prático de calcular o determinante pensando como vínhamos fazendo antes, alternando os sinais. Assim, é possível realizar o cálculo do determinante utilizando qualquer linha ou qualquer coluna. Basta descobrirmos com qual sinal devemos começar. Construímos uma “matriz” com os sinais que cada posição da matriz nos dá.

Vamos colocar o sinal de $(-1)^{i+j}$ na posição ij da matriz:

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{bmatrix} \longleftrightarrow \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}.$$

Claro que poderíamos fazer esta matriz de sinais para matrizes de qualquer ordem.



Exemplo 5.1.7

Vamos calcular de várias maneiras o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pela nossa definição obtemos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 - 1(9 + 1) + 4 \cdot 0 = -10.$$

Uma boa escolha seria uma linha ou coluna que tenha o maior número de zeros! Pois assim, economizamos tanto nos cálculos quanto na escrita. Por exemplo, escolhemos a segunda coluna. Para saber o sinal adequado, podemos proceder da seguinte maneira: começando na posição 11 com o sinal “+”, vamos alternando o sinal até completar a segunda coluna:

$$\begin{bmatrix} + \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & - \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & - \\ & + \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} + & - \\ & + \\ & - \end{bmatrix},$$

logo os sinais da segunda coluna são $\begin{bmatrix} - \\ + \\ - \end{bmatrix}$. Assim, podemos calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 - 0 = -1(9 + 1) = -10.$$

Observe que nem escrevemos os determinantes menores que estão multiplicados por zero. De fato, nem precisaríamos ter escrito os zeros, apenas o fizemos para exemplificar os sinais alternando de forma correta.

A segunda coluna, neste caso, era a melhor escolha para o cálculo do determinante, pois apenas um elemento é não nulo. De qualquer maneira, para praticar, vamos calcular ainda mais uma vez o determinante $\det A$, agora

utilizando a terceira linha. Sinais que aparecem na frente dos coeficientes, de acordo com a terceira linha:

$$\begin{bmatrix} + \\ - \\ + \end{bmatrix} \rightarrow \text{assim os sinais terceira linha são } [+ \quad - \quad +].$$

Logo, temos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-3) = -10.$$

Como exercício, calcule o determinante utilizando outras linhas ou colunas.

5.2 Determinantes de matrizes de ordem $n \times n$ com $n \geq 3$

Seja A uma matriz quadrada, de ordem $n \geq 3$. O **determinante** de A é definido recursivamente por:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}.$$

ou, na notação dos cofatores:

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + a_{13} C_{13} + a_{14} C_{14} + \cdots + a_{1n} C_{1n},$$

onde C_{1j} é dado por (5.3), isto é, $C_{1j} = (-1)^{1+j} \det A_{1j}$.

Nossa definição é de fato recorrente, pois para calcular o determinante de uma matriz A de ordem $n \times n$ com $n \geq 3$, de acordo com a definição, nós precisaremos calcular vários determinantes de ordem $(n-1) \times (n-1)$. Estes por sua vez, consistem de vários determinantes de ordem $(n-2) \times (n-2)$, e assim por diante. Isto implica, em particular, que o cálculo de determinantes é, em geral, uma tarefa bastante trabalhosa.

Assim como na seção anterior, podemos utilizar qualquer linha ou coluna desde que utilizemos os sinais corretos correspondentes:



Proposição 5.2.1

Podemos calcular o determinante de A de ordem $n \times n$ com $n \geq 3$, a partir de qualquer linha ou de qualquer coluna. Mais precisamente:

- Se consideramos a linha i , então

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + a_{i3} C_{i3} + \cdots + a_{in} C_{in}. \quad (5.4)$$

- Se consideramos a coluna j , então

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + a_{3j}C_{3j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}. \quad (5.5)$$

Exemplo 5.2.2

Calcular o determinante da matriz de ordem 4×4 :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na tentativa de evitar muitas contas, vamos escolher para começar, uma linha ou coluna que possua o maior número de zeros possíveis. Neste caso, poderia ser a segunda linha ou a terceira coluna. Vamos escolher a segunda linha (calcule, como exercício, o determinante utilizando a terceira coluna). Os sinais são:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix} \rightarrow \text{sinais da segunda linha são } [- \ + \ - \ +].$$

Logo, temos:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0.$$

Perceba que os dois zeros evitaram que calculássemos dois determinantes de ordem 3×3 . Em seguida, calculamos cada um dos determinantes de ordem 3×3 . No primeiro deles, escolhemos a segunda coluna, por possuir dois zeros; no segundo, qualquer escolha seria parecida e conveniente, já que a matriz não tem entradas nulas - escolhemos assim, a terceira coluna:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \left(4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) \\ &= (-1) \cdot (-5) + \left(4 \cdot 10 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-13) \right) = 30. \end{aligned}$$

💡 Exemplo 5.2.3

Calcular o determinante da matriz A de ordem 5×5 :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Começamos pela última coluna, pois esta possui apenas uma entrada não nula. Assim, nosso determinante foi reduzido ao cálculo de um determinante de ordem 4×4 , em contraste com o determinante inicial que é de ordem 5×5 .

Faremos a análise dos sinais da quinta coluna da matriz A :

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + \\ & & & - & \\ & & & + & \\ & & & - & \\ & & & + & \end{bmatrix} \rightarrow \text{assim os sinais da quinta coluna são } \begin{bmatrix} + \\ - \\ + \\ - \\ + \end{bmatrix}.$$

Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 0 - 0 + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Em seguida, escolhemos (por exemplo) a primeira linha da nova matriz 4×4 :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -5 & 0 \\ 8 & 6 & 0 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -7 & -5 \\ 3 & 8 & 6 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, temos dois determinantes de matrizes de ordem 3×3 para calcular:

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - 8 \left(\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \right) \\ &= 8 \cdot (-2) - 8(-2 + -3 \cdot 0) = -16 + 16 = 0. \end{aligned}$$

Estes exemplos já devem deixar claro que o cálculo de determinantes é demasiado trabalhoso, exceto em alguns casos que a matriz tem muitas entradas nulas. Veremos nas próximas seções algumas propriedades e aplicações.

5.3 Propriedades do determinante e aplicações

Nesta seção, vamos apontar as principais propriedades do determinante.

5.3.1 Propriedades gerais do determinante



Proposição 5.3.1

Seja A uma matriz de ordem $n \times n$. Então, vale a seguinte propriedade: Se uma linha de A for composta só por zeros, então temos:

$$\det(A) = 0.$$

Prova. Seja $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz quadrada tal que a linha i_0 é composta só de zeros, isto é, $a_{i_0 1} = a_{i_0 2} = \dots = a_{i_0 n} = 0$. Para calcular o determinante a partir de uma linha i qualquer vamos considerar a fórmula (5.4), isto é, $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + a_{i3}C_{i3} + \dots + a_{in}C_{in}$, onde C_{ij} são os cofatores. Para a linha $i = i_0$ temos,

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{i_0 1}C_{i_0 1} + a_{i_0 2}C_{i_0 2} + a_{i_0 3}C_{i_0 3} + \dots + a_{i_0 n}C_{i_0 n} \\ &= 0 \times C_{i_0 1} + 0 \times C_{i_0 2} + 0 \times C_{i_0 3} + \dots + 0 \times C_{i_0 n} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Conclusão: Se uma linha de A for composta só por zeros, então temos $\det(A) = 0$.

□

Podemos observar que essa propriedade é válida porque no cálculo do determinante a partir da linha i_0 , cada cofator no cálculo do determinante será multiplicado por zero, resultando em um determinante nulo. Vejamos um exemplo para uma matriz de ordem 3. Seja A Matriz de ordem 3 com a segunda coluna composta por zeros:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & d \\ e & 0 & f \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante dessa matriz, aplicando a fórmula 5.5:

$$\det(A) = -0 \times (cf - sd) + 0 \times (af - eb) + 0 \times (ad - cb) = 0.$$

Podemos ainda verificar essa propriedade através de qualquer matriz que apresente uma linha ou coluna formada por zeros.



Proposição 5.3.2

O determinante de uma matriz triangular (superior ou inferior) é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Prova. Seja $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz quadrada triangular inferior de ordem $n \times n$, isto é,

$$A_{n \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Etapa 1. Vamos calcular o determinante de A a partir de primeira linha. Como $a_{12} = \cdots = a_{1n} = 0$, temos:

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) \text{ onde } A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix},$$

isto é, A_{11} é a matriz cofator.

Etapa 2. Como na Etapa 1, vamos calcular o determinante da matriz cofator A_{11} , usando sua primeira linha. Como $a_{23} = \cdots = a_{2n} = 0$, temos:

$$\det(A_{11}) = a_{22} \det(A_{22}) \text{ onde } A_{22} = \begin{bmatrix} a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

$\det(A)$ Logo, obtemos:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \det(A_{22})$$

onde A_{22} é a matriz cofator.

Etapa final: Repetindo o processo anterior até a Etapa n (ou $n - 1$), podemos obter:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

De maneira semelhante, podemos estabelecer que para toda matriz triangular superior,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix},$$

o cálculo de seu determinante a partir da primeira coluna, permite de obter:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

□

**Proposição 5.3.3**

Sejam A e B duas matrizes da mesma ordem $n \times n$. Então, vale a seguinte propriedade: Para quaisquer duas matrizes A e B de mesma ordem, temos:

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B).$$

Como o caso geral, precisa de contas longas, vamos demonstrar essa propriedade para matrizes de ordem 2. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, então temos:

$$A.B = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos:

$$\det(AB) = (ax + bz)(cy + dt) - (ay + bt)(cx + dz) = adxt + bcyz - adyz - bcxt,$$

$$\det(A)\det(B) = (ad - bc)(xt - yz) = adxt + bcyz - adyz - bcxt.$$

Logo, deduzimos que $\det(AB) = \det A \times \det B$.

**Proposição 5.3.4**

Uma matriz A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Prova. Seja $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ uma matriz quadrada invertível. Então, existe A^{-1} tal que $A \times A^{-1} = I_{n \times n}$ (a matriz identidade). Usando a Proposição 5.3.3, temos:

$$\det(A \times A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det I_{n \times n} = 1.$$

Logo, deduzimos $\det(A) \neq 0$.

□

**Proposição 5.3.5**

A operação elementar “trocar duas linhas de lugar” altera o sinal do determinante.

Vamos ilustrar essa propriedade no caso das matrizes de ordem 2×2 . Sejam α, β em $\mathbb{R}$, e as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Vejamos o cálculo dos determinante das matrizes A e B , são dados por:

$$\det(A) = ad - bc \text{ e } \det(B) = cb - ad = -\det(A).$$

**Proposição 5.3.6**

A operação elementar de somar o múltiplo de uma linha à outra não altera o determinante. Em outras palavras, se um múltiplo de uma linha de A for somado à outra linha formando a matriz B , então $\det A = \det B$.

Vamos ilustrar essa propriedade no caso das matrizes de ordem 2×2 . Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a & b \\ c+a & d+b \end{bmatrix}$$

Vejamos o cálculo dos determinante das matrizes A e B são dado por:

$$\det(A) = a(d+b) - b(c+a) = ad + ab - bc - ba = ad - bc = \det(A).$$

De acordo com essa propriedade, eliminar os elementos abaixo da posição de pivô não altera o determinante. **Um cuidado:** multiplicar linhas por escalares altera o determinante! Desta maneira, esta operação elementar significa estritamente fazer uma operação do tipo:

$$k\ell_i + \ell_j \text{ em } \ell_j.$$

Observe que “adicionamos um múltiplo da linha i na linha j ”. Atentem para o fato de que não pode haver coeficiente diferente de 1 em ℓ_j .

**Proposição 5.3.7**

O determinante depende linearmente de cada uma das linhas, isto é, se fizermos uma combinação linear de uma linha apenas, poderíamos ter feito uma combinação linear dos determinantes:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} + \beta b_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} + \beta b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Caso queiramos, para simplificar as contas, multiplicar ou dividir uma linha por um fator qualquer, podemos fazer uma aplicação cuidadosa da linearidade enunciada nesta propriedade. Considerando $\beta = 0$, esta propriedade se transforma em “colocar um fator α de uma linha em evidência”:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vamos ilustrar essa propriedade no caso das matrizes de ordem 2×2 . Sejam α, β em $\mathbb{R}$, e as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} a & b \\ \alpha c + \beta e & \alpha d + \beta f \end{bmatrix}.$$

Vejamos o cálculo do determinante da matriz C é dado por:

$$\det(C) = a(\alpha d + \beta f) - b(\alpha c + \beta e) = \alpha(ad - bc) + \beta(af - be),$$

assim, obtemos:

$$\det(C) = \alpha \det(A) + \beta \det(B).$$

Especialmente, para $\beta = 0$, deduzimos a fórmula:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha \det(A).$$



Proposição 5.3.8

O determinante da matriz transposta de A é igual ao determinante de A , isto é, $\det(A^T) = \det(A)$.

Vejamos o cálculo do determinante das matrizes A e A^t de ordem 2, dados por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Os determinantes das duas matrizes, são dados por:

$$\det(A) = ad - cb \text{ e } \det(A^t) = ad - bc.$$

Logo, deduzimos que $\det(A) = \det(A^t)$.

Observamos que ao calcular o determinante de uma matriz A ou de sua transposta A^t , estaremos sempre realizando as mesmas multiplicações e as mesmas adições.

5.3.2 Exemplos da aplicação



Exemplo 5.3.9

Vamos calcular o determinante da matriz A do Exemplo 5.2.2 utilizando as propriedades anteriores e em particular o método de escalonamento. Este método é particularmente útil quando as matrizes não possuem muitas entradas nulas. Já que a segunda linha possui um “1” na primeira entrada, vamos fazer uma troca de linhas para facilitar as contas (cuidado com o sinal). Em seguida,

eliminamos os elementos da primeira coluna.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 16/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & -2/3 & -5/3 \end{vmatrix}.$$

As divisões nos denominadores nos atrapalham um pouco na hora de fazer a conta. Podemos retirá-los dali, desde que cuidadosamente (o mesmo para o sinal de “-1”), colocando-os em evidência e percebendo que o devemos fazê-lo para cada linha:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & -2/3 & -5/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 16 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Finalmente, podemos fazer uma troca de linhas e eliminar o elemento “16”:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{vmatrix} = -\frac{1}{9} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-45) = 30.$$

No exemplo anterior, vimos como calcular o determinante utilizando escalonamento de maneira natural. Como pode-se perceber, o método não parece muito melhor do que calcular o determinante utilizando expansão por cofatores. Vamos ver que, de fato, o melhor é *misturar* o método de cofatores com as propriedades anteriores. Vamos novamente calcular o determinante:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Observe que a terceira coluna tem duas entradas nulas. Podemos ainda utilizar uma operação elementar para eliminar uma das entradas: por exemplo, substituir $\ell_3 + \ell_2$ em ℓ_2 . Assim:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Note que a terceira coluna agora ficou com apenas uma entrada não nula; logo,

utilizando a terceira coluna para o cálculo de $\det A$ (como na seção anterior), obtemos

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Podemos também utilizar a propriedade (ix) do teorema para colocar em evidência um “-2” da primeira coluna e, em seguida, continuar com o cálculo:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-15) = 30. \end{aligned}$$

Por fim, recalculamos o determinante da matriz do Exemplo 5.2.3, utilizando as propriedades desta seção. Vamos refazer as contas de forma um pouco mais rápida. Tente acompanhar o que está sendo feito de um passo para outro.



Exemplo 5.3.10

Resolvendo o determinante anterior novamente.

Iniciamos aproveitando o fato da última coluna ter muitos zeros.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} \stackrel{-2\ell_4 + \ell_1 \text{ em } \ell_1}{=} \begin{vmatrix} 2 & -14 & -10 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -14 & -10 \\ 1 & -7 & -5 \\ 3 & 8 & 6 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Em seguida, eliminamos o 2 e o 3 da primeira coluna sem trocar linhas de lugar, uma vez que devemos tomar cuidado, quanto mais trocarmos as linhas, mais riscos corremos de errar o sinal. Assim, temos:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & -5 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -7 & -5 \\ 0 & 29 & -9 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 = 0.$$

Nota: antes de eliminarmos o 3, já reparamos que o determinante vai ser nulo, graças à propriedade (ii).

5.4 Sistemas de Cramer

Seja o sistema linear de n equações com n incógnitas:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

A forma matricial do sistema (S), é dada por:

$$AX = B,$$

onde A é a matriz dos coeficientes das incógnitas, X é a matriz coluna das incógnitas e B é a matriz coluna dos termos independentes, dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$



Definição 5.4.1

Um sistema de Cramer é um sistema linear de n equações com n incógnitas cuja matriz dos coeficientes é inversível, isto é,

$$\det(A) \neq 0.$$

A regra de Cramer consiste num método para se resolver um sistema linear.

As etapas da regra de Cramer são as seguintes.

Etapas 1. Determinar a matriz A_{x_1} e calcular de x_1 . Vamos determinar agora a matriz A_{x_1} , que se obtém a partir da matriz A , substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_1

pela coluna dos termos independentes. Temos:

$$A_{x_1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{21} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_i & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela regra de Cramer temos:

$$x_1 = \frac{\det(A_{x_1})}{\det(A)}.$$

Etapla 2. Determinar a matriz A_{x_2} e calcular o valor de x_2 . Vamos determinar agora a matriz A_{x_2} , que se obtém a partir da matriz A , substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_2 pela coluna dos termos independentes. Temos:

$$A_{x_2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & b_2 & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & b_i & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Pela regra de Cramer temos:

$$x_2 = \frac{\det(A_{x_2})}{\det(A)}.$$

Podemos continuar o mesmo processo para determinar matriz A_{x_i} e o cálculo de $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$, até a etapa n .

Etapla n . Determinar a matriz A_{x_n} e cálculo de x_n . Vamos determinar agora a matriz A_{x_n} , que se obtém a partir da matriz A , substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_n pela coluna dos termos independentes. Temos:

$$A_{x_n} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in-1} & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn-1} & b_n \end{bmatrix}.$$

Pela regra de Cramer temos:

$$x_n = \frac{\det(A_{x_n})}{\det(A)}.$$

Em resumo, num sistema linear de Cramer o valor das incógnitas x_i é dado pela

expressão:

$$x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)},$$

onde:

- (i) A é a matriz dos coeficientes das incógnitas.
- (ii) A_{x_i} é a matriz que se obtém a partir da matriz A , substituindo-se a coluna dos coeficientes de x_i , pela coluna dos termos independentes.

Vejamos alguns exemplos, ilustrando a aplicação do método de Cramer.



Exemplo 5.4.2

Resolver o sistema linear :

$$(S): \begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}.$$

Solução. A matriz associada ao sistema (S) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A) = 2 \times 5 - 1 \times (-1) = 11 \neq 0$, então a matriz A é inversível. Vamos usar a regra de Cramer para a resolução do sistema (S).

Etapla 1. Determinar a matriz A_x e cálculo de x . Temos:

$$A_x = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \text{ e } \det(A_x) = 33.$$

Logo, temos :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{33}{11} = 3.$$

Etapla 2. Determinar a matriz A_y e cálculo de y . Temos:

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } \det(A_y) = -11.$$

Logo, temos :

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-11}{11} = -1.$$

Conclusão. A única solução do sistema (S) é dada por:

$$S = \{(3, -1)\}.$$

Exemplo 5.4.3

Resolver o sistema linear :

$$(S): \begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = -2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solução. A matriz associada ao sistema (S) é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\det(A) = -2 \times (-9) - 2 \times (-2) + (-1) \times 7 = -21 \neq 0$, então a matriz A é inversível. Vamos usar a regra de Cramer para a resolução do sistema (S).

Etapla 1. Determinar a matriz A_x e calcular x . Temos:

$$A_x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \det(A_x) = 0 \times (-9) - 2 \times (-7) + (-1) \times 2 = 12.$$

Logo, temos :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{12}{-21} = -\frac{4}{7}.$$

Etapla 2. Determinar a matriz A_y e cálculo de y . Temos:

$$A_y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \det(A_y) = 2 \times (-7) + 0 \times (-2) + (-2) = -19.$$

Logo, temos :

$$y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{19}{21}.$$

Etapla 3. Determinar a matriz A_z e calcular z . Temos:

$$A_z = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \det(A_z) = 14.$$

Logo, temos :

$$z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}.$$

Conclusão. A única solução do sistema (S) é dada por:

$$S = \{(2, -1, 0)\}.$$

5.5 Discussão de um sistema linear

Seja o sistema linear de n equações com n incógnitas:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Discutir o sistema (S) é saber se ele é : **possível, impossível ou determinado.**

Se a matriz A associada ao sistema (S) é inversível, com a regra de Cramer sabemos que:

$$x_1 = \frac{\det(A_{x_1})}{\det(A)}; x_2 = \frac{\det(A_{x_2})}{\det(A)}; \dots; x_n = \frac{\det(A_{x_n})}{\det(A)}.$$

Assim, temos que:

(I) O sistema (S) é **Possível e Determinado** se :

$$\det(A) \neq 0.$$

(II) O sistema (S) é **Possível e Indeterminado** se:

$$\begin{cases} a) \det(A) = 0 \\ b) \det(A_{x_1}) = \det(A_{x_2}) = \dots = \det(A_{x_n}) = 0. \end{cases},$$

(III) O sistema (S) é **Impossível** se :

$$\begin{cases} a) \det(A) = 0 \\ b) \text{ Se existe pelo menos um } j \ (1 \leq j \leq n) \text{ tal que } \det(A_{x_j}) \neq 0. \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos, para ilustrar a precedente discussão.



Exemplo 5.5.1

Discutir o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + my = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}.$$

Resolução. Vamos calcular as matrizes associadas ao sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 2 & m \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } A_y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, os valores dos determinantes associados ao sistema são :

$$\det(A) = -3 - m, \det(A_x) = -2 - m \text{ e } \det(A_y) = 1$$

Agora, fazendo $\det(A) = -3 - m = 0$ temos $m = -3$ e fazendo $\det(A_x) = -2 - m = 0$ temos $m = -2$. Logo, deduzimos:

- I) O sistema é possível e determinado se : $m \neq -3$,
- II) Não existe m para que o sistema seja possível e indeterminado, pois $\det(A_y) = 1$, para qualquer valor de m .
- III) O sistema (S) é impossível para $m = -3$.



Exemplo 5.5.2

Determinar m de modo que o sistema :

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + my + z = 0 \\ -x + y - z = 4 \end{cases}$$

seja incompatível.

Resolução. Vamos calcular as matrizes associadas ao sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } A_z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & m & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim, os valores dos determinantes associados ao sistema são:

$$\det(A) = -m - 1, \det(A_x) = -2m - 6, \det(A_y) = -4 \text{ e } \det(A_z) = 6m + 6.$$

Fazendo: $\det(A) = -m - 1 = 0$ temos, $m = -1$. Para $m = -1$, temos $\det(A_x) = -4$, $\det(A_y) = -4$ e $\det(A_z) = 0$.

Logo, o sistema (S) é impossível para $m = -1$.

Exemplo 5.5.3

Verificar se o sistema a seguir é determinado ou indeterminado:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}.$$

Resolução. Vamos calcular as matrizes associadas ao sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_x = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A_y = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, os valores dos determinantes associados ao sistema são :

$$\det(A) = 5, \det(A_x) = 0 \text{ e } \det(A_y) = 0.$$

Como $\det(A) = 5 \neq 0$ o sistema é determinado, e sua solução é dada por:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = 0 \text{ e } y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = 0.$$

Logo, temos $S = \{(0, 0)\}$.

Observação: Todo sistema homogêneo é sempre possível, pois admite a solução $(0, 0, \dots, 0)$ chamada solução trivial.

Observe que para um sistema homogêneo teremos sempre:

$$\det(A_{x_1}) = \dots = \det(A_{x_n}) = 0.$$

Portanto, para a discussão de um sistema linear homogêneo, é suficiente o estudo do determinante dos coeficientes das incógnitas. Logo temos:

- (I) um sistema linear homogêneo é determinado se, e somente se, $\det(A) \neq 0$,
- (II) um sistema linear homogêneo é indeterminado se, e somente se, $\det(A) = 0$.

Exemplo 5.5.4

Calcular o valor do número real a para que o sistema:

$$(S) \begin{cases} ax + y = 0 \\ ax + ay = 0 \end{cases},$$

tenha soluções diferentes da trivial.

Resolução. Neste caso, o sistema deve ser indeterminado, e teremos $\det(A) = 0$.

Como $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & a \end{bmatrix}$, temos que $\det(A) = a^2 - a = a(a - 1)$. Assim, $\det(A) = a(a - 1) = 0$

implica que $a = 0$ ou $a = 1$.

Conclusão: O sistema linear (S) possui soluções diferentes da solução trivial para $a = 0$ ou $a = 1$.

5.6 Exercícios resolvidos

5.6.1 Determinantes de matrizes



Exercício 5.6.1

Calcular o determinante das matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O que podemos observar ?

Solução. Aqui aplicamos a expressão $\det(A) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Assim, temos:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8, \det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -12 - (-4) = -8 \text{ e}$$

$$\det(B_1) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-4) = 8, \det(B_2) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8.$$

Podemos observar que: $\det(A_1) = \det(B_1) = 8$ e $\det(A_2) = \det(B_2) = -8$.



Exercício 5.6.2

Calcular o determinante das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução. Aqui aplicamos a regra do determinante:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix};$$

ou de forma equivalente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Assim, temos:

$$\det(A) = -1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -25.$$

De maneira semelhante temos:

$$\det(B) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 21.$$

Exercício 5.6.3

Calcular os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \text{ e } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -6 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Solução. Usando o método do Exercício 2, temos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -(-14) - 2 \times 0 + 3 \times (-7) = -7$$

e

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 5 & -6 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \times (-14) - 2 \times 0 + 3 \times 7 = 7.$$

Exercício 5.6.4

Mostre, utilizando as propriedades de determinantes, as seguintes igualdades:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0, \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} a & d & d \\ b & e & e \\ c & f & f \end{vmatrix} = 0.$$

Solução. Podemos usar as propriedades :

- Se uma matriz quadrada M tem duas colunas iguais, então seu determinante é nulo.
- Se uma matriz quadrada M tem duas linhas iguais, então seu determinante é nulo.

1. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{bmatrix}$ a segunda linha e terceira linha são iguais, então:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

2. Para a matriz $A = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ a primeira coluna e terceira coluna são iguais, então:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Outro Método: Com o cálculo usual do determinante de ordem 3 em relação a uma linha ou coluna, obtemos o mesmo resultado. Por exemplo, temos:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ d & e & f \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ e & f \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ d & f \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Exercício 5.6.5

| Seja A uma matriz de ordem n . Mostre que se $A^3 = \Theta_{n \times n}$, então $\det(A) = 0$.

Solução. Se $A^3 = \Theta_{n \times n}$ então temos $\det(A^3) = \det(\Theta_{n \times n}) = 0$. Vamos usar a propriedade:

$$\det(A.B) = \det(A)\det(B),$$

Para $B = A^2$ deduzimos que:

$$\det(A^3) = \det(A.B) = \det(A)\det(B),$$

ou seja $\det(A^3) = \det(A.B) = \det(A)\det(A^2)$. Como $\det(A^2) = \det(A.A) = \det(A)\det(A) = \det(A)^2$, obtemos:

$$\det(A^3) = \det(A)\det(A)^2 = \det(A)^3 = 0.$$

Logo, temos: $\det(A) = 0$.

Generalização. Seja uma matriz quadrada, então para todo $k \geq 0$ temos $\det(A^k) = \det(A)^k$. Assim, se para $k \geq 1$, temos $\det(A^k) = 0$, então temos: $\det(A)^k = 0$.

Exercício 5.6.6

Seja A uma matriz tal que $\det(A) = |A| = 2$, determine os determinantes das matrizes $3A$, A^2 e A^{-1} , isto é,

$$\det(3A) = |3A|, \det(A^2) = |A^2| \text{ e } \det(A^{-1}) = |A^{-1}|$$

Solução. 1) Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \times n$ e $I_{n \times n}$ a matriz identidade de ordem $n \times n$. Temos:

$$\det(3A) = |3A| = \det(3I_{n \times n} \cdot A) = \det(3I_{n \times n}) \det(A).$$

Como $3I_{n \times n} = \text{diag}(3, 3, \dots, 3)$ é uma matriz diagonal, então temos $\det(3I_{n \times n}) = 3^n$. Logo, temos:

$$\det(3A) = |3A| = 3^n \det(A) = 2 \times 3^n.$$

2) Como $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$ temos $\det(A^2) = \det(A \cdot A) = \det(A) \det(A)$. Logo, temos:

$$\det(A^2) = \det(A)^2 = 2^2 = 4.$$

3) Como $A \cdot A^{-1} = I_{n \times n}$ ($I_{n \times n}$ é a matriz identidade) e $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$, temos $\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_{n \times n})$. Logo, obtemos $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_{n \times n}) = 1$, assim, deduzimos:

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{2}.$$

Observação. Nesta demonstração, usamos as seguintes propriedades:

1. $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$, onde A, B são duas matrizes quadradas de ordem $n \times n$.
2. O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exercício 5.6.7

Sejam as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determine x tal que $\det(A) = |A| = 0$, isto é, resolva a equação $\det(A) = |A| = 0$.
2. Determine x tal que $\det(B) = |B| = 0$, isto é, resolva a equação $\det(B) = |B| = 0$.

Solução. Em ambos os casos utilizamos a regra usada nos Exercícios 2 e 3, para calcular o determinante de ordem 3, isto é,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

1) Para a matriz A obtemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x + 2 = 2(x + 1).$$

Logo, temos $\det(A) = |A| = 0$ se, e somente se, $x + 1 = 0$ ou seja, $x = -1$.

2) Para a matriz B temos:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2x^2 - 12 + 9x - (18 - 3x^2 + 4x) = 5x^2 + 5x - 30.$$

Assim, temos $\det(B) = |B| = 0$ se, e somente se, $5x^2 + 5x - 30 = 0$. Logo, temos $\det(B) = |B| = 0$ se, e somente se, $x = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2} = -3$ ou $x = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2} = 2$.

Exercício 5.6.8

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{bmatrix}.$$

Determine k para o qual a matriz A é invertível.

Solução. Utilizemos a regra considerada nos Exercícios anteriores, para calcular o determinante de A , obtemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 5 + 9k + 10 + 5k - 27 = 14k + 42.$$

Assim, temos $\det(A) = |A| = 0$ se, e somente se, $14k + 42 = 0$. Logo, temos $\det(A) = |A| = 0$ se, e somente se, $k = -3$. Portanto, a matriz A é invertível para todo número real $k \neq -3$.

Exercício 5.6.9

Seja λ um escalar real e considere as seguintes matrizes reais:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Determine os valores λ para os quais a matriz $\lambda I_{2 \times 2} - A$ seja não invertível.
2. Determine os valores λ para os quais a matriz $\lambda I_{3 \times 3} - B$ seja não invertível.

Solução. 1) Para a matriz A temos:

$$\det(\lambda I_{2 \times 2} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3.$$

Assim, a matriz $\lambda I_{2 \times 2} - A$ não é invertível se, e somente se, $\det(\lambda I_{2 \times 2} - A) = \lambda^2 - 3 = 0$. Assim, temos $\lambda = \sqrt{3}$ ou $\lambda = -\sqrt{3}$.

Conclusão. A matriz $\lambda I_{2 \times 2} - A$ é invertível se, e somente se, $\lambda = \sqrt{3}$ ou $\lambda = -\sqrt{3}$.

2) Para a matriz B temos:

$$\det(\lambda I_{3 \times 3} - B) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Logo, temos,

$$\det(\lambda I_{3 \times 3} - B) = -\lambda(\lambda^2 - 1) + (\lambda - 1) - (1 - \lambda) = \lambda(\lambda^2 - 1) + 2(\lambda - 1).$$

ou seja,

$$\det(\lambda I_{3 \times 3} - B) = (\lambda - 1)[- \lambda(\lambda + 1) + 2] = (\lambda - 1)[- \lambda^2 - \lambda + 2].$$

$$\det(\lambda I_{3 \times 3} - B) = 0 \text{ equivale } (\lambda - 1)[- \lambda^2 - \lambda + 2] = 0.$$

Então, temos $\lambda - 1 = 0$ ou $-\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ logo, temos $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$.

Conclusão. A matriz $\lambda I_{3 \times 3} - A$ não é invertível se, e somente se, $\det(\lambda I_{3 \times 3} - B) = 0$.

Assim, temos $\lambda = 1$ ou $\lambda = -2$.

Exercício 5.6.10

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mostre que a matriz A é invertível qualquer que seja o escalar θ .

Solução. Usando a última linha, o determinante de A é dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} \sin(\theta) & 0 \\ \cos(\theta) & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}.$$

Logo, obtemos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Logo, dado que $\det(A) = 1 \neq 0$, assim a matriz A é inversível para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

5.6.2 Determinantes e resolução de sistemas lineares



Exercício 5.6.11

Solucione os sistemas a seguir, utilizando a regra de Cramer.

$$(S_1): \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}, (S_2): \begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 3y = 9 \end{cases}.$$

Solução. 1) Seja A a matriz associada ao sistema (S_1) . Temos:

Eta 1. Temos $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7$.

Eta 2- Temos

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -7 \text{ e } \det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -14.$$

Eta 3. A solução do sistema de Cramer (S_1) :

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-7}{-7} = 1 \quad \text{e} \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-14}{-7} = 2.$$

Conclusão: O conjunto solução do sistema de Cramer (S_1) é: $S = \{(1, 2)\}$.

2) Seja B a matriz associada ao sistema (S_2) . Temos:

Eta 1. Temos $\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13$.

Eta 2- Temos:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 39 \text{ e } \det(A_y) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 26.$$

3- Etapa 3. A solução do sistema de Cramer (S_1):

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{39}{13} = 3 \text{ e } y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{26}{13} = 2.$$

Conclusão: O conjunto solução do sistema de Cramer (S_1) é: $S = \{(3, 2)\}$.



Exercício 5.6.12

Calcule os valores de x , y e z nos sistemas:

$$(S_1): \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = 3 \end{cases} \quad \text{e } (S_2): \begin{cases} x + y - 10 = 0 \\ x - z - 5 = 0 \\ y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Respostas: $S_1 = \{(1, 2, 3)\}$ e $S_2 = \{(6, 4, 1)\}$.

Solução.

1) Seja A a matriz associada ao sistema (S_1). Temos:

$$\text{Etapa 1. Temos } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 10.$$

Etapa 2- Temos:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 9 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 10 \quad \det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 20 \text{ e } \det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 30.$$

Etapa 3. A solução do sistema de Cramer (S_1):

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{10}{10} = 1, y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{20}{10} = 2 \text{ e } z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{30}{10} = 3.$$

Conclusão: O conjunto solução do sistema de Cramer (S_1) é: $S = \{(1, 2, 3)\}$.

2) O sistema (S_2) equivale a:

$$(S_2): \begin{cases} x + y = 10 \\ x - z = 5 \\ y - z = 3 \end{cases}.$$

Seja A a matriz associada a (S_2), então temos $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2$. Por outro lado,

temos:

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 12 \quad \det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 8 \quad \text{e} \quad \det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

Assim, a solução do sistema de Cramer (S_1):

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{12}{2} = 6, y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{e} \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{2}{2} = 1.$$

Conclusão: O conjunto solução do sistema de Cramer (S_1) é: $S = \{(6, 4, 1)\}$.

Exercício 5.6.13

Resolva as seguintes equações matriciais:

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad (2) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Respostas: $S_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $S_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solução. Como uma equação matricial $AX = B$ equivale a um sistema linear, usaremos o método do determinante para resolvê-la.

1) Temos: $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7$ e

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -13 & -3 \end{vmatrix} = -14 \quad \text{e} \quad \det(A_y) = \begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 1 & -13 \end{vmatrix} = -35.$$

Assim, deduzimos:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{-14}{-7} = 2 \quad \text{e} \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{-35}{-7} = 5.$$

Conclusão: O conjunto solução da equação matricial $AX = B$ é: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$.

Observação Podemos também usar o método baseada sobre a matriz inversa.

2) Temos $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 28$ e

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 28 \quad \det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 5 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 56 \quad \text{e} \quad \det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -28.$$

Assim, deduzimos:

$$x = \frac{\det(A_x)}{\det(A)} = \frac{28}{28} = 1, \quad y = \frac{\det(A_y)}{\det(A)} = \frac{56}{28} = 2 \quad \text{e} \quad z = \frac{\det(A_z)}{\det(A)} = \frac{-28}{28} = -1.$$

Conclusão: O conjunto solução da equação matricial $AX = B$ é $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

5.7 Exercícios para praticar

Exercício 5.7.1

Classifique, quanto ao número de soluções, os seguintes sistemas homogêneos:

$$(S_1) \begin{cases} 3x - 4y = 0 \\ -6x + 8y = 0 \end{cases}, \quad (S_2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}, \quad (S_3) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \\ x + 4y = 0 \end{cases}.$$

Exercício 5.7.2

Determine a e b para que o sistema linear $\begin{cases} 6x + ay = 12 \\ 4x + 4y = b \end{cases}$, seja indeterminado.

Exercício 5.7.3

Calcule os valores de a para que o sistema linear $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ ax - 4y = 0 \end{cases}$, seja compatível e determinado.

Exercício 5.7.4

Dê o valor de a para que o sistema linear:
$$\begin{cases} ax + y + 2 = 0 \\ 2x - y + z - a = 0 \\ 4x + y + az + 5 = 0 \end{cases}$$
, seja impossível.

**

Exercício 5.7.5

Determine o valor de k para que o sistema linear:
$$\begin{cases} 3z - 4y = 1 \\ 4x - 2z = 2 \\ 2y - 3x = 3 - k \end{cases}$$
, seja indeterminado

Exercício 5.7.6

Ache m para que o sistema linear
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + 4y - 5z = 0 \\ 3x + my + 2z = 0 \end{cases}$$
, tenha soluções próprias.

Exercício 5.7.7

Qual o valor de p para que o sistema linear
$$\begin{cases} px + y - z = 4 \\ x + py + z = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
, admita uma solução única?

Exercício 5.7.8

(Fuvest-SP) Para quais valores de k o sistema linear :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ y - 3z = -2 \end{cases}$$

é compatível e determinado?

CAPÍTULO 6

ESPAÇOS VETORIAIS



Objetivos

Este capítulo é dedicado à introdução do conceito de espaço vetorial, que é um objeto importante da matemática. Apresentamos alguns exemplos básicos e propriedades gerais.

6.1 Exemplos Básicos

No Capítulo 1, já vimos que o conjunto dos números complexos um exemplo de espaço vetorial real. Nos Capítulos 2 e 3 vimos que o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$, equipado com a adição (+) e a multiplicação por um escalar, é um exemplo de espaço vetorial. Esses exemplos se enquadram no conceito de espaço vetorial, que serão revistos neste capítulo, como exemplos básicos.

6.1.1 Estrutura de espaço vetorial do conjunto $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Lembre-se que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é composto por números da seguinte forma $z = a + bi$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1$. Isto é,

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad i^2 = -1.$$

As operações de adição e de multiplicação dos números reais se estendem aos números complexos. Vamos reformular essas duas operações para chegar ao conceito de espaço vetorial real.

I- Propriedades da adição em $\mathbb{C}$. A adição em $\mathbb{R}$ se estende a $\mathbb{C}$, e pode ser considerada como uma aplicação da seguinte forma:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

tais que:

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

para todo $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, onde a_1, a_2, b_1 , e b_2 estão em $\mathbb{R}$. Sejam z, z_1, z_2 e z_3 quatro números em $\mathbb{C}$. A operação de adição satisfaz as 4 propriedades a seguir:

- a) *Comutatividade*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;
- b) *Associatividade*: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$;
- c) *Elemento neutro*: O zero 0. Verifique que $z + 0 = z$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$;
- d) *Elemento oposto*: Todo $z \in \mathbb{C}$ tem um elemento oposto $-z$, tal que $z + (-z) = 0$.

II- Propriedades da multiplicação dos números complexos por números reais. A multiplicação dos números complexos por números reais, pode ser considerada com uma aplicação da seguinte forma:

$$\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

tais que:

$$(\alpha, z) \mapsto \alpha \cdot z = \alpha \cdot a + \alpha \cdot bi,$$

para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam z, z_1, z_2 números em $\mathbb{C}$ e α, β dois números em $\mathbb{R}$. A operação de multiplicação dos números complexos com os números reais satisfaz as 4 propriedades a seguir:

- a) $(\alpha \beta) \cdot z = \alpha(\beta z)$;
- b) $(\alpha + \beta) \cdot z = \alpha \cdot z + \beta \cdot z$;
- c) $\alpha \cdot (z_1 + z_2) = \alpha \cdot z_1 + \alpha \cdot z_2$;
- d) $1 \cdot z = z$.

Em conclusão, com as 8 propriedades acima, dizemos que o conjunto dos números complexo $\mathbb{C}$, munido com a adição e a multiplicação por um número real, é um **Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$** .

6.1.2

Estrutura de espaço vetorial do conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

Seja $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ com elementos reais. A adição das matrizes de ordem $m \times n$, pode ser considerada como uma aplicação da seguinte forma:

$$\oplus : M_{m \times n}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

tais que:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \mapsto \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

para todas matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Sejam as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Sabemos que a operação de adição das matrizes de mesma ordem satisfaz as seguintes 4 propriedades:

- a) *Comutatividade*: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
- b) *Associatividade*: $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;
- c) *Elemento neutro*: A matriz nula $\mathbf{0}_{m \times n}$. Verifique que $\mathbf{A} + \mathbf{0}_{m \times n} = \mathbf{A}$;
- d) *Matriz oposta*: Toda matriz $\mathbf{A}$ tem uma matriz oposta $-\mathbf{A}$, tal que $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}_{m \times n}$.

II- Propriedades da multiplicação das matrizes de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ por um escalar real. A multiplicação das matrizes por um escalar real, pode ser considerada com uma aplicação da seguinte forma:

$$\bullet : \mathbb{R} \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

tais que:

$$(\alpha, \mathbf{A}) \mapsto \alpha \cdot \mathbf{A},$$

para toda matriz $\mathbf{A}$ em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e todo número real α . Sejam as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ em $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e α , β dois números em $\mathbb{R}$. Sabemos que a operação de multiplicação das matrizes de mesma ordem por números reais satisfaz as seguintes 4 propriedades :

- a) $(\alpha \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha(\beta \mathbf{A})$;
- b) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{A}$;
- c) $\alpha \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \alpha \cdot \mathbf{B}$;
- d) $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Em conclusão, podemos observar que as quatro propriedades a), b), c) e d) da adição de matrizes, e as quatro propriedades a), b), c) e d) e da multiplicação por um escalar real, são as mesmas que as satisfeitas por números complexos. Também dizemos que o conjunto $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem $m \times n$ com elementos reais, munido com a adição e multiplicação por um número real, é um **Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$** .

6.1.3 Estrutura de espaço vetorial do conjunto $\mathbf{V}$ dos vetores da geometria.

O que veremos agora, é um exemplo bem conhecido, o conjunto de vetores da geometria do plano ou do espaço, cuja estrutura é ligada ao conceito de espaço vetorial.

Seja $\vec{V}$ o conjunto dos vetores da geometria definidos por meio de segmentos orientados. A adição dos vetores da geometria definidos por meio de segmentos orientados, pode ser vista como uma aplicação da seguinte forma:

$$\oplus : \vec{V} \times \vec{V} \rightarrow \vec{V}$$

tais que: $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$, para todos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ em $\vec{V}$. Sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ em $\vec{V}$. Sabemos que a operação de adição dos vetores satisfaz as seguintes 4 propriedades:

- a) *Comutatividade*: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
b) *Associatividade*: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$;
c) *Elemento neutro*: O vetor nulo $\vec{0}$. Verifique que $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$;
d) *Vetor oposto*: Todo vetor $\vec{u}$ tem um vetor oposto $-\vec{u}$, tal que $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

II- Propriedades da multiplicação dos vetores por um escalar real. A multiplicação dos vetores por um escalar real, pode ser vista como uma aplicação da seguinte forma:

$$\bullet : \mathbb{R} \times \vec{V} \rightarrow \vec{V},$$

tais que: $(\alpha, \vec{u}) \mapsto \alpha \cdot \vec{u}$, para todo vetor $\vec{u}$ e todo número real α . Sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ em $\vec{V}$ e α, β dois números em $\mathbb{R}$. Sabemos que a operação de multiplicação dos vetores por números reais satisfaz as seguintes 4 propriedades :

- a) $(\alpha\beta) \cdot \vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$;
b) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{u}$;
c) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$;
d) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Em conclusão, podemos observar que as quatro propriedades a), b), c) e d) da adição dos vetores, e as quatro propriedades a), b), c) e d) e da multiplicação de vetores por um escalar real, são as mesmas que as satisfeitas por números complexos e por matrizes. Também dizemos que o conjunto $\vec{V}$ dos vetores da geometria definidos por meio de segmentos orientados, munido com a adição e multiplicação por um número real, é um **Espaço Vetorial sobre $\mathbb{R}$** .

6.2 O que observamos?

Nos 3 exemplos anteriores vimos que:

- Existem 4 propriedades comuns para adição (ou soma) definidas para cada um desses conjuntos.
- Existem 4 propriedades comuns para multiplicação por um escalar real.

Essas 8 propriedades também são verificadas por outros conjuntos matemáticos nos quais uma adição e uma multiplicação por um escalar real são definidas. A ideia é que vários conjuntos mais abstratos possuem a estrutura parecida com a dos conjuntos $\mathbb{C}$, $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $\vec{V}$, considerados anteriormente. Daí a necessidade de estudar uma abordagem que permite que façamos uma análise matemática comum para todos estes conjuntos.

6.3 Espaços Vetoriais

A vantagem de se estudar os espaços vetoriais de forma teórica, é que estaremos estudando propriedades e leis que são válidas em qualquer espaço vetorial, em particular nos exemplos que acabamos de destacar. Ou seja, veremos o que existe de

comum entre conjuntos de matrizes, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ e o conjunto dos vetores do plano $\mathbb{V}$. Vamos apresentar neste parágrafo:

1. Uma definição geral de um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$;
2. O estudo de algumas propriedades gerais de um espaço vetorial.

6.3.1 Espaços Vetoriais: Definição Geral.

Um **espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$** (sobre o conjunto $\mathbb{R}$ de escalares) é um conjunto $\mathbb{V}$ (não vazio) munido com as operações de adição (ou soma) e de multiplicação por um escalar, e que satisfazem as 8 propriedades a seguir:

I- Adição (ou soma): Esta definida uma adição $\oplus : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $(u, v) \mapsto u + v$, onde $u + v$ é único, que satisfaz:

- a) Comutatividade: $u + v = v + u$, para quaisquer $u, v \in \mathbb{V}$;
- b) Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{V}$;
- c) Elemento neutro: existe o vetor $0 \in \mathbb{V}$ que satisfaz $v + 0 = 0 + v = v$, para qualquer $v \in \mathbb{V}$;
- d) Oposto aditivo: para cada $v \in \mathbb{V}$, existe o oposto $u = -v \in \mathbb{V}$, que satisfaz $v + u = 0$.

II- A multiplicação por escalar: Esta definida uma multiplicação $\bullet : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ tal que $(\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v$, onde $w = \alpha \cdot u$ é único, que satisfaz:

- a) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e qualquer $u \in \mathbb{V}$ (Chamada de Associatividade da multiplicação por escalar);
- b) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer $u, v \in \mathbb{V}$ (chamada de distributiva de um escalar em relação a adição em $\mathbb{V}$);
- c) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e qualquer $v \in \mathbb{V}$ (Chamada de distributiva da soma de escalares em relação a um elemento de $\mathbb{V}$).
- d) Vale que $1 \cdot v = v$, ou seja, a multiplicação pela unidade dos números reais não altera os vetores de $\mathbb{V}$.

Um espaço vetorial pode ser definido da mesma maneira sobre o conjunto dos números complexos. Basta substituir os escalares reais por escalares complexos, na definição anterior. Entretanto, aqui trabalharemos apenas em espaços vetoriais em $\mathbb{R}$. No entanto, podemos dizer que a maioria das propriedades estabelecidas para o caso real permanece verdadeira no caso de espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$.

Em vários livros didáticos, os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*, os números reais são chamados de *escalares* e elemento neutro da adição é chamado de *vetor nulo*. Isto é, em geral os elementos de um espaço vetorial são chamados de *vetores*. O elemento neutro da soma é chamado vetor nulo, e denotado por $\mathbf{0}$ ou $\vec{0}$. Note que, segundo essa convenção, vetores podem ser números

complexos, matrizes, ênuplas etc, e o símbolo $\mathbf{0}$ será usado também para matrizes nulas, ênuplas de zeros, etc.

6.3.2 Outro exemplo básico: o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$

Seja o conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x, y \in \mathbb{R}\}$ e definimos a adição e a multiplicação por um escalar real assim:

$$\begin{aligned}(x, y) + (z, t) &= (x + z, y + t), \\ \alpha \cdot (x, y) &= (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y).\end{aligned}$$

Usando as propriedades de comutatividade e associatividade de adição em $\mathbb{R}$, podemos verificar as propriedades relativas à adição em $\mathbb{R}^2$:

- a) Comutatividade: $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t) = (z + x, t + y) = (z, t) + (x, y)$;
- b) Associatividade: $((x, y) + (z, t)) + (v, w) = (x + z, y + t) + (v, w) = ((x + z) + v, (y + t) + w) = (x + (z + v), y + (t + w))$, assim temos $((x, y) + (z, t)) + (v, w) = (x, y) + ((z, t) + (v, w))$;
- c) Elemento neutro: o elemento $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ verifique $(x, y) + (0, 0) = (x, y)$, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
- d) Oposto aditivo: para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, elemento $(-x, -y) \in \mathbb{R}^2$, satisfaz $(x, y) + (-x, -y) = (x - x, y - y) = (0, 0)$.

Usando as propriedades de comutatividade, associatividade e de distributividade de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, podemos verificar as propriedades relativos à multiplicação com um escalar em $\mathbb{R}$, isto é, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$, temos:

- a) $\alpha \cdot (\beta \cdot (x, y)) = \alpha \cdot (\beta \cdot x, \beta \cdot y) = (\alpha \cdot (\beta \cdot x), \alpha \cdot (\beta \cdot y))$, assim com a associatividade em $\mathbb{R}$ temos $\alpha \cdot (\beta \cdot (x, y)) = ((\alpha \cdot \beta) \cdot x, (\alpha \cdot \beta) \cdot y)$, e com a definição da multiplicação em $\mathbb{R}^2$ temos: $\alpha \cdot (\beta \cdot (x, y)) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x, y)$.
- b) $\alpha \cdot ((x, y) + (z, t)) = \alpha \cdot (x + z, y + t) = (\alpha \cdot (x + z), \alpha \cdot (y + t))$. Com a distributividade e a definição da multiplicação por um escalar temos:

$$\alpha \cdot ((x, y) + (z, t)) = \alpha \cdot (x, y) + \alpha \cdot (z, t).$$

- c) $(\alpha + \beta) \cdot (x, y) = ((\alpha + \beta) \cdot x, (\alpha + \beta) \cdot y) = (\alpha \cdot x + \beta \cdot x, \alpha \cdot y + \beta \cdot y)$, logo $(\alpha + \beta) \cdot (x, y) = \alpha \cdot (x, y) + \beta \cdot (x, y)$;
- d) Temos: $1 \cdot (x, y) = (1 \cdot x, 1 \cdot y) = (x, y)$.

Como as 8 condições de espaço vetorial são verificadas em $\mathbb{R}^2$, nós concluímos que $\mathbb{R}^2$ munido com as precedentes operações de adição e de multiplicação por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Este exemplo mostra que a verificação das 8 condições de um espaço vetorial real é longa e requer paciência com os cálculos subjacentes à verificação dessas condições. No próximo parágrafo, estudaremos o conceito de subespaço vetorial, que reduzirá a verificação dessas 8 condições.

Aqui temos outros exemplos para aplicar o mesmo raciocínio.

Exemplo da aplicação. Seja o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e definimos a adição e a multiplicação por um número real assim:

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (u, v, w) &= (x + u, y + v, z + w), \\ \alpha \cdot (x, y, z) &= (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z).\end{aligned}$$

Verifique que o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ munido com estas operações de adição e de multiplicação por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo da aplicação. Seja o conjunto das matrizes:

$$D = \{\mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\},$$

munido com operações de adição e de multiplicação por um escalar das matrizes, isto é,

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix} \text{ e } \alpha \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a & 0 \\ 0 & \alpha \cdot b \end{bmatrix}.$$

Assim, verifica que o conjunto D equipado com a adição e a multiplicação por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo da aplicação. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de um intervalo I em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{F}(I; \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ função}\}.$$

Certificar que o conjunto $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações:

O1) **Adição das funções:** Dadas duas funções f e g , a função $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

O2) **Multiplicação das funções por um escalar:** Dada uma função f e um número real k , a função $k \cdot f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x).$$

Exemplo da aplicação. Seja $\mathcal{P}_1$ o conjunto de todas as funções polinomiais de grau 1 de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{P}_1 = \{P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } P(x) = ax + b, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Provar que o conjunto $\mathcal{P}_1$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações:

O1) **Adição das funções:** Dadas duas funções polinomiais P e Q de $\mathcal{P}_1$ é definida por

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

O2) **Multiplicação das funções por um escalar:** Dada uma função polinomial P de grau 1 e um número real k , a função polinomial $k \cdot P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(k \cdot P)(x) = k \cdot P(x).$$

6.3.3 Primeiras Propriedades Elementares

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Daremos a seguir algumas propriedades que são consequências das 8 condições da definição de espaço vetorial. Sejam u, v dois elementos (ou vetores) de $\mathbb{V}$, e a diferença desses vetores é definida por:

$$u - v = u + (-v).$$

Observamos que esta definição é semelhante a diferença de dois reais α e β , isto é, $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$.

Proposição 6.3.1

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam u, v elementos de $\mathbb{V}$ e α, β dois reais. Temos as seguintes propriedades:

P1) Seja $\mathbf{O}$ o elemento nulo de $\mathbb{V}$, então $\alpha \cdot \mathbf{O} = \mathbf{O}$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

P2) $0 \cdot u = \mathbf{O}$, para todo $u \in \mathbb{V}$.

P3) Se $\alpha \cdot u = \mathbf{O}$, então $\alpha = 0$ ou $u = \mathbf{O}$.

P4) $(-\alpha) \cdot u = \alpha \cdot (-u) = -(\alpha \cdot u)$, para todo $u \in \mathbb{V}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

P5) $(\alpha - \beta) \cdot u = \alpha \cdot u - \beta \cdot u$,

P6) $\alpha \cdot (u - v) = \alpha \cdot u - \alpha \cdot v$.

Podemos provar essas propriedades devido às 8 condições da definição de espaço vetorial. Vamos provar algumas delas, as outras ficarão como exercício.

Propriedade P1): Usando as condições II-c e I-c da definição de espaço vetorial temos:

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0},$$

assim, retirando $-\alpha \cdot \mathbf{0}$ de ambos os lados, temos

$$\mathbf{0} = -\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} = -\alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}.$$

Então, temos $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Propriedade P2): A prova é semelhante à prova da Propriedade P1).

Propriedade P3): Se $\alpha \neq 0$, com a propriedade P1) e condições II-a e c, temos:

$$\alpha.u = 0 \text{ implica } \alpha^{-1}(\alpha.u) = \alpha^{-1}.0,$$

como $\alpha^{-1}.0 = 0$ e $\alpha^{-1}(\alpha.u) = (\alpha^{-1}\alpha).u$, então temos:

$$(\alpha^{-1}.\alpha).u = 1.u = 0.$$

Logo, temos $u = 0$.

Propriedade P4): A prova é baseada sobre um raciocínio usando a condição II-b e a Propriedade P2).

Propriedade P5): Usando a condição II-b) e a Propriedade P4), temos:

$$(\alpha - \beta).u = (\alpha + (-\beta)).u = \alpha.u + (-\beta).u = \alpha.u - \beta.u.$$

Propriedade P6): A prova é semelhante à prova da Propriedade P5), isto é,

$$\alpha.(u - v) = \alpha.(u + (-v)) = \alpha.u + \alpha.(-v) = \alpha.u + (-\alpha.v) = \alpha.u - \alpha.v.$$

As propriedades anteriores serão usadas nos próximos capítulos, como nos exercícios, de maneira sistemática, e às vezes automática, até mesmo intuitiva. Como já observamos sobre as dificuldades na verificação das 8 condições de um espaço vetorial real, as precedentes propriedades vão ajudar nos cálculos subjacentes à verificação dessas condições e resolução dos exercícios e problemas.



Exemplo 6.3.2

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e os vetores (elementos) $u = (1, 2)$, $v = (3, 1)$ e $w = (4, 1)$.

1. Calcular $2u + v - 3w$;
2. Resolver a seguinte equação $3u + 2x = v + w$, na incógnita $x \in \mathbb{R}^2$;
3. Sejam os vetores (elementos) u, v . Seja o sistema de equações:

$$\begin{aligned}u + y &= v + z(1) \\ u + 2z &= y(2)\end{aligned}$$

Determine os elementos (vetores) incógnitas $y, z \in \mathbb{R}^2$.

Solução: Para a resolução das perguntas deste exemplo, vamos aplicar as propriedades do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ (ver o Parágrafo 2 precedente) e as propriedades precedentes P1)-P6).

1) Temos:

$$\begin{aligned}2u + v - 3w &= 2(1, 2) + (3, 1) - 3(4, 1) = (2, 4) + (3, 1) - (12, 3) \\&= (2, 4) + (3, 1) + (-12, -3).\end{aligned}$$

Logo obtemos:

$$2u + v - 3w = (2, 4) + (3, 1) + (-12, -3) = (2 + 3 - 12, 4 + 1 - 3) = (-7, 2).$$

Assim, temos $2u + v - 3w = (-7, 2)$.

2) Temos $3u + 2x = v + w$, assim $3u + 2x - 3u = v + w - 3u$, então $2x = v + w - 3u$. Logo temos:

$$x = \frac{1}{2}(-3u + v + w).$$

Usando a mesma computação que na resolução da Pergunta 1), temos;

$$x = \frac{1}{2}(-3u + v + w) = x = \frac{1}{2}((-3, -6) + (3, 1) + (4, 1)) = \frac{1}{2}(4, -4) = (2, -2).$$

Logo, obtemos $x = (2, -2)$.

3) A equação (2) mostra que $y = u + 2z$, usando a equação (1) e o mesmo processo de computação da solução da pergunta 2), observamos que $u + y = v + z$ implica que $u + (u + 2z) = v + z$, ou seja, $2u + 2z = v + z$. Então, temos $2z - z = -2u + v$. Logo, obtemos

$$z = -2u + v.$$

Assim, com a mesma computação que na resolução da Pergunta 1), temos:

$$z = -2u + v = -2(1, 2) + (3, 1) = (-2, -4) + (3, 1) = (1, -3).$$

Assim, deduzimos que:

$$y = u + 2z = (1, 2) + 2(1, -3) = (1, 2) + (2, -6) = (3, -4).$$

Logo, $y = (3, -4)$. Em conclusão, a solução do sistema é dada por:

$$y = (3, -4) \text{ e } z = (1, -3).$$

Ao resolver as questões deste exemplo, aplicamos as condições da definição do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e as propriedades precedentes P1)-P6), podemos aplicar esse método para o próximo exemplo.

Exemplo da aplicação. Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -2)$ e $w = (4, 1, 0)$.

1. Determine o vetor $2u + v - 3w$;
2. Determine $x \in \mathbb{R}^3$ que verifica a equação $3u + 2x = v + w$;

3. Sejam os vetores u, v e seja o sistema de equações:

$$\begin{cases} u + y = v + z \\ v + 2z = y \end{cases}$$

Determine os vetores $y, z \in \mathbb{R}^3$.

6.4 Subespaços Vetoriais

Alguns subconjuntos de um espaço vetorial, podem ser equipados também com uma estrutura de espaço vetorial. Nessa seção apresentamos algumas propriedades e caracterizações desses conjuntos especiais.

6.4.1 Subespaços Vetoriais: definição, caracterização e exemplos



Definição 6.4.1

Consideramos $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{V}$ um subconjunto. Nós dizemos que $\mathbf{W}$ é uma **subespaço vetorial de $\mathbb{V}$** se, além de ser um subconjunto, o conjunto $\mathbf{W}$ é também um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Para estabelecer se um subconjunto $\mathbf{W}$ é subespaço de um espaço vetorial $\mathbb{V}$, não precisamos verificar todas as oito 8 propriedades da definição de espaço vetorial. Isto é, na prática temos a seguinte caracterização:



Proposição 6.4.2

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um subconjunto $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{V}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ se, e somente se, as três condições abaixo são verificadas:

C1) $\mathbf{0} \in \mathbf{W}$;

C2) $u + v \in \mathbf{W}$ para quaisquer $u, v \in \mathbf{W}$.

C3) $\alpha \cdot u \in \mathbf{W}$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e qualquer $u \in \mathbf{W}$.

A condição C1) significa que $\mathbf{W}$ não é um subconjunto vazio de $\mathbb{V}$. No entanto, o elemento neutro $\mathbf{0}$ para a adição no espaço vetorial $\mathbb{V}$ deve necessariamente pertencer a $\mathbf{W}$. Portanto, se um subconjunto de um espaço vetorial não contém $\mathbf{0}$, não pode ser um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

A condição C2) que significa que a adição de $\mathbb{V}$, restrita a $\mathbf{W}$, é uma adição em $\mathbf{W}$, isto é, a restrição de adição em $\mathbb{V}$ a $\mathbf{W}$ é estável. Em outras palavras, a soma de dois elementos de $\mathbf{W}$ é um elemento de $\mathbf{W}$, isto é, $+: \mathbf{W} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$. Assim, as 4 propriedades da adição em $\mathbb{V}$, podem ser verificadas em $\mathbf{W}$.

O significado da condição C3) é que está definida uma multiplicação por um escalar

de $\mathbb{R} \times \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{W}$. Assim, as 4 propriedades da multiplicação por um escalar em $\mathbb{V}$, podem ser verificadas em $\mathbf{W}$.

Conclusão: Com as condições C1), C2) e C3) o subconjunto $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{V}$ é um espaço vetorial real.

A Proposição 6.4.2 é equivalentemente a seguinte proposição,



Proposição 6.4.3

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Um subconjunto $\mathbf{W} \subseteq \mathbb{V}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ se, e somente se, as duas condições abaixo são verificadas:

P1) $\mathbf{0} \in \mathbf{W}$;

P2) $\alpha \cdot u + v \in \mathbf{W}$ para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e quaisquer $u, v \in \mathbf{W}$.

A condição P2) da Proposição 6.4.3 implica as condições C2) e C3) da Proposição 6.4.2. De fato, se $\alpha = 1$ em P2) temos $1 \cdot u + v = u + v \in \mathbf{W}$, que é a condição C2) e se $v = \mathbf{0}$ em P2) deduzimos que $\alpha \cdot u + \mathbf{0} = \alpha \cdot u \in \mathbf{W}$, o que representa a condição C3).



Exemplo 6.4.4

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, cujo elemento neutro da adição é $\mathbf{O}$. Os subespaços impróprios ou triviais:

1. O subconjunto $\{\mathbf{0}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.
2. O subconjunto $\mathbb{V}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Podemos ver que as três condições da Proposição 6.4.2 são trivialmente verificadas.



Exemplo 6.4.5

Seja o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ munido com a adição e a multiplicação por um escalar real usuais, isto é,

$$(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y).$$

Seja $\mathbf{W}$ o subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$\mathbf{W} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\}.$$

Provar que $\mathbf{W}$ é um subespaço vetorial $\mathbb{R}^2$.

Solução: Vamos verificar as três condições C1), C2) e C3) da Proposição 6.4.2.

C1) **A condição C1):** $(0, 0) \in \mathbf{W}$. Se $x=y=0$ temos $2 \times 0 = 0$, então $(0, 0) \in \mathbf{W}$.

C2) A condição C2): Sejam (x, y) e (z, t) dois elementos de $\mathbb{W}$, então temos: $y = 2x$ e $t = 2z$. Assim, temos:

$$(u, v) = (x, y) + (z, t) = (x + z, y + t) = (x + z, 2x + 2t) = (x + z, 2(x + t)).$$

Logo, $(u, v) = (x, y) + (z, t) = (x + z, 2(x + t)) \in \mathbb{W}$, por que $v = 2(x + t) = 2u$.

C3) A condição C3): Sejam $(x, y) \in \mathbb{W}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então temos: $y = 2x$. Assim, temos:

$$(u, v) = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot (2x)) = (\alpha \cdot x, 2\alpha \cdot x).$$

Logo, $(u, v) = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, 2\alpha \cdot x) \in \mathbb{W}$, por que $v = 2\alpha \cdot x = 2u$.

Conclusão: As três condições C1), C2) e C3) são satisfeitas em $\mathbb{W}$, logo o conjunto $\mathbb{W}$ munido com a adição e a multiplicação por um escalar real é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Outro exemplo básico, cujo raciocínio vai ser usado constantemente daqui para frente.

Exemplo 6.4.6

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido com a adição e a multiplicação com um escalar real, isto é,

$$(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$$

Seja $\mathbb{W}$ o subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$\mathbb{W} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y = 0\} = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}.$$

Provar que $\mathbb{W}$ é um subespaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Vamos verificar as três condições C1), C2) e C3) da Proposição 6.4.2.

C1) A condição C1): $(0, 0, 0) \in \mathbb{W}$. Se $x=z=0$ então $(0, 0, 0) \in \mathbb{W}$.

C2) A condição C2): Sejam $u = (x, 0, z)$ e $v = (r, 0, t)$ dois elementos de $\mathbb{W}$, então temos: $u + v = (x, 0, z) + (r, 0, t) = (x + r, 0 + 0, z + t)$. Assim, temos:

Logo, $u + v = (x + r, 0, z + t) \in \mathbb{W}$. Assim, a condição C2) é verificada.

C3) A condição C3): Sejam $u = (x, 0, t) \in \mathbb{W}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então temos: $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x, 0, t) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot t)$. Logo, $\alpha \cdot u = \alpha \cdot (x, 0, t) = (\alpha \cdot x, 0, \alpha \cdot t) \in \mathbb{W}$.

Conclusão: As três condições C1), C2) e C3) são satisfeitas em $\mathbb{W}$, logo o conjunto $\mathbb{W}$, munido com a adição e a multiplicação por um escalar real, do espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Podemos aplicar o mesmo raciocínio feito anteriormente para os três exemplos da aplicação a seguir.

Exemplo da aplicação. Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido com a adição e a multiplicação por um escalar real usuais, isto é,

$$(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$$

Seja W o subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0\}.$$

Provar que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo da aplicação. Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido com a adição e a multiplicação por um escalar real usuais, isto é,

$$(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$$

Seja W o subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\} = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Provar que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo da aplicação. Seja V o espaço vetorial dos vetores geométricos do espaço. Sendo $\vec{u}$ um vetor não nulo fixo desse espaço. Mostrar que o conjunto dos vetores $W = \{\alpha \cdot \vec{u}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V .

Lembre-se que a interseção de dois subconjuntos U e W de V é definida por:

$$U \cap W = \{u \in V \text{ tal que } u \in U \text{ e } u \in W\}.$$

Isto é, o conjunto $U \cap W$ é composto por elementos pertencentes a U e W .



Proposição 6.4.7

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam U e W subespaços vetoriais de V . Provar que a interseção $U \cap W$ de dois subespaços vetoriais U e W é também um subespaço vetorial de V .

Prova. Vamos verificar as três condições C1), C2) e C3) da Proposição 6.4.2.

C1) A condição C1): $0 \in U \cap W$. Como U e W subespaços vetoriais de V , então $0 \in U$ e $0 \in W$. Assim, deduzimos $0 \in U \cap W$.

C2) A condição C2): Sejam u e v dois elementos de $U \cap W$. Logo, os elementos u e v pertencem a U e u e v pertencem a W . Como U e W subespaços vetoriais de V , então $u + v \in U$ e $u + v \in W$. Assim, obtemos: $u + v \in U \cap W$. Logo, a condição C2) é verificada.

C3) A condição C3): Sejam $u \in U \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, o elemento u pertence a U e u pertence a W . Como U e W subespaços vetoriais de V , então $\alpha \cdot u \in U$ e $\alpha \cdot u \in W$. Assim, obtemos: $\alpha \cdot u \in U \cap W$. Logo, a condição C3) é verificada.

Conclusão: As três condições C1), C2) e C3) são satisfeitas em $U \cap W$, logo o conjunto $U \cap W$, munido com a adição e a multiplicação por um escalar real é um subespaço vetorial de V .

□

Exemplo 6.4.8

Seja espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais (como aquelas do Parágrafo 3.2) de adição e de multiplicação por um escalar real. Sejam $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$. Como o mesmo raciocínio do Exemplo 6.4.6, podemos ver que:

- $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$,
- $W = \{(x, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Agora, se $(x, y, z) \in U \cap W$ temos que:

- $(x, y, z) \in U$, assim $z = 0$,
- $(x, y, z) \in W$, assim temos $y = 0$.

Logo, $(x, y, z) = (x, 0, 0) \in U \cap W$. Reciprocamente se $(x, y, z) = (x, 0, 0)$, então $(x, y, z) = (x, 0, 0) \in U$ e $(x, y, z) = (x, 0, 0) \in W$. Logo, $U \cap W = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$. E como o mesmo raciocínio do Exemplo 6.4.6, deduzimos que $U \cap W = \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

6.4.2 Soma de subespaços Vetoriais

A partir dos subespaços vetoriais de um espaço vetorial real V , podemos construir novos subespaços vetoriais. E em seguida temos a decomposição do espaço vetorial real V em termos de subespaços vetoriais, usando o conceito de soma de dois subespaços vetoriais.

Definição 6.4.9

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam U e W dois subespaços vetoriais. Seja o subconjunto $U + W$ de V definido por:

$$U + W = \{u + v \text{ tais que } u \in U \text{ e } v \in W\}.$$

Dizemos que $U + W$ é a soma dos dois subespaços vetoriais U e W .

Uma demonstração semelhante à da Proposição 6.4.7, permite demonstrar a seguinte proposição.



Proposição 6.4.10

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam U e W dois subespaços vetoriais de V . Então, a soma $U+W$ dos dois subespaços vetoriais U e W é também um subespaço vetorial de V .

Prova. Vamos estabelecer as três condições de subespaço vetorial.

A condição C1): Sabemos que $0 \in U$ e $0 \in W$, como $0 + 0 = 0$, então $0 \in U + W$. Assim a condição C1) é satisfeita.

A condição C2): Sejam $u_1, u_2 \in U$ e $v_1, v_2 \in W$. Sejam $w_1 = u_1 + v_1 \in U$ e $w_2 = u_2 + v_2 \in W$, temos $w_1 + w_2 = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)$. Como $u_1 + u_2 \in U + W$ e $v_1 + v_2 \in U + W$ então $w_1 + w_2 \in U + W$. Assim a condição C2) é satisfeita.

A condição C3): Sejam $u \in U$, $v \in W$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam $w = u + v \in U + W$, temos $\alpha.w = \alpha.(u + v) = \alpha.u + \alpha.v$. Como $\alpha.u \in U$ e $\alpha.v \in W$ então $\alpha.w \in U + W$. Assim a condição C3) é satisfeita.

Conclusão: A soma $U+W$ dos dois subespaços vetoriais U e W é também um subespaço vetorial de V .



Definição 6.4.11

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam U e W dois subespaços vetoriais tais que:

$$U \cap W = \{0\}.$$

Neste caso a soma $U + W$ é chamada **soma direta** dos subespaços U e W , e escrevemos essa soma sobre a forma:

$$U \oplus W.$$



Exemplo 6.4.12

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais (como aquelas do Parágrafo 3.2) de adição e de multiplicação por um escalar real. Sejam $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$. Como o mesmo raciocínio do Exemplo 6.4.6, podemos ver que:

- $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$,
- $W = \{(0, 0, z), x, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Agora, se $(x, y, z) \in U \cap W$ temos que:

- $(x, y, z) \in U$, assim $z = 0$,

- $(x, y, z) \in \mathbf{W}$, assim temos $x = y = 0$.

Logo, $(x, y, z) = (0, 0, 0) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Reciprocamente, se $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, então $(x, y, z) = (0, 0, 0) \in \mathbf{U}$ e $(x, y, z) = (0, 0, 0) \in \mathbf{W}$. Então, temos $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{(0, 0, 0)\}$, que é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Logo, a soma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ dos dois subespaços vetoriais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ é direta, isto é,

$$\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}.$$

Exemplo 6.4.13

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais de adição e de multiplicação por um escalar real usuais. Sejam os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$ dados por $\mathbf{U} = \{(x, y, 0, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbf{W} = \{(0, 0, z, t), x, z \in \mathbb{R}\}$. Provar que a soma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ é uma soma direta.

Solução. Sabemos que $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Seja $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, então temos:

1. $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{U}$, assim deduzimos $z = t = 0$,
2. $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{W}$, assim deduzimos $x = y = 0$.

Logo, deduzimos que $x = y = z = t = 0$, ou seja, $u = (0, 0, 0, 0)$. Então, obtemos:

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

Conclusão: A soma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ é uma soma direta, isto é, $\mathbf{U} + \mathbf{W} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$.

Proposição 6.4.14

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ tal que $\mathbb{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$. Se a soma $\mathbb{V} = \mathbf{U} + \mathbf{W}$ é direta, isto é, $\mathbb{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$, então cada $v \in \mathbb{V}$ admite uma única decomposição $v = u + w$, com $u \in \mathbf{U}$ e $w \in \mathbf{W}$.

Prova. Suponho que $\mathbb{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$ e seja $v \in \mathbb{V} = \mathbf{U} \oplus \mathbf{W}$. Então, existem $u \in \mathbf{U}$ e $w \in \mathbf{W}$ tal que: $v = u + w$. Sejam $u' \in \mathbf{U}$ e $w' \in \mathbf{W}$ tal que $v = u' + w'$. Logo, temos:

$$v = u + w = u' + w'.$$

Assim, deduzimos

$$u - u' = w' - w,$$

como $u - u' \in \mathbf{U}$ e $w' - w \in \mathbf{W}$, obtemos:

$$u - u' = w' - w \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{\mathbf{0}\},$$

porque a soma de $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ é direta. Logo, deduzimos $u - u' = w' - w = \mathbf{0}$, assim temos:

$$u = u' \text{ e } w = w'.$$

Conclusão: A decomposição $v = u + w$, com $u \in \mathbf{U}$ e $w \in \mathbf{W}$, é única.

□

6.5 Exercícios Resolvidos



Exercício 6.5.1

Seja o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e definimos a adição e a multiplicação por um número real assim:

$$\begin{aligned}(x, y, z) + (u, v, w) &= (x + u, y + v, z + w), \\ \alpha \cdot (x, y, z) &= (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z).\end{aligned}$$

Verifique que o conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z), x, y, z \in \mathbb{R}\}$ equipado com estas operações de adição e de multiplicação por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Usando as propriedades de comutatividade e associatividade de adição em $\mathbb{R}$, podemos verificar as propriedades relativas à adição em $\mathbb{R}^2$:

- a) Comutatividade: $(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w) = (u + x, v + y, w + z) = (u, v, w) + (x, y, z)$.
- b) Associatividade: $((x, y, z) + (u, v, w)) + (a, b, c) = (x + u, y + v, z + w) + (a, b, c) = ((x + u) + a, (y + v) + b, (z + w) + c)$. Com a associatividade dos números reais temos $(x, y, z) + ((u, v, w) + (a, b, c))$.
- c) Elemento neutro: O elemento $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. Verifique que $(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z)$, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- d) Oposto aditivo: para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, o elemento $(-x, -y, -z) \in \mathbb{R}^3$, satisfaz $(x, y, z) + (-x, -y, -z) = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0)$.

Usando as propriedades de comutatividade, associatividade e de distributividade de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, podemos verificar as propriedades relativos a multiplicação por um escalar em $\mathbb{R}^3$:

- a) Como $\alpha \cdot (\beta \cdot (x, y, z)) = \alpha \cdot (\beta \cdot x, \beta \cdot y, \beta \cdot z) = (\alpha \cdot (\beta \cdot x), \alpha \cdot (\beta \cdot y), \alpha \cdot (\beta \cdot z))$ assim, com a associatividade em $\mathbb{R}$ temos

$$\alpha \cdot (\beta \cdot (x, y, z)) = ((\alpha \cdot \beta) \cdot x, (\alpha \cdot \beta) \cdot y, (\alpha \cdot \beta) \cdot z),$$

e com a definição da multiplicação em $\mathbb{R}^3$ temos: $\alpha \cdot (\beta \cdot (x, y, z)) = (\alpha \cdot \beta) \cdot (x, y, z)$.

- b) $\alpha \cdot ((x, y, z) + (u, v, w)) = \alpha \cdot (x + u, y + v, z + w) = (\alpha \cdot (x + u), \alpha \cdot (y + v), \alpha \cdot (z + w))$. Com a distributividade e a definição da multiplicação por um escalar temos:

$$\alpha \cdot ((x, y, z) + (u, v, w)) = \alpha \cdot (x, y, z) + \alpha \cdot (u, v, w).$$

- c) $(\alpha + \beta) \cdot (x, y, z) = ((\alpha + \beta) \cdot x, (\alpha + \beta) \cdot y, (\alpha + \beta) \cdot z) = (\alpha \cdot x + \beta \cdot x, \alpha \cdot y + \beta \cdot y, \alpha \cdot z + \beta \cdot z)$, logo $(\alpha + \beta) \cdot (x, y, z) = \alpha \cdot (x, y, z) + \beta \cdot (x, y, z)$;
- d) Temos: $1 \cdot (x, y, z) = (1 \cdot x, 1 \cdot y, 1 \cdot z) = (x, y, z)$.

Como as 8 condições de espaço vetorial são verificadas em $\mathbb{R}^3$, nós concluímos que $\mathbb{R}^3$ munido com as precedentes operações de adição e de multiplicação por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 6.5.2

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções de um intervalo I em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{F}(I; \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; \quad \text{funções}\}.$$

Verificar que o conjunto $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações:

- O1) **Adição das funções:** Dadas duas funções f e g , a função $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- O2) **Multiplicação das funções por um escalar:** Dada uma função f e um número real k , a função $k \cdot f : I \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x).$$

Solução.

Usando as propriedades de comutatividade e associatividade de adição em $\mathbb{R}$, podemos verificar as propriedades relativas à adição em $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$:

- a) Comutatividade: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$. Logo, temos: $f + g = g + f$.
- b) Associatividade: $((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x)$, para todo $x \in I$. Com a associatividade dos números reais temos $f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x)$. Logo, temos: $((f + g) + h)(x) = (f + (g + h))(x)$, para todo $x \in I$. Logo, temos: $(f + g) + h = f + (g + h)$.
- c) Elemento neutro: A função nula $\Theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ verifique $(f + \Theta)(x) = f(x) + \Theta(x) = f(x) + 0 = f(x)$, para qualquer $x \in I$. Logo, temos: $f + \Theta = f$.

- d) Oposto aditivo: para cada $f \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$, a função $g = -f \in \mathcal{F}(I; \mathbb{R})$, satisfaz $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - f(x) = \Theta(x) = 0$, para todo $x \in I$. Assim, temos: $f + (-f) = \Theta$.

Usando as propriedades de comutatividade, associatividade e de distributividade de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, podemos verificar as propriedades relativos à multiplicação com um escalar em $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$:

- a) $\alpha \cdot (\beta \cdot f)(x) = \alpha \cdot (\beta \cdot f(x))$, assim com a associatividade em $\mathbb{R}$ temos $\alpha \cdot (\beta \cdot f)(x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot f(x) = ((\alpha \cdot \beta) \cdot f)(x)$, para todo $x \in I$. Logo, temos, $\alpha \cdot (\beta \cdot f) = (\alpha \cdot \beta) \cdot f$.
- b) $\alpha \cdot (f + g)(x) = \alpha \cdot (f(x) + g(x)) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x)$. Com a distributividade e a definição da multiplicação por um escalar temos:

$$\alpha \cdot (f + g)(x) = \alpha \cdot (f(x) + g(x)) = \alpha \cdot f(x) + \alpha \cdot g(x) = (\alpha \cdot f + \alpha \cdot g)(x),$$

para todo $x \in I$. Assim, temos $\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$.

- c) $((\alpha + \beta) \cdot f)(x) = (\alpha + \beta) \cdot f(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x) = (\alpha \cdot f + \beta \cdot f)(x)$, para todo $x \in I$. Logo, temos: $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$.

- d) A função constante $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\alpha(x) = 1$, para todo $x \in I$. Temos: $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha(x) \cdot f(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$, para todo $x \in I$. Logo, temos: $1 \cdot f = f$.

Como as 8 condições de espaço vetorial são verificadas em $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$, nós concluímos que $\mathcal{F}(I; \mathbb{R})$ munido com as precedentes operações de adição e de multiplicação por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 6.5.3

Seja $\mathcal{P}_1$ o conjunto de todas as funções polinomiais de grau 1 de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{P}_1 = \{P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } P(x) = ax + b, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Provar que o conjunto $\mathcal{P}_1$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações:

- O1) **Adição das funções:** Dadas duas funções polinomiais P e Q de $\mathcal{P}_1$ é definida por

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

- O2) **Multiplicação das funções por um escalar:** Dada uma função polinomial P de grau 1 e um número real k , a função polinomial $k \cdot P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(k \cdot P)(x) = k \cdot P(x).$$

Solução. A demonstração é idêntica à do Exercício 6.5.2.

Exercício 6.5.4

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os elementos (vetores) $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 1, -2)$ e $w = (4, 1, 0)$.

1. Determine o vetor $2u + v - 3w$;
2. Determine $x \in \mathbb{R}^3$ que verifica a equação $3u + 2x = v + w$;
3. Sejam os vetores u e v e seja o sistema de equações:

$$\begin{aligned}u + y &= v + z, \\v + 2z &= y.\end{aligned}$$

Determine os elementos (vetores) incógnitos $y, z \in \mathbb{R}^3$.

Solução.

1. Usando as propriedades do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, temos:

$$2u + v - 3w = 2(1, 2, 1) + (3, 1, -2) - 3(4, 1, 0) = (2, 4, 2) + (3, 1, -2) + (-12, -3, 0).$$

Assim, obtemos $2u + v - 3w = (7, 2, 0)$.

2. Seja $x = (a, b, c)$ temos:

$$3u + 2x = v + w \Leftrightarrow 2x = -3u + v + w = -3(1, 2, 1) + (3, 1, -2) + (4, 1, 0).$$

Logo, temos $2x = -3u + v + w = (-3, -6, -3) + (3, 1, -2) + (4, 1, 0) = (4, -4, -5)$. Então, obtemos:

$$x = \frac{1}{2}(4, -4, -5) = (2, -2, -\frac{5}{2}).$$

3. Seja o sistema de equações:

$$\begin{aligned}u + y &= v + z, \\v + 2z &= y.\end{aligned}$$

Substituindo a expressão $y = v + 2z$ dada, pela segunda equação, na primeira equação, obtemos:

$$u + y = v + z \Leftrightarrow u + v + 2z = v + z.$$

Logo, temos: $z = v - (u + v) = -u$. Assim, deduzimos que: $y = v + 2z = v - 2u = v - u$.

Conclusão. A solução do sistema é dada por:

$$y = v - u \text{ e } z = -u.$$

Exercício 6.5.5

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ equipado com a adição e a multiplicação por um escalar real usual, isto é,

$$(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z).$$

Seja W o subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0\}.$$

Provar que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Solução.

Vamos verificar as três condições do subespaço vetorial.

1. Para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ temos:

$$x + y = 0 + 0 = 0.$$

Logo, temos: $(0, 0, 0) \in W$.

2. Sejam (x, y, z) e (r, s, t) em W , então temos $x + y = 0$ e $r + s = 0$. Assim, como $(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t)$, temos:

$$(x + r) + (y + s) = (x + y) + (r + s) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, temos: $(x, y, z) + (r, s, t) \in W$.

3. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e (x, y, z) em W , então temos $x + y = 0$. Assim, como $a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az)$, temos:

$$ax + ay = a(x + y) = a \cdot 0 = 0.$$

Logo, temos: $a \cdot (x, y, z) \in W$.

Conclusão: O subconjunto W do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 6.5.6

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ equipado com a adição e a multiplicação por um escalar real usais, isto é,

$$(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + s, z + t) \quad \text{e} \quad \alpha \cdot (x, y, z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z).$$

Seja W o subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\} = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Provar que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Solução.

Vamos verificar as três condições do subespaço vetorial.

1. Para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ temos $z = 0$. Logo, temos: $(0, 0, 0) \in \mathbf{W}$.
2. Sejam $(x, y, 0)$ e $(r, s, 0)$ em $\mathbf{W}$, então temos:

$$(x, y, 0) + (r, s, 0) = (x + r, y + s, 0)$$

Logo, temos: $(x, y, 0) + (r, s, 0) \in \mathbf{W}$.

3. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $(x, y, 0)$ em $\mathbf{W}$, então

$$a.(x, y, 0) = (ax, ay, a.0) = (x, y, 0)$$

Logo, temos: $a.(x, y, 0) \in \mathbf{W}$.

Conclusão: O subconjunto $\mathbf{W}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

**Exercício 6.5.7**

Seja $\mathbb{V}$ o espaço vetorial dos vetores geométricos do espaço. Sendo $\vec{u}$ um vetor não nulo fixo desse espaço. Mostrar que o conjunto dos vetores $\mathbf{W} = \{\alpha.\vec{u}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Solução.

Vamos verificar as três condições do subespaço vetorial.

1. Para $\alpha = 0$ temos:

$$\alpha.\vec{u} = 0.\vec{u} = \vec{0}.$$

Logo, temos: $\vec{0} \in \mathbf{W}$.

2. Sejam $\alpha.\vec{u}$ e $\beta.\vec{u}$ em $\mathbf{W}$, então temos:

$$\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u} = (\alpha + \beta).\vec{u}$$

Logo, temos: $\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u} \in \mathbf{W}$.

3. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\alpha.\vec{u}$ em $\mathbf{W}$, então

$$a.(\alpha.\vec{u}) = (a.\alpha).\vec{u}.$$

Logo, temos: $a.(\alpha.\vec{u}) = (a.\alpha).\vec{u} \in \mathbf{W}$.

Conclusão: O subconjunto $\mathbf{W}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$, o espaço vetorial dos vetores geométricos do espaço.

Exercício 6.5.8

Verificar em cada caso, se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$:

1. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$.
2. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 2\}$.
3. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = y\}$.
4. $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 2y = 0\}$.

Solução.

1. O subconjunto: $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$; é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Isto é, vamos verificar as três condições do subespaço vetorial.

a) Para $(x, y) = (0, 0)$ temos: $x + y = 0 + 0 = 0$, logo, temos: $(0, 0) \in V$.

b) Sejam (x, y) e (r, s) em V , então temos: $x + y = 0$ e $r + s = 0$. Assim, como $(x, y) + (r, s) = (x + r, y + s)$, temos:

$$(x + r) + (y + s) = (x + y) + (r + s) = 0 + 0 = 0.$$

Logo, temos: $(x, y) + (r, s) \in V$.

c) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e (x, y) em V , então: $x + y = 0$. Assim, como $a \cdot (x, y) = (ax, ay)$, temos:

$$ax + ay = a(x + y) = a \times 0 = 0.$$

Logo, temos: $a \cdot (x, y) \in V$.

Conclusão: O subconjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

2. O subconjunto: $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 2\}$; não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Isto é, o elemento neutro $(0, 0)$ da adição de $\mathbb{R}^2$, verifica:

$$0 + 0 = 0 \neq 2.$$

logo, temos $(0, 0) \notin V$.

Conclusão: O subconjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 2\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

3. O subconjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = y\}$; não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$:

a) O elemento neutro $(0, 0)$ da adição de $\mathbb{R}^2$, verifica: $0^2 = 0$, logo, temos $(0, 0) \in V$.

b) Sejam (x, y) e (r, s) em V , então temos: $x^2 = y$ e $r^2 = s$. Para $(x, y) + (r, s) = (x + r, y + s)$, temos:

$$(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 = y + 2xr + s.$$

Assim, para $(x, y) \neq (0, 0)$ e $(r, s) \neq (0, 0)$, temos:

$$(x + r)^2 = x^2 + 2xr + r^2 = y + 2xr + s \neq y + s.$$

Conclusão: O subconjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = y\}$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

4. O subconjunto: $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 2y = 0\}$; é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Isto é, vamos verificar as três condições do subespaço vetorial.

1. Para $(x, y) = (0, 0)$ temos: $x - 2y = 0 - 0 = 0$, logo, temos: $(0, 0) \in V$.

2. Sejam (x, y) e (r, s) em V , então temos: $x - 2y = 0$ e $r - 2s = 0$. Assim, como $(x, y) + (r, s) = (x + r, y + s)$, temos: $(x + r) - 2(y + s) = (x - 2y) + (r - 2s) = 0 + 0 = 0$. Logo, temos: $(x, y) + (r, s) \in V$.

3. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e (x, y) em V , então: $x - 2y = 0$. Assim, como $a.(x, y) = (ax, ay)$, temos:

$$ax - 2ay = a(x - 2y) = a \times 0 = 0.$$

Logo, temos: $a.(x, y) \in V$.

Conclusão: O subconjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - 2y = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Exercício 6.5.9

Verificar em cada caso, se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

1. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$.

2. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \geq 0\}$.

Solução.

1. O conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ é subconjunto do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

a) O vetor nulo $(0, 0, 0)$ verifica $z = 0$, logo temos: $(0, 0, 0) \in V$.

b) Sejam (x, y, z) e (r, s, t) dois vetores de V , então temos: $z = 0$ e $t = 0$. Assim, obtemos:

$$(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + t, z + t) = (x + r, y + t, 0).$$

Logo, temos $(x, y, z) + (r, s, t) \in V$.

c) Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in V$. Como $z = 0$ temos:

$$a.(x, y, z) = a.(x, y, 0) = (a.x, a.y, 0) \in V.$$

Logo, temos: $a.(x, y, z) = (a.x, a.y, 0) \in V$.

Conclusão: Após as 3 condições serem verificadas, podemos concluir que o conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja o subconjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \geq 0\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

a) O vetor nulo $(0, 0, 0)$ verifica $x + y + z = 0 \geq 0$, logo temos: $(0, 0, 0) \in V$.

b) Sejam (x, y, z) e (r, s, t) dois vetores de V , então temos: $x + y + z \geq 0$ e $r + s + t \geq 0$. Como $(x, y, z) + (r, s, t) = (x + r, y + t, z + t) = (x + r, y + t, z + t)$, temos $(x + r) + (y + t) + (z + t) = (x + y + z) + (r + s + t) \geq 0$ Logo, temos $(x, y, z) + (r, s, t) \in V$.

c) Sejam $a = -1 \in \mathbb{R}$ e $(x, y, z) \in V$, com $x > 0$. Como $x + y + z \geq 0$ e $a.(x, y, z) = (a.x, a.y, a.z) \in V$, temos: $(-1).(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ e $-x - y - z < 0$. Logo, temos: $-1.(x, y, z) = (-x, -y, -z) \notin V$.

Conclusão: Como a terceira condição não é verificada, podemos concluir que o conjunto $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z \geq 0\}$ NÃO é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 6.5.10

Seja o conjunto das matrizes:

$$D = \left\{ \mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

equipado com as operações de adição e de multiplicação por um escalar das matrizes, isto é,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix} \\ \alpha \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha.a & 0 \\ 0 & \alpha.b \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Provar que o conjunto D é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Sabemos que o conjunto $M_2(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem 2×2 é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O conjunto das matrizes diagonais:

$$D = \{ \mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \},$$

é um subespaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$. De fato, vamos verificar as três condições C1), C2) e C3) de subespaço vetorial.

A condição C1). Para $a = b = 0$, a matriz $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in D$ é dada por: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Assim, a matriz nula do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ pertence a D .

A condição C2). Sejam $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ duas matrizes de D . Então, temos:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & 0 \\ 0 & b+d \end{bmatrix} \in D.$$

Assim, a adição é estável em D .

A condição C3). Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in D$. Então, temos:

$$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a & 0 \\ 0 & \alpha \cdot b \end{bmatrix} \in D$$

Assim, a multiplicação por um escalar é estável em D .

Conclusão: Após as 3 condições serem verificadas, podemos concluir que o conjunto D é um subespaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$.

Assim, o conjunto D é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 6.5.11

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Sejam $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ subespaços vetoriais. Provar que a intersecção $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ de dois subespaços vetoriais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ é também um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Lembre-se que a intersecção de dois subconjuntos $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ de $\mathbb{V}$ é definida por:

$$\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{u \in \mathbb{V} \text{ tal que } u \in \mathbf{U} \text{ e } u \in \mathbf{W}\}.$$

Isto é, o conjunto $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ é composto por elementos pertencentes a $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$.

Solução. Vamos verificar as três condições de subespaço vetorial

1- Como $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$, então o vetor nulo é o mesmo em $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$, isto é, $0 \in \mathbf{U}$ e $0 \in \mathbf{W}$. Logo, 0 pertence a intersecção $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, isto é, $0 \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

2. Sejam u, v dois vetores de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, então temos $u, v \in \mathbf{U}$ e $u, v \in \mathbf{W}$. Como $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$, então $u + v \in \mathbf{U}$ e $u + v \in \mathbf{W}$. Logo, temos: $u + v \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

3. Seja $a \in \mathbb{R}$. Seja u um vetor de $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, então temos $u \in \mathbf{U}$ e $u \in \mathbf{W}$. Como $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$, então $a \cdot u \in \mathbf{U}$ e $a \cdot u \in \mathbf{W}$. Logo, temos: $a \cdot u \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$.

Conclusão: Após as 3 condições serem verificadas, podemos concluir que a intersecção $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ de dois subespaços vetoriais $\mathbf{U}$ e $\mathbf{W}$ é também um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Exercício 6.5.12

Determine em cada caso $V \cap W$:

1. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = z\}$.
2. $V = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$.
3. $V = \{(x, y, -x - 3y) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$.

Quais das somas anteriores são somas diretas?

Solução.

1. Sejam os dois subespaços vetoriais $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = z\}$ do espaço vetorial usual $\mathbb{R}^3$. Seja $u = (x, y, z) \in V \cap W$, então $u = (x, y, z) \in V$ e $u = (x, y, z) \in W$. Logo, temos:

- $u = (x, y, z) \in V$ implica que $x = y$,
- $u = (x, y, z) \in W$ implica que $y = z$.

Logo temos:

$$u = (x, y, z) \in V \cap W \text{ equivale } x = y = z.$$

Conclusão. O subespaço vetorial $V \cap W$ é dado por:

$$V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}.$$

Como $V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z\}$ é um subespaço vetorial não trivial de $\mathbb{R}^3$, então a soma $V \oplus W$ dos dois espaços vetoriais $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$ não é direta.

2. Sejam os subespaços vetoriais $V = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$. Seja $u = (x, y, z) \in V \cap W$, então $u = (x, y, z) \in V$ e $u = (x, y, z) \in W$. Logo, temos:

- $u = (x, y, z) \in V$ implica que $x = y = z$,
- $u = (x, y, z) \in W$ implica que $x = y = 0$.

Logo temos: $u = (x, y, z) \in V \cap W$ equivale $x = y = z = 0$. O subespaço vetorial $V \cap W$ é dado por:

$$V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Conclusão : Como $V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$, então a soma $V \oplus W$ dos dois espaços vetoriais $V = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ é direta.

3. Sejam os subespaços vetoriais $V = \{(x, y, -x - 3y) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$. Seja $u = (x, y, z) \in V \cap W$, então $u = (x, y, z) \in V$ e $u = (x, y, z) \in W$. Logo, temos:

- $u = (x, y, z) \in V$ implica que $z = -x - 2y$,
- $u = (x, y, z) \in W$ implica que $x = y = z$.

Logo, obtemos:

$$z = -x - 2y = -z - 2z = -3z \text{ ou seja } 4z = 0.$$

Logo, temos: $z = 0$. Assim, o subespaço vetorial $V \cap W$ é dado por: $V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$.

Conclusão : Como $V \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x = y = z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$, então a soma $V \oplus W$ dos dois espaços vetoriais $V = \{(x, y, -x - 3y) \in \mathbb{R}^3; x, y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$ é direta.

Exercício 6.5.13

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathbb{R}$, com as operações usuais (como aquelas do Parágrafo 3.2) de adição e de multiplicação por um escalar real. Sejam os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$ dados por $\mathbf{U} = \{(x, y, 0, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbf{W} = \{(0, 0, z, t), x, z \in \mathbb{R}\}$. Provar que a soma $\mathbf{U} + \mathbf{W}$ é uma soma direta.

Solução. Sejam os subespaços vetoriais $\mathbf{U} = \{(x, y, 0, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbf{W} = \{(0, 0, z, t), x, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$. Seja $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, então $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{U}$ e $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{W}$. Logo, temos:

- $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{U}$ implica que $z = t = 0$,
- $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{W}$ implica que $x = y = 0$.

Logo, temos $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ equivale $x = y = z = t = 0$. Então, temos $u = (0, 0, 0, 0)$. Assim, o subespaço vetorial $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ é dado por $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y = z = t = 0\} = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Conclusão : Como $\mathbf{U} \cap \mathbf{W} = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y = z = t = 0\} = \{(0, 0, 0, 0)\}$, então a soma $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$ dos dois espaços vetoriais $\mathbf{U} = \{(x, y, 0, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ e $\mathbf{W} = \{(0, 0, z, t), x, z \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^4$ é direta.

Exercício 6.5.14

Em $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, definamos “adição” assim:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, 0),$$

e a multiplicação por escalares como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Nessas condições $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

Solução.

Vamos verificar se as 4 condições da adição e as 4 condições da multiplicação por um escalar são verificadas.

Para as 4 condições da adição temos os seguinte.

1. Comutatividade: Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, com a definição da adição temos:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, 0) \text{ e } (c, d) + (a, b) = (c + a, 0).$$

Como $a + c = c + a$ assim temos: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$.

2. Associatividade: Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, com a definição da "adição" temos:

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, 0) + (e, f) = ((a + c) + e, 0)$$

e

$$(a, b) + ((c, d) + (e, f)) = (a, b) + (c + e, 0) = (a + (c + e), 0).$$

Como $(a + c) + e = a + (c + e)$ assim temos: $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$.

3. Elemento neutro: Seja $(a, b) \in \mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, com $b \neq 0$. Seja (c, d) o elemento neutro da adição. Então, temos:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, 0) \neq (a, b).$$

Logo, a adição definida por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, 0),$$

não possui um elemento neutro.

Conclusão. O conjunto $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$, equipado com a "adição" definida por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, 0),$$

NÃO é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Como não há elemento neutro para esta adição, a prova pára aqui, e não precisamos verificar as demais condições da definição de um espaço vetorial.

Observação : Outra prova de Exercício 1.4. Sabemos que o conjunto das funções $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ munido com as precedentes operações de adição e de multiplicação por um escalar é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $\mathcal{P}_1$ de todas as funções polinomiais de grau 1 de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, é um subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. De fato, vamos verificar as três condições C1), C2) e C3) de subespaço vetorial.

A condição C1). Seja a função nula $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\Theta(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Para todo $P \in \mathcal{P}_1$, temos:

$$(P + \Theta)(x) = P(x) + \Theta(x) = P(x) + 0 = P(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, a função nula $\Theta \in \mathcal{P}_1$.

A condição C2). Dadas duas funções polinomiais $P(x) = ax + b$ e $Q(x) = cx + d$ do conjunto $\mathcal{P}_1$. Assim, temos:

$$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = (ax + b) + (cx + d) = (a + c)x + b + d,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, obtemos $P + Q \in \mathcal{P}_1$.

A condição C3). Dada uma função polinomial $P(x) = ax + b$ de grau 1 e um número real k . Assim, temos:

$$(k \cdot P)(x) = k \cdot P(x) = k(ax + b) = (ka)x + kb,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, obtemos $k \cdot P \in \mathcal{P}_1$.

Conclusão: Após as 3 condições serem verificadas, podemos concluir que o conjunto $\mathcal{P}_1$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções $\mathcal{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Assim, o conjunto $\mathcal{P}_1$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

6.6 Exercícios para praticar

Exercício 6.6.1

Verificar, em cada caso, se V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$:

1. $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 2x - y\}$,
2. $V = \{(x, x, 2x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$.

Exercício 6.6.2

Verificar, em cada caso, se V é um subespaço vetorial do espaço vetorial $M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ das matrizes de ordem 3:

1. $V = \{[a_{ij}]; a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\}$;
2. $V = \{[a_{ij}]; a_{ij} = a_{ji} \text{ para todo } 1 \leq i, j \leq 3\}$;
3. $V = \{[a_{ij}]; a_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j\}$;
4. $V = \{A = [a_{ij}]; A \text{ é invertível}\}$.

Exercício 6.6.3

Seja $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$. O conjunto $\mathbb{V}$ não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois seguintes pares de operações sobre $\mathbb{V}$:

$$(A) : (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \text{ e } a(x, y) = (x, ay),$$

e

$$(B) : (a, b) + (c, d) = (a, b) \text{ e } a(x, y) = (ax, ay).$$

Diga, em cada caso, quais dos 8 axiomas não se verificam.

CAPÍTULO 7

ESPAÇOS VETORIAIS FINITAMENTE GERADOS. BASE E DIMENSÃO



Objetivos

Este capítulo é dedicado ao estudo dos espaços vetoriais finitamente gerados e suas propriedades gerais. Esses espaços vetoriais são importante na matemática, como em outras áreas. Apresentamos alguns exemplos básicos e aplicações.

7.1 Espaços vetoriais finitamente gerados

7.1.1 Combinações lineares

Seja $\mathbb{V}$ um **espaço vetorial sobre** $\mathbb{R}$ munido com as operações de adição e de multiplicação por escalar. Seja S um subconjunto finito de $\mathbb{V}$, isto é,

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}.$$

Uma combinação linear dos vetores do conjunto S , é uma expressão do tipo:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_p$ são números reais. Se $w \in \mathbb{V}$ é um vetor que pode ser descrito através de uma expressão como esta:

$$w = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p,$$

dizemos que w é uma **combinação linear** dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_p$ ou que w é escrito como **uma combinação linear de** $v_1, v_2, \dots, v_p$.

Exemplo 7.1.1

Seja $S = \{v_1, v_2\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}^2$, onde $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, -2)$. Seja $w = (1, 8)$, então temos:

$$w = 2v_1 - 3v_2.$$

Assim, o vetor $w = (1, 8)$ é combinação linear de v_1, v_2 :

Denotamos por $[S]$ ou $[v_1, v_2, \dots, v_p]$ o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_p$, isto é,

$$[S] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p, \text{ onde } a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}\}.$$

Podemos verificar facilmente que:

1. Temos: $0.v_1 + 0.v_2 + \dots + 0.v_p = 0$, assim 0 é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_p$, com $a_1 = \dots = a_p = 0$. Logo, temos $0 \in [S]$.
2. Sejam $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p$, $w = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_p v_p$ dois elementos do conjunto $[S]$. Pela operação de adição em $\mathbb{V}$ temos:

$$v + w = (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p) + (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \dots + b_p v_p),$$

logo, obtemos:

$$v + w = (a_1 + b_1)v_1 + (a_2 + b_2)v_2 + \dots + (a_p + b_p)v_p \in [S].$$

3. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p$, com a multiplicação por um escalar dos elementos de $\mathbb{V}$ temos:

$$\alpha.v = \alpha.(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p) = \alpha.a_1 v_1 + \alpha.a_2 v_2 + \dots + \alpha.a_p v_p,$$

assim, deduzimos que: $\alpha.v \in [S]$.

Em conclusão, as três condições que caracterizam um subespaço vetorial são verificadas. Portanto temos a seguinte propriedade.

Proposição 7.1.2

Sejam $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e os vetores $v_1, v_2, \dots, v_p$ de $\mathbb{V}$. Então, o conjunto

$$[S] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p, \text{ onde } a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}\},$$

munido das operações de adição e da multiplicação por um escalar é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Levando em conta a propriedade anterior, formulamos a seguinte definição.



Definição 7.1.3

Sejam $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e os vetores $v_1, v_2, \dots, v_p$ de $\mathbb{V}$. O subespaço:

$$[S] = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_p v_p, \text{ onde } a_1, a_2, \dots, a_p \in \mathbb{R}\}$$

é chamado de **subespaço gerado por S**. Cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de elementos de S ou combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_p$. Ao invés de $[S]$ também costuma-se escrever:

$$[S] = [v_1, v_2, \dots, v_p].$$

Diz-se também que: **os vetores $v_1, v_2, \dots, v_p$ geram o subespaço vetorial $[S]$** , ou então que o conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ é **um sistema de geradores de subespaço vetorial $[S]$** .

Aviso importante. Não confunda os dois conjuntos S e $[S]$:

- 1) S é um conjunto finito de vetores do espaço vetorial $\mathbb{V}$,
- 2) $[S]$ é o subespaço vetorial de $\mathbb{V}$ formado pelas combinações lineares dos vetores do conjunto finito S .

Temos a seguinte propriedade:



Proposição 7.1.4

Sejam $(\mathbb{V}, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e os subconjuntos $S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ e $T = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$. Então, temos:

1. $S \subset [S]$;
2. Se $T \subset S$ então $[T] \subset [S]$;
3. $[S \cup T] = [S] + [T]$.

Prova. 1) Seja $v \in S = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, então existe j ($1 \leq j \leq p$) tal que $v = v_j$. Assim, temos: $v = v_j = 1 \cdot v_j$, ou seja, $v = 1 \cdot v_j \in [S]$. Logo, deduzimos que $S \subset [S]$.

2) Se $T \subset S$ então necessariamente temos $r \leq p$. Como $T \subset S$ todo elemento $w_j \in T$ pertence também ao conjunto S . Assim, toda combinação linear $w = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r$, que um elemento do espaço vetorial $[T]$, é também um elemento do espaço vetorial $[S]$, isto é, $w = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r \in [S]$.

Conclusão. Se $T \subset S$ então $[T] \subset [S]$, isto é, o espaço vetorial $[T]$, gerado por T , é um subconjunto do espaço vetorial $[S]$, gerado por S . De maneira mais rigorosa, o espaço vetorial $[T]$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $[S]$.

3) Vamos aplicar a propriedade anterior 2). Como $S \subset S \cup T$ e $T \subset S \cup T$, a propriedade anterior 2) implica que:

$$[S] \subset [S \cup T] \text{ e } [T] \subset [S \cup T].$$

Logo, obtemos a inclusão $[S] + [T] \subset [S \cup T]$, ou seja, $[S] + [T]$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $[S \cup T]$.

Reciprocamente, seja $w \in [S \cup T]$, então existe números reais $a_1, \dots, a_p$ e $b_1, \dots, b_r$ tais que:

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_p v_p + b_1 w_1 + \dots + b_r w_r.$$

Como $a_1 v_1 + \dots + a_p v_p \in [S]$ e $b_1 w_1 + \dots + b_r w_r \in [T]$ deduzimos que $w \in [S] + [T]$. Assim, temos a inclusão $[S \cup T] \subset [S] + [T]$.

Conclusão. Como $[S] + [T] \subset [S \cup T]$ e $[S \cup T] \subset [S] + [T]$, temos necessariamente $[S \cup T] = [S] + [T]$.

□

💡 Exemplo 7.1.5

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (1, 0, 0)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$. Então, com as operações de adição e da multiplicação por um escalar temos:

$$[S] = \{av_1 + bv_2, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\} = \{(a+b, b, 0), \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, temos $[S] \subset \{(x, y, 0), \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}\}$. Agora, vamos provar a seguinte inclusão $\{(x, y, 0), \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}\} \subset [S]$. Seja $w = (x, y, 0)$, existem a e b tais que $w = av_1 + bv_2$? Assim, temos $(x, y, 0) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) = (a+b, b, 0) \in [S]$. Logo, deduzimos que a e b verificam o sistema linear:

$$\begin{cases} a + b = x \\ b = y \end{cases}$$

então, temos: $y = b$ e $a = x - y$. Assim, obtemos,

$$w = (x, y, 0) = (x - y, 0, 0) + (y, y, 0) = (x - y)(1, 0, 0) + y(1, 1, 0),$$

ou seja, $w = (x - y)v_1 + yv_2$. Logo, temos $\{(x, y, 0), \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}\} \subset [S]$. Em conclusão, temos: $[S] = \{(x, y, 0), \text{ onde } x, y \in \mathbb{R}\}$.

💡 Exemplo 7.1.6

Seja o espaço vetorial dos números complexos $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Para todo $z = a + bi$ ($i^2 = -1$), onde $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$z = a + bi = a \cdot 1 + b \cdot i,$$

logo, os números 1 e i geram o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$, isto é, $\mathbb{C} = [1, i]$.

Exercício para praticar as propriedades.

A) Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Provar que se S e T são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$, então $S + T = [S \cup T]$.

B) Sejam u e v dois vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$. Supor que $u \neq t.v$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, não existe nenhum $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$. Mostrar que $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos subespaços $[u]$ e $[v]$.

7.1.2 Espaços vetoriais finitamente gerados



Definição 7.1.7

Dizemos que um espaço vetorial $\mathbb{V}$ é finitamente gerado se existe um subconjunto S de $\mathbb{V}$, tal que:

1. S é finito,
2. $\mathbb{V} = [S]$, isto é, **o conjunto finito S é um sistema de geradores do espaço vetorial $\mathbb{V}$ ou que S é um sistema de geradores de $\mathbb{V}$.**

Na realidade, existem muitos subconjuntos finitos de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ que têm essa mesma propriedade de gerar o espaço vetorial $\mathbb{V}$. Nas lições a seguir, estudaremos a relação entre os conjuntos finitos, que geram um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Posteriormente, focaremos praticamente apenas em espaços vetoriais gerados por um número finito de seus vetores, como por exemplo $\mathbb{R}^n$ ou $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.



Exemplo 7.1.8

Seja $\mathbb{V} = \{\mathbf{0}\}$, onde $\mathbf{0}$ indica o vetor nulo de um espaço vetorial qualquer. Então, $\mathbb{V} = \{\mathbf{0}\}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, que é finitamente gerado pois, para $S = \{\mathbf{0}\}$, temos $\mathbb{V} = [S] = \{\mathbf{0}\}$.



Exemplo 7.1.9

O espaço vetorial real $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ é finitamente gerado. De fato, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

Assim, podemos dizer que o sistema de vetores $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ gera o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ ou que $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é um sistema gerador finito do espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.



Exemplo 7.1.10

O espaço vetorial real $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem 2×2 , é

finitamente gerado. De fato, para qualquer matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Logo, temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ das matrizes quadradas 2×2 , é finitamente gerado, e temos:

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = [S],$$

onde S é o conjunto finito:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Exercício para aplicar as propriedades. Seja $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes de ordem 2×3 . Verificar se as seguintes matrizes geram o espaço o espaço vetorial $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.2 Dependência linear e independência linear

7.2.1 Dependência linear

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Nós vimos, por definição, que um vetor $v \in \mathbb{V}$ é combinação linear dos k vetores $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{V}$ quando conseguirmos encontrar números reais $x_1, x_2, \dots, x_k$ tais que:

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_k v_k. \quad (7.1)$$



Definição 7.2.1

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que um conjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ é **Linearmente Independente** (usamos a abreviação: L.I.) se, e somente se, a igualdade do tipo:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Isto é, a igualdade do tipo $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0$, com os x_i em $\mathbb{R}$, só for possível para $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e um subconjunto $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{V}$ tal que

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k = 0,$$

onde os x_i são números em $\mathbb{R}$. Suponha que pelo menos um dos coeficientes acima seja diferente de zero, digamos $x_1 \neq 0$. Daí podemos dividir por x_1 e assim conseguimos escrever o vetor v_1 como combinação linear dos demais:

$$v_1 = -\frac{x_2}{x_1} v_2 - \frac{x_3}{x_1} v_3 - \cdots - \frac{x_k}{x_1} v_k. \quad (7.2)$$

Se os vetores $v_1, v_2, \dots, v_k$ não forem linearmente independentes, então nós dizemos que eles são **linearmente dependentes (L.D.)**.

Definição 7.2.2

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Dizemos que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é **linearmente dependente** (usamos a abreviação: L.D.) se, e somente se, S não é L.I., ou seja, é possível uma igualdade do tipo:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = 0,$$

sem que os escalares a_i sejam todos iguais ao número zero.

Exemplo 7.2.3

Seja $\mathbb{C}$ o espaço vetorial dos números complexos sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $S = \{1, i\}$ é linearmente independente. De fato, se

$$a + bi = a \times 1 + b \times i = 0 \text{ então temos } a = b = 0.$$

Exemplo 7.2.4

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. O conjunto de vetores $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$ é L.I. De fato, se $x(1, 0) + y(0, 1) = (0, 0)$, então temos:

$$x(1, 0) + y(0, 1) = (x, 0) + (0, y) = (x, y) = (0, 0).$$

Logo, deduzimos que: $x = y = 0$. Assim, o subconjunto de vetores $S = \{(1, 0), (0, 1)\}$, do espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, é L.I..

Exemplo 7.2.5

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ das matrizes quadradas 2×2 . O conjunto

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é L.I. do espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. De fato, temos:

$$\text{Se } a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Como

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

deduzimos que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com a igualdade das matrizes obtemos: $a = b = c = d = 0$.

Conclusão. O conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ é L.I. do espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

7.2.2 Algumas propriedades da dependência linear

Proposição 7.2.6

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$. Seja $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ um conjunto finito de $\mathbb{V}$.

- 1) O conjunto finito $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ com dois ou mais vetores, isto é, $n \geq 2$, é linearmente dependente se, e somente se, pelo menos um dos vetores de S pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores.
- 2) Se o vetor nulo pertence ao conjunto finito $S = \{v_1, \dots, v_m\}$, então os vetores $v_1, \dots, v_m$ são linearmente dependentes.

Para os espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$ temos a seguinte propriedade:

Proposição 7.2.7

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. Seja $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ um conjunto finito de $\mathbb{V}$. Se $r > n$, então os vetores $v_1, \dots, v_r$ são linearmente dependentes.

Também, temos a seguinte propriedade de independência linear, em relação com às matrizes inversíveis.



Proposição 7.2.8

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}$. Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto finito de $\mathbb{V}$, onde $v_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Seja a matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem $n \times n$. Se a matriz A é inversível, então os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independente.



Exemplo 7.2.9

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ e o subconjunto $S = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (3, 2)$. A matriz quadrada $A = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq 2}$ associada ao conjunto S é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

O determinante da matriz A é dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1.$$

Como $\det(A) \neq 0$, então a matriz A é invertível. Logo, o sistema $S = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (3, 2)$, é L.I.

7.3 Base e dimensão

7.3.1 Base de um espaço vetorial

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.



Definição 7.3.1

Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um subconjunto finito de $\mathbb{V}$. Dizemos que os vetores $v_1, \dots, v_n$ formam uma **Base** para $\mathbb{V}$ se as duas condições são verificadas:

- C1) Os vetores $v_1, \dots, v_n$ são linearmente independentes,
- C2) Os vetores $v_1, \dots, v_n$ geram $\mathbb{V}$, isto é, $\mathbb{V} = [S]$.

Se os vetores $v_1, \dots, v_n$ formam uma base de $\mathbb{V}$, então eles têm que ser distintos e não nulos.



Exemplo 7.3.2

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Seja $S = \{v_1, v_2\}$, onde $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$. Então, $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

Solução. Vamos provar que o conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ é um sistema L.I. e também

um sistema gerador do espaço vetorial real $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

1- O sistema S é L.I.. De fato, se

$$av_1 + bv_2 = a(1,0) + b(0,1) = (0,0) \text{ então } a(1,0) + b(0,1) = (a,b) = (0,0).$$

Logo, $a = b = 0$. Assim, os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ são linearmente independentes.

2. O conjunto S é sistema gerador do espaço vetorial real $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$. Os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ geram o espaço vetorial real $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$. Para todo $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ temos:

$$v = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1).$$

Logo, os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ geram o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

Conclusão. Os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$, isto é, temos $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2 = [S]$.

Exemplo 7.3.3

Seja o espaço vetorial das matrizes:

$$D = \{A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\},$$

equipado com operações de adição e de multiplicação por um escalar das matrizes. Provar que as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

formam uma base de $D = \{A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$.

Prova. Vamos verificar as duas condições da definição de uma base.

Independência linear do sistema S . As duas matrizes do sistema $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ são linearmente independente. De fato, sejam a e b em $\mathbb{R}$ tais que:

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, com a propriedade de igualdade de duas matrizes, temos $a = b = 0$. Assim, o sistema S é linearmente independente.

As duas matrizes do sistema S geram o espaço vetorial D . As duas matrizes do

sistema $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ geram o espaço vetorial $D = \{A_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}\}$. De fato, seja $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ em D . Com as operações de adição e de multiplicação das matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, as duas matrizes do sistema $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ geram o espaço vetorial D , isto é, temos $D = [S]$.

Conclusão. O sistema $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ (conjunto finito), é uma base do espaço vetorial D .



Definição 7.3.4

Base canônica

1) O conjunto $S = \{e_1, e_2\}$ onde:

$$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1),$$

é chamado **Base Canônica** de $\mathbb{R}^2$.

2) O conjunto $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ onde:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1),$$

é chamado **Base Canônica** de $\mathbb{R}^n$.

3) A base $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ do espaço vetorial D , é chamada **Base Canônica**.

Temos a seguinte proposição para caracterizar uma base:



Proposição 7.3.5

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{V}$. Então, cada vetor de $\mathbb{V}$ pode ser escrito de modo único na forma:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais.

Prova. Sejam $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{V}$ e $v \in \mathbb{V}$. Como S gera $\mathbb{V}$, existem

números reais $a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

Para estabelecer que essa combinação linear de v é única, suponhamos que existem números reais $b_1, b_2, \dots, b_n$ tais que:

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_1 + \dots + b_n v_n.$$

Logo, temos:

$$v = a_1 v_1 + a_2 v_1 + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + b_2 v_1 + \dots + b_n v_n.$$

Assim, obtemos:

$$(a_1 - b_1)v_1 + (a_2 - b_2)v_1 + \dots + (a_n - b_n)v_n = 0.$$

Como $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é um sistema L.I. deduzimos que:

$$a_1 - b_1 = 0, a_2 - b_2 = 0, \dots, a_n - b_n = 0.$$

Logo, obtemos:

$$a_1 = b_1, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n.$$

Conclusão: cada vetor de $\mathbb{V}$ pode ser escrito de modo único na forma $v = a_1 v_1 + a_2 v_1 + \dots + a_n v_n$, onde $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais. $\square$



Exemplo 7.3.6

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Seja conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ onde:

$$v_1 = (2, -4), v_2 = (3, 8).$$

Sabemos que S é uma base de $\mathbb{R}^2$. Encontrar as coordenadas a e b do vetor $u = (1, -1)$ isto é, $u = av_1 + bv_2$, em relação à base S .

Solução. Temos:

$$u = av_1 + bv_2 = a(2, -4) + b(3, 8) = (2a + 3b, -4a + 8b) = (1, -1).$$

Logo, temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 1, & (1) \\ -4a + 8b = -1 & (2). \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por 2 e adicionando à equação (2), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} 2a + 3b = 1 \\ 14b = 1. \end{cases}$$

Logo, temos $b = \frac{1}{14}$ e $a = \frac{1-3b}{2} = \frac{11}{14}$. Assim, temos: $u = \frac{11}{14}v_1 + \frac{1}{28}v_2$.

A proposição a seguir permite estabelecer a ligação entre uma base e um sistema gerador de um espaço vetorial finitamente gerado.



Proposição 7.3.7

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $E = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um sistema gerador de $\mathbb{V}$. Então, deste conjunto de vetores S podemos extrair uma base de $\mathbb{V}$.

Prova. Vamos dar uma visão geral do processo de construção de uma base de $\mathbb{V}$ a partir do sistema gerador E .

1) Se $E = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é L.I. então, pela definição de uma base, E é uma base de $\mathbb{V}$. A demonstração termina aqui.

2) Se $E = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é L.D. então, existe um vetor de E que pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de E . Sem perda de generalidade, suponhamos que este vetor seja v_r , ou seja, que v_r é uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{r-1}$. Assim, o conjunto $E_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$ ainda gera o espaço vetorial $\mathbb{V}$. Agora, estamos com dois casos: a) Se $E_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$ é L.I. então, pela definição de uma base, E_1 é uma base de $\mathbb{V}$. A demonstração termina aqui.

b) Se $E_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-1}\}$ é L.D. então, existe um vetor de E_1 que pode ser escrito como combinação linear dos outros vetores de E . Sem perda de generalidade, suponhamos que este vetor seja v_{r-1} , ou seja, que v_{r-1} é uma combinação linear de $v_1, v_2, \dots, v_{r-2}$. Assim, o conjunto $E_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-2}\}$ ainda gera o espaço vetorial $\mathbb{V}$.

Após um número finito de passos, obteremos um conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-s}\}$ formado por $r - s$ vetores que são L.I. que ainda geram $\mathbb{V}$. E assim, o conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_{r-s}\}$ é um sistema gerador de $\mathbb{V}$, que é L.I., logo, B é uma base de $\mathbb{V}$. $\square$



Proposição 7.3.8

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ uma base de $\mathbb{V}$. Se $m > r$, então todo conjunto $E = \{w_1, \dots, w_m\}$ de vetores $\mathbb{V}$, é linearmente dependente, ou seja, qualquer subconjunto de $\mathbb{V}$ com mais de r vetores é L.D.

Prova. Seja o subconjunto $E = \{w_1, \dots, w_m\}$ de vetores $\mathbb{V}$ com $m > r$. Como $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ é uma base de $\mathbb{V}$, temos:

$$(T) \begin{cases} w_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1r}v_r \\ w_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2r}v_r \\ \vdots \\ w_m = a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \dots + a_{mr}v_r. \end{cases}$$

Agora, se $x_1w_1 + \dots + x_mw_m = 0$, substituindo cada w_j por sua expressão como combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_r$, segue de (T) que:

$$(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m)v_1 + \dots + (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \dots + a_{mr}x_m)v_r = 0.$$

Como $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ é uma base de $\mathbb{V}$, deduzimos o sistema linear homogêneo:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m = 0 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \dots + a_{mr}x_m = 0. \end{cases}$$

O sistema (S) tem r equações e $x_1, x_2, \dots, x_m$ incógnitas. Como $r < m$ o sistema linear (S) admite infinitas soluções. Logo, o sistema (S) admite uma solução não trivial, ou seja, existe uma $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ com algum x_j não nulo. Assim, existem $x_1, x_2, \dots, x_m$ não todos nulos tais que $x_1w_1 + \dots + x_mw_m = 0$. Portanto, os vetores $w_1, \dots, w_m$ são L.D. $\square$

Como consequência, da precedente proposição, temos o teorema a seguir:

★ Teorema 7.3.9

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ e $T = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ são duas bases de $\mathbb{V}$, então temos:

$$r = s$$

Isto é, todas as bases de um espaço vetorial finitamente gerado têm o mesmo número de elementos.

Prova. Como $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ gera $\mathbb{V}$ e $T = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ é L.I., então temos $s \leq r$, logo $s \leq r$. Portanto, como $T = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ gera $\mathbb{V}$ e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é L.I., segue $r \leq s$. Portanto, temos $r = s$. $\square$

🍃 Definição 7.3.10

Um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$, é chamado de **dimensão finita** se contém um conjunto finito $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ de vetores que constitui uma base de $\mathbb{V}$, isto é, um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita, é finitamente gerado.

Graças às propriedades acima, tanto faz a base que considerarmos, pois todas tem o mesmo número de elementos. A dimensão de $\mathbb{V}$, pelo que vimos até agora, indica o número de vetores necessários para representar qualquer vetor de $\mathbb{V}$.

7.3.2 Dimensão de um espaço vetorial

🍃 Definição 7.3.11

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial não nulo sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. O número de elementos de uma base de $\mathbb{V}$ é chamado de **dimensão de $\mathbb{V}$** e denotado por $\dim \mathbb{V}$. Convencionamos que se $\mathbb{V}$ é o espaço vetorial nulo, então $\dim \mathbb{V} = 0$.

Exemplo 7.3.12

O conjunto:

$$\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) = \{p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \text{ tais que } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \quad (7.3)$$

de todos os polinômios de grau 2 é um espaço vetorial. Uma base para este espaço pode ser encontrada facilmente, e formada pelos polinômios

$$\{x^2, x, 1\}, \quad (7.4)$$

aquela gera o espaço $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Para ver que são L.I., precisamos verificar que se tivermos

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \quad (7.5)$$

então todos os coeficientes devem ser nulos. Isto segue da resolução das equações de segundo grau $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, que possui exatamente duas soluções reais ou complexas (distintos ou idênticos). Portanto, já que no nosso caso todos os valores reais de x são raízes, nosso polinômio deve ser o constante igual a zero, de modo que todos os coeficientes são zero.

Concluimos desta maneira que $S = \{x^2, x, 1\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, que consequentemente tem dimensão 3.



Proposição 7.3.13

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. Se W é subespaço vetorial de $\mathbb{V}$, então W é também de dimensão finita, e temos:

$$\dim W \leq \dim \mathbb{V}.$$

Além disso, se $\dim W = \dim \mathbb{V}$, temos que $W = \mathbb{V}$.

Prova. Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ uma base de $\mathbb{V}$ e W um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Se W é o subespaço vetorial nulo, então $\dim W = 0$.

Se W não é o subespaço vetorial nulo, como $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ uma base de $\mathbb{V}$, então $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é um sistema gerador de W . Assim, W é de dimensão finita e toda base $T = \{w_1, w_2, \dots, w_s\}$ de W é um sistema L.I., logo $s \leq r$. Portanto, temos $\dim W \leq \dim \mathbb{V}$.

Se $\dim W = \dim \mathbb{V} = r$, então toda base de W contém r elementos. Seja $T = \{w_1, w_2, \dots, w_r\}$ uma base de W . Se $W \neq \mathbb{V}$, como $W \subset \mathbb{V}$, existe então $v \in \mathbb{V}$ com $v \notin W$. Assim, o conjunto $\{v, w_1, w_2, \dots, w_r\}$ é um subconjunto finito de $\mathbb{V}$ que é L.I. Como este conjunto tem $r + 1$ vetores e $\dim W = \dim \mathbb{V} = r$, temos uma contradição. Portanto, de fato, $W = \mathbb{V}$. $\square$

Temos o seguinte resultado prático:

**Proposição 7.3.14**

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita r . Seja $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ um subconjunto de r vetores de $\mathbb{V}$.

1. Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é linearmente independente, então S é uma base de $\mathbb{V}$.
2. Se $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é um sistema gerador de $\mathbb{V}$, então S é uma base de $\mathbb{V}$.

Prova. Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita r .

1. Sabemos que $\dim \mathbb{V} = r$ e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é sistema de r linearmente independente do espaço vetorial $\mathbb{V}$. Então, pela Proposição 7.3.13 podemos afirmar que $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é uma base do subespaço vetorial $[S]$ de $\mathbb{V}$ gerado por S , assim, $[S] \subset \mathbb{V}$ e $\dim([S]) = r$. Logo, temos $\dim(\mathbb{V}) = \dim([S]) = r$, e aplicando a Proposição 7.3.13 temos $[S] = \mathbb{V}$. Consequentemente, o sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$.

2. Como $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\} \subset \mathbb{V}$, então temos $[S] \subset \mathbb{V}$. Por outro lado, S é sistema gerador do espaço vetorial $\mathbb{V}$, então temos $[S] = \mathbb{V}$, além disso $\dim([S]) = r$. Logo, aplicando a Proposição 7.3.13, temos $[S] \subset \mathbb{V}$ e $\dim(\mathbb{V}) = \dim([S]) = r$, assim, o sistema $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ é uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$.

□

Terminamos este capítulo com a seguinte proposição:

**Proposição 7.3.15**

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita. Se U e W são dois subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$, então temos:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Além disso, se $U + W = U \oplus W$, então temos $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

**Exemplo 7.3.16**

Quais dos conjuntos de vetores a seguir são bases para $\mathbb{R}^2$?

1. $S_1 = \{(1, 3), (1, -1)\}$.
2. $S_2 = \{(0, 0), (10, 3), (7, -1)\}$.
3. $S_3 = \{(2, 3), (1, -2), (3, 2)\}$.
4. $S_4 = \{(1, 3), (-2, 1)\}$.

Solução.

1) O sistema $S_1 = \{(1, 3), (1, -1)\}$ é L.I. De fato, se $a(1, 3) + b(1, -1) = (a + b, 3a - b) = (0, 0)$ temos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a - b = 0. \end{cases}$$

A soma das duas equações implica que:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 4a = 0 \end{cases}$$

Logo, $a = b = 0$. Assim, $S_1 = \{(1, 3), (1, -1)\}$ é L.I. Como $\mathbb{R}^2$ é de dimensão 2, o sistema $S_1 = \{(1, 3), (1, -1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

2) $S_2 = \{(0, 0), (10, 3), (7, -1)\}$ contém o elemento neutro da adição $(0, 0)$, logo S_2 não é L.I. Portanto, S_2 não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

3) $S_3 = \{(2, 3), (1, -2), (3, 2)\}$ contém 3 elementos, como $\mathbb{R}^2$ é de dimensão $2 < 3$, S_3 não é L.I. Portanto, S_3 não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

4) O sistema $S_4 = \{(1, 3), (-2, 1)\}$ é L.I. De fato, se $a(1, 3) + b(-2, 1) = (a - 2b, 3a + b) = (0, 0)$ temos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 3a + b = 0 \end{cases}$$

O que implica que:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ 5a = 0. \end{cases}$$

Logo, $a = b = 0$. Assim, o conjunto $S_4 = \{(1, 3), (-2, 1)\}$ é L.I. Como $\mathbb{R}^2$ é de dimensão 2, o sistema S_4 é uma base de $\mathbb{R}^2$.

7.4 Exercícios resolvidos



Exercício 7.4.1

Mostrar que os números complexos $1 + 2i$ e $2 - i$ geram o espaço vetorial dos números complexos $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Solução. Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Vamos verificar se existem dois números reais x e y tais que:

$$x(1 + 2i) + y(2 - i) = a + bi.$$

Logo, usando a unicidade da escrita de um número complexo, temos:

$$(x + 2y) + i(2x - y) = a + ib \Leftrightarrow x + 2y = a \text{ e } 2x - y = b.$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x - y = b. \end{cases}$$

Usando o método do determinante obtemos:

$$x = \frac{a + 2b}{5} \text{ e } y = \frac{2a - b}{5}.$$

Assim, todo número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ pode ser escrito sobre a forma:

$$z = \frac{a + 2b}{5} \cdot (1 + 2i) + \frac{2a - b}{5} \cdot (2 - i).$$

Conclusão: Os números complexos $1 + 2i$ e $2 - i$ geram o espaço vetorial dos números complexos $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

Exercício 7.4.2

Seja $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes de ordem 2×2 . Verificar se as seguintes matrizes geram o espaço o espaço vetorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução. Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz do espaço vetorial das matrizes $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de ordem 2×2 . Usando as operações de adição das matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Conclusão: O espaço vetorial das matrizes $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de ordem 2×2 é gerado pelas matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 7.4.3

Seja $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes de ordem 2×2 . Verificar se as seguintes matrizes geram o espaço o espaço vetorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução.

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz do espaço vetorial das matrizes $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de ordem 2×2 . Vamos buscar se existem números reais x, y, z e t tais que:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Usando as operações de adição das matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y & y+t \\ z+t & z+2t \end{bmatrix}.$$

Usando a igualdade de duas matrizes, deduzimos o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = a & (1) \\ y + t = b & (2) \\ z + t = c & (3) \\ z + 2t = d & (4). \end{cases}$$

Fazendo a diferença da Equação (4) menos a Equação (3), obtemos: $t = d - c$. Assim, temos:

- a Equação (3) implica que $z = 2c - d$.
- a Equação (2) implica que $y = b - t = b + c - d$.
- a Equação (1) implica que $x = a - y = a - b - c + d$.

Assim, toda matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ do espaço vetorial das matrizes $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, é uma combinação linear das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Conclusão. As 4 matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

geram o espaço o espaço vetorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 7.4.4

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Provar que se S e T são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$, então $S + T = [S \cup T]$.

Solução.

Como S e T são subespaços vetoriais de $\mathbb{V}$, então a soma $S + T$ é também um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Qualquer elemento x de $[S + T]$ é uma combinação linear de elementos de $S \cup T$. Agora $S + T$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$, portanto, x também pertence a $S + T$. Assim, temos $[S \cup T] \subset S + T$. Por outro lado, $S + T \subset [S \cup T]$. Então, temos:

$$S + T = [S \cup T].$$

Conclusão. Se S e T são subespaços vetoriais de um espaço vetorial $\mathbb{V}$, então $S + T = [S \cup T]$.

Exercício 7.4.5

Seja o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, das matrizes diagonais:

$$D = \left\{ \mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\},$$

equipado com as operações de adição e de multiplicação por um escalar de matrizes.

Mostra que D é finitamente gerado.

Solução.

Seja $\mathbf{A}_{a,b} \in D$. Usando as propriedades de adição e multiplicação por um escalar de matrizes, temos:

$$\mathbf{A}_{a,b} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, as duas matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ geram o espaço vetorial D das matrizes diagonais.

Conclusão. O espaço vetorial real D das matrizes diagonais é finitamente gerado.

Exercício 7.4.6

Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ das matrizes de ordem 3×2 , é finitamente gerado.

Solução.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ uma matriz do espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$. Usando a operação de adição das matrizes temos:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix},$$

e usando a operação de multiplicação de uma matriz por um escalar obtemos:

$$A = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, deduzimos que as 6 matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

geram o espaço vetorial espaço vetorial real $\mathbb{V} = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

Conclusão. O espaço vetorial real $\mathbb{V} = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$, das matrizes de ordem 3×2 , é finitamente gerado.

**Exercício 7.4.7**

Seja $\mathcal{P}_1$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ das funções polinomiais de grau ≤ 1 de $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $p(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, isto é,

$$\mathcal{P}_1 = \{P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tais que } P(x) = ax + b, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}\},$$

com as operações:

O1) **Adição das funções:** Dadas duas funções polinomiais P e Q de $\mathcal{P}_1$ é definida por

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x).$$

O2) **Multiplicação das funções por um escalar:** Dada uma função polinomial P de grau 1 e um número real k , a função polinomial $k \cdot P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$(k \cdot p)(x) = k \cdot p(x).$$

Mostre que o espaço vetorial $\mathcal{P}_1$ sobre $\mathbb{R}$ é finitamente gerado.

Solução. Seja $P \in \mathcal{P}_1$, então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$P(x) = ax + b, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}.$$

Sejam f e g as funções definidas por:

$$f(x) = x \text{ e } g(x) = 1, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$(af + g)(x) = af(x) + b.g(x) = ax + b.1 = ax + b.$$

Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$P(x) = (af + g)(x) = ax + b, \text{ ou seja, } P = af + g.$$

Assim, as funções f e g geram o espaço vetorial real $\mathcal{P}_1$.

Conclusão. O espaço vetorial real $\mathcal{P}_1$ sobre $\mathbb{R}$, das funções polinomiais de grau menor ou igual a 1, é finitamente gerado.

Exercício 7.4.8

Verificar se as 3 matrizes de ordem 3×1 :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

são L.I ou L.D.

Solução.

Sejam a , b e c números reais tais que:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Usando as operações de adição de matrizes e de multiplicação de matrizes por um escalar obtemos:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c \\ b+c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A igualdade das matrizes implica que temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ b+c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Com a terceira equação temos $c = 0$. Assim, usando a segunda equação temos $b + c = b + 0 = 0$ ou seja $b = 0$. E a primeira equação implica que $a + b + c = a + 0 + 0 = 0$, isto é,

$a = 0$. Logo, temos $a = b = c = 0$.

Conclusão. As 3 matrizes : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ são L.I.

Exercício 7.4.9

- 1) Verifique se o conjunto $S = \{(1, 1, 0); (0, 2, 1); (0, 0, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I. ou L.D.
- 2) Verifique se o conjunto $S = \{(1, 1, 0, 0); (0, 2, 1, 0); (0, 0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I.
- 3) Consideremos no espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, os vetores: $u = (1, a)$ e $v = (-1, 1 - a)$ onde $a \in \mathbb{R}$. Mostrar que $S = \{u, v\}$ é L.I.

Solução.

1. Sejam a , b e c números reais tais que: $a(1, 1, 0) + b(0, 2, 1) + c(0, 0, 2) = (0, 0, 0)$, então temos: $a(1, 1, 0) + b(0, 2, 1) + c(0, 0, 2) = (a, a + 2b, b + 2c) = (0, 0, 0)$. Logo, temos o sistema linear :

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases}$$

Como $a = 0$ a segunda equação implica: $a + 2b = 0 + 2b = 0$, logo $b = 0$. E com a terceira equação obtemos: $b + 2c = 0 + 2c = 0$, assim $c = 0$.

Conclusão. O conjunto $S = \{(1, 1, 0); (0, 2, 1); (0, 0, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é L.I.

2. Sejam a , b e c números reais tais que:

$$a(1, 1, 0, 0) + b(0, 2, 1, 0) + c(0, 0, 0, 3) = (0, 0, 0, 0),$$

então temos:

$$a(1, 1, 0, 0) + b(0, 2, 1, 0) + c(0, 0, 0, 3) = (a, a + 2b, b, 3c) = (0, 0, 0, 0),$$

logo, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} a = 0 \\ a + 2b = 0 \\ b = 0 \\ 3c = 0 \end{cases}$$

Logo, deduzimos que $a = b = c = 0$.

Conclusão. O conjunto $S = \{(1, 1, 0, 0); (0, 2, 1, 0); (0, 0, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^4$ é L.I.

3. Sejam α e β dois números reais tais que:

$$\alpha(1, a) + \beta(-1, 1 - a) = (0, 0),$$

então temos:

$$\alpha(1, a) + \beta(-1, 1 - a) = (\alpha - \beta, a\alpha + (1 - a)\beta) = (0, 0),$$

logo, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ a\alpha + (1-a)\beta = 0 \end{cases}.$$

A primeira equação implica que $\alpha = \beta$. Assim, usando a segunda equação obtemos:

$$a\alpha + (1-a)\beta = a\alpha + (1-a)\alpha = (a+1-a)\alpha = 0, \text{ ou seja, } \alpha = 0,$$

logo, temos: $\alpha = \beta = 0$.

Conclusão. O subconjunto $S = \{u, v\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, onde $u = (1, a)$ e $v = (-1, 1-a)$, com $a \in \mathbb{R}$, é L.I.

Exercício 7.4.10

Mostrar que o conjunto $\{(1, 0, a), (1, 1, a), (1, 1, a^2)\}$ de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ é L.I., desde que $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Conclusão. Seja a matriz A formada pelos vetores $(1, 0, a)$, $(1, 1, a)$, $(1, 1, a^2)$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix}.$$

Segundo a Proposição 2.12, os vetores $(1, 0, a)$, $(1, 1, a)$, $(1, 1, a^2)$ são linearmente independentes se, e somente se, o determinante da matriz A é não nulo. Como:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a^2 \end{vmatrix} - 0 + a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - a + a \times 0 = a(a-1),$$

então, temos: $\det(A) = a(a-1) \neq 0$ se, e somente se, $a \neq 0$ ou $a \neq 1$.

Conclusão. O conjunto $\{(1, 0, a), (1, 1, a), (1, 1, a^2)\}$ de vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ é L.I. desde que $a \neq 0$ e $a \neq 1$.

Exercício 7.4.11

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. Provar que os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$, formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

Solução. Sabemos que o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ é de dimensão 3. Assim, os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ se, e somente se, eles são linearmente independentes. Como no Exercício 7.4.10, vamos usar a Proposição 2.12. Seja A a matriz associada aos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$

e $v_3 = (0, 0, 1)$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

então, os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ são linearmente independentes.

Conclusão. Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

Exercício 7.4.12

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$. Provar que os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$, formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

Solução. Sabemos que espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{R}$ é de dimensão 2. Assim, os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ se, e somente se, eles são linearmente independentes. Como feito no Exercício 7.4.10, vamos usar a Proposição 2.12. Seja A a matriz associada aos vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz triangular inferior, temos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

então, os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$ são linearmente independentes.

Conclusão. Os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$.

Exercício 7.4.13

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. Provar que os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$, formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.

Solução. Sabemos que espaço vetorial $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$ é de dimensão 3. Assim, os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ se, e somente se, eles são linearmente independentes. Como feito no Exercício 7.4.10, vamos usar a Proposição 2.12. Seja A a matriz associada aos vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$

e $v_2 = (1, 1, 1)$, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como A é uma matriz triangular inferior, temos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

então, os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ são linearmente independentes.

Conclusão. Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base de $\mathbb{V} = \mathbb{R}^3$.



Exercício 7.4.14

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ das matrizes quadradas 2×2 . Seja o conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Provar que as matrizes de S formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Solução. Vamos provar que S é uma base do espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ das matrizes quadradas 2×2 . Sejam a, b, c e d números reais. Se

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

então, usando as operações sobre as matrizes, temos:

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Com a igualdade das matrizes deduzimos que $a = b = c = d = 0$. Logo, o sistema S é L.I.

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz de $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Novamente, usando as operações sobre as matrizes, temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}.$$

Logo, o sistema S é um sistema gerador do espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Conclusão. As matrizes do sistema

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

formam uma base do espaço vetorial $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 7.4.15

Quais dos conjuntos de vetores a seguir são bases para $\mathbb{R}^3$?

1. $S_1 = \{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$.
2. $S_2 = \{(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)\}$.
3. $S_3 = \{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$.
4. $S_4 = \{(1, 0, 0), (0, 2, -1), (3, 4, 1), (0, 1, 0)\}$.

Solução.

1. Sabemos que $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3. O conjunto $S_1 = \{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$ é formado por 2 vetores, então S_1 não é uma base de $\mathbb{R}^3$, por que toda base de $\mathbb{R}^3$ é formada por 3 vetores.

2. Sabemos que $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3. O conjunto $S_2 = \{(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)\}$ é formado por 4 vetores, então S_2 não é uma base de $\mathbb{R}^3$, por que toda base de $\mathbb{R}^3$ é formada por 3 vetores.

3. Como $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3, então toda base de $\mathbb{R}^3$ é formada por 3 vetores. Como o conjunto $S_3 = \{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ é formado por 3 vetores, vamos calcular o determinante da matriz A associada aos vetores de S_3 , isto é, temos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e calculando o determinante da matriz A , usando a terceira linha, é dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 = -(3 - (-2)) = -5 \neq 0,$$

então, o conjunto $S_3 = \{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$, formado por 3 vetores linearmente independentes, é uma base do um espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Conclusão. Os vetores $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base de $V = \mathbb{R}^3$.

4. Também, o conjunto $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão 3. O conjunto $S_4 = \{(1, 0, 0), (0, 2, -1), (3, 4, 1), (0, 1, 0)\}$ é formado por 4 vetores, então S_4 não é uma base

de $\mathbb{R}^3$, por que toda base de $\mathbb{R}^3$ é formada por 3 vetores.

Exercício 7.4.16

Mostre que se o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ de vetores de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{R}$ é L.I., o mesmo acontecerá com o conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$.

Solução. Sejam a, b, c e d números reais, tais que:

$$a(\vec{u} + \vec{v}) + b(\vec{u} + \vec{w}) + c(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}.$$

Com as operações de adição e de multiplicação por um escalar no espaço vetorial real $\mathbb{V}$, obtemos:

$$a(\vec{u} + \vec{v}) + b(\vec{u} + \vec{w}) + c(\vec{v} + \vec{w}) = (a + b)\vec{u} + (a + c)\vec{v} + (b + c)\vec{w} = \vec{0}.$$

Como o conjunto de vetores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente independente, deduzimos o sistema linear homogêneo:

$$(S) \begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases}.$$

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ associada ao sistema (S) é dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0.$$

Logo, o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial $a = b = c = 0$. Assim, os vetores do conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ são linearmente independentes.

Conclusão. O conjunto $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}\}$ é linearmente independente.

Exercício 7.4.17

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e o conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ onde:

$$v_1 = (1, 1), v_2 = (0, 2).$$

Sabemos que S é uma base de $\mathbb{R}^2$. Encontrar as coordenadas a e b do vetor $u = (1, -1)$, isto é, $u = av_1 + bv_2$, em relação à base S .

Solução. Sejam a e b as coordenadas do vetor $u = (1, -1)$ em relação à base S . Então, temos $u = av_1 + bv_2$, ou seja, $(1, -1) = a(1, 1) + b(0, 2)$. Usando as operações usuais de

adição e de multiplicação por um escalar do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, obtemos: $(1, -1) = a(1, 1) + b(0, 2) = (a, a) + (0, 2b) = (a, a + 2b)$. Logo, deduzimos $a = 1$ e $a + 2b = -1$. Assim, temos $a = 1$ e $2b = -1 - 1 = -2$, logo, $a = 1$ e $b = -1$.

Conclusão. As coordenadas do vetor $u = (1, -1)$ em relação à base S são $a = 1$ e $b = -1$, isto é, $u = v_1 - v_2$.

7.5 Exercícios para praticar

Exercício 7.5.1

Mostre que o espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ das matrizes de ordem 3×2 , é finitamente gerado.

Exercício 7.5.2

Seja o espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$ das matrizes quadradas 2×2 . Mostre que as matrizes:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

formam uma base do espaço vetorial $\mathbb{V} = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

Exercício 7.5.3

Seja W o subespaço vetorial das matrizes quadradas $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$, definido por:

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ onde } a = d \text{ e } c = a + b \right\}.$$

1) Qual é a dimensão de W ?

2) O conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right\},$$

é uma base do espaço vetorial W ?

Exercício 7.5.4

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e o conjunto $S = \{v_1, v_2\}$ onde $v_1 = (2, 1)$, $v_2 = (3, 2)$. Sabemos que S é uma base de $\mathbb{R}^2$. Encontrar as coordenadas a e b do vetor $u = (1, -1)$, isto é, $u = av_1 + bv_2$, em relação à base S .

CAPÍTULO 8

MUDANÇA DE BASES DE UM ESPAÇO VETORIAL

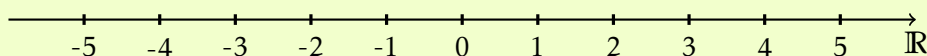


Objetivos

Neste capítulo são apresentados elementos básicos sobre a mudança de bases de um espaço vetorial. Os objetivos são de familiarizar os alunos com as técnicas de mudança de bases e suas propriedades.

8.1 Exemplos básicos com a reta dos números reais.

Lembre-se que geometricamente, o conjunto dos números reais pode ser visto como uma reta, através de uma correspondência entre os números reais e os pontos da reta:



Em outras palavras, os números reais podem ser representados por pontos sobre uma reta, na qual:

- (1) a direção positiva (à direita) é indicada por uma flecha;
- (2) escolhemos um ponto de referência arbitrário, O , denominado **origem** da reta, que corresponde ao número real 0;
- (3) dada qualquer unidade (conveniente) de medida, temos que:
 - a. cada número positivo x é representado pelo ponto da reta que está a x unidades de distância à direita, da origem O ;
 - b. cada número negativo $-x$ é representado pelo ponto sobre a reta que está a x unidades de distância, à esquerda, da origem O . Assim, todo número real é

representado por um ponto sobre a reta, e todo ponto M sobre a reta corresponde a um único número real. O número real associado ao ponto M é chamado **coordenada de M** .



Definição 8.1.1

| A reta é chamada **reta dos números reais**, ou simplesmente **reta real**.

Em geral, identificamos o ponto com sua coordenada e pensamos em um número como um ponto na reta real.

A utilização da reta para expressar o conjunto $\mathbb{R}$, que significa que a cada número real associamos um único ponto da reta e a cada ponto da reta associamos um único número real, é largamente utilizado em todas as séries do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Mas, como acabamos de lembrar, com este modelo, os números reais não estão colocados aleatoriamente sobre a reta: é preciso definir um ponto que será associado ao zero e uma unidade, que será o 1, como já sabemos. A partir disso os números reais podem ser associados aos pontos, seguindo uma **certa ordem**. Isto significa que, **dados quaisquer dois números reais, sabemos “qual vem antes”, ou, em linguagem mais adequada, “qual é o menor”**. Já sabemos como localizar os números racionais na reta; os pontos que “sobram” após a identificação dos racionais serão “preenchidos” pelos irracionais. Assim, **os números reais estão dispostos na reta da esquerda para a direita, do menor para o maior**, como acontecia para os outros conjuntos numéricos. Esta “ordem” é que vamos estabelecer formalmente agora. Isto será feito com um cuidado especial: queremos que esta ordem permaneça a mesma que estabelecemos para os números racionais.

Seja I o ponto da reta de coordenada 1, assim ao ponto I é associado o vetor $\vec{e} = \vec{OI}$. Logo, para todo ponto A da reta de coordenada a temos,

$$\vec{OA} = a\vec{e}.$$

Sejam A e B dois pontos da reta, o vetor $\vec{u} = \vec{AB}$ é definido por $\vec{u} = \vec{OB} - \vec{OA}$. Seja $\vec{\mathbb{R}}$ o conjunto de todos vetores da reta. Então, podemos verificar que o conjunto $\vec{\mathbb{R}}$ equipado com a adição e a multiplicação por um escalar é um espaço vetorial de dimensão 1. Assim, qualquer vetor $\vec{e}$ diferente de zero constitui uma base de $\vec{\mathbb{R}}$.

Sejam $\vec{e}$ e $\vec{f}$ dois vetores não nulos de $\vec{\mathbb{R}}$. Então, cada um dos conjuntos $\mathcal{B} = \{\vec{e}\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{f}\}$, representa uma base do espaço vetorial $\vec{\mathbb{R}}$. Agora, cada vetor não nulo $\vec{u} = \vec{OM}$ de $\vec{\mathbb{R}}$ pode ser escrito na base $\mathcal{B} = \{\vec{e}\}$, como na base $\mathcal{C} = \{\vec{f}\}$, da seguinte forma:

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = x\vec{e} \quad \text{e} \quad [\vec{u}]_{\mathcal{C}} = y\vec{f}.$$

Pergunta: Como podemos ligar as duas expressões anteriores do vetor $\vec{u}$, nas duas bases $\mathcal{B} = \{\vec{e}\}$ e $\mathcal{C} = \{\vec{f}\}$?

Especialmente, para os dois vetores $\vec{e}$ e $\vec{f}$, existem $a \neq 0$ e $b \neq 0$ tais que a expressão

$[\vec{f}]_B$ de $\vec{f}$ na base $B = \{\vec{e}\}$, e a expressão $[\vec{e}]_C$ de $\vec{e}$ na base $C = \{\vec{f}\}$, são dadas por:

$$[\vec{f}]_B = a\vec{e} \quad \text{e} \quad [\vec{e}]_C = b\vec{f}.$$

Assim, para todo vetor $\vec{u} = \vec{OM}$ de $\mathbb{R}$ temos:

$$[\vec{u}]_C = y\vec{f} = y(a\vec{e}) = ay\vec{e}, \text{ ou seja } x = a.y$$

porque $[\vec{u}]_B = x\vec{e}$. A expressão $x = a.y$ pode ser escrita sobre a forma matricial, com matrizes de ordem 1×1 , tomando em consideração as bases B e C :

$$[x]_B = [a]_B^C \cdot [y]_C. \quad (E)$$

Interpretação da Expressão (E). A expressão (E) mostra que a coordenada x do vetor $\vec{u}$ na base $B = \{\vec{e}\}$ é obtida a partir da coordenada y do vetor $\vec{u}$ na base $C = \{\vec{f}\}$ multiplicando y pelo número a , que é a coordenada do vetor $\vec{f}$ na base $B = \{\vec{e}\}$, isto é,

- (1) x é a coordenada do vetor $\vec{u}$ na base $B = \{\vec{e}\}$, denotada matricialmente por $[x]_B$,
- (2) y é a coordenada do vetor $\vec{u}$ na base $C = \{\vec{f}\}$ denotada matricialmente por $[y]_C$,
- (3) a é a coordenada do vetor $\vec{f}$ na base $B = \{\vec{e}\}$, denotada matricialmente por $[a]_B^C$.

A matriz $[a]_B^C$ de ordem 1×1 é chamada de **matriz de mudança da base C para a base B** .

8.2 Mudança de bases no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$.

8.2.1 Exemplo numérico

Seja o subconjunto $B = \{f_1; f_2\}$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, onde $f_1 = (2, 1)$ e $f_2 = (3, 2)$.

Podemos observar que o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0,$$

assim, $B = \{f_1; f_2\}$ é uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. Seja $C = \{e_1, e_2\}$ a base canônica do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, isto é, $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$. Para todo $v \in \mathbb{R}^2$ temos $v = y_1 f_1 + y_2 f_2$ e $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$, e escrevemos:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ e } [v]_C = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Especialmente, temos:

$$f_1 = 2e_1 + e_2 \text{ e } f_2 = 3e_1 + 2e_2.$$

Logo, para todo $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$ e $v = y_1 f_1 + y_2 f_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} v &= y_1 f_1 + y_2 f_2 \\ &= y_1(2e_1 + e_2) + y_2(3e_1 + 2e_2) \\ &= (2y_1 + 3y_2)e_1 + (y_1 + 2y_2)e_2. \end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + 3y_2 \\ x_2 = y_1 + 2y_2 \end{cases},$$

e considerando a forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, denotado por $[M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$, é chamada de matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, e escrevemos:

$$[v]_{\mathcal{C}} = [M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

Reciprocamente, como $\mathcal{B} = \{f_1; f_2\}$ é uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{cases} e_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 = a_{11}(2, 1) + a_{12}(3, 2) = (1, 0) \\ e_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 = a_{21}(2, 1) + a_{22}(3, 2) = (0, 1). \end{cases}$$

Logo, obtemos os seguintes sistemas lineares:

$$(S_1) \begin{cases} 2a_{11} + 3a_{12} = 1 \\ a_{11} + 2a_{12} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2) \begin{cases} 2a_{21} + 3a_{22} = 0 \\ a_{21} + 2a_{22} = 1 \end{cases}$$

Assim, uma computação direta nos permite obter $a_{11} = 2$, $a_{12} = -1$, $a_{21} = -3$, e $a_{22} = 2$. Logo, deduzimos

$$e_1 = 2f_1 - f_2 \text{ e } e_2 = -3f_1 + 2f_2.$$

Para todo vetor $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, temos:

$$v = x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1(2f_1 - f_2) + x_2(-3f_1 + 2f_2) = (2x_1 - 3x_2)f_1 + (-x_1 + 2x_2)f_2.$$

Como $v = y_1 f_1 + y_2 f_2$ onde $\mathcal{B} = \{f_1; f_2\}$ é uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ temos:

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2 \\ y_2 = -x_1 + 2x_2 \end{cases}.$$

Logo, obtemos a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, denotada por $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, é chamada de matriz de mudança da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, e escrevemos:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [v]_{\mathcal{C}}.$$

Pergunta: Qual é a relação entre as duas matrizes $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ e $[M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$?
Podemos verificar a seguintes identidade:

$$[M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$[M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = I_{2 \times 2} \text{ é a matriz identidade de ordem } 2 \times 2.$$

Assim, a matriz $[M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ é a matriz inversa da matriz $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$, isto é,

$$([M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = [M]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}.$$

8.2.2 Mudança de bases no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$: Caso geral

O processo do Exemplo numérico acima pode ser generalizado para o caso de mudança de bases no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$.

Sejam $\mathcal{B} = \{e_1; e_2\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1; f_2\}$ duas bases do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. Seja v um vetor de $\mathbb{R}^2$, então temos:

$$\begin{cases} v = x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ v = y_1 f_1 + y_2 f_2 \end{cases}.$$

Notação. Vamos adotar a mesma notação do Exemplo numérico acima:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ e } [v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Como f_1 e f_2 pertencem ao espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{cases} f_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \\ f_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \end{cases}.$$

Seja $v = y_1 f_1 + y_2 f_2$, vamos dar a expressão do vetor v na base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$. Temos:

$$\begin{aligned} v &= y_1 f_1 + y_2 f_2 \\ &= y_1(a_{11}e_1 + a_{12}e_2) + y_2(a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11}y_1 + a_{21}y_2)e_1 + (a_{12}y_1 + a_{22}y_2)e_2 \end{aligned}$$

. Como $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$ deduzimos que:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}.$$

Usando a fórmula matricial, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, denotada por $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, é chamada de matriz de mudança da base $\mathcal{F}$ para a base $\mathcal{B}$, e escrevemos:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} [v]_{\mathcal{F}}.$$

De maneira semelhante, como e_1 e e_2 pertencem ao espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, temos:

$$\begin{cases} e_1 = b_{11}f_1 + b_{12}f_2 \\ e_2 = b_{21}f_1 + b_{22}f_2. \end{cases}$$

Seja $v = x_1 e_1 + x_2 e_2$, vamos dar a expressão do vetor v na base $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$. Temos:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + x_2 e_2 \\ &= x_1(b_{11}f_1 + b_{12}f_2) + x_2(b_{21}f_1 + b_{22}f_2) \\ &= (b_{11}x_1 + b_{21}x_2)f_1 + (b_{12}x_1 + b_{22}x_2)f_2. \end{aligned}$$

Como $v = y_1 f_1 + y_2 f_2$ deduzimos que:

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{21}x_2 \\ y_2 = b_{12}x_1 + b_{22}x_2. \end{cases}$$

Usando a fórmula matricial, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, denotada por $[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, é chamada de matriz de mudança

da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$, e escrevemos:

$$[v]_{\mathcal{F}} = [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

Pergunta: Como no caso do exemplo numérico acima, qual é a relação entre as duas matrizes $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ e $[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$?

Como $\mathcal{B} = \{e_1; e_2\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1; f_2\}$ são duas bases do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ deduzimos que

$$\det([M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0 \quad \text{e} \quad \det([M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}) = b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0.$$

Podemos verificar que:

$$[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Logo, obtemos a seguintes identidade

$$[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} \cdot [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos formular a seguinte proposição.



Proposição 8.2.1

Temos a seguinte identidade matricial entre as matrizes de mudanças das bases $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ e $[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$:

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = I_{2 \times 2},$$

ou seja,

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = ([M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}})^{-1}.$$

8.3 Generalidade sobre a mudança de bases e suas propriedades

O processo do caso especial de mudança de bases no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, pode ser estendido para o caso mais geral dos espaços vetoriais reais de dimensão finita n .

Seja $\mathbb{W}$ um espaço vetorial real de dimensão finita n . Sejam $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ duas bases do espaço vetorial real $\mathbb{W}$. Seja v um vetor de $\mathbb{W}$, então temos:

$$\begin{cases} v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ v = y_1 f_1 + y_2 f_2 + \dots + y_n f_n. \end{cases}$$

Notação. Vamos adotar a mesma notação do exemplo numérico acima:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Como $f_1, f_2, \dots, f_n$ pertencem ao espaço vetorial real $\mathbb{V}$, temos:

$$\begin{cases} f_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ f_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ \vdots \\ f_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Seja $v = y_1f_1 + y_2f_2 + \dots + y_nf_n$, e vamos dar a expressão do vetor v na base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Temos:

$$\begin{aligned} v &= y_1f_1 + y_2f_2 + \dots + y_nf_n \\ &= y_1(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n) + y_2(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n) \\ &\quad + \dots + y_n(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n). \end{aligned}$$

Logo, deduzimos:

$$\begin{aligned} v &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n)e_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n)e_2 \\ &\quad + \dots + (a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n)e_n. \end{aligned}$$

Como $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$ deduzimos que:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{n1}y_n \\ x_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{n2}y_n \\ \vdots \\ x_n = a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

Usando a fórmula matricial, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

A matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, denotada por $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$, é chamada de matriz de mudança da base $\mathcal{F}$ para a base $\mathcal{B}$, e podemos escrever:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}[v]_{\mathcal{F}}.$$

De maneira semelhante, com o mesmo processo podemos obter a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$. Isto é, como:

$$\begin{cases} e_1 = b_{11}f_1 + b_{21}f_2 + \cdots + b_{n1}f_n \\ e_2 = b_{12}f_1 + b_{22}f_2 + \cdots + b_{n2}f_n \\ \vdots \\ e_n = b_{1n}f_1 + b_{2n}f_2 + \cdots + b_{nn}f_n, \end{cases}$$

a mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$ é dada por:

$$[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

e podemos escrever:

$$[v]_{\mathcal{F}} = [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

Por outro lado, como:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}[v]_{\mathcal{F}},$$

e como $[v]_{\mathcal{F}} = [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}$, podemos deduzir:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}[v]_{\mathcal{F}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}[v]_{\mathcal{B}}.$$

Como o vetor $v = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n$ é qualquer, podemos deduzir que:

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = I_{n \times n}, \quad \text{é a matriz identidade de ordem } n \times n.$$

Assim, obtemos a seguinte generalização da Proposição 8.2.1.



Proposição 8.3.1

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita n e $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Então, temos a seguinte identidade matricial entre as matrizes de mudança das bases $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$ e $[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$:

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} \cdot [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = I_{n \times n},$$

ou seja,

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = ([M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}})^{-1}.$$

8.4 Exercícios Resolvidos

Exercício 8.4.1

Sejam as duas bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ tais que:

$$e_1 = (2, 1), \quad e_2 = (3, 2), \quad f_1 = (1, 0) \quad \text{e} \quad f_2 = (0, 1).$$

Determine $[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}}$, a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$

Solução. Como $\mathcal{B}$ é uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, temos:

$$f_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \quad \text{e} \quad f_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2.$$

onde a_{11} , a_{21} , a_{12} e a_{22} são números reais. Logo, deduzimos:

$$(1, 0) = a_{11}(2, 1) + a_{21}(3, 2) = (2a_{11} + 3a_{21}, a_{11} + 2a_{21}),$$

$$(0, 1) = a_{12}(2, 1) + a_{22}(3, 2) = (2a_{12} + 3a_{22}, a_{12} + 2a_{22}).$$

Assim, obtemos os dois sistemas lineares:

$$(S_1) \begin{cases} 2a_{11} + 3a_{21} = 1 & (1) \\ a_{11} + 2a_{21} = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{e} \quad (S_2) \begin{cases} 2a_{12} + 3a_{22} = 0 & (1) \\ a_{12} + 2a_{22} = 1 & (2) \end{cases}.$$

Para o sistema linear (S_1) : Multiplicando a equação (2) por -2 e somando com a equação (1), obtemos $a_{21} = -1$. E usando a equação (2) temos: $a_{11} = -2a_{21} = 2$.

Para o sistema linear (S_2) : Multiplicando a equação (2) por -2 e somando com a equação (1), obtemos $a_{22} = 2$. E usando a equação (2) temos: $a_{12} = 1 - 2a_{22} = -3$.

Logo, a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$ é dada por:

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 8.4.2

Sejam as duas bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. A matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$ é dada por:

$$[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Seja $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Determine as coordenadas de v com relação a base $\mathcal{B}$.

Exemplo numérico. Estudar o caso de $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Solução. Seja $[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz de mudança da base $\mathcal{F}$ para a base $\mathcal{B}$. Seja $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, temos a relação matricial:

$$[v]_{\mathcal{F}} = [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}}.$$

Logo, deduzimos:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 2x + 3y \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x = a \\ 2x + 3y = b \end{cases}.$$

Então, obtemos:

$$x = a \quad \text{e} \quad y = \frac{b - 2a}{3}.$$

Assim, temos que a matriz coluna de coordenadas do vetor v com relação a base $\mathcal{B}$, é dada por:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ \frac{b - 2a}{3} \end{bmatrix}.$$

Para $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, temos $a = 2$ e $b = 3$. Logo, a matriz coluna de coordenadas do vetor v com relação a base $\mathcal{B}$, é dada por:

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$



Exercício 8.4.3

Sejam as duas bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. A matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$ é dada por:

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. Determine $[v]_{\mathcal{B}}$ onde $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. 2. Seja $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Determine $[v]_{\mathcal{F}}$. |
|---|

Solução. 1. Seja $[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$ a matriz de mudança da base $\mathcal{F}$ para a base $\mathcal{B}$. Seja $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,

temos a relação matricial:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} [v]_{\mathcal{F}}.$$

Logo, deduzimos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, temos $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Seja $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Tomando em consideração a equação matricial:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} [v]_{\mathcal{F}},$$

obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x + z \\ -x + z \end{bmatrix}.$$

Logo, temos o seguinte sistema linear de 3 equações com 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = 1 & (1) \\ x + z = 2 & (2) \\ -x + z = 4 & (3) \end{cases}$$

Somando as equações (2) e (3), temos:

$$2z = 6, \quad \text{ou seja,} \quad z = 3.$$

Assim, a equação (2) implica $x = -1$, e usando a equação (1) obtemos $y = -3$. Logo,

temos $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Exercício 8.4.4

Sejam as duas bases $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, f_3\}$ do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. A matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$ é dada por:

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Seja $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. Determine $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

2. Deduzir a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{F}$.

Solução. 1. Tomando em consideração a equação matricial:

$$[v]_{\mathcal{B}} = [M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} [v]_{\mathcal{F}},$$

obtemos:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ x - z \\ x + z \end{bmatrix}.$$

Logo, temos o seguinte sistema linear de 3 equações com 3 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x - y = a & (1) \\ x - z = b & (2) \\ x + z = c & (3) \end{cases}$$

Somando as equações (2) e (3), temos:

$$2x = b + c, \quad \text{ou seja,} \quad x = \frac{b + c}{2}.$$

Assim, a equação (2) implica $z = c - x = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - c$, ou seja, $z = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c$, e usando a

equação (1) obtemos $y = 2x - a = -a + b + c$. Logo, temos $[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ -a + b + c \\ \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{bmatrix}$.

2. Usando o item 1, temos

$$[v]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ -a + b + c \\ \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

Isto é, temos:

$$[v]_{\mathcal{F}} = [M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}},$$

onde $[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}}$ a matriz de mudança da base $\mathcal{F}$ para a base $\mathcal{B}$, dada por:

$$[M]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Exercício 8.4.5

Seja $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real das funções polinomiais de grau 1. Sejam as duas bases $\mathcal{B} = \{2, x\}$ e $\mathcal{F} = \{1, 1+x\}$. Determine a matriz de mudança da base $\mathcal{B} = \{2, x\}$ para a base $\mathcal{F} = \{1, 1+x\}$.

Solução. Para determinar a matriz de mudança da base $\mathcal{B} = \{2, x\}$ para a base $\mathcal{F} = \{1, 1+x\}$, vamos escrever cada elemento da base $\mathcal{F} = \{1, 1+x\}$ como combinação linear dos dois elementos da base $\mathcal{B} = \{2, x\}$. Assim, temos:

$$\begin{cases} 1 = a_{11} \cdot 2 + a_{21}x & (1) \\ 1+x = a_{12} \cdot 2 + a_{22}x & (2) \end{cases}.$$

Como $\mathcal{B} = \{2, x\}$ é uma base as equações (1) e (2) implicam que:

$$\begin{cases} 2a_{11} = 1 \\ a_{12} = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2a_{12} = 1 \\ a_{22} = 1 \end{cases}.$$

Então, a matriz de mudança da base $\mathcal{B} = \{2, x\}$ para a base $\mathcal{F} = \{1, 1+x\}$ é dada por:

$$[M]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

CAPÍTULO 9

TRANSFORMAÇÕES LINEARES



Objetivos

Neste capítulo são apresentadas propriedades básicas sobre as transformações lineares de espaços vetoriais e as matrizes associadas. Os objetivos gerais são de familiarizar com essas propriedades, e também com o uso das propriedades de matrizes em relação às transformações lineares e vice-versa.

9.1 Transformações Lineares



Definição 9.1.1

Dados dois espaços vetoriais reais U e V , uma **transformação linear** T de U em V , é um tipo de aplicação $T : U \rightarrow V$ que associa a cada vetor de U um vetor de V , e que satisfaz as seguintes condições adicionais:

- (a) $T(u + v) = T(u) + T(v)$, para todos u e v em U ,
- (b) $T(a.u) = aT(u)$, para todo u em U e a em $\mathbb{R}$.

Em outras, palavras, uma **transformação linear** de U em V , é um tipo especial de "lei" pela qual a cada elemento de U está associado um único elemento de V , isto é, que a cada vetor de U associa um outro vetor de V :

$$T : \{\text{vetores de } U\} \rightarrow \{\text{vetores de } V\}$$

e verificando as duas condições adicionais (a) e (b). As duas condições (a) e (b) da definição são equivalentes à seguinte única condição:

$$T(au + bv) = aT(u) + bT(v), \quad (C)$$

para todos vetores $u, v \in U$ e todos $a, b \in \mathbb{R}$.

Em geral, pensamos em uma transformação linear como “**transformando um vetor de U em outro vetor de V** ” de forma linear, isto é, satisfazendo a condição (C) acima.



Exemplo 9.1.2

Seja $O : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{V}$ a aplicação assim definida: $O(u) = 0$ (vetor nulo de $\mathbb{V}$). Verifiquemos que O é linear:

$$(a) \quad O(u + v) = 0 = 0 + 0 = O(u) + O(v),$$

$$(b) \quad O(a \cdot u) = 0 = a \cdot 0 = a \cdot O(u).$$

A aplicação O se denomina transformação linear nula de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{V}$.



Exemplo 9.1.3

Seja $I : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U}$ a aplicação assim definida: $I(u) = u$. Verifiquemos que I é linear:

$$(a) \quad I(u + v) = u + v = I(u) + I(v),$$

$$(b) \quad I(a \cdot u) = a \cdot u = a \cdot I(u).$$

A aplicação I se denomina transformação linear identidade de $\mathbb{U}$ em $\mathbb{U}$ ou o operador idêntico de $\mathbb{U}$.



Exemplo 9.1.4

A aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(u) = 5u$ é a transformação linear que transforma um vetor de $\mathbb{R}^3$ no vetor que tem o triplo do comprimento. Utilizamos a definição da transformação linear para verificar que a transformação T é de fato linear:

$$T(u + v) = 5(u + v) = 5u + 5v = T(u) + T(v),$$

e

$$T(au) = 5(au) = a \cdot 5u = aT(u).$$

Usando a segunda caracterização de uma transformação linear, temos:

$$T(au + bv) = 5(au + bv) = a \cdot 5u + b \cdot 5v = aT(u) + bT(v).$$

Então, T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.



Definição 9.1.5

Seja V um espaço vetorial real. Uma transformação linear $T : V \rightarrow V$ é chamada também de **operador linear**.



Exemplo 9.1.6

Consideramos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que transforma vetores de $\mathbb{R}^2$ em vetores de $\mathbb{R}^3$, dada pela fórmula

$$T(x, y) = (x - 3y, 3x + 5y, -x + y). \quad (9.1)$$

Esta fórmula nos diz, por exemplo, que os vetores

$$u = (1, -1) \quad \text{e} \quad v = (0, 3)$$

são transformados nos vetores de $\mathbb{R}^3$ dados por:

$$T(u) = (1 - 3 \cdot (-1), 3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1), -1 + (-1)) = (4, -2, -2)$$

e

$$T(v) = (0 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 0 + 5 \cdot 3, -0 + 3) = (-9, 15, 3).$$

A transformação T é linear. De fato, sejam $u = (x, y)$ e $v = (z, t)$ em $\mathbb{R}^2$, Temos que:

$$T(u + v) = T(x + z, y + t) = ((x + z) - 3(y + t), 3(x + z) + 5(y + t), -(x + z) + (y + t)).$$

Logo, obtemos:

$$T(u + v) = ((x - 3y) + (z - 3t), (3x + 5y) + (3z + 5t), (-x + y) + (-z + t)).$$

Assim, deduzimos,

$$T(u + v) = (x - 3y, 3x + 5y, -x + y) + (z - 3t, 3z + 5t, -z + t) = T(u) + T(v).$$

Por outro lado, para todo número real a em $u = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$, temos:

$$T(a.u) = T(a.x, a.y) = (a.x - 3a.y, 3a.x + 5a.y, -a.x + a.y),$$

logo, temos

$$T(a.u) = a.(x - 3y, 3x + 5y, -x + y).$$

Assim, obtemos:

$$T(a.u) = a.(x - 3y, 3x + 5y, -x + y) = a.T(x, y).$$

Logo, as duas condições (a) e (b) de linearidade de uma transformação linear são verificadas pela transformação T . Portanto, a transformação T é linear.



Exemplo 9.1.7

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação definida por $T(x, y, z) = (x, 2y - z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que T é uma transformação linear.

Solução. Sejam $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ dois vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, e a um número real. Temos:

$$T(u + v) = T(x + x', y + y', z + z') = (x + x', 2(y + y') - (z + z'))$$

Logo, temos:

$$T(u + v) = (x + x', 2y + 2y' - z - z').$$

Assim, deduzimos:

$$T(u + v) = (x, 2y - z) + (x', 2y' - z') = T(u) + T(v).$$

De maneira semelhante, temos:

$$T(a \cdot u) = T(ax, ay, az) = (ax, 2ay - az) = a \cdot T(u).$$

Assim, a transformação T é uma transformação linear.



Proposição 9.1.8

Sejam U e V dois espaços vetoriais reais. Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear. Então, temos as seguintes propriedades:

- P1) $T(0) = 0$, isto é, T transforma o vetor nulo de U no vetor nulo de V .
- P2) $T(-u) = -T(u)$, para todo u em U .
- P3) $T(u - v) = T(u) - T(v)$, para todos u e v em U .
- P4) Se W é subespaço vetorial de U , então $T(W) = \{T(u), u \in W\}$ é subespaço vetorial de V . Em particular, se $W = U$ temos $T(U) = \{T(u), u \in U\}$ é subespaço vetorial de V .
- P5) $T(u_1 + u_2 + \dots + u_s) = T(u_1) + T(u_2) + \dots + T(u_s)$, para todos $u_1, \dots, u_s$ em U .

Prova. Sejam U e V dois espaços vetoriais e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear.

P1). Temos $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$, assim deduzimos que $T(0) = 0$.

P2). Sabemos que $T(u - u) = T(0)$, como $T(u - u) = T(u + (-u)) = T(u) + T(-u)$, logo $T(u - u) = T(u) + T(-u) = 0$. Assim, obtemos: $T(-u) = -T(u)$.

P3). Como T é linear temos $T(u-v) = T(u+(-v)) = T(u)+T(-v)$. Usando a propriedade P2) temos $T(-v) = -T(v)$, então deduzimos que: $T(u-v) = T(u) - T(v)$.

P4). Sejam W um subespaço vetorial de U e $T(W) = \{T(u), u \in W\}$. Observamos que $T(W) = \{T(u), u \in W\}$ é um subconjunto de V .

a) Com a propriedade **P1)** sabemos que $T(0) = 0$, então $0 \in T(W)$.

b) Sejam w_1 e w_2 em $T(W)$, então existem u_1 e u_2 em U tais que $w_1 = T(u_1)$ e $T(u_2) = w_2$. Logo, temos

$$w_1 + w_2 = T(u_1) + T(u_2) = T(u_1 + u_2) \in T(W).$$

Assim, obtemos $w_1 + w_2 \in T(W)$. c) Sejam w em $T(W)$ e $a \in \mathbb{R}$. Então existe u em U tal que $w = T(u)$. Logo, temos:

$$a.w = a.T(u) = T(a.u) \in T(W).$$

Logo, temos $a.w \in T(W)$. Portanto, $T(W)$ é um subespaço vetorial de V .

P5). A demonstração é obtida por um raciocínio por indução sobre n . $\square$

A propriedade P4) mostra claramente que uma transformação linear $T : U \rightarrow V$ transforma o subespaço vetorial de U em um subespaço vetorial de V . Em outras palavras, uma transformação linear preserva a estrutura do espaço vetorial.



Exemplo 9.1.9

Verificar se a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y + 2, x + y)$ é uma transformação linear.

Solução. A transformação T não é linear, pois $T(0)$ é diferente de $(0, 0)$, isto é, temos: $T(0, 0) = (2, 0)$ que é diferente de $(0, 0)$. Logo, a transformação T não é uma transformação linear.

9.2 Núcleo e imagem



Definição 9.2.1

Sejam U e V dois espaços vetoriais. Seja

$$T : U \rightarrow V,$$

uma transformação linear de U em V . Indica-se por $\text{Ker}(T)$ o **núcleo de T** , o seguinte subconjunto de U :

$$\text{Ker}(T) = \{u \in U, T(u) = 0\}.$$

Exemplo 9.2.2

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - y, 0, 0)$. Achar o núcleo de T .

Solução. Temos:

$$(x, y) \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(x, y) = (x - y, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

Logo, temos que: $x - y = 0$, ou seja, $x = y$. Assim, obtemos:

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, T(x, y) = 0\} = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Exemplo 9.2.3

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear dada por $T(x, y) = (x, 0)$.

1. $(0, 2)$ pertence a $\text{Ker}(T)$?
2. $(2, 3)$ pertence a $\text{Ker}(T)$?
3. Encontre $\text{Ker}(T)$.

Solução. 1- Temos: $T(0, 2) = (0, 0)$, logo $(0, 2) \in \text{Ker}(T)$.

2- Temos: $T(2, 3) = (2, 0)$, logo $(2, 3) \notin \text{Ker}(T)$.

3- Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se $T(x, y) = (0, 0)$, deduzimos que $T(x, y) = (x, 0) = (0, 0)$. Logo, temos: $x = 0$. Assim, temos:

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, T(x, y) = 0\} = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}.$$

Proposição 9.2.4

Sejam U e V dois espaços vetoriais. Seja

$$T : U \rightarrow V,$$

uma transformação linear de U em V . Então, temos:

- (a) $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de U .
- (b) A transformação linear T é injetora se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

Prova. (a) O conjunto $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de U . De fato, vamos verificar as 3 condições de subespaço vetorial.

C1) Sabemos que $T(0) = 0$, logo temos $0 \in \text{Ker}(T)$.

C2) Sejam u e v em $\text{Ker}(T)$ então temos $T(u) = T(v) = 0$. Como T é uma transformação linear deduzimos:

$$T(u + v) = T(u) + T(v) = 0 + 0 = 0.$$

Assim, temos $u + v \in \text{Ker}(T)$.

C3) Sejam $u \in \text{Ker}(T)$ e $a \in \mathbb{R}$. Como $T(u) = 0$ e T é linear, obtemos:

$$T(a.u) = a.T(u) = a.0 = 0.$$

Logo, temos $a.u \in \text{Ker}(T)$.

Conclusão: O conjunto $\text{Ker}(T)$ é um subespaço vetorial de U .

(b). A transformação linear T é injetora se, e somente se, $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

(i) Suponhamos que T é injetora. Seja $u \in U$ tal que $T(u) = 0$, como $T(0) = 0$ temos que $T(u) = T(0)$, e porque T é injetiva, temos então $u = 0$. Logo, $\text{Ker}(T) = \{0\}$.

(ii) Suponhamos que $\text{Ker}(T) = \{0\}$. Sejam u e v em U tais que $T(u) = T(v)$. Como T é linear deduzimos que $T(u) - T(v) = T(u - v) = 0$. Logo, temos $u - v \in \text{Ker}(T) = \{0\}$. Então, obtemos que $u = v$. Conclusão, a transformação linear T é injetora. $\square$



Definição 9.2.5

Sejam U e V dois espaços vetoriais. Seja

$$T : U \longrightarrow V,$$

uma transformação linear de U em V . A imagem de uma transformação linear T definida por:

$$\text{Im}(T) = \{T(u), u \in U\},$$

é chamada **conjunto imagem de T** .

Podemos observar que o conjunto imagem de T é dado por $\text{Im}(T) = T(U)$.

Como a Propriedade **P4)** da Proposição 9.1.8, vimos que o conjunto $T(U) = \text{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de V . Assim, deduzimos a seguinte proposição:



Proposição 9.2.6

Sejam U e V dois espaços vetoriais e $T : U \longrightarrow V$ uma transformação linear de U em V . A imagem da transformação linear $\text{Im}(T) = \{T(u), u \in U\}$ é um subespaço vetorial de V .

Se U é um espaço vetorial de dimensão finita, existe uma relação fundamental entre as dimensões dos dois subespaços vetoriais $\text{Ker}(T)$ e $\text{Im}(T)$, dada pelo teorema a seguir.



Teorema 9.2.7

Sejam U e V dois espaços vetoriais e

$$T : U \longrightarrow V,$$

uma transformação linear de U em V . Então, se U é um espaço vetorial de

dimensão finita, temos:

$$\dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Prova. Sejam U e V dois espaços vetoriais e

$$T : U \longrightarrow V$$

uma transformação linear. Seja $B_1 = \{e_1, \dots, e_r\}$ uma base de $\text{Ker}(T)$. Essa base pode ser estendida a uma base $B_2 = \{e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s\}$ de U (ver Capítulo 3 - Parte II). Vamos mostrar que $B = \{T(f_1), \dots, T(f_s)\}$ é uma base de $\text{Im}(T)$. Vamos verificar que $B = \{T(f_1), \dots, T(f_s)\}$ é que gerador de $\text{Im}(T)$ e L.I.

(a) O conjunto $B = \{T(f_1), \dots, T(f_s)\}$ é um sistema gerador de subespaço vetorial $\text{Im}(T)$. Seja $v \in \text{Im}(T)$ então existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Como B_2 é uma base de U , temos; $u = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r + b_1 f_1 + \dots + b_s f_s$, onde $a_1, \dots, a_r$ e $b_1, \dots, b_s$ são números reais. Assim, como T é linear, temos:

$$\begin{aligned} v = T(u) &= T(a_1 e_1 + \dots + a_r e_r + b_1 f_1 + \dots + b_s f_s) \\ &= a_1 T(e_1) + \dots + a_r T(e_r) + b_1 T(f_1) + \dots + b_s T(f_s). \end{aligned}$$

como $e_1, \dots, e_r \in \text{Ker}(T)$ deduzimos que:

$$v = b_1 T(f_1) + \dots + b_s T(f_s) \in [B] = [T(f_1), \dots, T(f_s)].$$

Assim, temos $\text{Im}(f) = [B]$.

(b) O conjunto $B = \{T(f_1), \dots, T(f_s)\}$ é L.I. De fato, se $b_1 T(f_1) + \dots + b_s T(f_s) = 0$, onde $b_1, \dots, b_s$ são números reais, então:

$$T(b_1 f_1 + \dots + b_s f_s) = b_1 T(f_1) + \dots + b_s T(f_s) = 0,$$

Logo, temos $b_1 f_1 + \dots + b_s f_s \in \text{Ker}(T)$. Assim, deduzimos que:

$$b_1 f_1 + \dots + b_s f_s = a_1 e_1 + \dots + a_r e_r \Leftrightarrow b_1 f_1 + \dots + b_s f_s + (-a_1) e_1 + \dots + (-a_r) e_r = 0,$$

como B_2 é uma base de U , deduzimos que $b_1 = \dots = b_s = 0$. Logo, $B = \{T(f_1), \dots, T(f_s)\}$ é L.I. Portanto, temos:

$$\dim(\text{Im}(T)) = s.$$

Conclusão, como $\dim(\text{Ker}(F)) = r$, $\dim(U) = r + s$ e $\dim(\text{Im}(F)) = s$, então $\dim(U) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$. $\square$



Exemplo 9.2.8

Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ transformação linear.

1. Se $\dim(\text{ker}(T)) = 2$, determine $\dim(\text{Im}(T))$.

2. Se $\dim(\text{Im}(T)) = 3$, determine $\dim(\text{Ker}(T))$.

Solução.

1) Sabemos que $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^4)$ e $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, então: $2 + \dim(\text{Im}(T)) = 4$. Assim, deduzimos que: $\dim(\text{Im}(T)) = 2$.

2) Com o mesmo método, temos: $\dim(\text{Ker}(T)) = 4 - \dim(\text{Im}(T)) = 4 - 2 = 2$.

Como consequência do Teorema 9.2.7, temos o seguinte importante corolário.



Corolário 9.2.9

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ com a mesma dimensão finita r , isto é, $r = \dim(U) = \dim(V)$. Seja $T : U \rightarrow V$, uma transformação linear. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

A2 T é bijetora.

A1 T é sobrejetora.

A3 T é injetora.

A4 T transforma uma base de U em uma base de V (isto é, se $B = \{e_1, \dots, e_r\}$ é uma base de U , então $T(B) = \{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ é base de V).

Prova. Para estabelecer a equivalência entre as 4 afirmações da proposição, vamos provar as seguintes implicações:

$$A1) \implies A2) \implies A3) \implies A4) \implies A1).$$

Implicação $A1) \implies A2)$. Suponha que T é bijetora, então pela definição da bijetividade a transformação linear T é sobrejetora.

Implicação $A2) \implies A3)$. Suponha que T é sobrejetora então:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V) = r.$$

Pelo Teorema 9.2.7 temos:

$$r = \dim(U) = \dim(U) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Ker}(T)) + r,$$

logo, temos: $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$, assim $\text{Ker}(T) = \{\mathbf{0}\}$ e consequentemente a transformação linear T é injetora.

Implicação $A3) \implies A4)$. Suponha que T é injetora e seja $B = \{e_1, \dots, e_r\}$ uma base de U . O conjunto $T(B) = \{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ é L.I em V . De fato, se

$$\alpha_1 T(e_1) + \dots + \alpha_r T(e_r) = T(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r) = \mathbf{0}_V,$$

como T é injetora deduzimos que:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = \mathbf{0}_U.$$

Por outro lado, $B = \{e_1, \dots, e_r\}$ é uma base de U , assim: $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. Logo, o conjunto $T(B) = \{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ é um sistema de r vetores L.I em V e como $\dim(V) = r$, deduzimos que $T(B) = \{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ é uma base de V .

Implicação $A4) \implies A1)$. Seja $B = \{e_1, \dots, e_r\}$ uma base de U . Suponha que $T(B) = \{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ é uma base de V . Seja $v \in V$ então temos:

$$v = \alpha_1 T(e_1) + \dots + \alpha_r T(e_r) = T(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r).$$

Assim, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$, onde $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r$. Logo, a transformação linear T é sobrejetora.

Sejam $u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r$ e $v = \beta_1 e_1 + \dots + \beta_r e_r$ dois vetores de U . Se $T(u) = T(v)$, como T é linear temos:

$$\alpha_1 T(e_1) + \dots + \alpha_r T(e_r) = \beta_1 T(e_1) + \dots + \beta_r T(e_r).$$

Por outro lado, $T(B) = \{T(e_1), \dots, T(e_r)\}$ é uma base de V logo deduzimos:

$$\alpha_1 = \beta_1 \cdots \alpha_r = \beta_r.$$

Assim, a transformação linear T é injetora.

Conclusão: a transformação linear T é bijetora. $\square$

9.3 Isomorfismo e Automorfismo



Definição 9.3.1

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \longrightarrow V$, uma transformação linear.

D1) Dizemos que T é um isomorfismo do espaço vetorial U no espaço vetorial V se a transformação linear T é bijetora.

D2) Se $U = V$, dizemos que $T : U \longrightarrow U$ é um automorfismo se T é bijetora.



Exemplo 9.3.2

Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O operador idêntico $I : U \longrightarrow U$ dada por $I(u) = u$, para todo vetor u do espaço é trivialmente um automorfismo de U .



Exemplo 9.3.3

Seja o espaço vetorial $\mathcal{P}_1 = \{p(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}\}$ dos polinômios de grau 1. Seja a transformação:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1,$$

definida por:

$$T(a, b) = a + (a + b)t.$$

- 1) Mostrar que T é linear.
- 2) Mostrar que T é um isomorfismo.

Solução. 1) A transformação T é linear. De fato, sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ em $\mathbb{R}^2$, temos:

$$T(u+v) = T(a+c, b+d) = (a+c) + (a+c+b+d)t = a + (a+b)t + c + (c+d)t = T(u) + T(v).$$

Logo, temos $T(u+v) = T(u) + T(v)$.

Sejam $u = (a, b)$ em $\mathbb{R}^2$ e x um real, temos:

$$T(x.u) = T(x.a, x.b) = x.a + (x.a + x.b)t = x.(a + (a+b)t) = x.T(u).$$

Logo, temos $T(x.u) = x.T(u)$.

Conclusão: T é uma transformação linear.

2) A transformação T é um isomorfismo. De fato, vamos provar que T é injetora e sobrejetora.

a. A transformação T é injetora. Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ em $\mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = T(v)$. Logo, temos:

$$a + (a+b)t = c + (c+d)t \Rightarrow a = c \text{ e } a+b = c+d.$$

Logo, temos $a = c$ e $b = d$. Assim, T é injetora.

b. A transformação T é sobrejetora. Sejam $p(t) = a + bt$, para $u = (a, b-a)$ temos:

$$T(u) = T(a, b-a) = a + (a+b-a)t = a + bt.$$

Logo, T é sobrejetora.

Conclusão: Como $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1$ são espaços vetoriais de mesma dimensão 2, a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ é um isomorfismo.



Proposição 9.3.4

Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e $T : U \rightarrow V$, uma transformação linear. Se T é um isomorfismo de U em V , então a transformação inversa $T^{-1} : V \rightarrow U$, também é um isomorfismo de V em U .

A proposição acima nos diz que se $T : U \rightarrow V$ é um isomorfismo, então $T^{-1} : V \rightarrow U$ a transformação inversa de T existe e ela é um isomorfismo (isomorfismo inverso de T). Dizemos nesse caso, que U e V são espaços vetoriais isomorfos. Quando dois espaços vetoriais U e V são isomorfos, eles tem as mesmas propriedades algébricas, e muitas vezes podem ser considerados indistintos.

Usando a noção de dimensão, podemos caracterizar a existência de isomorfismo entre dois espaços vetoriais de dimensões finitas.

Proposição 9.3.5

Dois espaços U e V de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, $\dim U = \dim V$.

Exemplo 9.3.6

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow V$, uma transformação linear.

1. Se $\dim(\text{Ker}(T)) = 2$, qual é a dimensão de $\dim(\text{Im}(T))$?
2. Se T é injetora e sobrejetora qual é a dimensão de V ?

Solução.

1) Como $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^5)$, temos: $2 + \dim(\text{Im}(T)) = 5$. Logo, temos: $\dim(\text{Im}(T)) = 3$.

2) Se T é injetora, temos: $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$. Assim, temos $\dim(\text{Im}(T)) = 5$.

Por outro lado, se T é sobrejetora temos $\text{Im}(T) = V$, logo $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$. Assim, temos:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V) = 5.$$

9.4 Operações com Transformações lineares

Apresentamos as operações usuais com as transformações lineares, obtendo novas transformações lineares a partir de transformações lineares dadas.

Definição 9.4.1

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam duas transformações lineares $T : V \rightarrow W$ e $S : V \rightarrow W$. Definimos a soma de T e S , denotada por $T + S$, como a transformação: $T + S : V \rightarrow W$, definida por:

$$(T + S)(v) = T(v) + S(v), \text{ para todo } v \in V.$$

Seja k um número real, definimos o produto de k por T e denotamos por kT a transformação: $kT : V \rightarrow W$, definida por:

$$(kT)(v) = k.T(v), \text{ para todo } v \in V.$$

Para toda v_1, v_2 e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$(S + T)(v_1 + kv_2) = S(v_1 + kv_2) + T(v_1 + kv_2) = S(v_1) + kS(v_2) + T(v_1) + kT(v_2),$$

logo, temos:

$$(S + T)(v_1 + kv_2) = (S + T)(v_1) + k(S + T)(v_2).$$

Se $a \in \mathbb{R}$ temos:

$$(aT)(v_1 + kv_2) = a.T(v_1 + kv_2) = (a.T)(v_1) + k(a.T)(v_2).$$

Logo, temos a seguinte propriedade:



Proposição 9.4.2

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões finitas n e m , respectivamente. Sejam duas transformações lineares $T : V \rightarrow W$ e $S : V \rightarrow W$. Então, as transformações $T + S$ e kT ($k \in \mathbb{R}$) são transformações lineares.



Exemplo 9.4.3

Sejam as duas transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $T(x, y) = (x, 2x + y)$ e $S(x, y) = (x + y, x - 2y)$.

1. Determine as transformações lineares $T + S$.
2. Determine as transformações lineares $2T$ e $3S$.

Solução. 1) Temos : $(T + S)(x, y) = T(x, y) + S(x, y) = (x, 2x + y) + (x + y, x - 2y) = (2x + y, 3x - y)$, logo, $(T + S)(x, y) = (2x + y, 3x - y)$.

2) Temos $(2T)(x, y) = 2T(x, y) = 2(x, 2x + y) = (2x, 4x + 2y)$. Logo, $(2T)(x, y) = (2x, 4x + 2y)$.

2) De maneira semelhante, temos:

$$(3S)(x, y) = 3S(x, y) = 3(x + y, x - 2y) = (3x + 3y, 3x - 6y).$$

9.4.1 Os espaços vetoriais $\mathcal{L}(V, W)$, $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ e $\mathcal{L}(V)$

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Seja $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto das transformações lineares de V em W . As operações da soma $T + S$ e do produto por um escalar kT definem uma adição e uma multiplicação por um escalar em $\mathcal{L}(V, W)$. Com essas operações o conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Se $W = \mathbb{R}$ o espaço vetorial $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ é chamado **espaço dual** do espaço vetorial V . Os elementos de $\mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ são chamados de **funcionais lineares** em V .

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Se $V = W$ escrevemos $\mathcal{L}(V, W) = \mathcal{L}(V)$ o conjunto dos operadores lineares de V em V . As operações da soma $T + S$ e do produto por um escalar kT definem uma adição e uma multiplicação por um escalar em $\mathcal{L}(V)$, os quais são válidas. Com essas operações o conjunto $\mathcal{L}(V)$ torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

9.4.2 A operação da composição das transformações

Nas seções anteriores deste capítulo definimos as operações de adição e de multiplicação por um escalar das transformações lineares. Isto é, para V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$, o conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ das transformações lineares de V em W , tem também uma estrutura de espaço vetorial real. Nesta seção vamos definir a operação da composição das transformações lineares. No próximo capítulo, Essa nova operação entre as transformações lineares vai ser relacionada a multiplicação das matrizes.

Sejam V , W e U três espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam duas transformações lineares $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow U$. Então, a composição das duas transformações T e S , denotada por $SoT : V \rightarrow U$, é definida por:

$$SoT(v) = S(T(v)), \text{ para todo } v \in V.$$

Para toda v_1, v_2 e $k \in \mathbb{R}$, temos:

$$SoT(v_1 + kv_2) = S(T(v_1 + kv_2)) = S(T(v_1) + kT(v_2)) = S(T(v_1)) + S(kT(v_2)),$$

assim obtemos:

$$SoT(v_1 + kv_2) = S(T(v_1)) + kS(T(v_2)),$$

ou seja,

$$SoT(v_1 + kv_2) = S(T(v_1)) + kS(T(v_2)) = SoT(v_1) + kSoT(v_2).$$

Consequentemente, podemos formular a seguinte proposição.



Proposição 9.4.4

Sejam V , W e U três espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. Sejam duas transformações lineares $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow U$. Então, a transformação composta $SoT : V \rightarrow U$ de T e S é uma transformação linear.



Exemplo 9.4.5

Sejam as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $T(x, y) = (x, 2x + y)$ e $S(x, y) = (x + y, x - 2y)$.

1. Determine as transformações lineares ToS e SoT .

2. Comparando as expressões das transformações lineares ToS e SoT , que podemos concluir sobre a composição das transformações lineares?

Solução.

1) Temos:

$$ToS(x, y) = T(x + y, x - 2y) = (x + y, 2x - y) \text{ e } SoT(x, y) = S(x, 2x + y) = (2x + y, -x - 2y).$$

2) As expressões das duas transformações lineares ToS e SoT são diferentes.

O conjunto $\mathcal{L}(V)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja T em $\mathcal{L}(V)$ podemos definir a potenciação para expoentes naturais assim;

$$T^0 = I \text{ operador idêntico}, T^1 = T, T^2 = ToT, T^3 = ToToT.$$

Contudo é bom observar que para essa potenciação podemos ter resultados, a princípio, curiosos, como por exemplo:

$$T^2 = ToT = \mathbf{I}, T^3 = ToToT = \mathbf{O},$$

assim:

- Quando $T^2 = \mathbf{I}$, onde o operador $\mathbf{I}$ identidade, e $T \neq \mathbf{I}$, dizemos que T é um elemento idempotente, ou um projetor.
- Quando $T^n = \mathbf{O}$, onde $\mathbf{O}$ é o operador nulo, para $n \geq 2$, dizemos que T é um operador nilpotente.



Exemplo 9.4.6

O operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (x, -y)$ é idempotente pois:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(x, -y) = (x, y) = \mathbf{I}(x, y).$$

o que nos garante que $T^2 = \mathbf{I}$, o operador idêntico.



Exemplo 9.4.7

Seja o operador linear $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $T(x, y) = (0, x)$ é nilpotente pois:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(0, x) = (0, 0) = \mathbf{O}(x, y),$$

o que nos garante que $T^2 = \mathbf{O}$, o operador nulo.

9.5 Exercícios Resolvidos



Exercício 9.5.1

Seja a transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(u) = 3u$, isto é, a transformação T transforma um vetor de $\mathbb{R}^3$ no vetor que tem o triplo do comprimento. Provar que a transformação T é uma transformação linear.

Solução. Utilizamos a própria fórmula da transformada para verificar que a transformação T é de fato linear: $T(u + v) = 3(u + v) = 3u + 3v = T(u) + T(v)$ e $T(a \cdot u) = 3(a \cdot u) = a \cdot 3u = aT(u)$. Assim, usando a segunda caracterização de uma transformação linear, temos:

$$T(au + bv) = 3(au + bv) = a \cdot 3u + b \cdot 3v = aT(u) + bT(v).$$

Então, T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

Exercício 9.5.2

Consideramos a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que transforma vetores de $\mathbb{R}^2$ em vetores de $\mathbb{R}^3$, dada pela fórmula $T(x, y) = (x - 3y, 3x + 5y, -x + y)$. Provar que T é uma transformação linear.

Solução. Sejam $u = (x, y)$ e $v = (z, t)$ dois vetores de $\mathbb{R}^2$. Temos que:

$$T(u + v) = T(x + z, y + t) = ((x + z) - 3(y + t), 3(x + z) + 5(y + t), -(x + z) + (y + t))$$

Logo, temos:

$$T(u + v) = ((x - 3y) + (z - 3t), (3x + 5y) + (3z + 5t), (-x + y) + (-z + t)).$$

Logo,

$$T(u + v) = (x - 3y, 3x + 5y, -x + y) + (z - 3t, 3z + 5t, -z + t) = T(u) + T(v).$$

Por outro lado, para todo número real a e todo vetor $u = (x, y)$ em $\mathbb{R}^2$, temos:

$$T(a \cdot u) = T(a \cdot x, a \cdot y) = (a \cdot x - 3a \cdot y, 3a \cdot x + 5a \cdot y, -a \cdot x + a \cdot y) = a \cdot (x - 3y, 3x + 5y, -x + y).$$

Assim, temos:

$$T(a \cdot u) = a \cdot (x - 3y, 3x + 5y, -x + y) = a \cdot T(x, y).$$

Logo, as duas propriedades de linearidade da transformação T são verificadas. Então, a transformação T é linear.

Exercício 9.5.3

Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (3x, 2y - 4z)$, para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Mostre que T é uma transformação linear.

Solução. Sejam $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, temos:

$$T(u + v) = T(x + x', y + y', z + z') = (3(x + x'), 2(y + y') - 4(z + z')) = (3x + 3x', 2y + 2y' - 4z - 4z'),$$

Logo, temos $T(u + v) = (3x, 2y - 4z) + (3x', 2y' - 4z') = T(u) + T(v)$. Para todo número real

a e todo vetor $u = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$, temos:

$$T(a.u) = T(ax, ay, az) = (3ax, 2ay - 4az) = a(3x, 2y - 4z) = a.T(u).$$

Portanto, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $T(x, y, z) = (3x, 2y - 4z)$, é uma transformação linear.

Exercício 9.5.4

Verificar se é linear a transformação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $T(x, y, z) = 3x - 2y + z$.

Solução. Sejam $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, temos:

$$T(u+v) = T(x+x', y+y', z+z') = 3(x+x') - 2(y+y') + (z+z') = (3x - 2y + z) + (3x' - 2y' + z').$$

Logo, temos $T(u+v) = (3x - 2y + z) + (3x' - 2y' + z') = T(u) + T(v)$. Para todo número real a e todo vetor $u = (x, y, z)$ em $\mathbb{R}^3$, temos:

$$T(a.u) = T(ax, ay, az) = 3ax - 2ay + az = a(3x - 2y + z) = a.T(u).$$

Portanto, $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $T(x, y, z) = 3x - 2y + z$, é uma transformação linear.

Exercício 9.5.5

Verificar se a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x + y + 1)$ é uma transformação linear.

Solução. A transformação T não é linear, pois $T(0)$ é diferente de $(0, 0)$, isto é, temos: $T(0, 0) = (0, 1)$ que é diferente de $(0, 0)$. Logo, T não é uma transformação linear.

Exercício 9.5.6

Verificar se a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x^2 + y, x)$ é uma transformação linear.

Solução. A transformação T não é linear, pois $T(-u)$ é diferente de $-T(u)$. Isto é, temos $T(-x, -y) = (x^2 - y, -x)$ que é diferente de $-T(x, y)$.

Exercício 9.5.7

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - \frac{1}{2}y, 0, 0)$. Determinar o núcleo da transformação T .

Solução. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $(x, y) \in \text{Ker}(T)$ se, e somente se, $T(x, y) = (x - \frac{1}{2}y, 0, 0) = (0, 0, 0)$. Logo, temos que: $x - \frac{1}{2}y = 0$, ou seja, $y = 2x$. Portanto, o núcleo da transformação linear T é dado por:

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, T(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\} = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 9.5.8

Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformação linear dada por $T(x, y) = (2x - y, 0)$.

1. $(2, 4)$ pertence a $\text{Ker}(T)$?
2. $(2, 3)$ pertence a $\text{Ker}(T)$?
3. Encontre $\text{Ker}(T)$.

Solução.

1. Como temos: $T(2, 4) = (2 \times 2 - 4, 0) = (4 - 4, 0) = (0, 0)$, logo $(2, 4) \in \text{Ker}(T)$.
2. Como temos: $T(2, 3) = (2 \times 2 - 3, 0) = (1, 0)$, logo $(2, 3) \notin \text{Ker}(T)$.
3. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se $T(x, y) = (0, 0)$, deduzimos que $T(x, y) = (2x - y, 0) = (0, 0)$. Logo, temos $2x - y = 0$. Portanto, o núcleo da transformação linear T é dado por:

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, T(x, y) = 0\} = \{(x, y), y = 2x\} = \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 9.5.9

Seja $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^7$ transformação linear.

1. Se $\dim(\text{ker}(T)) = 2$, determine $\dim(\text{Im}(T))$.
2. Se $\dim(\text{Im}(T)) = 4$, determine $\dim(\text{Ker}(T))$.

Solução.

- 1) Usando a propriedade $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^6)$, temos $2 + \dim(\text{Im}(T)) = 6$, assim deduzimos que: $\dim(\text{Im}(T)) = 4$.
- 2) Com o mesmo método, temos: $\dim(\text{Ker}(T)) = 6 - \dim(\text{Im}(T)) = 6 - 4 = 2$.

Exercício 9.5.10

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2x - y)$.

1. Determine $\text{Ker}(T)$.
2. Mostrar que a transformação T é injetiva.
3. A transformação T é bijetora?

Solução.

1. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $(x, y) \in \text{Ker}(T)$ se, e somente se, $T(x, y) = (x + y, 2x - y) = (0, 0)$.

Assim, temos o sistema linear homogêneo :

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y = 0. \end{cases}$$

Considerando a soma das duas equações temos: $3x = 0$, isto é, $x = 0$. E usando a primeira equação: $y = 0$. Portanto, o núcleo da transformação linear T é dado por:

$$\text{Ker}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, T(x, y) = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

2. Como $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}$, então a transformação linear T é injetora.

3. Como a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é injetora, e $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, então T é bijetora (isto é, T é um automorfismo).

Exercício 9.5.11

Seja o espaço vetorial $\mathcal{P}_1 = \{p(t) = at + b; a, b \in \mathbb{R}\}$ dos polinômios de grau 1. Seja a transformação:

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{P}_1,$$

definida por:

$$T(a, b) = a + (2a + b)t.$$

1) Mostrar que T é linear.

2) Mostrar que T é um isomorfismo.

Solução.

1. Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ em $\mathbb{R}^2$, temos:

$$T(u + v) = T(a + c, b + d) = (a + c) + (2(a + c) + b + d)t = a + (2a + b)t + c + (2c + d)t.$$

Como $T(u) + T(v) = a + (2a + b)t + c + (2c + d)t$, então temos $T(u + v) = T(u) + T(v)$.

Sejam $u = (a, b)$ em $\mathbb{R}^2$ e x um real, temos:

$$T(x.u) = T(x.a, x.b) = x.a + (2x.a + x.b)t = x.(a + (2a + b)t) = x.T(u).$$

Logo, temos $T(x.u) = x.T(u)$.

Conclusão: A aplicação T é uma transformação linear.

2. A transformação T é um isomorfismo. Vamos provar que T é **injetora e sobrejetora**. Isto é,

a) A transformação T é **injetora**. Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$ em $\mathbb{R}^2$ tais que $T(u) = T(v)$.

Logo, temos:

$$a + (2a + b)t = c + (2c + d)t \Rightarrow a = c \text{ e } 2a + b = 2c + d.$$

Logo, temos $a = c$ e $b = d$. Assim, T é injetora.

b) A transformação T é **sobrejetora**. Sejam $p(t) = a + bt$, para $u = (a, b - 2a)$ temos:

$$T(u) = T(a, b - 2a) = a + (2a + b - 2a)t = a + bt.$$

Logo, T é sobrejetora.

Conclusão: A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathcal{P}_1$ é um isomorfismo.



Exercício 9.5.12

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$.

1. Provar que $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}$.
2. Deduzir que T é um automorfismo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Solução.

1) Seja $(x, y) \in \text{Ker}(T)$, então temos:

$$T(x, y) = (x + 3y, 2x + y) = (0, 0),$$

assim, deduzimos que x e y são soluções do sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Como $\Delta = ad - bc = 1 \times 1 - 2 \times 3 = -5 \neq 0$, temos: $x = y = 0$. Logo, temos:

$$\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}.$$

2) Como $\text{Ker}(T) = \{(0, 0)\}$, então a transformação T é injetora. Assim, a transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é bijetora.

Conclusão : A transformação $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um automorfismo.



Exercício 9.5.13

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^7 \longrightarrow V$, uma transformação linear.

1. Se $\dim(\text{Ker}(T)) = 3$, qual é a dimensão de $\dim(\text{Im}(T))$?
2. Se T é injetora qual é a dimensão de V ?
3. Se T é sobrejetora qual é a dimensão de V ?

Solução.

1. Como $\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^7)$, temos: $3 + \dim(\text{Im}(T)) = 7$. Logo, temos: $\dim(\text{Im}(T)) = 4$.

2. Se a transformação T é injetora, temos: $\dim(\text{Ker}(T)) = 0$. Assim, deduzimos que $\dim(\text{Im}(T)) = 7$.

3. Se a transformação T é sobrejetora temos $\text{Im}(T) = V$, logo $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(V)$.

Assim, deduzimos:

$$\dim(V) = \dim(\text{Im}(T)) = 7.$$

Exercício 9.5.14

Sejam as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $T(x, y) = (x, 2x + y)$ e $S(x, y) = (x + y, x - 2y)$.

1. Determine as transformações lineares $T + S$.
2. Determine as transformações lineares $2T$.
3. Determine as transformações lineares $3S$.
4. Deduzir a expressão da transformação $2T + 3S$.

Solução.

1. Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos :

$$(T + S)(x, y) = T(x, y) + S(x, y) = (x, 2x + y) + (x + y, x - 2y) = (2x + y, 3x - y).$$

Logo, obtemos :

$$(T + S)(x, y) = (2x + y, 3x - y).$$

2. Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $(2T)(x, y) = 2T(x, y) = 2(x, 2x + y) = (2x, 4x + 2y)$. Logo, $(2T)(x, y) = (2x, 4x + 2y)$.
3. De maneira semelhante, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $(3S)(x, y) = 3S(x, y) = 3(x + y, x - 2y) = (3x + 3y, 3x - 6y)$. Portanto, deduzimos:

$$(3S)(x, y) = (3x + 3y, 3x - 6y).$$

4. Usando as últimas expressões das transformações $2T$ e $3S$, deduzimos:

$$(2T + 3S)(x, y) = (2x + y, 3x - y) + (3x + 3y, 3x - 6y) = (5x + 4y, 6x - 7y).$$

Logo, a expressão da transformação $2T + 3S$ é dada por $(2T + 3S)(x, y) = (5x + 4y, 6x - 7y)$.

Exercício 9.5.15

Sejam as transformações lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $T(x, y) = (x, 2x + y)$ e $S(x, y) = (x + y, x - 2y)$.

1. Determine as transformações lineares ToS e SoT .
2. Comparando as expressões das transformações lineares ToS e SoT , o que podemos concluir sobre a composição das transformações lineares ?

Solução.

1. Para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos $ToS(x, y) = T(x + y, x - 2y)$ e $SoT(x, y) = S(x, 2x + y)$. Usando as expressões de T e S , obtemos $ToS(x, y) = T(x + y, x - 2y) = (x + y, 2(x + y) + x - 2y)$

e $SoT(x, y) = S(x, 2x + y) = (x + (2x + y), x - 2(2x + y))$. Logo, deduzimos:

$$ToS(x, y) = (x + y, 3x); \text{ e } SoT(x, y) = (3x + y, -3x - 2y).$$

2. Comparando as duas expressões de ToS e SoT , deduzimos que as duas transformações são diferentes.

Exercício 9.5.16

Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x, -y)$. Provar que T é idempotente.

Solução. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (-x, -y)$ é idempotente pois:

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(-x, -y) = (-(-x), -(-y)) = (x, y) = \mathbf{I}(x, y).$$

o que nos garante que $T^2 = \mathbf{I}$, o operador idêntico.

Exercício 9.5.17

Seja o operador linear $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $T(x, y) = (y, 0)$. Provar que T é nilpotente.

Solução. Seja o operador linear $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde $T(x, y) = (0, x)$ é nilpotente pois :

$$T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(y, 0) = (0, 0) = \mathbf{0}(x, y).$$

o que nos garante que $T^2 = \mathbf{0}$, o operador nulo.

Exercício 9.5.18

Sejam $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as transformações lineares definidas por $T(x, y) = (x - y, x)$ e $S(x, y) = (x, 0)$. Determinar:

1. $2T + 3S$.
2. ToS .
3. SoT .
4. $T^2 = ToT$.
5. $S^2 = SoS$.

Solução. Seja $(x, y) \in \mathbb{R}$.

1. Temos $(2T + 3S)(x, y) = 2T(x, y) + 3S(x, y) = (2(x - y), 2x) + (3x, 0)$. Logo, obtemos $(2T + 3S)(x, y) = (5x - 2y, 2x)$.

2. Temos $ToS(x, y) = T(x, 0)$, assim deduzimos $ToS(x, y) = (x, x)$.

3. Temos $SoT(x, y) = S(x - y, x)$, logo, temos $SoT(x, y) = (x - y, 0)$.
4. Como $T^2(x, y) = T(x - y, x)$, obtemos $T^2(x, y) = (-y, x - y)$,
5. Como $S^2(x, y) = S(x, 0)$, deduzimos $S^2(x, y) = (x, 0)$.

9.6 Exercícios para Praticar

Exercício 9.6.1

Verificar se a aplicação $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (y, x + z)$ é uma transformação linear.

Exercício 9.6.2

Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ a transformação definida por

$$T(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n),$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, onde a_{ij} são números reais dados. Mostre que T é uma transformação linear.

Exercício 9.6.3

Seja o espaço vetorial $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e A uma matriz fixa desse espaço vetorial. O operador $T : V \rightarrow V$ dado por $T(X) = AX$, para todo X em V é linear?

Exercício 9.6.4

Seja o espaço vetorial $V = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e P uma matriz inversível fixa desse espaço vetorial. Mostrar que o operador $T : V \rightarrow V$ dado por:

$$T(X) = P^{-1}XP,$$

para todo X em V é linear.

Exercício 9.6.5

Sejam $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções polinomiais de grau ≤ 1 e $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções polinomiais de grau ≤ 2 . Seja a transformação linear $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ definida por:

$$T[p(t)] = \frac{dp}{dt}(t) = p'(t).$$

1. Encontre uma base para $\text{Ker}(T)$.

2. Encontre uma base para $Im(T)$.
3. A transformação T é injetora? é sobrejetora? é bijetora?



Exercício 9.6.6

Sejam V e W dois subespaços do espaço U tais que $U = V \oplus W$. Todo vetor $u \in U$ se escreve, de maneira única, da seguinte forma: $u = v + w$, onde $v \in V$ e $w \in W$. Sendo P_1 e P_2 as projeções definidas por $P_1(u) = v$ e $P_2(u) = w$. Mostrar que:

1. $P_1^2 = P_1$ e $P_2^2 = P_2$.
2. $P_1 + P_2 = I$.
3. $P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_1 = \mathbf{0}$ (operador nulo de U).

Como:

CAPÍTULO 10

TRANSFORMAÇÕES LINEARES E MATRIZES



Objetivos

Neste capítulo são apresentadas propriedades sobre as transformações lineares de espaços vetoriais e as matrizes associadas. Os objetivos gerais são de estudar a conexão entre as propriedades das matrizes e das transformações lineares, isto é, como usar as propriedades de matrizes em relação com as transformações lineares e vice-versa.

10.1 Exemplos básicos de matriz de uma transformação linear



Exemplo 10.1.1

Sejam o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ com a base canônica $B_1 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ e o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com a base canônica $B_2 = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$. Seja a transformação linear

$$T(x, y) = (x - 3y, 3x + 5y, -x + y). \quad (10.1)$$

Aos vetores $u = (x, y)$ e $v = (x - 3y, 3x + 5y, -x + y)$ vamos associar duas matrizes colunas, denotada por $[u]$ e $[v]$:

$$[u] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [v] = \begin{bmatrix} x - 3y \\ 3x + 5y \\ -x + y \end{bmatrix}.$$

Assim, a transformação T pode tomar a seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x-3y \\ 3x-5y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

A matriz $M_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ é chamada de **matriz que representa a transformação linear T em relação às bases canônicas $B_1 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ e $B_2 = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$ ou matriz de T em relação às bases B_1 e B_2 .**

Como as bases $B_1 = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ e $B_2 = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$ tem um papel importante para conseguir a representação matricial da transformação T , podemos esclarecer essa relação como o seguinte. Como todo vetor $u = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito sobre a forma matricial $[u] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, deduzimos, das propriedades das matrizes, a seguinte combinação linear:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ou seja } [u] = x[e_1] + y[e_2]. \quad (10.2)$$

Logo, utilizando a propriedade da transformação ser linear temos que:

$$T(u) = T(xe_1 + ye_2) = xT(e_1) + yT(e_2).$$

Calculamos $T(e_1)$ e $T(e_2)$ pela fórmula dada da transformação linear T , e deduzimos as matrizes colunas $[T(e_1)]$ e $[T(e_2)]$:

$$[T(e_1)] = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } [T(e_2)] = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Concluimos que

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M_{3 \times 2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M_{3 \times 2} [u].$$

Assim, deduzimos que as colunas da matriz $M_{3 \times 2}$, associadas a T , são as matrizes colunas $[T(e_1)]$, $[T(e_2)]$ associadas aos vetores $T(e_1), T(e_2) \in \mathbb{R}^3$ (e portanto, 2 colunas com 3 componentes cada, ou seja, 2 colunas com 3 linhas).

Desta forma, associamos uma matriz de ordem 3×2 à transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. O procedimento que aplicamos acima não é particular do exemplo que analisamos,

de modo que é sempre possível associar a uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma matriz M_T de ordem $m \times n$, chamada **matriz canônica associada à transformação linear** T ou apenas **matriz associada** a T , cujas colunas são as matrizes colunas $[T(e_1)]$, $[T(e_2)]$, ..., $[T(e_n)]$ dos vetores $T(e_1), T(e_2), \dots, T(e_n) \in \mathbb{R}^m$ (e portanto n colunas com m componentes cada, ou seja, n colunas com m linhas).

💡 Exemplo 10.1.2

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com a base canônica $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Seja transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(u) = 5u$, então temos:

$$[T(e_1)] = [5e_1] = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, [T(e_2)]_B = [5e_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } [T(e_3)]_B = [5e_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Assim, para todo vetor $u = (x_1, x_2, x_3)$, podemos escrever

$$[T(u)]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

💡 Exemplo 10.1.3

O método acima pode também ser aplicado para conseguir uma fórmula para transformações lineares da geometria. Vamos considerar a transformação geométrica do plano definida por:

$$T(\vec{x}) = \text{rotação no sentido anti-horário de } \vec{x} \text{ por um ângulo } \theta \in (0, 2\pi).$$

A essa transformação geométrica associamos a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é munido da base canônica. A matriz da transformação linear T tem por colunas a imagem por T dos vetores $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$. Observamos que:

$$[T(\vec{e}_1)] = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \quad [T(\vec{e}_2)] = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Logo, concluímos que para todo vetor $\vec{u} = xe_1 + ye_2$, temos:

$$[T(\vec{u})] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

10.2 Matriz de uma transformação linear

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões finitas n e m . Sejam $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V e $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ uma base de W . Seja $T : U \rightarrow V$

uma transformação linear. Como B é uma base de W , podemos determinar de modo único os números reais a_{ij} , com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$, tais que:

$$T(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m.$$

Assim, para todo $v = k_1v_1 + k_2v_2 + \dots + k_nv_n$, temos:

$$T(v) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \dots + k_nT(v_n).$$

Logo, temos:

$$T(v) = k_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m) + \dots + k_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m),$$

ou seja,

$$T(v) = (a_{11}k_1 + \dots + a_{1n}k_n)w_1 + \dots + (a_{m1}k_1 + \dots + a_{mn}k_n)w_m.$$

Logo, obtemos a seguinte forma vetorial da transformação linear T :

$$[T(v)]_B = \begin{bmatrix} a_{11}k_1 + \dots + a_{1n}k_n \\ \vdots \\ a_{m1}k_1 + \dots + a_{mn}k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$$

Notação:

$$[T]_B^A = M_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Em resumo, temos a seguinte proposição.



Proposição 10.2.1

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões finitas n e m . Sejam $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de V e $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ uma base de W . Seja $T : V \rightarrow W$, uma transformação linear. Então, associamos a T a matriz denotada por $[T]_B^A$ ou M_B^A , de ordem $m \times n$, cuja j -ésima coluna é a matriz coluna $[T(e_j)]_B$ é formada pelas coordenadas do vetor $T(e_j)$, que tem a seguinte propriedade: para todo $v \in V$, temos:

$$[T(v)]_B = [T]_B^A \cdot [v]_A,$$

onde $[v]_A$ e $[T(v)]_B$ são as matrizes colunas associadas aos vetores v e $T(v)$, respectivamente, às bases A e B . Além disso, $[T]_B^A$ é a única matriz com essa propriedade.



Definição 10.2.2

A matriz $[T]_B^A$ que representa T em relação às bases A e B , é chamada de **matriz de T nas bases A e B** .

Assim, a representação matricial da transformação linear T , é dada pela expressão:

$$[T(v)]_B = M_B^A \cdot [v]_A \quad \text{ou} \quad [T(v)]_B = [T]_B^A \cdot [v]_A, \quad \text{para todo } v \in V.$$

Observamos que a matriz $[T]_B^A$ (ou M_B^A) é de ordem $m \times n$.

Se T é um operador linear e considerarmos que as duas bases são as mesmas ($A = B$), então diremos apenas matriz de T em relação à base B para indicar a matriz acima definida e usaremos a notação $[T]_B$ a matriz que representá o operador linear T .

Quando não há dúvidas quanto às bases A e B que estamos considerando, escreveremos apenas $[T]$ para indicar a matriz da transformação linear T em relação a essas duas bases.

Procedimento: Segue o procedimento para calcular a matriz de uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$, em relação às bases $A = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $B = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de V e W , respectivamente:

Etapa 1. Calcule $T(v_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Etapa 2. Encontrar as coordenadas do vetor $T(v_j)$ em relação a base B , isto é, expressar $T(v_j)$ como combinação linear dos vetores da base B . Deduzir a matriz coluna $[T(v_j)]_B$, em relação à base B .

Etapa 3. A matriz $[T]_B^A$ de T em relação a A e B , é obtida tomando-se $[T(v_j)]_B$ como j -ésima coluna da matriz $[T]_B^A$.



Exemplo 10.2.3

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$. Sejam $A = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$ e $B = \{w_1 = (1, 0), w_2 = (0, 1)\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Assim, como a base canônica B é a base padrão, temos:

$$T(v_1) = (1, 0), \quad T(v_2) = (1, 1), \quad T(v_3) = (0, -1).$$

Logo, temos as matrizes colunas:

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases canônicas A e B é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

💡 Exemplo 10.2.4

Determine a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, em relação às bases $A = \{v_1 = (1, 0, 0); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (0, 0, 1)\}$ e $B = \{w_1 = (1, 0); w_2 = (1, 1)\}$. Temos:

$$T(v_1) = (1, 0) = 1.w_1 + 0.w_2, \quad T(v_2) = (1, 1) = 0.w_1 + 1.w_2$$

e

$$T(v_3) = (0, 1) = -1.w_1 + w_2.$$

Para $T(v_3)$, podemos verificar que $T(v_3) = (0, 1) = (-1 + 1, 1) = (-1, 0) + (1, 1) = -1.w_1 + w_2$. Logo, obtemos as matrizes colunas:

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases A e B é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões finitas n e m , respectivamente. Seja $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto das transformações lineares de V em W . Sabemos que as operações da soma $T + S$ e do produto por um escalar kT definem uma adição e uma multiplicação por um escalar no conjunto $\mathcal{L}(V, W)$, o que torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $m \times n$.

🔴 Proposição 10.2.5

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões n e m , respectivamente. Então, fixadas as bases $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ de V e W , respectivamente. A aplicação $T \mapsto [T]_B^A$ que a cada $T \in \mathcal{L}(V, W)$ associa a matriz de $[T]_B^A$ que pertence a $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, em relação às bases A e B , é uma aplicação bijetora.

Prova. Sejam T, H duas transformações lineares em $\mathcal{L}(V, W)$ tais que $[T]_B^A = [H]_B^A$, então as respectivas colunas de $[T]_B^A$ e $[H]_B^A$ são iguais e daí $[T(v_j)]_B^A = [H(v_j)]_B^A$ ($j = 1, \dots, n$). Daí, para todo $u = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$, temos:

$$T(u) = k_1 T(v_1) + \dots + k_n T(v_n) = k_1 H(v_1) + \dots + k_n H(v_n) = H(u).$$

Logo, temos $T = H$.

Consequentemente: A aplicação $T \mapsto [T]_B^A$ é injetora, o que é consequência direta da definição de matriz de uma transformação linear.

Seja $M = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ uma matriz de ordem $n \times n$. Seja $T : V \rightarrow W$ uma transformação linear tal que para todo j ($1 \leq j \leq n$) temos:

$$[T(v_j)]_B^A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Logo, temos $[T]_B^A = M$. Então, para toda matriz M em $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ existe uma transformação linear $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $[T]_B^A = M$.

Consequentemente: A aplicação $T \mapsto [T]_B^A$ é sobrejetora.

Conclusão: A aplicação $T \mapsto [T]_B^A$ é bijetora. $\square$



Exemplo 10.2.6

Dada a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de maneira que, sendo $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 2)\}$ e $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$, temos $M = [T]_B^A$.

Solução. Pela definição da matriz M de T , temos:

$$T(1, 0, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) = (1, 0), \quad T(0, 1, 0) = 2 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (1, 1) = (3, 1),$$

e

$$T(0, 0, 1) = 3 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) = (3, 0).$$

Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e suponho que

$$(a, b, c) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 1, 2),$$

então, temos: $x = a$, $y = b - \frac{c}{2}$ e $z = \frac{c}{2}$. Logo, obtemos que:

$$T(a, b, c) = T(a(1, 0, 0) + (b - \frac{c}{2})(0, 1, 0) + \frac{c}{2}(0, 1, 2)),$$

assim,

$$T(a, b, c) = a(1, 0) + (b - \frac{c}{2})(3, 1) + \frac{c}{2}(3, 0).$$

Portanto, a expressão de T é dada por;

$$T(a, b, c) = (a + 3b, b - \frac{c}{2}).$$

💡 Exemplo 10.2.7

Qual a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, em relação às bases $A = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (0, 1, 0); u_3 = (0, 0, 1)\}$ e $B = \{v_1 = (1, 0); v_2 = (1, 1)\}$?

Solução. Temos:

- $T(u_1) = (1, 0) = 1.v_1 + 0.v_2.$
- $T(u_2) = (1, 1) = 0.v_1 + 1.v_2.$
- $T(u_3) = (0, 1) = -v_1 + v_2.$

Logo, a matriz de T em relação às bases A e B é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

💡 Exemplo 10.2.8

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja $I : V \rightarrow V$ o operador idêntico de V . Dadas as bases A e B de V , qual é a matriz $[I]_B^A$?

Solução. Sejam $A = \{u_1; u_2; \dots; u_n\}$ e $B = \{v_1; v_2; \dots; v_n\}$. Temos:

- $I(u_1) = u_1 = a_{11}.v_1 + \dots + a_{n1}.v_n,$
- $I(u_2) = u_2 = a_{12}.v_1 + \dots + a_{n2}.v_n,$
-
- $I(u_n) = u_n = a_{1n}.v_1 + \dots + a_{nn}.v_n.$

Logo, temos:

$$[I]_B^A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Assim, $[I]_B^A$ é a matriz de mudança da base B para a base A .

💡 Exemplo 10.2.9

Consideremos o isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ dado por:

$$T(x, y) = x + (x + y)t.$$

Considerando as bases canônicas $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $B = \{1, t\}$ desses dois espaços

vetoriais, determinemos a matriz $[T]_B^A$.

Solução. Como $T(1,0) = 1 + 1.t$ e $T(0,1) = 1.t$, a matriz $[T]_B^A$ da transformação linear T é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10.3 Operações com Transformações Lineares e Matrizes

Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões finitas n e m , respectivamente. Seja $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto das transformações lineares de V em W . Sabemos que as operações da soma $T + S$ e do produto por um escalar kT , definem uma adição e uma multiplicação por um escalar no conjunto $\mathcal{L}(V, W)$, que torna-se um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Seja $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial das matrizes $m \times n$.



Proposição 10.3.1

Sejam V e W espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões n e m , respectivamente e $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ duas bases fixadas de V e W , respectivamente. Sejam duas transformações lineares $T : V \rightarrow W$ e $S : V \rightarrow W$. Então, temos:

$$\begin{cases} [T + S]_B^A = [T]_B^A + [S]_B^A, \\ [k.T]_B^A = k.[T]_B^A, \text{ para todo número real } k. \end{cases}$$

Assim, a matriz da soma de duas transformações lineares é a soma das matrizes de cada uma, em relação ao mesmo par de bases. E a matriz do produto de uma transformação linear por um número é igual a esse número multiplicado pela matriz da transformação linear dada.



Exemplo 10.3.2

Sejam os operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por $T(x, y) = (2x, -x + 3y)$ e $S(x, y) = (x + y, -x + 2y)$.

1. Determine a matriz de T e S , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine a matriz do operador linear $T + S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
3. Determine as matrizes dos operadores lineares $3T$ e $-2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
4. Deduzir a matriz do operador linear $3T - 2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.

Solução. 1. Temos:

$$T(1,0) = (2,-1), T(0,1) = (0,3) \text{ e } S(1,0) = (1,-1), S(0,1) = (1,2).$$

Logo, as matrizes dos operadores lineares T e S , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ são:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } [S]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. A matriz do operador linear $T + S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$[T + S]_B^A = [T]_B^A + [S]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. As matrizes dos operadores lineares $3T$ e $-2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ são:

$$[3T]_B^A = 3[T]_B^A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } [-2S]_B^A = -2[S]_B^A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

4. A matriz do operador linear $3T - 2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$[3T - 2S]_B^A = [3T]_B^A + [-2S]_B^A = 3[T]_B^A - 2[S]_B^A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},$$

assim, obtemos:

$$[3T - 2S]_B^A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$



Proposição 10.3.3

Sejam V , W e U três espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ de dimensões finitas. Sejam $A = \{v_1, \dots, v_n\}$, $B = \{w_1, \dots, w_m\}$ e $C = \{u_1, \dots, u_n\}$, as bases respectivas de V , W e U . Sejam duas transformações lineares $T : V \rightarrow W$ e $S : W \rightarrow U$. Então, a composição das duas transformações T e S , denotada por $SoT : V \rightarrow U$, temos:

$$[SoT]_C^A = [S]_C^B \cdot [T]_B^A.$$

Dizemos que a matriz de SoT é igual ao produto da matriz de $[S]_C^B$ pela matriz de $[T]_B^A$.

Exemplo 10.3.4

Sejam os operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por $T(x, y) = (2x, -x + 3y)$ e $S(x, y) = (x + y, -x + 2y)$.

1. Determine a matriz de T e S , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine a matriz do operador linear SoT , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
3. Determine a matriz do operador linear ToS , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.

Solução. 1. Temos:

$$T(1, 0) = (2, -1), \quad T(0, 1) = (0, 3) \quad \text{e} \quad S(1, 0) = (1, -1), \quad S(0, 1) = (1, 2).$$

Logo, as matrizes dos operadores lineares T e S , em relação às bases canônicas A , B e C de $\mathbb{R}^2$ são:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

2. A matriz do operador linear SoT , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$[SoT]_B^A = [S]_C^B \cdot [T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz do operador linear ToS , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$[ToS]_B^A = [T]_B^A \cdot [S]_C^B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observação: Mais uma vez a relação entre a composição das transformações lineares e o produto das matrizes, mostra que a composição das transformações lineares não é comutativa.

10.4 Exercícios Resolvidos

Exercício 10.4.1

Seja o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ com a base canônica $B = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(u) = 5u$. Determine a matriz da transformação T em relação à base canônica.

Solução. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(u) = 5u$, então temos:

$$[T(e_1)]_B = [5e_1] = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(e_2)]_B = [5e_2] = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [T(e_3)]_B = [5e_3] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}. \quad (10.3)$$

Assim, para todo vetor $u = (x_1, x_2, x_3)$, podemos escrever:

$$[T(u)]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz da transformação linear T em relação à base canônica é dada por:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.2

Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + y, y - z)$.

Sejam $A = \{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (0, 0, 1)\}$ e $B = \{w_1 = (1, 0), w_2 = (0, 1)\}$ as bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Determine a matriz da transformação linear T em relação às bases canônicas A e B .

Solução. Como a base canônica A de $\mathbb{R}^3$ e a base canônica B de $\mathbb{R}^2$, são as bases padrões, temos:

$$T(v_1) = (1, 0), \quad T(v_2) = (1, 1), \quad T(v_3) = (0, -1).$$

Logo, obtemos as matrizes colunas:

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de T em relação às bases A e B é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.3

Determine a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, em relação às bases $A = \{v_1 = (1, 0, 0); v_2 = (0, 1, 0); v_3 = (0, 0, 1)\}$ e $B = \{w_1 = (1, 0); w_2 = (1, 1)\}$.

Solução. As imagens do vetores da base A são dados por:

$$T(v_1) = (1, 0) = 1.w_1 + 0.w_2, \quad T(v_2) = (1, 1) = 0.w_1 + 1.w_2, \quad T(v_3) = (0, 1) = -1.w_1 + w_2.$$

Para $T(v_3)$, podemos verificar que $T(v_3) = (0, 1) = (-1+1, 1) = (-1, 0) + (1, 1) = -1.w_1 + w_2$. Logo, obtemos as matrizes colunas:

$$[T(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(v_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [T(v_3)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz da transformação linear T em relação às bases A e B é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.4

Qual a matriz de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$, em relação às bases $A = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (0, 1, 0); u_3 = (0, 0, 1)\}$ e $B = \{v_1 = (1, 1); v_2 = (0, 1)\}$?

Solução. Temos:

- $T(u_1) = (1, 0) = 1.v_1 - 1.v_2,$
- $T(u_2) = (1, 1) = 1.v_1 + 0.v_2,$
- $T(u_3) = (0, 1) = v_2.$

Logo, a matriz de T em relação às bases A e B é dada por;

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.5

Consideremos o isomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1(\mathbb{R})$ dado por:

$$T(x, y) = 2x + y + (x - y)t.$$

Considerando as bases canônicas $A = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $B = \{1, t\}$ desses espaços, determinemos a matriz $[T]_B^A$.

Solução. Como temos $T(1, 0) = 2 + 1.t$ e $T(0, 1) = 1 - 1.t$, então obtemos:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.6

Sejam os operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por $T(x, y) = (2x + y, -x + 3y)$ e $S(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$.

1. Determine as matrizes dos operadores lineares T e S , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine a matriz do operador linear $T + S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
3. Determine as matrizes dos operadores lineares $3T$ e $-2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
4. Deduzir a matriz do operador linear $3T - 2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.

Solução.

1. Temos $T(1, 0) = (2, -1)$, $T(0, 1) = (1, 3)$ e $S(1, 0) = (1, 1)$, $S(0, 1) = (2, -2)$. Logo, as matrizes dos operadores lineares T e S , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ são:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } [S]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. A matriz do operador linear $T + S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é:

$$[T + S]_B^A = [T]_B^A + [S]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. As matrizes dos operadores lineares $3T$ e $-2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ são:

$$[3T]_B^A = 3[T]_B^A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} \text{ e } [-2S]_B^A = -2[S]_B^A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4. A matriz do operador linear $3T - 2S$, em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é:

$$[3T - 2S]_B^A = [3T]_B^A + [-2S]_B^A = 3[T]_B^A - 2[S]_B^A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Assim, deduzimos :

$$[3T - 2S]_B^A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.7

Sejam os operadores lineares $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por $T(x, y) = (x + 2y, -2x + 3y)$ e $S(x, y) = (-x + 2y, x + y)$.

1. Determine as matrizes dos operadores lineares T e S , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine a matriz do operador linear SoT , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.
3. Determine a matriz do operador linear ToS , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$.

Solução.

1. Temos:

$$T(1, 0) = (1, -2), \quad T(0, 1) = (2, 3) \quad \text{e} \quad S(1, 0) = (-1, 1), \quad S(0, 1) = (2, 1).$$

Logo, as matrizes dos operadores lineares T e S , em relação às bases canônicas A , B e C de $\mathbb{R}^2$ são:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [S]_C^B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. A matriz do operador linear SoT , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$[SoT]_C^A = [S]_C^B \cdot [T]_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz do operador linear ToS , em relação às bases canônicas A e B de $\mathbb{R}^2$ é dada por:

$$[ToS]_B^A = [T]_B^A \cdot [S]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Observação: A relação entre a composição das transformações lineares e o produto das matrizes, mostra que a composição das transformações lineares não é comutativa. Isto é, sabemos que a multiplicação de duas matrizes (quando existe) não é comutativa, logo a composição das transformações lineares associadas não é comutativa também.

Exercício 10.4.8

Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (2x + y, x - 2y)$.

1. Determine a matriz de T em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine a matriz de $T^2 = ToT$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.
3. Determine a matriz de $T^3 = ToToT$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Solução.

1. Como o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ é equipado da base canônica, temos $T(1,0) = (2,1)$ e $T(0,1) = (1,-2)$. Assim, a matriz da transformação T é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. A matriz $[T^2]$ da transformação $T^2 = T \circ T$, em relação a base canônica do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, é dada por $[T^2] = [T].[T]$, ou seja,

$$[T^2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. A matriz $[T^3]$ da transformação $T^3 = T \circ T \circ T$, em relação a base canônica do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, é dada por $[T^3] = [T].[T].[T] = [T].[T]^2$, ou seja,

$$[T^3] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.9

Determine a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (z, x+y)$, em relação às bases $A = \{v_1 = (1, 1, 1); v_2 = (1, 1, 0); v_3 = (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a base $B = \{w_1 = (1, 3); w_2 = (2, 5)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Solução.

Através de um cálculo direto obtemos que $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (0,2)$ e $T(1,0,0) = (0,1)$. Na base $B = \{w_1 = (1, 3); w_2 = (2, 5)\}$ a expressão de $T(1,1,1) = (1,2)$ é dada por:

$$T(1,1,1) = a(1,3) + b(2,5) = (a+2b, 3a+5b) = (1,2).$$

Logo, os escalares a e b são solução do sistema linear:

$$\begin{cases} a+2b=1 \\ 3a+5b=2 \end{cases}.$$

Assim, obtemos que $a = -1$ e $b = 1$. Logo, temos $T(1,1,1) = -1.(1,3) + 1.(2,5) = -1.w_1 + 1.w_2$.

Da mesma forma, a resolução de dois sistemas lineares permite obter as expressões $T(1,1,0) = (0,2)$ e $T(1,0,0) = (0,1)$, na base $B = \{w_1 = (1, 3); w_2 = (2, 5)\}$. Isto é, temos:

$$\begin{cases} T(1,1,0) = (0,2) = 4(1,3) - 2(2,5) = 4w_1 - 2w_2 \\ T(1,0,0) = (0,1) = 2(1,3) - 1.(2,5) = 2w_1 - 1.w_2. \end{cases}$$

Consequentemente, a matriz $[T]_B^A$ da transformação T em relação às bases $A = \{v_1 =$

$(1, 1, 1); v_2 = (1, 1, 0); v_3 = (1, 0, 0)\}$ e a base $B = \{w_1 = (1, 3); w_2 = (2, 5)\}$ é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 10.4.10

Sejam as transformações lineares $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dadas por $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$ e $S(x, y) = (x + y, x - y, 2x + y)$, em relação às bases canônicas $A = \{u_1 = (1, 0, 0); u_2 = (0, 1, 0); u_3 = (0, 0, 1)\}$ e $B = \{v_1 = (1, 0); v_2 = (0, 1)\}$.

- Determine a matriz da transformação SoT , em relação às bases canônicas.
- Determine a matriz da transformação ToS , em relação às bases canônicas.

Solução.

Usando um cálculo direto obtemos $T(1, 0, 0) = (1, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1)$. Logo, a matriz da transformação T em relação às bases canônicas é dada por:

$$[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para a matriz da transformação S temos $S(1, 0) = (1, 1, 2)$ e $S(0, 1) = (1, -1, 1)$. Logo, a matriz da transformação S em relação às bases canônicas é dada por:

$$[S]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, podemos determinar as matrizes das transformações ToS e SoT , em relação às bases canônicas. Isto é, a matriz da transformação SoT , em relação às bases canônicas, é dada por:

$$[SoT]_B^A = [S]_B^A [T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

E a matriz da transformação ToS , em relação às bases canônicas, é dada por:

$$[ToS]_B^A = [S]_B^A [T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

10.5 Exercícios para Praticar

Exercício 10.5.1

Determine a matriz da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x + y)$, em relação às bases $A = \{v_1 = (1, 1, 1); v_2 = (1, 1, 0); v_3 = (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e a base canônica $B = \{w_1 = (1, 0); w_2 = (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Resposta $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercício 10.5.2

Determine a matriz do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x, -x + 3y)$, em relação às bases canônicas $A = \{v_1 = (1, 0); v_2 = (0, 1)\}$ e $B = \{w_1 = (1, 0); w_2 = (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Resposta: $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercício 10.5.3

Determine a matriz do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (3x - 4y, x + 5y)$, em relação a base canônica $A = \{v_1 = (1, 0); v_2 = (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e a base $B = \{w_1 = (1, 2); w_2 = (2, 3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Resposta: $[T]_B^A = \begin{bmatrix} -7 & 22 \\ 5 & -13 \end{bmatrix}$.

Exercício 10.5.4

Sejam os operadores lineares $T, S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidos por $T(x, y) = (2x + y, x - 2y)$ e $S(x, y) = (x - y, x + y)$.

1. Determine a matriz de T em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$.
2. Determine a matriz de S em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$.
3. Determine a matriz de $T \circ S$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$.
4. Determine a matriz de $S \circ T$ em relação às bases canônicas de $\mathbb{R}^2$.

CAPÍTULO 11

ESPAÇOS VETORIAIS COM PRODUTOS INTERNOS



Objetivos

O objetivo deste capítulo é apresentar a noção de espaço vetorial euclidiano e a norma associada. Também estudamos o conceito de distância entre dois vetores, bem como a ortogonalidade de dois vetores. Finalmente, a base ortonormal de um espaço vetorial euclidiano é estudada, bem como o espaço ortogonal a um subespaço vetorial.

11.1 Produto Interno

11.1.1 Preliminares

Um dos conceitos fundamentais quando estudamos os vetores da geometria no espaço (ou no plano) é o de "produto escalar", que para cada par de vetores $(\vec{u}, \vec{v})$, associa um número real dado por:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos(\theta),$$

onde $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ são os "comprimentos" dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e θ é o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Considerando a base fundamental $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ do espaço, se $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, temos:

$$\vec{u} \times \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

O objetivo deste capítulo é generalizar a definição de "produto escalar" para alguns espaços vetoriais. Assim, vamos estudar o conceito de "comprimento" e de "distância" em algumas situações dos espaços vetoriais.

11.1.2 Produto Interno



Definição 11.1.1

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. O produto interno sobre V é uma aplicação, denotada por:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

que transforma cada par ordenado $(u, v) \in V \times V$ em um número real, obedecendo às seguintes condições:

- (a) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, para todos u, v e w em V ;
- (b) $\langle au, v \rangle = a \langle u, v \rangle$, para todos u em V e a em $\mathbb{R}$;
- (c) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, para todos u, v em V ;
- (d) $\langle u, u \rangle$ é um número real maior que zero para todo vetor $u \neq 0$ em V .



Definição 11.1.2

Um espaço vetorial real com produto interno ou espaço euclidiano, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno.

Em geral existem muitos produtos internos diferentes sobre o mesmo espaço vetorial de dimensão finita.



Exemplo 11.1.3

Produto interno usual do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, temos:

$$(u, v) \longmapsto x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

é um produto interno no $\mathbb{R}^2$. De fato, as quatro condições são verificadas. Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$, e $a \in \mathbb{R}$.

(a) Temos $\langle u + v, w \rangle = \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3) \rangle = (x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3$. Logo,

$$\langle u + v, w \rangle = x_1 x_3 + x_2 x_3 + y_1 y_3 + y_2 y_3 = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

(b) Temos:

$$\langle au, v \rangle = (ax_1)x_2 + (ay_1)y_2 = a(x_1 x_2 + y_1 y_2) = a \langle u, v \rangle$$

(c) Temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = x_2 x_1 + y_2 y_1 = \langle v, u \rangle.$$

(d) Para todo $u = (x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$\langle u, u \rangle = x^2 + y^2 > 0.$$

Logo, as quatro condições de um produto interno foram verificadas.



Exemplo 11.1.4

Produto interno usual do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$, mostramos que o produto definido por:

$$(u, v) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

é um produto interno no $\mathbb{R}^3$.

Solução. De fato, as quatro condições são verificadas. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$ e $w = (x_3, y_3, z_3)$, e $a \in \mathbb{R}$.

(a) Com um cálculo direto similar ao precedente exemplo, temos

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$$

(b) Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$, $v = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

$$\langle au, v \rangle = (ax_1)x_2 + (ay_1)y_2 + (az_1)z_2 = a(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2) = a\langle u, v \rangle.$$

(c) Temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 + z_1z_2 = \langle v, u \rangle.$$

(d) Para todo $u = (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, temos:

$$\langle u, u \rangle = x^2 + y^2 + z^2 > 0.$$

Logo, as quatro condições de um produto interno foram verificadas.

De maneira geral, temos a seguinte proposição.



Proposição 11.1.5

Produto interno usual do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. Sejam $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dois vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n,$$

é um produto interno no $\mathbb{R}^n$.

As seguintes propriedades são válidas em qualquer espaço vetorial euclidiano.



Proposição 11.1.6

Seja V um espaço vetorial com um produto interno. Sejam u, v, w e $u_1, u_2, \dots, u_s$ ($1 \leq j \leq s$) vetores em V e $a \in \mathbb{R}$, $a_j \in \mathbb{R}$ ($1 \leq j \leq s$).

1. $\langle 0, u \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$.
2. $\langle u, av \rangle = a \langle u, v \rangle$.
3. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.
4. $\langle \sum_{j=1}^s a_j u_j, v \rangle = \sum_{j=1}^s a_j \langle u_j, v \rangle$.
5. $\langle u, \sum_{j=1}^s a_j v_j \rangle = \sum_{j=1}^s a_j \langle u, v_j \rangle$.

Prova.

P1) Já sabemos que $0 \cdot u = 0$, assim $\langle 0, u \rangle = \langle 0 \cdot u, u \rangle = 0$. $\langle u, u \rangle = 0$. Como $\langle u, 0 \rangle = \langle 0, u \rangle$, então temos $\langle u, 0 \rangle = 0$.

P2) Temos: $\langle u, av \rangle = \langle av, u \rangle = a \langle v, u \rangle = a \langle u, v \rangle$.

P3) Temos: $\langle u, v + w \rangle = \langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

P4) Usar um raciocínio por indução usando as condições (a) e (b) da definição de produto interno.

P5) Usar as propriedades P2) e P3) acima e raciocinar por indução.

□

As propriedades da Proposição 11.1.6, serão constantemente utilizadas nos cálculos de exercícios sobre os produtos internos dos espaços vetoriais euclidianos.

11.2 Norma e distância



Definição 11.2.1

Seja V um espaço euclidiano com o produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$. Dado um vetor $u \in V$, indica-se por $\|u\|$ e chama-se norma de u o número real positivo dado por:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$



Exemplo 11.2.2

Produto interno usual do espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, com o produto interno

$$(u, v) \mapsto x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. A norma associada a esse produto interno é dada por:

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ para todo } u = (x, y).$$



Exemplo 11.2.3

Produto interno usual do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, com o produto interno

$$(u, v) \mapsto x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

onde $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. A norma associada a esse produto interno é dada por:

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ para todo } u = (x, y, z).$$



Proposição 11.2.4

Seja V um espaço euclidiano com o produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$. Sejam $u \in V$, então, temos:

1. $\|au\| = |a| \cdot \|u\|$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
2. $\|u\| \geq 0$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.

Prova. 1. Sejam u e v em V . Temos:

$$\|a.u\| = \sqrt{\langle a.u, a.u \rangle} = \sqrt{a^2 \langle u, u \rangle} = |a| \cdot \sqrt{\langle u, u \rangle} = |a| \cdot \|u\|.$$

2. Seja $u \in V$, temos:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

Essa equivalência é obtida a partir da propriedade (d), da definição de produto interno e da propriedade P1).

□



Proposição 11.2.5

(Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Seja V um espaço euclidiano com o produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$. Sejam u e $v \in V$, então, temos:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Como consequência, da precedente proposição , temos o seguinte corolário.



Corolário 11.2.6

(Desigualdade triangular). Seja V um espaço euclidiano com o produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$, onde. u e $v \in V$. Então, vale a seguinte desigualdade:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Demonstração. Sejam u e $v \in V$, temos

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle,$$

assim,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\|.$$

Então, temos $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$, para todo par de vetores u e v . Daí, da desigualdade: $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. $\square$



Exemplo 11.2.7

Seja o espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual,

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Temos:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow |x_1 x_2 + y_1 y_2| \leq (x_1^2 + y_1^2)^{1/2} \cdot (x_2^2 + y_2^2)^{1/2},$$

logo, temos:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2).$$



Exemplo 11.2.8

Seja o espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual,

$$(u, v) \mapsto x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

onde $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. Temos:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \Leftrightarrow |x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2| \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2} \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2},$$

logo, temos:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2).$$

**Proposição 11.2.9**

Seja o espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual,

$$(u, v) \longmapsto x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n,$$

onde $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Como $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, então:

$$|x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n| \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2} \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)^{1/2}.$$

Elevando ambos os termos da desigualdade ao quadrado:

$$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$

Essa desigualdade é conhecida como Desigualdade de Lagrange.

Distância. Seja V um espaço vetorial euclidiano. Consideremos a aplicação $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$d(u, v) = \|u - v\|, \text{ para todo } u, v \in V.$$

**Proposição 11.2.10**

A função d possui as seguintes propriedades:

- (a) $d(u, v) \geq 0$, para todo u, v em V , e $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.
- (b) $d(u, v) = d(v, u)$, para todo u, v em V .
- (c) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, para todo u, v e w em V .

Prova. (a) Para todo u, v em V temos: $d(u, v) = \|u - v\| \geq 0$. Também, temos: $d(u, v) = \|u - v\| = 0 \Leftrightarrow u - v = 0$, logo $u = v$.

b) Para todo u, v em V temos $d(u, v) = \|u - v\| = \| -1 \cdot (v - u) \| = | -1 | \|v - u\| = d(v, u)$.

c) Para todo u, v, w em V temos $d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|$. Logo, temos: $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$.

□

**Definição 11.2.11**

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Com as precedentes propriedades a), b) e c), a aplicação $d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$d(u, v) = \|u - v\|, \text{ para todo } u, v \in V.$$

é chamada de **métrica** sobre V , e o número $d(u, v)$ é chamado de **distância** de u a v .

💡 Exemplo 11.2.12

Seja $\mathbb{R}^2$ o espaço euclidiano equipado com o produto interno usual $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$, onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. A norma associada a esse produto interno é dada por: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, para todo $u = (x, y)$. A distância entre os vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ é dada por:

$$d(u, v) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

💡 Exemplo 11.2.13

Seja $\mathbb{R}^3$ o espaço euclidiano equipado com o produto interno usual dado por $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, onde $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$. A norma associada a esse produto interno é dada por: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, para todo $u = (x, y, z)$. A distância entre os vetores $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ é dada por:

$$d(u, v) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Ângulo entre dois vetores. Como consequência da desigualdade de Cauchy-Schwarz podemos definir o conceito de ângulo entre vetores em um espaço euclidiano, com ilustração geométrica nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Seja um espaço euclidiano V . Sejam u e v dois vetores não nulos de V . Da desigualdade $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ segue que:

$$-\|u\| \cdot \|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

assim, conclui-se que:

$$-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1.$$

Então, existe um único número real $\theta \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

Em geral, o número θ é chamado de ângulo entre u e v . Assim, nos casos dos espaços euclidianos $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, munidos com os produtos internos usuais, tal número $\theta \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$, corresponde a medida do ângulo entre os segmentos orientados que representam os vetores, no sentido geométrico elementar.

Exemplo 11.2.14

Achar o ângulo entre os seguintes pares de vetores do $\mathbb{R}^3$: $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$.

Para os vetores $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 0 \times 2 = 3,$$

e

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad \|v\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, o cosseno do ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) de u e v é dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O único ângulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ cujo cosseno é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\theta = \frac{\pi}{4}$.

11.3 Ortogonalidade

Definição 11.3.1

Seja V um espaço euclidiano. Dizemos que dois vetores u e v de V são ortogonais se, e somente se,

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

Um subconjunto $S = \{u_1, \dots, u_r\}$ de V se diz ortonormal se, e somente se, as duas seguintes condições são verificadas

1. $\|u_k\| = 1$, para todo k ($k = 1, 2, \dots, r$), e
2. $\langle u_k, u_j \rangle = 0$, para todos $k \neq j$ ($k, j = 1, 2, \dots, r$), isto é, dois vetores quaisquer de S , distintos entre si, são ortogonais.

Exemplo 11.3.2

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ o conjunto $S = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$ é ortonormal. De fato, temos,

1. $\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 0 + 0} = 1$, $\|u_2\| = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1$ e $\|u_3\| = \sqrt{0 + 0 + 1^2} = 1$,
2. $\langle u_1, u_2 \rangle = 1 \times 0 + 0 \times 1 + 0 = 0$, também temos $\langle u_1, u_3 \rangle = 0$ e $\langle u_2, u_3 \rangle = 0$.

De maneira geral, para um espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ temos a seguinte propriedade:

**Proposição 11.3.3**

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ o conjunto $S = \{u_1 = (1, 0, \dots, 0), u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, v_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ é ortonormal.

Em espaços euclidianos os conjuntos ortonormais verificam a seguinte propriedade:

**Proposição 11.3.4**

Seja V um espaço euclidiano. Todo conjunto ortonormal $S = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ do espaço vetorial euclidiano V , é necessariamente L.I.

Prova. Sejam $a_1, \dots, a_r$ escalares reais tais que: $a_1 \cdot e_1 + \dots + a_r \cdot e_r = 0$, então temos:

$$0 = \langle 0, e_1 \rangle = \langle a_1 \cdot e_1 + \dots + a_r \cdot e_r, e_1 \rangle = a_1 \cdot \langle e_1, e_1 \rangle + \dots + a_r \langle e_r, e_1 \rangle,$$

assim, temos:

$$0 = a_1 \cdot \langle e_1, e_1 \rangle + a_2 \cdot \langle e_1, e_2 \rangle + \dots + a_r \langle e_1, e_r \rangle = a_1 \cdot \langle e_1, e_1 \rangle = a_1.$$

Logo, temos $a_1 = 0$. De maneira análoga se prova que

$$0 = \langle 0, e_j \rangle = \langle a_1 \cdot e_1 + \dots + a_r \cdot e_r, e_j \rangle = a_j \cdot \langle e_j, e_j \rangle = a_j.$$

Assim, temos $a_1 = \dots = a_r = 0$. Em conclusão, o conjunto ortonormal $S = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ é L.I. $\square$

Outra demonstração: Sendo $a_1 \cdot e_1 + \dots + a_r \cdot e_r = 0$ então temos $\|a_1 \cdot e_1 + \dots + a_r \cdot e_r\| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_r^2} = 0$. Logo, temos $a_1 = \dots = a_r = 0$, assim o conjunto ortonormal $S = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ é L.I.

**Proposição 11.3.5**

Sejam V um espaço euclidiano e $S = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ um conjunto ortonormal de V . Seja u um vetor de V e o vetor: $v = u - \langle u, e_1 \rangle e_1 - \langle u, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle u, e_r \rangle e_r$. Então, temos:

$$\langle v, e_j \rangle = 0, \text{ para todo } j = 1, \dots, r.$$

Isto é, o vetor $v = u - \langle u, e_1 \rangle e_1 - \langle u, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle u, e_r \rangle e_r$ é ortogonal a todo vetor do subespaço vetorial $[S] = [e_1, \dots, e_r]$ gerado pelo conjunto de vetores $S = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$.

Prova. Para e_1 temos:

$$\langle v, e_1 \rangle = \langle u - \langle u, e_1 \rangle e_1 - \langle u, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle u, e_r \rangle e_r, e_1 \rangle,$$

e com as propriedades do produto interno, temos:

$$\begin{aligned} \langle v, e_1 \rangle &= \langle u, e_1 \rangle - \langle u, e_1 \rangle \cdot \langle e_1, e_1 \rangle - \dots - \langle u, e_j \rangle \cdot \langle e_j, e_1 \rangle - \dots \\ &\quad - \langle u, e_r \rangle \langle e_r, e_1 \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle e_j, e_1 \rangle = 0$ e $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$ para $j \neq 1$ deduzimos que:

$$\langle v, e_1 \rangle = \langle u, e_1 \rangle - \langle u, e_1 \rangle = 0.$$

De maneira semelhante, para todo e_j temos,

$$\langle v, e_j \rangle = \langle u - \langle u, e_1 \rangle e_1 - \langle u, e_2 \rangle e_2 - \dots - \langle u, e_r \rangle e_r, e_j \rangle,$$

assim, temos:

$$\begin{aligned} \langle v, e_j \rangle &= \langle u, e_j \rangle - \langle u, e_1 \rangle \cdot \langle e_1, e_j \rangle - \dots - \langle u, e_j \rangle \cdot \langle e_j, e_j \rangle - \dots \\ &\quad - \langle u, e_r \rangle \langle e_r, e_j \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle v, e_j \rangle = \langle u, e_j \rangle - \langle u, e_j \rangle = 0.$$

Seja $w = a_1 \cdot e_1 + \dots + a_r \cdot e_r$, como $\langle v, e_j \rangle = 0$ para todo j , temos:

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

Logo, como o vetor v é ortogonal aos vetores do conjunto S , então v é ortogonal a toda combinação linear de S .

□



Definição 11.3.6

Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Se um conjunto $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ for uma base de V e simultaneamente for um conjunto ortonormal, então dizemos que B é uma base ortonormal de V .



Exemplo 11.3.7

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ o conjunto $B = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Então de fato, temos:

1. $\|u_1\| = 1, \|u_2\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$ e $\|u_3\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1,$
2. $\langle u_1, u_2 \rangle = 0, \langle u_1, u_3 \rangle = 0$ e $\langle u_2, u_3 \rangle = 0.$

Assim, $B = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$ é uma base ortonormal do espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

De maneira geral, temos a seguinte propriedade.



Proposição 11.3.8

Para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ o conjunto $S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, onde $u_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $u_n = (0, \dots, 0, 1)$, é uma base ortonormal.



Proposição 11.3.9

(Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt.) Todo espaço vetorial euclidiano de dimensão finita $n \geq 1$ admite uma base ortonormal.

Se $\dim V = 1$ e se $\{u\}$ é uma base de V , então o vetor $e = \frac{u}{\|u\|}$ é L.I. e tem norma igual a 1. Logo $\{e = \frac{u}{\|u\|}\}$ é uma base ortonormal de V .

Se $\dim V = 2$ e se $\{u_1, u_2\}$ é uma base de V , seja o vetor $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$. Então, o vetor $v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$ é ortogonal a e_1 (Proposição 11.3.5). Logo, o vetor $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ é unitário e ortogonal a e_1 . Assim, o conjunto $\{e_1, e_2\}$ é um subconjunto ortonormal de V com dois vetores, é uma base ortonormal de V .

O mesmo processo permitirá a construção de uma base ortonormal em qualquer espaço euclidiano de dimensão finita n , utilizando-se o mesmo método usado na Proposição 11.3.5.



Exemplo 11.3.10

Aplicar o processo de Gram-Schmidt à base $B = \{u_1 = (1, 0), u_2 = (1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, considerando o produto interno usual nesse espaço.

Seja $v_1 = u_1$ e $v_2 = u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = (1, 1) - (1, 0) = (1, 0)$. Então, temos: $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$ e $S = \{e_1, e_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Seja V um espaço vetorial euclidiano. Seja U um subespaço vetorial de V , indiquemos por $U^\perp$ o seguinte subconjunto de V :

$$U^\perp = \{v \in V; \langle v, u \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Sejam v_1, v_2 em $U^\perp$, temos:

1. $\langle 0, u \rangle = 0$, para todo u em U , logo temos $0 \in U^\perp$,
2. $\langle v_1 + v_2, u \rangle = \langle v_1, u \rangle + \langle v_2, u \rangle = 0$, para todo u em U , logo temos $v_1 + v_2 \in U^\perp$,
3. $\langle a \cdot v_1, u \rangle = a \cdot \langle v_1, u \rangle = 0$, para todo u em U , logo temos $a \cdot v_1 \in U^\perp$.

Em conclusão, o subconjunto $U^\perp$ é um subespaço vetorial de V .

**Definição 11.3.11**

O subespaço $U^\perp = \{v \in V \text{ tal que } \langle v, u \rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}$ é chamado de complemento ortogonal de U .

**Exemplo 11.3.12**

Sejam o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ e o conjunto $U = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$. Então, temos:

$$U^\perp = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\}.$$

**Proposição 11.3.13**

Seja V um espaço vetorial euclidiano de dimensão finita. Seja U um subespaço vetorial de V , então:

$$V = U \oplus U^\perp,$$

ou seja, $V = U + U^\perp$ e $U \cap U^\perp = \{0\}$.

11.4 Exercícios da Resolvidos

**Exercício 11.4.1**

Considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, calcular $\langle u, v \rangle$ nos seguintes casos:

1. $u = (\frac{1}{2}, 2, 1)$ e $v = (6, 2, -3)$,
2. $u = (3, 2, 0)$ e $v = (5, 0, -3)$,
3. $u = (1, 2, 1)$ e $v = (2, -1, 7)$,

Solução. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ dois elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o produto definido por: $\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, é um produto interno no $\mathbb{R}^3$.

1. Para os vetores $u = (\frac{1}{2}, 2, 1)$ e $v = (6, 2, -3)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = \frac{1}{2} \times 6 + 2 \times 2 + 1 \times (-3) = 4.$$

Logo, temos $\langle u, v \rangle = 4$.

2. Para os vetores $u = (3, 2, 0)$ e $v = (5, 0, -3)$, temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 3 \times 5 + 2 \times 0 + 0 \times (-3) = 15.$$

Logo, temos $\langle u, v \rangle = 15$.

3. Para os vetores $u = (1, 2, 1)$ e $v = (2, -1, 7)$, temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 1 \times 7 = 7.$$

Logo, temos $\langle u, v \rangle = 7$.



Exercício 11.4.2

Considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ calcular $\langle u, v \rangle$ nos seguintes casos:

1. $u = (2, -1, 5)$ e $v = (4, 3, -1)$.
2. $u = (2, -1, 0)$ e $v = (0, 5, -1)$.
3. $u = (2, 2, 2)$ e $v = (2, -2, 7)$.

Solução. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ dois elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o produto definido por: $\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, é um produto interno no $\mathbb{R}^3$.

1. Para os vetores $u = (2, -1, 5)$ e $v = (4, 3, -1)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2 \times 4 + (-1) \times 3 + 5 \times (-1) = 0.$$

Logo, temos $\langle u, v \rangle = 0$.

2. Para os vetores $u = (2, -1, 0)$ e $v = (0, 5, -1)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2 \times 0 + (-1) \times 5 + 0 \times (-1) = -5.$$

Logo, temos $\langle u, v \rangle = -5$.

3. Para os vetores $u = (2, 2, 2)$ e $v = (2, -2, 7)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 2 \times 2 + 2 \times (-2) + 2 \times 7 = 14.$$

Logo, temos $\langle u, v \rangle = 14$.



Exercício 11.4.3

Sejam a, b dois números reais fixos e não nulos. Sendo $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ dois vetores do $\mathbb{R}^2$, definamos:

$$\langle u, v \rangle = \frac{x_1 \cdot x_2}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y_2}{b^2}.$$

Provar que $\langle u, v \rangle$ define um produto interno sobre o $\mathbb{R}^2$.

Solução. De fato, as quatro condições de produto interno são verificadas. Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$ e $w = (x_3, y_3)$, e $d \in \mathbb{R}$.

(a) Com um cálculo direto temos

$$\langle u + v, w \rangle = \langle (x_1 + x_2, y_1 + y_2), (x_3, y_3) \rangle = \frac{(x_1 + x_2)x_3}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)y_3}{b^2}.$$

Assim, deduzimos:

$$\langle u + v, w \rangle = \frac{(x_1 + x_2)x_3}{a^2} + \frac{(y_1 + y_2)y_3}{b^2} = \frac{x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y_3 + y_2 \cdot y_3}{b^2}.$$

Logo, obtemos:

$$\langle u + v, w \rangle = \frac{x_1 \cdot x_3}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y_3}{b^2} + \frac{x_2 \cdot x_3}{a^2} + \frac{y_2 \cdot y_3}{b^2}.$$

Então, temos $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(b) Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$, temos:

$$\langle d \cdot u, v \rangle = \langle (d \cdot x_1, d \cdot y_1), (x_2, y_2) \rangle = \frac{(d \cdot x_1) \cdot x_2}{a^2} + \frac{(d \cdot y_1) \cdot y_2}{b^2} = d \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y_2}{b^2}.$$

Assim, deduzimos:

$$\langle d \cdot u, v \rangle = d \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{a^2} + d \cdot \frac{y_1 \cdot y_2}{b^2} = d \left(\frac{x_1 \cdot x_2}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y_2}{b^2} \right).$$

Logo, obtemos $\langle d \cdot u, v \rangle = d \cdot \langle u, v \rangle$.

(c) Sejam $u = (x_1, y_1)$, $v = (x_2, y_2)$. Usando a comutatividade da multiplicação, temos:

$$\langle u, v \rangle = \frac{x_1 \cdot x_2}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y_2}{b^2} = \frac{x_2 \cdot x_1}{a^2} + \frac{y_2 \cdot y_1}{b^2}.$$

Logo, obtemos $\langle u, v \rangle = d \cdot \langle v, u \rangle$.

(c) Para todo $u = (x, y) \neq (0, 0)$, temos:

$$\langle u, u \rangle = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 0.$$

Logo, obtemos $\langle u, u \rangle > 0$.

Conclusão. Para o produto $\langle u, v \rangle = \frac{x_1 \cdot x_2}{a^2} + \frac{y_1 \cdot y_2}{b^2}$, definido sobre $\mathbb{R}^2$, as quatro condições de um produto interno são verificadas.

Exercício 11.4.4

Seja V um espaço vetorial euclidiano, equipado com o produto interno $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$. Provar que a aplicação:

$$(u, v) \mapsto u * v = 2 \langle u, v \rangle,$$

também é um produto interno sobre V . Generalize.

Solução. Como o espaço vetorial V é euclidiano, então as quatro condições de produto

interno são verificadas pelo produto $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle$. Vamos provar que para o produto $(u, v) \mapsto u * v = 2 \langle u, v \rangle$, as quatro condições de um produto interno são também verificadas.

1. Sejam u, v e w vetores de V . Como $\langle u, v \rangle$ é um produto interno, temos $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, assim:

$$(u + v) * w = 2 \langle u + v, w \rangle = 2(\langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle).$$

Logo, temos:

$$(u + v) * w = 2 \langle u + v, w \rangle = 2 \langle u, w \rangle + 2 \langle v, w \rangle = u * w + v * w.$$

Assim, obtemos : $(u + v) * w = u * w + v * w$.

2. Sejam u, v dois vetores de V e $a \in \mathbb{R}$. Como $\langle u, v \rangle$ é um produto interno temos $\langle a.u, v \rangle = a. \langle u, v \rangle$, assim:

$$(a.u) * v = 2 \langle a.u, v \rangle = 2(a. \langle u, v \rangle) = a(2 \langle u, v \rangle) = a.u * v,$$

assim, temos : $(a.u) * v = a.u * v$.

3. Sejam u, v dois vetores de V . Como $\langle u, v \rangle$ é um produto interno, temos $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ e deduzimos:

$$u * v = 2 \langle u, v \rangle = 2 \langle v, u \rangle = v * u,$$

assim, temos : $u * v = v * u$.

4. Sejam u um vetor não nulo de V . Como $\langle u, v \rangle$ é um produto interno temos $\langle u, u \rangle > 0$, assim :

$$u * u = 2 \langle u, u \rangle > 0,$$

logo, temos: $u * v > 0$.

Conclusão. Para o produto $u * v = 2 \langle u, v \rangle$, definido sobre o espaço euclidiano V , as quatro condições de um produto interno são verificadas.

Exercício 11.4.5

Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|u\| = 2$, $\|v\| = 1$ e $\|u - v\| = 4$.
Determinar $\langle u, v \rangle$.

Solução. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano.

$$\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle,$$

ou seja,

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \langle u, v \rangle.$$

Assim, temos:

$$2 \langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2,$$

ou seja

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Assim, para $\|u\| = 2$, $\|v\| = 1$ e $\|u - v\| = 4$, obtemos :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2) = \frac{1}{2}(2^2 + 1^2 - 4^2).$$

Logo, deduzimos $\langle u, v \rangle = -\frac{11}{2}$.

Exercício 11.4.6

Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano tais que $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ e $\|u + v\| = 2$.
Determinar $\langle u, v \rangle$.

Solução. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano.

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle.$$

Logo, temos:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle.$$

Assim, obtemos:

$$2\langle u, v \rangle = \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2,$$

ou seja

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2).$$

Assim, para $\|u\| = 1$, $\|v\| = 1$ e $\|u + v\| = 2$, obtemos :

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{2}(2^2 - 1^2 - 1^2).$$

Logo, deduzimos $\langle u, v \rangle = 1$.

Exercício 11.4.7

Denomina-se versor todo vetor de norma igual a 1. Se $u \neq 0$, então $v = \frac{u}{\|u\|}$ é um vetor de norma igual a 1, chamado de versor de u . Determinar o versor de $u = (2, 2, 1)$, considerando no $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual.

Solução. Sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ dois elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o produto definido por: $\langle u, v \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, é o produto interno usual no $\mathbb{R}^3$. Assim, para todo $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Para o vetor $u = (2, 2, 1)$ temos:

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, o versor v do vetor $u = (2, 2, 1)$ é dado por:

$$v = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{3}u = \frac{1}{3}(2, 2, 1), \text{ ou seja, } v = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Exercício 11.4.8

Num espaço vetorial euclidiano V provar que:

1. $\|u\| = \|v\| \iff \langle u+v, u-v \rangle = 0$.
2. $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff \langle u, v \rangle = 0$.

Solução. 1. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Suponha que $\|u\| = \|v\|$, então:

$$\langle u+v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, -v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, -v \rangle.$$

Logo, temos $\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \|v\|^2$ e como $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ e $\|u\| = \|v\|$, então:

$$\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 = 0.$$

Logo, obtemos : $\langle u+v, u-v \rangle = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\langle u+v, u-v \rangle = 0$, então $\langle u+v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, -v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, -v \rangle = 0$. Logo, deduzimos $\|u\|^2 - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \|v\|^2 = 0$ e como $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, então :

$$\|u\|^2 - \|v\|^2 = 0 \text{ ou seja } \|u\|^2 = \|v\|^2.$$

Então obtemos: $\|u\| = \|v\|$.

2. Sejam u e v vetores de um espaço euclidiano. Suponha que $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. Como :

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle,$$

ou seja,

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle,$$

então, temos:

$$2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2 = 0.$$

Logo, deduzimos que : $\langle u, v \rangle = 0$.

Reciprocamente, suponha que $\langle u, v \rangle = 0$ então, como :

$$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle,$$

ou seja,

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle,$$

e como $\langle u, v \rangle = 0$ então, temos:

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \times 0.$$

Logo, deduzimos que: $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

Exercício 11.4.9

No espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^3$ sejam $u = (0, 1, -1)$ e $v = (1, 0, -1)$.

1. Determinar $\langle u, v \rangle$, $\|u\|$ e $\|v\|$.
2. Determinar o cosseno do ângulo entre u e v .

Solução. Seja um espaço euclidiano V . Sejam u e v dois vetores não nulos de V . Da desigualdade $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ segue que: $-\|u\| \cdot \|v\| \leq \langle u, v \rangle \leq \|u\| \cdot \|v\|$. Assim, conclui-se que: $-1 \leq \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1$. Então, existe um único número real $\theta \in \mathbb{R}$ com $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

O número θ é chamado de ângulo entre u e v .

Por outro lado, sejam $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ dois elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o produto definido por: $\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$, é o produto interno usual no $\mathbb{R}^3$. Assim, para todo $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos: $\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Para os vetores $u = (0, 1, -1)$ e $v = (1, 0, -1)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = 0 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times (-1) = 1,$$

$$\|u\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \text{ e } \|v\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

2. O cosseno do ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) de u e v é dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Conclusão: O cosseno do ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) de u e v é $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$.

Exercício 11.4.10

Achar o ângulo entre os seguintes pares de vetores do $\mathbb{R}^3$.

1. $u = (1, 1, 1)$ e $v = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$.
2. $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$.

Solução. Vamos aplicar o método do Exercício 11.4.9.

1. Para os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})$ temos $\langle u, v \rangle = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) + 1 \times \frac{1}{2} = 0$ e

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}, \quad \|v\| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-1)^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, o cosseno do ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) entre os vetores u e v é dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{0}{\|u\| \cdot \|v\|} = 0.$$

O único ângulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ cujo cosseno é igual a 0 é $\theta = \frac{\pi}{2}$.

2. Para os vetores $u = (1, -1, 0)$ e $v = (2, -1, 2)$ temos $\langle u, v \rangle = 1 \times 2 + (-1) \times (-1) + 0 \times 2 = 3$ e

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}, \quad \|v\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, o cosseno do ângulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) de u e v é dado por:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

O único ângulo θ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ cujo cosseno é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$ é $\theta = \frac{\pi}{4}$.



Exercício 11.4.11

Seja o espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$ equipado com o produto interno usual $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$, onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Verificar se u e v são ortogonais, em relação a esse produto, nos seguintes casos:

1. $u = (1, 1)$ e $v = (2, -1)$;
2. $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$;
3. $u = (3, 2)$ e $v = (2, -1)$.

Solução. Dois vetores $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, do espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$ equipado com o produto interno usual, são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

1. Para os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (2, -1)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 1 \times 2 + 1 \times (-1) = 2 - 1 = 1 \neq 0.$$

Logo, os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (2, -1)$ não são ortogonais em relação ao produto interno usual do espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$.

2. Para os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 1 - 1 = 0.$$

Logo, os vetores $u = (1, 1)$ e $v = (-1, 1)$ são ortogonais, em relação ao produto interno usual do espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$.

3. Para os vetores $u = (3, 2)$ e $v = (2, -1)$ temos:

$$\langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 3 \times 2 + 2 \times (-1) = 6 - 2 = 4 \neq 0.$$

Logo, os vetores $u = (3, 2)$ e $v = (2, -1)$ não são ortogonais, em relação o produto interno usual do espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$.



Exercício 11.4.12

Seja o espaço vetorial euclidiano $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual,

$$(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2,$$

onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Determinar m a fim de que sejam ortogonais os vetores $u = (m + 1, 2)$ e $v = (-1, 4)$.

Solução. Se os vetores $u = (m + 1, 2)$ e $v = (-1, 4)$ são ortogonais, então temos:

$$\langle u, v \rangle = (m + 1) \times (-1) + 2 \times 4 = -m + 7 = 0.$$

Logo, $u = (m + 1, 2)$ e $v = (-1, 4)$ são ortogonais se, e somente se, $m = 7$.



Exercício 11.4.13

Aplicar o processo de Gram-Schmidt à base $B = \{u_1 = (1, 2), u_2 = (1, 1)\}$ do $\mathbb{R}^2$, considerando o produto interno usual nesse espaço.

Solução. Vamos aplicar o Processo de Gram-Schmidt, para um espaço vetorial Euclidiano V tal que $\dim V = 2$. Como $\{u_1, u_2\}$ é uma base de V :

Etapla 1. Para o vetor $u_1 = (1, 2)$ temos $\|u_1\| = \|(1, 2)\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$. Seja o vetor $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 2) = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$. Então temos:

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle \frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_1}{\|u_1\|} \rangle = \frac{\langle u_1, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} = \frac{\|u_1\|^2}{\|u_1\|^2} = 1.$$

Logo, o vetor $e_1 = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$ é unitário.

Etapla 2. Seja o vetor $v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1$. Como $\langle (1, 1), e_1 \rangle = 3\frac{\sqrt{5}}{5}$ então temos:

$$v_2 = (1, 1) - \langle (1, 1), e_1 \rangle e_1 = (1, 1) - 3\frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}) = (\frac{2}{5}, \frac{-1}{5}).$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}\langle v_2, e_1 \rangle &= \langle u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1, e_1 \rangle = \langle u_2, e_1 \rangle - \langle \langle u_2, e_1 \rangle e_1, e_1 \rangle \\ &= \langle u_2, e_1 \rangle - \langle u_2, e_1 \rangle \langle e_1, e_1 \rangle = \langle u_2, e_1 \rangle - \langle u_2, e_1 \rangle = 0,\end{aligned}$$

por que $\|e_1\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle = 1$. Logo, o vetor $v_2 = u_2 - \langle u_2, e_1 \rangle e_1 = (\frac{2}{5}, \frac{-1}{5})$ é ortogonal a $e_1 = (\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$.

Etapa 3. Seja o vetor $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$. Como $\|v_2\| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, então temos $e_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{2}{5}, \frac{-1}{5})$.

Por outro lado, temos: $\|e_2\|^2 = \langle e_2, e_2 \rangle = \frac{\|v_2\|^2}{\|v_2\|^2} = 1$ e

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, \frac{v_2}{\|v_2\|} \rangle = \frac{1}{\|v_2\|} \langle e_1, v_2 \rangle = 0.$$

Logo, o vetor $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}$ é unitário e ortogonal a e_1 . Assim, o conjunto $\{e_1, e_2\}$ é um subconjunto ortonormal de V com dois vetores, logo é uma base ortonormal de V .

11.5 Exercícios para Praticar

Exercício 11.5.1

Aplicar o processo de Gram-Schmidt à base $B = \{u_1 = (1, 0, 0), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (0, 1, 2)\}$ do $\mathbb{R}^3$, considerando o produto interno usual nesse espaço.

Resposta: $\{v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), u_3 = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})\}$.

Exercício 11.5.2

Ortonormalizar a base $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (1, -1, 1), u_3 = (-1, 0, 1)$ do $\mathbb{R}^3$, pelo processo de Gram-Schmidt.

Exercício 11.5.3

Achar uma base do subespaço $U^\perp$, onde U é o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(1, 0, 1, 1)$ e $(1, 1, 2, 0)$. Ortonormalize esta base.

CAPÍTULO 12

AUTOVALORES, AUTOVETORES E AUTOESPAÇOS ASSOCIADOS



Objetivos

Neste Capítulo o objetivo é de apresentar as primeiras propriedades dos conceitos básicos de autovalores e de autovetores de uma matriz A ou uma transformação linear T cuja matriz é A , bem como os conceitos de diagonalização e de ortogonalidade. Esses conceitos aparecem em muitas aplicações, pois nos ajudam a entender mais profundamente a transformação linear T , e são muito importante em várias áreas da Matemática e de outras ciências exatas e aplicadas. Por exemplo, os conceitos de autovalor e autovetor são usados nas áreas da Física e de Química, bem como no estudo da geometria ou das equações diferenciais.

12.1 Autovalores, Autovetores e Autoespaços associados

Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita n , uma transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, e $A \in M_{n \times n}$ a matriz associada, em relação a uma base $\mathcal{B}$. O objetivo desta seção é de apresentar os conceitos de autovalor e autovetor de uma matriz A de uma transformação T .

Por razões práticas, neste capítulo, os vetores v do espaço vetorial $\mathbb{V}$ serão denotados da seguinte forma: $\vec{v}$. Por outro lado, em dimensão finita n , o vetor $\vec{v}$ é denotado

também na forma matricial $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$.

Problema. Queremos caracterizar quais vetores são levados em um múltiplo de si

mesmo, isto é, procuramos um vetor $\vec{v} \in \mathbb{V}$ e um escalar λ tal que:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Neste caso, $T(\vec{v})$ e $\vec{v}$ possuem a mesma direção, em outras palavras, $T(\vec{v})$ e $\vec{v}$ são colineares.

Como o vetor nulo $\vec{0}$ satisfaz $T(\vec{0}) = \lambda \vec{0} = \vec{0}$, para todo λ , então estamos interessados em $\vec{v} \neq \vec{0}$. Isto é, estamos interessados em vetores não nulos $\vec{v}$ tais que: $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$.



Definição 12.1.1

Dada uma matriz *quadrada* A de ordem $n \times n$, com entradas reais, nós dizemos que um número $\lambda \in \mathbb{R}$ é um **autovalor** de A quando existe um vetor *não nulo* $\vec{v}$ tal que

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}.$$

Podemos observar que λ pode ser zero enquanto $\vec{v}$ não pode ser o vetor nulo. Os vetores $\vec{v}$ associados ao autovalor λ , tem um papel importante, assim temos a seguinte definição.



Definição 12.1.2

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, todo vetor não nulo $\vec{v}$ que verifica:

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v},$$

é chamado de **autovetor** associado ao autovalor λ .

Geometricamente, $\vec{v}$ é um vetor que não muda de direção quando aplicamos a matriz A . Em outras palavras, um autovetor é um vetor que é levado em um múltiplo de si próprio. Associados a uma matriz A ou uma transformação linear T , os seus autovetores, que, como veremos, são direções especiais para esta matriz ou transformação linear T . Por esta razão, são também conhecidos como vetores próprios ou vetores característicos de T .



Exemplo 12.1.3

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Temos que $\lambda_1 = 5$ é um autovalor desta matriz, porque o vetor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ satisfaz

a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos afirmar que $\vec{v}_1$ é um autovetor associado ao autovalor 5. Além disso, podemos verificar também que o vetor $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovetor de A , pois

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ 22 \end{bmatrix} = 11 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

onde 11 é um autovalor da matriz A . Por outro lado, o vetor $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ também é um autovetor da matriz A pois temos:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

E assim podemos concluir que 1 também é um autovalor de A .

Observamos que, se $\vec{v}$ for um autovetor de uma matriz A associado a um autovalor λ , então qualquer múltiplo escalar $\alpha\vec{v}$ também é um autovetor de A associado a λ :

$$A(\alpha\vec{v}) = \alpha A\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v}).$$

Da mesma maneira, se dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ forem autovetores associados a um mesmo autovalor λ , então a soma $\vec{v} + \vec{w}$ também é um autovetor associado a λ :

$$A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} = \lambda(\vec{v} + \vec{w}).$$

Logo, deduzimos a seguinte propriedade:



Proposição 12.1.4

Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial de dimensão finita n , uma transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, e $A \in M_{n \times n}$ a matriz associada, em relação a uma base $\mathcal{B}$. O conjunto $N(\lambda)$ formado por todos os autovetores associados a um autovalor λ , união com o vetor nulo, é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$, denominado **autoespaço** associado ao autovalor λ , isto é,

$$N(\lambda) = \{ \vec{v} \in \mathbb{V} \mid \vec{v} \text{ é autovetor associado a } \lambda \} \cup \{ \vec{0} \},$$

, é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

Prova. Vamos verificar as três condições de subespaço vetorial. Para este propósito usaremos a justificativa matemática anterior.

C1) Podemos observar que pela definição do conjunto $\mathbf{N}(\lambda)$ temos: $\vec{0} \in \mathbf{N}(\lambda)$.

C2) Sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dois vetores de $\mathbf{N}(\lambda)$, então:

$$A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w} = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} = \lambda(\vec{v} + \vec{w}).$$

Logo, temos $\vec{v} + \vec{w} \in \mathbf{N}(\lambda)$.

C3) Seja $\vec{v}$ em $\mathbf{N}(\lambda)$ e α um escalar real, então:

$$A(\alpha\vec{v}) = \alpha A\vec{v} = \alpha\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v}).$$

qualquer múltiplo escalar $\alpha\vec{v} \in \mathbf{N}(\lambda)$.

Conclusão. O conjunto $\mathbf{N}(\lambda)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{V}$.

□

Problema 1: Como determinar os autovalores de uma matriz?

Vamos estudar uma forma de determinar os autovalores de uma matriz A . Pela definição de autovalores de uma matriz A temos:

λ é um autovalor de A se, e somente se, existe $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

Por outro lado, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Existe } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ tal que } A\vec{v} = \lambda\vec{v} \\ \text{se, e somente se,} \\ \text{existe } \vec{v} \neq \vec{0} \text{ tal que } (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}. \end{array} \right.$$

Seja $I = I_{n \times n}$ a matriz identidade de ordem $n \times n$. Sabemos que a existência de um $\vec{v} \neq \vec{0}$ tal que $A\vec{v} = \lambda\vec{v} = \lambda I\vec{v}$ é equivalente a equação matricial:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0},$$

que é equivalente a um sistema homogêneo que admite uma solução não trivial, o que equivale de dizer que:

a matriz $A - \lambda I$ não é invertível.

Finalmente, usando a propriedade do determinante que caracteriza a invertibilidade de uma matriz quadrada, obtemos:

a matriz $A - \lambda I$ não é invertível se, e somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$.

De maneira geral, seja A uma matriz de ordem n , os autovalores de A são aqueles que

satisfazem $\det(A - \lambda I) = 0$. Assim, a última equação pode ser utilizada para determinar os autovalores. Temos a seguinte definição:



Definição 12.1.5

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é chamada de **equação característica**.

Observe, pelas propriedades dos determinantes que:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdot & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} - \lambda & \cdot & a_{1n} \\ \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdot & a_{1n} - \lambda \end{vmatrix},$$

assim, temos:

$$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + q(\lambda),$$

onde $q(\lambda)$ é um polinômio de grau $\leq n - 1$. Logo, o polinômio $p(\lambda)$ é de fato um polinômio e tem grau n , que é igual a $n = \dim(\mathbb{V})$.



Definição 12.1.6

O polinômio:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0,$$

é chamado de **polinômio característico** da matriz A .

É consequência do Teorema Fundamental da Álgebra que existem no máximo n autovalores reais (já que um polinômio de grau $n \geq 1$ possui exatamente n raízes reais ou complexas).



Propriedade 12.1.7

Seja $A \in M_{n \times n}$ uma matriz quadrada, os autovalores são as raízes do polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$



Exemplo 12.1.8

Vamos encontrar os autovalores da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Para atingir nosso objetivo, precisamos da expressão explícita do polinômio

característico $p(\lambda)$ da matriz A . Temos:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

As raízes de $p(\lambda)$ são:

$$\lambda_1 = \frac{6 - \sqrt{36 - 20}}{2} = 1 \text{ e } \lambda_2 = \frac{6 + \sqrt{36 - 20}}{2} = 5.$$

Portanto, a matriz A tem dois autovalores reais: $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$.

Acabamos de ver um exemplo de uma matriz 2×2 com 2 autovalores distintos. Vamos ver agora, nos próximos dois exemplos, que uma matriz 2×2 pode ter 1 ou nenhum autovalor.

Exemplo 12.1.9

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz acima representa uma transformação linear no plano que expande um vetor pelo fator 4, mantendo sua direção e sentido. De fato, se $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por $T(\vec{v}) = A\vec{v}$, então $T(x, y) = (4x, 4y)$. Sendo assim, qualquer vetor satisfaz $Av = 4v$, o que nos mostra que 4 é o único autovalor de A , e qualquer vetor não nulo é autovetor associado a este autovalor.

Exemplo 12.1.10

Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

A matriz acima representa uma transformação linear no plano que rotaciona um vetor pelo ângulo θ no sentido anti-horário. Se $0 < \theta < \pi$, então nenhum vetor pode ser levado em um múltiplo de si próprio, e portanto não existem autovalores reais para a matriz A .

Agora vamos estudar uma matriz de ordem 3×3 .

Exemplo 12.1.11

Calcular os autovalores da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}.$$

Solução. Precisamos calcular o polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, dado por:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & 8 & 16 \\ 4 & 1 - \lambda & 8 \\ -4 & -4 & -11 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (5 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 8 \\ -4 & -11 - \lambda \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -4 & -11 - \lambda \end{vmatrix} + 16 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 - \lambda \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \\ &= (5 - \lambda) \left[(1 - \lambda)(-11 - \lambda) + 32 \right] - 8 \left[-44 - 4\lambda + 32 \right] + 16(-16 + 4 - 4\lambda) \\ &= (5 - \lambda) \left[\lambda^2 + 10\lambda + 21 \right] + 32\lambda + 12 \cdot 8 - 64\lambda - 12 \cdot 16 \\ &= -\lambda^3 - 5\lambda^2 + 29\lambda + 105 - 32\lambda - 96 \end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9.$$

Em geral, como $p(\lambda)$ é de grau 3, as possíveis raízes racionais desse polinômio só podem ser os divisores do termo independente acima: $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Verificamos que 1 é raiz. Assim, dividindo $p(\lambda)$ por $\lambda - 1$, obtemos:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - 5\lambda^2 - 3\lambda + 9 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 9) = -(\lambda - 1)(\lambda + 3)^2.$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$. Observamos que -3 é uma raiz de multiplicidade 2 do polinômio característico.

Em geral, o grande problema é encontrar raízes de polinômios, o que muitas vezes é difícil, quando o grau n do polinômio é $n \geq 3$, neste caso encontrar raízes de polinômios pode ser muito complicado.

Algoritmo: Encontrar os autovalores de uma matriz. Para encontrar os autovalores de uma matriz de A , temos em geral 3 etapas:

Etapas 1. Calcular o polinômio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Etapa 2. Resolver a equação característica:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Etapa 3. Os autovalores da matriz A :

- i) No caso real, as raízes reais da equação característica, são os autovalores da matriz A ,
- ii) No caso complexo, as raízes da equação característica, são os autovalores da matriz A .

Problema 2: Como determinar os autovetores de uma matriz?

Por outro lado, uma vez que os autovalores são conhecidos, encontrar os autovetores é um cálculo direto, baseado sobre a resolução de um sistema linear homogêneo.



Propriedade 12.1.12

Seja A uma matriz quadrada e $\vec{v}$ um vetor não nulo associado a um autovalor λ . Então, para determinar o autovetor $\vec{v}$ basta resolver o seguinte sistema linear homogêneo:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}.$$

Isto é, o mesmo que dizer que se $\vec{v} \in \mathbf{N}(\lambda)$, o autoespaço associado a λ , então temos:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \text{ equivale a } A\vec{v} - \lambda\vec{v} = (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

Assim, o autoespaço associado a λ é o espaço dado por:

$$\mathbf{N}(\lambda) = \text{Nul}(A - \lambda I) = \{\vec{v}; (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}\}.$$

O espaço $\mathbf{N}(\lambda) = \text{Nul}(A - \lambda I)$ é chamado de *espaço nulo* associado ao autovalor λ .

Vejamos como encontrar os autoespaços das matrizes dos exemplos anteriores.



Exemplo 12.1.13

[Exemplo 12.1.8] Encontrar os autovetores da seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz A possui dois autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$.

1. Os autovetores associados com o autovalor $\lambda_1 = 1$. Seja $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ um autovetor associado com o autovalor $\lambda_1 = 1$, então temos a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, precisamos resolver o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 3a_1 + 3a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0. \end{cases}$$

Então, temos

$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ 1 \text{ variável livre.} \end{cases}$$

Assim, em forma matricial paramétrica:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o subespaço próprio $N(1) = \text{Nul}(A - I)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, é gerado pelo conjunto $S = \{\vec{v}\}$, onde $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, isto é, temos:

$$N(1) = \text{Nul}(A - I) = [S] = \left\{ \vec{w} = a \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Os autovetores associados com o autovalor $\lambda_2 = 5$. Seja $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ um autovetor associado com o autovalor $\lambda_2 = 5$, então temos a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

o que equivale a

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, precisamos resolver o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} -a_1 + 3a_2 = 0 \\ a_1 - 3a_2 = 0. \end{cases}$$

Então, temos

$$\begin{cases} a_1 - 3a_2 = 0 \\ 1 \text{ variável livre.} \end{cases}$$

Em forma matricial paramétrica:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o subespaço próprio $N(5) = \text{Nul}(A - 5I)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, é gerado pelo conjunto $S = \{\vec{v}\}$, onde $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, isto é, temos:

$$N(5) = \text{Nul}(A - 5I) = [S] = \left\{ \vec{w} = a \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exemplo 12.1.14

[Exemplo 12.1.11] Vamos encontrar os autovetores da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix}.$$

A) Para encontrar os autovetores associados com o autovalor $\lambda_1 = 1$, temos a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda_1 & 8 & 16 \\ 4 & 1 - \lambda_1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 4a_1 + 8a_2 + 16a_3 = 0 \\ 4a_1 + 0 \times a_2 + 8a_3 = 0 \\ -4a_1 - 4a_2 - 12a_3 = 0 \end{cases}$$

Pelo processo de escalonamento matricial associado, com $L_1/4 \rightarrow L_1$, $L_2 - L_1 \rightarrow L_2$ e $L_3 + L_1 \rightarrow L_3$, implica:

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 16 & | 0 \\ 4 & 0 & 8 & | 0 \\ -4 & -4 & -12 & | 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | 0 \\ 0 & -8 & -8 & | 0 \\ 0 & 4 & 4 & | 0 \end{bmatrix}.$$

Repetindo este processo, isso nos permite ter

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | 0 \\ 0 & -8 & -8 & | 0 \\ 0 & 4 & 4 & | 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & | 0 \\ 0 & 1 & 1 & | 0 \\ 0 & 0 & 0 & | 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | 0 \\ 0 & 1 & 1 & | 0 \\ 0 & 0 & 0 & | 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, chegamos ao sistema linear homogêneo:

$$(S) \begin{cases} a_1 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (S), considerando $a_3 = k$ como variável livre, os autovetores são:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k \\ -k \\ k \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o espaço próprio $N(1) = \text{Nul}(A - I)$ associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$ é gerado pelo conjunto $S = \{\vec{v}\}$, onde $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, isto é,

$$N(1) = \text{Nul}(A - I) = [S] = \left\{ \vec{w} = k \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

B) Para encontrar os autovetores associados com o autovalor $\lambda_2 = -3$, vamos considerar a equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 5 - \lambda_2 & 8 & 16 \\ 4 & 1 - \lambda_2 & 8 \\ -4 & -4 & -11 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, temos o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 8a_1 + 8a_2 + 16a_3 = 0 \\ 4a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0 \\ -4a_1 - 4a_2 - 8a_3 = 0. \end{cases}$$

Usando o processo de escalonamento matricial associado, temos:

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 16 & | & 0 \\ 4 & 4 & 8 & | & 0 \\ -4 & -4 & -8 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, obtemos o sistema linear:

$$(S): a_1 + a_2 + 2a_3 = 0.$$

Resolvendo o sistema (S), tomando $a_1 = k_1$, $a_3 = k_2$ como variáveis livres, os

autovetores são dados:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1 - 2k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos o espaço próprio $N(-3) = \text{Nul}(A + 3I)$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -3$, é gerado pelo conjunto $S = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, onde:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$N(-3) = \text{Nul}(A + 3I) = [S] = \{\alpha \vec{e}_1 + \beta \vec{e}_2, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Algoritmo: Passos para determinar o espaço próprio $N(\lambda)$. Seja λ um autovalor de uma matriz A de ordem n . Para determinar o espaço próprio $N(\lambda)$, em geral temos o seguintes passos:

Etapa 1. A busca dos autovetores $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ associados ao autovalor λ , começa com a

equação matricial:

$$(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}. \quad (E)$$

Etapa 2. A equação (E) leva para a resolução do sistema linear homogêneo:

$$(S) \quad \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Etapa 3. O sistema (S) é homogêneo e possui mais de uma solução. Logo, o sistema (S) tem variáveis livres. Assim, podemos caracterizar os vetores próprios associados ao autovalor λ , em termos das variáveis livres.

Etapa 4. O espaço próprio $N(\lambda) = \text{Nul}(A - \lambda I)$ é dado por:

$$N(\lambda) = \text{Nul}(A - \lambda I) = [S],$$

onde $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s\}$ é uma base de vetores próprios de $N(\lambda)$.

12.1.1 Multiplicidade algébrica e Multiplicidade geométrica

Observamos nos exemplos anteriores, que a dimensão do autoespaço associado ficou igual à multiplicidade do autovalor. **Mas isto, nem sempre é verdade.** Como exercício,

verifique que a dimensão do autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 1$ da matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

é igual a 1, embora a multiplicidade do autovalor seja 2. De forma geral, temos as seguintes definições:



Definição 12.1.15

Seja λ um autovalor de uma matriz A .

- Chamamos a multiplicidade do autovalor λ de **multiplicidade algébrica**,
- A dimensão do autoespaço associado a λ é chamada de **multiplicidade geométrica**.

Pode-se provar que a multiplicidade geométrica é sempre menor ou igual que a multiplicidade algébrica de um autovalor.

12.2 Diagonalização

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Dado uma transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, a cada base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$, corresponde uma matriz $A = [T]_{\mathcal{B}}$ que representa T na base $\mathcal{B}$.

O objetivo é obter uma base do espaço de modo que a matriz de T nessa base seja a mais simples representante de T . Essa matriz é uma matriz diagonal.

Matrizes diagonais são matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Já que são triangulares, seus autovalores são os elementos da diagonal principal. Observamos também que os autovetores associados são os elementos da base canônica de $\mathbb{R}^n$.



Proposição 12.2.1

Autovetores associados a autovalores distintos de uma transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ são linearmente independentes.

De fato, sejam $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dois autovalores da transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$, e $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ os autovetores associados, respectivamente. Sejam a, b em $\mathbb{R}$, tais que $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 =$

$\vec{0}$. Logo, temos:

$$T(a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2) = aT(\vec{v}_1) + bT(\vec{v}_2) = \vec{0}, \text{ ou seja, } a\lambda_1\vec{v}_1 + b\lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}.$$

Se $\lambda_1 = 0$ então $\lambda_2 \neq 0$, temos $b\lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}$. Como $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, temos: $b\lambda_2 = 0$. Logo, deduzimos $b = 0$, assim obtemos $a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 = a\vec{v}_1 = \vec{0}$. Como $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ temos $a = 0$. Então, temos $a = b = 0$. Assim, os autovetores $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ são linearmente independentes.

Se $\lambda_1 = 0$, com o mesmo raciocínio também deduzimos que os autovetores $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ são linearmente independentes.

Se $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 \neq 0$ a equação $a\lambda_1\vec{v}_1 + b\lambda_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, implica que $b\lambda_2\vec{v}_2 = -a\lambda_1\vec{v}_1$. Se $b \neq 0$ deduzimos que $\vec{v}_2 = -\frac{a\lambda_1}{b\lambda_2}\vec{v}_1$. Logo,

$$T(\vec{v}_2) = -\frac{a\lambda_1}{b\lambda_2}T(\vec{v}_1) \text{ ou seja } T(\vec{v}_2) = -\frac{a\lambda_1}{b\lambda_2}\lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_2.$$

Então, temos $T(\vec{v}_2) = \lambda_2\vec{v}_2 = \lambda_1\vec{v}_2$ isso é impossível, porque $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Então, os autovetores $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, são linearmente independentes. Se $a \neq 0$, com o mesmo raciocínio também deduzimos que os autovetores $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$ são linearmente independentes.

Com o resultado dessa última Proposição, deduzimos o seguinte teorema:

★ Teorema 12.2.2

Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial real de dimensão finita n e uma transformação linear $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$. Se T possui n autovalores distintos, cujos autovetores correspondentes são $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, então, o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ formado pelos autovetores, é uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$.

Vamos justificar que, sempre que for possível formar uma base do espaço vetorial $\mathbb{V}$, de dimensão finita, apenas com autovetores de uma matriz quadrada A , então é possível fazer uma mudança de base de modo a obter uma matriz diagonal, com os autovalores na diagonal principal. Este procedimento é chamado de **diagonalização** da matriz A , por motivos óbvios. O método, que é surpreendentemente simples (mas, na prática, trabalhoso), consiste em montar uma matriz P com os autovetores de A e efetuar multiplicações de matrizes:

★ Teorema 12.2.3

Seja P a matriz formada pelos autovetores, isto é,

$$P = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \cdots \quad \vec{v}_n].$$

Então, temos:

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

De forma geral uma matriz A é diagonalizada pela matriz P dos autovetores a partir da relação:

$$D = P^{-1}AP,$$

ou seja, dada uma transformação linear, representada em uma certa base por uma matriz A , a questão de determinar se existe uma base na qual a transformação linear é representada por uma matriz diagonal D se reduz a encontrar uma matriz invertível P tal que:

$$D = P^{-1}AP.$$

[Justificativa do método de diagonalização] Vamos verificar que $P^{-1}AP = D$, mostrando que as colunas da matriz $P^{-1}AP$ são iguais às colunas de D . Pela forma que construímos a matriz P , sabemos que a primeira coluna de P é $\vec{v}_1$:

$$P\vec{e}_1 = \vec{v}_1 \quad \text{ou, ainda,} \quad \vec{e}_1 = P^{-1}\vec{v}_1.$$

Assim, já que $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$ a primeira coluna de $P^{-1}AP$ é dada por:

$$\begin{aligned} P^{-1}AP\vec{e}_1 &= P^{-1}A\vec{v}_1 \\ &= P^{-1}\lambda_1\vec{v}_1 \\ &= \lambda_1 P^{-1}\vec{v}_1 \\ &= \lambda_1 \vec{e}_1 \\ &= \text{primeira coluna de } D. \end{aligned}$$

Este mesmo raciocínio, repetido n vezes, para cada uma das colunas, prova que todas as colunas são iguais, portanto, $P^{-1}AP = D$.

□

Isso motiva as seguintes definições.



Definição 12.2.4

Sejam A e B duas matrizes de ordem $n \times n$. Dizemos que B é semelhante a A , se existe uma matriz invertível P tal que:

$$B = P^{-1}AP.$$

**Definição 12.2.5**

Dizemos que uma matriz A é diagonalizável, se ela é semelhante a uma matriz diagonal.

**Exemplo 12.2.6**

[De volta ao Exemplo 12.1.11] Vimos que, para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix},$$

temos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -3$ e os autoespaços associados são gerados pelos conjuntos $S_1 = \{\vec{e}_1\}$ e $S_2 = \{\vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, onde:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{N}(1) = \text{Nul}(A - I) = [S_1] \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(-3) = \text{Nul}(A + 3I) = [S_2].$$

Assim, obtemos a matriz P , que é dada por:

$$P = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Usando o processo de escalonamento, podemos calcular a matriz inversa P^{-1} de P :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e temos

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 8 & 16 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & -4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -3 & -3 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, temos:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

12.3 Considerações finais

12.3.1 Generalidades sobre os passos para a obtenção de autoespaços

Embora o método de diagonalização seja bastante transparente, pois basta seguir uma sequência de passos, ele é muito trabalhoso. Não devemos nos iludir com a aparente simplicidade das contas no Exemplo 12.2.6, pois as contas já haviam sido feitas anteriormente (além de que “escondemos” o cálculo da inversa P^{-1}). Na totalidade, os passos envolvem:

- Calcular o polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Aqui já entra uma quantidade significativa de cálculos, cuja quantidade aumenta de acordo com a dimensão do problema;
- Encontrar as raízes do polinômio característico. Este passo pode ser muito complicado, já que muitas vezes não é possível encontrar raízes explicitamente.
- Depois de conhecidos os autovalores, calcular cada um dos autoespaços associados, o que demanda a resolução de tantos sistemas lineares quantos forem os autovalores distintos da matriz.
- Caso todos os geradores de todos os autoespaços formem uma base para o espaço $\mathbb{R}^n$, a matriz A é diagonalizável e formamos a matriz P como indicado acima.
- Observe que, se estivermos apenas interessados em encontrar uma base de autovetores e uma matriz diagonal equivalente a A , então não há necessidade de se calcular P^{-1} , pois já sabemos que o método funciona e que $P^{-1}AP = D$. No entanto, uma descrição mais completa pode ser necessária nas principais aplicações, de modo que ainda seria preciso uma quantidade grande de cálculos para determinar a matriz P^{-1} .

Nem todas as matrizes são diagonalizáveis, como acima. Já vimos que isto é possível quando uma base de autovetores existe. No exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

não há dois autovetores linearmente independentes e, portanto, não é possível diagonalizar a matriz A .

12.3.2 Algumas propriedades gerais

Em geral, valem as seguintes propriedades: Seja A uma matriz de ordem $n \times n$. Então:

- Se A possui n autovalores reais distintos, então A possui uma base de autovetores e é diagonalizável, pois possui um autovetor associado a cada um

dos seus autovalores distintos. Isto é consequência de um resultado que diz que se temos k autovetores associados a k autovalores distintos, então este conjunto de k autovetores é um sistema $L.I.$

- No caso de A possuir autovalores reais com multiplicidade maior do que 1, A apenas será diagonalizável se cada autovalor de multiplicidade k tiver k autovetores linearmente independentes. Em outras palavras, só será possível formar uma base de autovetores de A quando

$$\dim N(\lambda) = \dim \text{Nul}(A - \lambda I) = \text{multiplicidade do autovalor } \lambda.$$

Na notação introduzida na seção anterior, isto é o mesmo que dizer que, se A for diagonalizável, então as multiplicidades algébrica e geométrica são iguais.

- Caso $\dim N(\lambda) = \dim \text{Nul}(A - \lambda I)$ seja menor do que a multiplicidade do autovalor λ ou A possua autovalores complexos, então A não é diagonalizável.

Exemplo 12.3.1

Seja a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Seu polinômio característico é dado por:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (2 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5,$$

cujas raízes são $\lambda_1 = \frac{4+3i}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{4-3i}{2}$. Logo, a matriz A não é diagonalizável em $\mathbb{R}$. Mas, a matriz A é diagonalizável em $\mathbb{C}$.

12.4 Exercícios Resolvidos

Exercício 12.4.1

Encontrar os autovalores das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Solução. Os autovalores de uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ são as raízes do polinômio característico: $P(z) = \det(M - zI_2)$, ou seja,

$$P(z) = \begin{vmatrix} a - z & b \\ c & d - z \end{vmatrix} = (a - z)(d - z) - bc = z^2 - (a + d)z + ad - bc.$$

1. **Autovalores da matriz A.** Para a matriz A o polinômio característico é dado por:

$$P(z) = \begin{vmatrix} 5-z & -6 \\ 3 & -4-z \end{vmatrix} = z^2 - z - 2.$$

Assim, os autovalores da matriz A são as raízes da equação de segundo grau $P(z) = z^2 - z - 2 = 0$. Como $\Delta = b^2 - 4ac = 9$, os autovalores da matriz A são:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 2 \text{ e } \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -1.$$

2. **Autovalores da matriz B.** Para a matriz B o polinômio característico é dado por:

$$P(z) = \begin{vmatrix} 3-z & 0 \\ -2 & -7-z \end{vmatrix} = (3-z)(7-z).$$

Assim, os autovalores da matriz A são as raízes da equação de segundo grau $P(z) = (3-z)(7-z) = 0$. Logo, os autovalores da matriz B são: $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 7$.

Exercício 12.4.2

Encontrar os autovalores das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solução. Os autovalores de uma matriz $M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ são as raízes do polinômio característico: $P(z) = \det(M - zI_2)$, ou seja,

$$P(z) = \begin{vmatrix} a_1 - z & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - z & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - z \end{vmatrix} = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma.$$

1. **Autovalores da matriz A.** Seja $P(z) = \det(A - zI)$ o polinômio característico da matriz A. Vamos calcular o determinante $\det(A - zI)$, utilizando a primeira coluna, assim temos:

$$P(z) = \begin{vmatrix} 5-z & -6 & 0 \\ 0 & 2-z & 0 \\ 0 & 2 & -z \end{vmatrix} = (5-z) \begin{vmatrix} 2-z & 0 \\ 2 & -z \end{vmatrix}.$$

Assim, os autovalores da matriz A são as raízes da equação de segundo grau $P(z) = (5-z)(2-z)(-z) = 0$.

Logo, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 0$.

2. **Autovalores da matriz B.** Seja $P(z) = \det(B - zI)$ o polinômio característico da matriz B. Vamos calcular o determinante $P(z) = \det(B - zI)$, utilizando a primeira coluna, assim

temos:

$$P(z) = \begin{vmatrix} 1-z & 0 & 0 \\ -2 & -3-z & 0 \\ -6 & 6 & 4-z \end{vmatrix} = (1-z) \begin{vmatrix} -3-z & 0 \\ 6 & 4-z \end{vmatrix}.$$

Assim, os autovalores da matriz A são as raízes da equação de segundo grau $P(z) = (1-z)(-3-z)(4-z) = 0$. Logo, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 4$.

Exercício 12.4.3

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Verificar que $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores da matriz A .
2. Podemos dizer que $\lambda_1 + \lambda_2$ é também um autovalor da matriz A ?
3. De maneira geral, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz A , podemos afirmar que a soma $\lambda_1 + \lambda_2$ também é um autovalor da matriz A ?

Solução. 1. O polinômio característico da matriz A é dado por:

$$P(z) = \begin{vmatrix} 3-z & 0 \\ -5 & 2-z \end{vmatrix} = (3-z)(2-z).$$

Assim, os autovalores da matriz A são as raízes da equação de segundo grau $P(z) = z(3-z)(2-z) = 0$. Logo, os autovalores da matriz A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.

2. Como $\lambda_1 + \lambda_2 = 2 + 3 = 5$, então $\lambda_1 + \lambda_2$ não é um autovalor da matriz A .
3. Pelo exemplo anterior temos que λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz A , mas a soma $\lambda_1 + \lambda_2$ não é um autovalor da matriz A .

Exercício 12.4.4

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Verificar que os vetores $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ são os autovetores da matriz A .
2. Podemos dizer que $u + v$ é também um autovetor da matriz A ?
3. De maneira geral, se u e v são autovetores de uma matriz A , podemos afirmar que a soma $u + v$ também é um autovetor da matriz A ?

Solução. 1. Para os vetores $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$, temos:

$$Au = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Logo, os vetores $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ são os autovetores da matriz A .

2. Com isso, o vetor $u + v = (1, 1)$, de modo que:

$$A(u + v) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, o vetor $u + v = (1, 1)$ não é um autovetor da matriz A .

3. Pelo exemplo anterior, temos que $u = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$ são os autovetores de uma matriz A , mas a soma $u + v$ não é um autovetor da matriz A .



Exercício 12.4.5

Calcule os autovalores e autovetores das matrizes abaixo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução. Os autovalores de uma matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ são as raízes do polinômio característico: $P(z) = \det(M - zI_2) = z^2 - (a + d)z + ad - bc$.

1. **Autovalores da matriz A .** Para a matriz A o polinômio característico é dado por:

$$P(z) = \begin{vmatrix} 4 - z & -2 \\ 1 & 1 - z \end{vmatrix} = z^2 - 5z + 6.$$

Assim, os autovalores da matriz A são as raízes da equação de segundo grau $P(z) = z^2 - 5z + 6 = 0$. Como $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 6 = 1$, os autovalores da matriz A são:

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3 \text{ e } \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 2.$$

Autovetores da matriz A para $\lambda_1 = 3$. Seja $u = (x, y)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$, então temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 3x \\ x + y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

Logo, obtemos $x = 2y$. Assim, os autovetores $u = (x, y)$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são dados por:

$$u = (x, y) = (2y, y) \text{ ou seja } u = k(2, 1), \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

Autovetores da matriz A para $\lambda_2 = 2$. Seja $v = (x, y)$ o autovetor associado ao

autovalor $\lambda_2 = 2$, então temos:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x = y. \end{cases}$$

Logo, obtemos $x = y$. Assim, os autovetores $v = (x, y)$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são dados por:

$$v = (x, y) = (y, y), \text{ ou seja, } v = k(1, 1), \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$

2. Para a matriz B , podemos aplicar os mesmos passos do processo anterior aplicado à matriz A . Assim, temos:

a) **O polinômio da matriz B .** O polinômio característico da matriz B é dado por:

$$P(z) = \begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 0 & 1-z \end{vmatrix} = (z-1)^2.$$

b) **Os autovalores da matriz B .** Os autovalores da matriz B são as soluções da equação de segundo grau $P(z) = (z-1)^2 = 0$. Logo, temos um autovalor: $\lambda = 1$ de multiplicidade 2.

c) **Autovetores da matriz A para $\lambda = 1$.** Seja $u = (x, y)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$, então temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Logo, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y = x \\ y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ y = y \end{cases}$$

Logo, obtemos $y = 0$. Assim, os autovetor $u = (x, y)$ associado ao autovalor $\lambda = 1$ são dados por:

$$u = (x, y) = (x, 0) \text{ ou seja } u = k(1, 0), \text{ para todo } k \in \mathbb{R}.$$



Exercício 12.4.6

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ e λ um autovalor da matriz A . Seja u um autovetor não nulo associado a λ . Provar que o vetor u é um autovetor da matriz $B = A - \alpha I_d$, onde I_d é a matriz identidade e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solução. Como u é um autovetor não nulo associado a λ temos $Au = \lambda.u$. Assim, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

$$Bu = (A - \alpha I_d)u = Au - \alpha I_d(u) = \lambda.u - \alpha.u = (\lambda - \alpha).u.$$

Logo, o vetor u é um autovetor da matriz $B = A - \alpha I_d$ associado ao autovalor $\lambda - \alpha$.

Exercício 12.4.7

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Sejam os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$. Verificar que $\mathcal{S} = \{u, v, w\}$ é uma base de autovetores da matriz A .
2. Deduzir os autovalores da matriz A .
3. Justificar que em relação a base $\mathcal{S} = \{u, v, w\}$ a matriz A assume a seguinte forma:

$$A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução. 1. Para os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$, temos:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$ são autovetores da matriz A . Assim, $\mathcal{S} = \{u, v, w\}$ é uma base de autovetores da matriz A .

2. Como $Au = u$, $Av = 2v$ e $Aw = 3w$, podemos deduzir que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$ são autovalores da matriz A .

3. Como $Au = u$, $Av = 2v$ e $Aw = 3w$, então temos:

$$A_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 12.4.8

Seja a matriz $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Provar que $B = A - 3I_{3 \times 3}$, onde A é a matriz estudada no Exercício [12.4.7](#), isto

$$\text{é, } A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Usando o Exercício 12.4.6, quais são os autovalores e os autovetores da matriz B ?

Solução. 1. Com um cálculo direto, temos:

$$A - 3I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2-3 & 2 & 3 \\ -2 & 3-3 & 2 \\ -4 & 2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, obtemos $B = A - 3I_{3 \times 3}$.

2. Sabemos que os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$ são autovetores da matriz A , associados aos autovalores 1, 2 e 3 respectivamente. Como $B = A - I_{3 \times 3}$, então usando o mesmo raciocínio do Exercício 12.4.6, temos:

$$Bu = (A - 3I_{3 \times 3})u = Au - 3u = 1 \cdot u - 3u = -2u,$$

$$Bv = (A - 3I_{3 \times 3})v = Av - 3v = 2 \cdot v - 3v = -v$$

e

$$Bw = (A - 3I_{3 \times 3})w = Aw - 3w = 3 \cdot w - 3w = 0.$$

Logo, os vetores $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 0)$ e $(1, 1, 1)$ são autovetores da matriz $B = A - I_{3 \times 3}$ associados aos autovalores -2, -1 e 0 respectivamente.

Podemos deduzir também que $S = \{u, v, w\}$ é uma base de autovetores da matriz B .



Exercício 12.4.9

Seja A uma matriz invertível.

1. Seja λ um autovalor de A . Mostre que $\lambda \neq 0$ e que $\gamma = \lambda^{-1}$ é autovalor da matriz inversa A^{-1} .
2. Mostre que todo autovalor de A^{-1} tem a forma $\gamma = \lambda^{-1}$ onde λ é algum autovalor de A .

Solução. 1. Seja λ um autovalor de A , então existe um autovetor não nulo u , tal que, $Au = \lambda u$. Como A é invertível temos:

$$A^{-1}(Au) = A^{-1}(\lambda u) \Leftrightarrow (A^{-1}A)u = \lambda A^{-1}(u) \Leftrightarrow u = \lambda A^{-1}(u).$$

Como u é não nulo temos $\lambda \neq 0$. Por outro lado, como $\lambda \neq 0$ temos:

$$u = \lambda A^{-1}(u) \Leftrightarrow A^{-1}(u) = \lambda^{-1}u,$$

ou seja, λ^{-1} é um autovalor da matriz A^{-1} .

2. Seja γ um autovalor da matriz A^{-1} , então existe um autovetor não nulo v , tal que, $A^{-1}v = \gamma v$, logo, temos:

$$A^{-1}v = \gamma v \Leftrightarrow A(A^{-1}v) = A(\gamma v) \Leftrightarrow (A.A^{-1})v = \gamma A(v)$$

ou seja,

$$\gamma A(v) = v \Leftrightarrow A(v) = \gamma^{-1}v.$$

Logo, obtemos que γ é um autovalor de A^{-1} se, e somente se, $\lambda = \gamma^{-1}$ é um autovalor de A , ou seja, $\gamma = \lambda^{-1}$.

Exercício 12.4.10

Encontre a matriz A da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 , associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$, respectivamente.

Solução. Sabemos que a matriz A da transformação T é de ordem 2×2 . Assim, de maneira geral, se $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um autovetor associado ao autovalor λ , temos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Logo, temos:

$$\begin{cases} ax + by = \lambda.x \\ cx + by = \lambda.y \end{cases} \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} (a - \lambda)x + by = 0 \\ cx + (d - \lambda)y = 0. \end{cases}$$

O objetivo é: Encontrar os coeficientes a , b , c e d .

Para o autovalor $\lambda = -2$ o autovetor associado é $(3y, y)$, assim $x = 3y$. Logo, temos:

$$\begin{cases} (a + 2)x + by = 0 \\ cx + (d + 2)y = 0 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} 3(a + 2)y + by = 0 \\ 3cy + (d + 2)y = 0. \end{cases}$$

Assim, como y é qualquer, deduzimos que os coeficientes a , b , c e d verificam o sistema linear:

$$(S_1) \quad \begin{cases} 3a + b = -6 \\ 3c + d = -2. \end{cases}$$

Para o autovalor $\lambda = 3$ o autovetor associado é $(-2y, y)$, assim $x = -2y$. Logo, temos:

$$\begin{cases} (a - 3)x + by = 0 \\ cx + (b - 3)y = 0 \end{cases} \quad \text{ou seja} \quad \begin{cases} -2(a - 3)y + by = 0 \\ -2cy + (d - 3)y = 0 \end{cases}$$

Assim, como y é qualquer, deduzimos que os coeficientes a , b , c e d verificam o sistema

linear:

$$(S_2) \begin{cases} -2a + b = -6 \\ -2c + d = 3. \end{cases}$$

Dos sistemas (S_1) e (S_2) deduzimos: $a = 0$, $b = -6$, $c = -1$ e $d = 1$.

Conclusão: A matriz A da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12.5 Exercícios para Praticar

Exercício 12.5.1

Se $I_{n \times n}$ a matriz identidade de ordem $n \times n$.

1. Mostrar que $\lambda = 1$ é o único autovalor da matriz $I_{n \times n}$.
2. Quais são os vetores não nulos $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$, que são autovetores da matriz $I_{n \times n}$?

Exercício 12.5.2

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz que pertence a $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tal que $a + b = c + d$.
Verificar que $a + b$ e $a - c$ são autovalores de A .

Exercício 12.5.3

Seja A uma matriz $n \times n$ tal que $A^2 = A$. Encontre um autovalor da matriz A .

Exercício 12.5.4

Para as seguintes matrizes A e B , encontre o polinômio característico, autovalores e autovetores e, se possível, encontre uma matriz invertível S tal que $S^{-1}AS$ é diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & -16 \\ 2 & 5 & -8 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANTON, H.; RORRES C. *Álgebra Linear e Aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [2] BOLDRINI, J. L. *et al. Álgebra Linear*. São Paulo: Harbra, 1984.
- [3] CALLIOLI, C.; DOMINGUES, H.; COSTA, R. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Atual, 1989.
- [4] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.
- [5] LIMA, E. L. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA/SBEM, 2001.

Este livro nasce da prática em sala de aula e da necessidade real de apoiar estudantes que ingressam no ensino superior e se deparam com a disciplina de Álgebra Linear. Construído a partir de anos de experiências, estudos teóricos e diálogos com alunos e professores, o texto oferece uma base sólida sobre números reais e complexos e suas estruturas algébricas, preparando o leitor para compreender, com profundidade e rigor, conceitos fundamentais como matrizes, espaços vetoriais, transformações lineares e diagonalização.

Com uma abordagem didática e acessível, Elementos Básicos de Álgebra Linear foi pensado para auxiliar estudantes de Matemática, Física, Engenharias e áreas afins, fornecendo os conhecimentos essenciais para a continuidade de seus estudos. Resultado de uma trajetória colaborativa, este livro convida o leitor a explorar, questionar e construir entendimentos que servirão de alicerce para toda a formação universitária.

Que este material seja um guia confiável e um ponto de partida seguro na sua jornada pela Álgebra Linear.

ISBN 978-85-7613-836-5



9 788576 138365

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 0\} = \{(x, y, 0), \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$